

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська юридична академія»

Кафедра кібербезпеки

Математичний аналіз

Похідні, диференціали

та їх застосування

Методичні вказівки до практичних занять

для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»

Одеса 2020

Автор:

Бакуніна О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія»

**Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична академія»,
протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.**

Рецензенти:

Задерейко О.В. – кандидат технічних наук, доцент кафедри Інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія»

Глушков А.В. – академік, доктор фізико-математичних наук, професор, зав.кафедри вищої та прикладної математики Одеського Державного Екологічного університету.

Методичні вказівки містять теоретичні відомості про похідну, її фізичний та геометричний зміст, застосування похідної у дослідженні функцій та побудові графіків, диференціали та їх застосування у наближених обчисленнях. Кожна тема містить достатню кількість прикладів, рисунків, які супроводжують розглянуті поняття, позначення, означення, правила, алгоритми досліджень.

Призначено для студентів з метою закріплення лекційного матеріалу і підготовки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Математичний аналіз».

Бакуніна О. В. Математичний аналіз: похідні, диференціали та їх застосування : метод. вказівки для практ. занять / Бакуніна О. В., – Одеса, 2020. – 57 с.

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Математичний аналіз» вивчається студентами академії за напрямом бакалаврської підготовки з галузі знань 12 «Інформаційні технології» за спеціальністю 125 «Кібербезпека» на першому курсі навчання.

Методичні вказівки за темою «Похідні, диференціали та їх застосування» допоможуть студентам закріпити практичні навички по знаходженню похідних та диференціалів і застосовувати їх при розв'язуванні задач.

Методичні вказівки містять теми для вивчення та закріплення. Кожна тема містить теоретичний матеріал, приклади виконання завдань з поясненнями, контрольні завдання.

Метою викладання навчальної дисципліни «Математичний аналіз » є формування уміння та навички знаходження похідних та диференціалів, навчитися розв'язувати задачі з застосуванням похідної і застосовувати їх при розв'язуванні задач. Методичні вказівки містять теми для вивчення та закріплення. Кожна тема містить теоретичний матеріал, приклади виконання завдань з поясненнями, контрольні завдання.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є

Оволодіння курсом «Математичний аналіз» передбачає читання лекцій, проведення практичних занять, виконання самостійної роботи та складання заліку та іспиту. Особлива увага приділяється прищепленню студентам практичних навичок із застосування методів математичного аналізу у майбутній професійній діяльності. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми після вчення дисципліни «Математичний аналіз», розділ похідні, диференціали та їх застосування, студенти повинні:

використовувати практичні навички по знаходженню похідних та диференціалів.

володіти основними методами диференціювання.

застосовувати знання знаходження похідних та диференціалів при розв'язуванні прикладних задач.

Зміст

Передмова	3
1. Поняття похідної функції.....	6
1.1 Задачі, які приводять до поняття похідної.....	6
1.2 Означення похідної функції	7
1.3 Таблиця похідних	8
1.4 Правила диференціювання	8
1.5 Знаходження похідних елементарних функцій.....	9
Завдання для контролю	12
2. Похідна функції у точці.....	16
Завдання для контролю	16
3. Диференціал функції.....	18
Завдання для контролю	19
4. Застосування диференціалу у наближених обчисленнях	20
4.1 Наближені обчислення значень функцій	20
4.2 Формули для наближених числових значень	20
Завдання для контролю	21
5. Похідні та диференціали вищих порядків.....	23
5.1 Похідні вищих порядків.....	23
5.2 Диференціали вищих порядків	24
Завдання для контролю	25
6. Фізичний зміст похідної	26
6.1 Задачі про механічний зміст першої та другої похідної	27
6.2 Задачі про фізичний зміст похідної.....	27
Завдання для контролю	28
7. Геометричний зміст похідної	31
7.1 Дотична до кривої	31
7.2 Геометричний зміст похідної	31
7.3 Рівняння дотичної.....	32
7.4 Нормаль до кривої. Рівняння нормалі	32
Завдання для контролю	33
8. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.....	34
Завдання для контролю	35
9. Критичні точки функції. Знаходження критичних точок	37
10. Монотонність функції. Дослідження функції на монотонність	38
10.1 Монотонність	38
10.2 Дослідження функції на монотонність.....	38
11. Екстремуми функції. Дослідження функції на екстремум.....	40
11.1 Екстремуми	40

11.2 Дослідження функції на екстремум.....	41
12. Опуклість. Дослідження функції на опуклість.....	43
12.1 Опуклість функції. Напрями опуклості	43
12.2 Дослідження функції на опуклість	43
13. Точки перегину кривої. Дослідження функції на точки перегину.....	45
13.1 Точки перегину	45
13.2 Дослідження функції на точки перегину	45
14. Дослідження функції та побудова графіків.....	46
14.1 Загальна схема дослідження.....	46
14.2 Твердження, якими можна користуватися при дослідженні	47
14.3 Дослідження функцій та побудова графіків.....	47
Завдання для контролю.....	54
Рекомендована література.....	56

Тема 1. Поняття похідної функції

1.1 Задачі, які приводять до поняття похідної.

Задача 1. Швидкість руху.

Нехай вздовж деякої прямої рухається точка за законом $s = s(t)$, де
 s - шлях, який пройшла точка,
 t - час.

Потрібно знайти швидкість точки у момент часу t_0 .

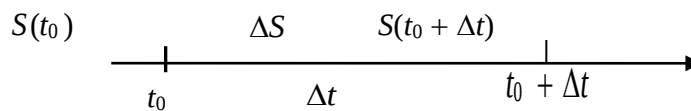


Рис.1

У момент часу t_0 шлях, який пройшла точка дорівнює $s_0 = s(t_0)$.

У момент часу $(t_0 + \Delta t)$ шлях дорівнює $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$. Тоді за проміжок

часу Δt середня швидкість дорівнює $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то середня

швидкість краще характеризує рух точки у момент часу t_0 . Тому швидкість точки у момент часу t_0 - це границя середньої швидкості за проміжок часу від t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, коли $\Delta t \rightarrow 0$, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача 2. Продуктивність праці.

Нехай кількість виробленої продукції характеризується рівністю $Q = Q(t)$ за час t . Потрібно знайти продуктивність q праці у момент часу t_0 .

У момент часу t_0 кількість виробленої продукції дорівнює $Q_0 = Q(t_0)$.

У момент часу $(t_0 + \Delta t)$ кількість виробленої продукції дорівнює

$Q_0 + \Delta Q = Q(t_0 + \Delta t)$. Тоді за проміжок часу Δt середня продуктивність праці

визначається формулою $q_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то середня продуктивність праці краще

характеризує продуктивність праці у момент часу t_0 - це границя середньої продуктивності праці за період часу від t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, коли $\Delta t \rightarrow 0$, тобто

$$q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} q_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Якщо у розглянутих задачах відволіктися від конкретних величин, то розв'язування кожної з них веде до знаходження границі відношення приросту функції до приросту незалежної змінної, коли останній прямує до нуля.

Із фізичної точки зору:

похідна – це швидкість зміни величини

1.2 Означення похідної функції.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена на деякому проміжку та її графік

На графіку функції зафіксуємо точку $M_0(x_0; y_0)$ та візьмемо точку $M(x; y)$.

Аргумент x_0 отримало приріст Δx , тобто $x_0 + \Delta x = x$. Значення функції – приріст y_0 , тобто $y_0 + \Delta y = y$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

яке показує, в скільки разів на проміжку $[x_0; x]$ приріст

функції Δy більше ніж приріст аргументу Δx , тобто визначає середню швидкість зміни значення функції y відносно зміни аргументу x .

При $M \rightarrow M_0$ $x \rightarrow x_0$ і $\Delta x \rightarrow 0$. Тому

вираз $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ також прямує до деякої

величини, яка визначається виразом $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

та показує швидкість зміни функції у точці x_0 .

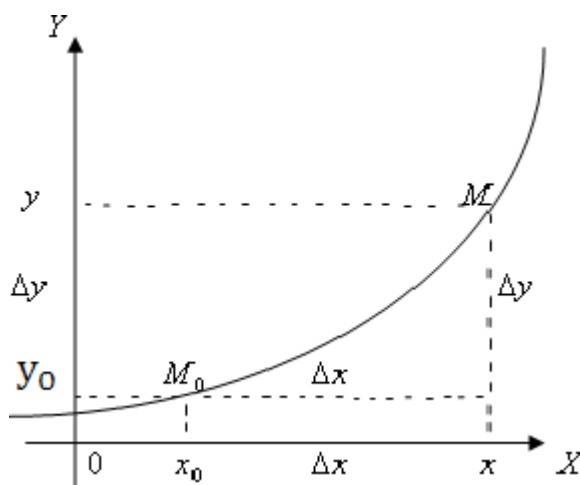


Рис.2

Якщо $y = f(x)$, $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta y = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Якщо існує ця границя, то її називають похідної функції у точці x_0 і позначають $y'|$, $f'(x)$, $y'|_x$, $\frac{dy}{dx}$.

Означення 1. Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається похідної функції у точці

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Означення 2. Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Означення. Функція, яка має похідну у точці, називається диференційованою у цій точці.

За допомогою означення похідної можна знайти похідні елементарних функцій.

Наприклад. За допомогою означення похідної знайдемо похідну функції $y = x^3$ у точці x .

$$y' = (x^3)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Таким чином, $(x^3)' = 3x^2$.

За допомогою означення похідної виведена таблиця похідних елементарних функцій та правила диференціювання.

1.3 Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1. Похідна сталої

$$(C)' = 0$$

2. Похідна степеневих функцій

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2.1 \quad (x)' = 1$$

$$2.3 \quad (kx + b)' = k$$

$$2.4 \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$2.5 \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2.2 \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

3. Похідна тригонометричних функцій

$$3.1 \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$3.2 \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$3.3 \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$3.4 \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

4. Похідна обернених тригонометричних функцій

$$4.1 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4.2 \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4.3 \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4.4 \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. Похідна показникової функції

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$5.1 \quad (e^x)' = e^x$$

6. Похідна логарифмічної функції

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6.1 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$6.2 \quad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

1.4 Правила диференціювання

Нехай $u_n(x), v(x)$ - функції, k – множник, тоді справедливо правила знаходження похідних (ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ):

1. Похідна алгебраїчної суми n функцій

$$(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'$$

2. Похідна добутку n функцій

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 u_2' \cdot \dots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n'$$

$$2.1 \quad (u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$2.2 \quad (ku)' = k \cdot u'$$

3. Похідна частки двох функцій

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v \neq 0$$

4. Похідна складної функції

Нехай $y = f(g(x))$ або $y = f(u)$ - складна функція, де $u = g(x)$, тоді $y' = f_u' \cdot u_x'$

5. Похідна функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = \psi(t), & t_0 \leq t \leq T, \text{ тоді } y' = \frac{y'_t}{x'_t} \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

6. Похідна складної показникової функції (показниково-степеневій)

$y = [u(x)]^{v(x)}$ або $y = u^v$ - складна показникова функція, тоді

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$$

або $y = e^{\ln \sin x^x} = e^{x \ln \sin x}$, тоді

$$\begin{aligned} y' &= e^{x \ln \sin x} \cdot (x \ln \sin x)' = (\sin x)^x \cdot ((x)' \ln \sin x + (\ln \sin x)' \cdot x) = \\ &= (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot x) = (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x) = (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x) \end{aligned}$$

1.5 Знаходження похідних елементарних функцій.

Розглянемо приклади (1-4) знаходження похідних елементарних функцій з використанням таблиці похідних та правил диференціювання.

Приклад 1. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \cos x + \ln x$.

Користуючись правилом диференціювання 1 та таблицею похідних, знайдемо похідну даної функції

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \cos x + \ln x\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (\cos x)' + (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \sin x + \frac{1}{x}$$

Приклад 2. $y = \frac{4}{\sin^2 x}$

Користуючись правилом диференціювання 2.2 та таблицею похідних, знайдемо похідну даної функції

$$y' = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = 4 \cdot (-\operatorname{ctg} x) = -4\operatorname{ctg} x$$

Приклад 3. $y = (x^2 + 4x)(x - 3)$

Користуючись правилом диференціювання 2.1 та таблицею похідних, знайдемо похідну даної функції

$$y' = ((x^2 + 4x)(x - 3))' = (x^2 + 4x)'(x - 3) + (x - 3)'(x^2 + 4x) = (2x + 4)(x - 3) + 1 \cdot (x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x + 4x - 12 + x^2 + 4x = 3x^2 + 2x - 12$$

Приклад 4. $y = \frac{x^3 + 2x - 4}{4x + 1}$

Користуючись правилом диференціювання 3 та таблицею похідних, знайдемо похідну даної функції

$$y' = \frac{(x^3 + 2x - 4)'(4x + 1) - (4x + 1)'(x^3 + 2x - 4)}{(4x + 1)^2} = \frac{(3x^2 + 2)(4x + 1) - 4(x^3 + 2x - 4)}{(4x + 1)^2} = \frac{12x^3 + 3x^2 + 8x + 2 - 4x^3 - 8x + 16}{(4x + 1)^2} = \frac{8x^3 + 3x^2 + 18}{(4x + 1)^2}.$$

Наведемо приклади (5-17) знаходження похідних складних функцій.

Приклад 5. $y = \cos^2(x^3 + 2x)$

$$y' = 2 \cos(x^3 + 2x) \cdot (-\sin(x^3 + 2x)) \cdot (3x^2 + 2) = -(3x^2 + 2) \cdot \sin 2(x^3 + 2x) = -(3x^2 + 2) \sin(2x^3 + 4x)$$

При перетворенні виразу використана формула тригонометричної функції подвійного аргументу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Приклад 6. $y = (4x - 3)^5$

$$y' = 5(4x - 3)^4 (4x - 3)' = 5(4x - 3)^4 \cdot 4 = 20(4x - 3)^4.$$

Приклад 7. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \cdot (2x + 4) = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \frac{2(x + 2)}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

Приклад 8. $y = \ln^3 \cos x^2$

$$y' = 3 \ln^2 \cos x^2 \cdot \frac{1}{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = - \frac{6x \ln^2 \cos x^2 \cdot \sin x^2}{\cos x^2} = -6x \ln^2 \cos x^2 \cdot \operatorname{tg} x^2$$

Приклад 9. $y = e^{\sin(5x-6)}$

$$y' = e^{\sin(5x-6)} \cdot \cos(5x - 6) \cdot 5 = 5e^{\sin(5x-6)} \cos(5x - 6).$$

Приклад 10. $y = 3^{\sqrt{x-1}}$

$$y' = 3^{\sqrt{x-1}} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 2 = \frac{3^{\sqrt{x-1}} \ln 3}{\sqrt{x-1}}.$$

Приклад 11. $y = \arctg \frac{2\sqrt{2x-1}}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{(2x)'(1-x^2) - (1-x^2)'(2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^2}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{4x^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} \cdot \frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(x^2+1)}{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2} = \\
 &= \frac{2(x^2+1)}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{2(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Приклад 12. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
 \end{aligned}$$

Приклад 13. $y = \arccos \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1+x^2)'(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1+x^2}{2x} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) \cdot (-4x)}{-2x(1+x^2)^2} = -\frac{2}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Приклад 14. $y = \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{3'(\sqrt{x^3+x+1} - (\sqrt{x^3+x+1})') \cdot 3}{(\sqrt{x^3+x+1})^2} = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x^3+x+1}} \cdot (x^3+x+1)' \cdot 3}{x^3+x+1} = -\frac{\frac{3(3x^2+1)}{2\sqrt{x^3+x+1}}}{x^3+x+1} = \\
 &= -\frac{9x^2+3}{2(x^3+x+1)\sqrt{x^3+x+1}} = -\frac{9x^2+3}{2\sqrt{(x^3+x+1)^3}}.
 \end{aligned}$$

Приклад 15. $y = \sqrt{2x-x^2} - \arcsin(1-x^2)$

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sqrt{2x-x^2})' - (\arcsin(1-x^2))' = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2x-x^2)' - \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} \cdot (1-x^2)' = \\
 &= \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-1+2x^2-x^4}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \\
 &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}.
 \end{aligned}$$

Приклад 16. $y = \operatorname{tg}(\ln x) - \operatorname{ctg}^2 x$

$$y' = (\operatorname{tg}(\ln x))' - (\operatorname{ctg}^2 x)' = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot (\ln x)' - 2\operatorname{ctg} x \cdot (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{x \cos^2 \ln x} + \frac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}.$$

Приклад 17. $y = \sin 8x \cdot \ln \frac{x}{8}$

$$y' = (\sin 8x)' \left(\ln \frac{x}{8} \right) + (\ln \frac{x}{8})' (\sin 8x) = \cos 8x \cdot (8x)' \cdot \ln \frac{x}{8} + \frac{1}{\frac{x}{8}} \cdot \left(\ln \frac{x}{8} \right)' \cdot \sin 8x = 8 \cos 8x \cdot \ln \frac{x}{8} + 8 \cdot \frac{1}{x} \sin 8x =$$

$$= 8 \cos 8x \cdot \ln \frac{x}{8} + \sin 8x.$$

Наведемо приклади (18-20) диференціювання функцій, що задано параметрично, користуючись правилом диференціювання 5.

Приклад 18. $\begin{cases} x = t^3 + 4t, \\ y = t^5 + 3t^2 + 1 \end{cases}$

$$y' = 5t^4 + 6t, \quad x' = 3t^2 + 4, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5t^4 + 6t}{3t^2 + 4}.$$

Приклад 19. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$

$$y' = -\cos t, \quad x' = -3 \sin t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\cos t}{-3 \sin t} = \frac{1}{3} \operatorname{ctgt}.$$

Приклад 20. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$y'_t = a \cos t, \quad x'_t = -a \sin t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctgt}.$$

Наведемо приклади (21-22) диференціювання складних показникових функцій (показниково - степеневих).

Приклад 21. $y = x^x$

Якщо $y = u^v$ - показникова - степенева функція, то $u = x$, $v = x$, тоді за правилом диференціювання 6 знайдемо похідну даної показниково - степенєвої функції

$$y' = x x^{x-1} x' + x^x x' \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x).$$

Або $y = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, тоді

$$y' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = (x)^x \cdot ((x)' \ln x + (\ln x)' \cdot x) =$$

$$= x^x \cdot (\ln x + \frac{1}{x} \cdot x) = x^x \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln \sin x + 1)$$

Приклад 22. $y = (\sin x)^x$

Якщо $u = \sin x$, $v = x$, тоді знайдемо похідну даної показниково - степенєвої функції

$$y' = x(\sin x)^{x-1} \cdot (\sin x)' + (\sin x)^x \cdot x' \cdot \ln \sin x = x(\sin x)^{x-1} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + (\sin x)^x \cdot \ln \sin x =$$

$$= x(\sin x)^x \cdot \operatorname{ctgx} + (\sin x)^x \ln \sin x.$$

Або $y = e^{\ln \sin x^x} = e^{x \ln \sin x}$, тоді

$$y' = e^{x \ln \sin x} \cdot (x \ln \sin x)' = (\sin x)^x \cdot ((x)' \ln \sin x + (\ln \sin x)' \cdot x) =$$

$$= (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot x) = (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + x \operatorname{ctgx})$$

Завдання для контролю

Знайти похідні функцій:

1. а) $y = (3x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$,

б) $y = \frac{4x + 7\operatorname{tg}x}{\sqrt{1 + 9x^2}}$,

в) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$,

г) $\begin{cases} y = \ln \operatorname{arctg} 2x, \\ x = t^3 + 4t^2 - 5, \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = 3t^2 - 1 \end{cases}$

2. а) $y = (3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$,

б) $y = \frac{\arcsin 3x + 7\operatorname{tg}x}{1 - 8x^2}$,

в) $y = 2^{3x} \cdot \operatorname{tg} 2x$,

г) $y = \cos \ln 5x$,

д) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 3 \cos t \end{cases}$

3. а) $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 5\sqrt{x} \right)^4 \cdot \operatorname{arctg} x$,

б) $y = \frac{1}{1 + 3x^2}$,

в) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 2x$,

г) $y = \cos \sqrt{x^2 + 3}$,

д) $\begin{cases} x = 5 \sin t, \\ y = 2 \cos t \end{cases}$

4. а) $y = (4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4)^3$,

б) $y = \frac{\sin 2x}{\cos 5x}$,

в) $y = \operatorname{ctg} e^x \cdot \sin 4x$,

г) $y = \arcsin \ln 4x$,

д) $\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = t - \ln t \end{cases}$

5. а) $y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$,

б) $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{4 + 3x^2}}$,

в) $y = 2^{8x} \cdot \operatorname{tg} 3x$,

г) $y = \ln \sin 6x$,

16. а) $y = \left(2x^4 + \frac{2}{x^3} - 7 \right)^4$,

б) $y = \frac{\sqrt{1 - 7x^2}}{\cos 4x}$,

в) $5^{6x} \cdot \arcsin 5x$,

г) $\begin{cases} y = \ln \sin \sqrt{x}, \\ x = 1 + t^2, \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = t + 2t^3 + 1 \end{cases}$

17. а) $y = (3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5)^5$,

б) $y = \frac{2x^2 - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{6x^2 + 5}}$,

в) $y = e^{\arcsin x} \cdot \cos 4x$,

г) $y = \operatorname{arctg} \ln \sqrt{x}$,

д) $\begin{cases} x = 3t - t^2, \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$

18. а) $y = \left(x^6 + \frac{3}{x^4} - 8 \right)^2$,

б) $y = \frac{\cos x - 4x^2}{\sqrt{8 + 7x^5}}$,

в) $y = 4^{\operatorname{arctg} x} \cdot \cos 6x$,

г) $y = \sin^2 \ln 4x$,

д) $\begin{cases} x = \ln t + 4t, \\ y = 2t \end{cases}$

19. а) $y = (4x^5 - 3\sqrt{x^2} - 7)^3$,

б) $y = \frac{\cos x - 4x^3}{\sqrt{8 + 7x^5}}$,

в) $y = e^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg} 3x$,

г) $y = \sin \ln 7x$,

д) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2 + 3t + 1 \end{cases}$

20. а) $y = (3x^2 - \frac{5}{x^3} + 5)^4$,

б) $y = \frac{\sqrt{7x^5 - 2}}{\sin 7x}$,

в) $y = 2^{\operatorname{arctg} x} \cdot \arcsin 2x$,

г) $y = \ln \cos 6x$,

д) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 2t \end{cases}$

6. а) $y = \left(6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5 \right)^2$,

б) $y = \frac{\arctg 2x}{2 - 9x^2}$,

в) $y = 3^{tgx} \cdot \arcsin(x^2)$,

г) $y = \sin \ln 6x$,

д) $\begin{cases} x = a(1 - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

7. а) $y = (x^3 - 4\sqrt{x^3} + 2)^3$,

б) $y = \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{tgx + 2^x}$,

в) $y = e^{x^2} \cdot tg 5x$,

г) $\begin{cases} y = \arcsin \ln 2x, \\ x = 3ctgt, \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = 5t^2 \end{cases}$

8. а) $y = \frac{(x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4)^4}{x^3 + e^x}$,

б) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}}$,

в) $x = 4^{\cos x} \cdot \arctg 2x$,

г) $\begin{cases} y = \ln \cos 5x, \\ x = \arccos t, \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = 3t \end{cases}$

9. а) $y = \left(3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2 \right)^5$,

б) $y = \frac{\cos 6x}{\sin 3x}$,

в) $y = e^{x^3} \cdot tg 7x$,

г) $y = \arcsin \ln 2x$,

д) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 \cos t \end{cases}$

10. а) $y = (x^4 - 2\sqrt{x} + 1)^2$,

д) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = ctgt \end{cases}$

21. а) $y = 2x^2 - 4\sqrt[3]{x^2} - 3$,

б) $y = e^{tg 2x} \cdot \sin 4x$,

в) $y = \frac{\arctg 2x}{x^2 + 2^x}$,

г) $y = e^{x - \arcsin 2x}$,

д) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \ln t \end{cases}$

22. а) $y = \left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x} \right)^3$,

б) $y = \frac{1 + tgx}{1 - tgx}$,

в) $y = x \cdot \arccos \frac{x}{2}$,

г) $y = e^{\sqrt[4]{\ln x}}$,

д) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3 \end{cases}$

23. а) $y = (\sqrt{x} + 4x^3 - 1)^4$,

б) $y = \frac{\arctg 2x}{3 - x}$,

в) $y = e^{-x^2} \cdot \ln x$,

г) $y = \sqrt{1 + \cos^3 2x}$,

д) $\begin{cases} x = e^t + 3t, \\ y = 4t^2 - 2t + 3 \end{cases}$

24. а) $y = \left(2\sqrt[3]{x} + 5x^4 - 3 \right)^2$,

б) $y = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{1 + x^3}$,

в) $y = \arctg x \cdot (2x^2 - 1)$,

г) $y = e^{-\cos^4 5x}$,

д) $\begin{cases} x = 2 - \sin t, \\ y = 4 + \cos t \end{cases}$

25. а) $y = \left(\frac{2}{x^3} + 5x^2 \right)^6$,

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad y &= \frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x - \operatorname{ctg} x}, \\ \text{в)} \quad y &= 2^{\sin x} \cdot \arcsin 2x, \\ \text{г)} \quad y &= \ln \cos 7x, \\ \text{д)} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = t^2 - 5t + 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$11. \text{ а)} \quad y = \left(3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7 \right)^3, \\ x^4 + \operatorname{tg} x$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{1}{\sqrt{7+4x^2}},$$

$$\text{в)} \quad y = e^{\arcsin x} \cdot \operatorname{ctg} 3x,$$

$$\text{г)} \quad y = \operatorname{arctg} \ln 8x,$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin t - \cos t \end{cases}$$

$$12. \text{ а)} \quad y = (2x^4 - 3\sqrt[3]{x} - 1)^4,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\cos 2x},$$

$$\text{в)} \quad y = 5^{\operatorname{arctg} x} \cdot \sin 4x,$$

$$\text{г)} \quad y = \ln \arcsin 3x, \\ \begin{cases} x = t^4 - 3t^2 + 2, \end{cases}$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} y = t^2 - 8 \end{cases}$$

$$13. \text{ а)} \quad y = (3x^5 - 2\sqrt[4]{x} - 8)^5,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{\operatorname{ctg} x - \cos x}{\sqrt{1+5x^2}},$$

$$\text{в)} \quad y = e^{x^3} \cdot \arcsin 2x,$$

$$\text{г)} \quad y = \operatorname{arctg} \ln 5x,$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

$$14. \text{ а)} \quad y = \left(x^3 - \frac{2}{x^2} + 4 \right)^2,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{\sqrt{2-3x^5}}{\sin 2x},$$

$$\text{в)} \quad y = \operatorname{tg} 4x \cdot 2^{\operatorname{ctg} 2x},$$

$$\text{г)} \quad y = \ln \cos 4x,$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = 4\sin t, \\ y = 5t - 1 \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{e^{2x} + 1}{\sqrt{1-2x}},$$

$$\text{в)} \quad y = x \cdot \arcsin(2x+1),$$

$$\text{г)} \quad y = \ln \operatorname{ctg} 4x,$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = 4\operatorname{tg} t, \\ y = 5\sin t \end{cases}$$

$$26. \text{ а)} \quad y = \left(7x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 6 \right)^3, \\ 1 + 2^x$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{1}{1-2^x},$$

$$\text{в)} \quad y = e^{3x} \cdot (x^2 + \cos x),$$

$$\text{г)} \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x},$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = 2\ln t - 1, \\ y = 3t \end{cases}$$

$$27. \text{ а)} \quad y = \left(x^2 - 5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)^4,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{в)} \quad y = x \cdot (\ln 2x - 1),$$

$$\text{г)} \quad y = 3^{\cos^2 x}, \\ \begin{cases} x = 1 - t^3, \end{cases}$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} y = t + t^2 \end{cases}$$

$$28. \text{ а)} \quad y = \left(2x^8 - \frac{4}{x^6} + 3 \right)^5,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{3 + \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x}},$$

$$\text{в)} \quad y = (x-1) \cdot \arcsin 2x,$$

$$\text{г)} \quad y = \cos \ln^2 x,$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = \sin t - \cos t, \\ y = \sin t + 2t \end{cases}$$

$$29. \text{ а)} \quad y = \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 3x^6 + 1 \right)^3,$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x - 1},$$

$$\text{в)} \quad y = e^x \cdot \arcsin 2x,$$

$$\text{г)} \quad y = \sqrt{\ln(x^2 + 1)},$$

$$\text{д)} \quad \begin{cases} x = a \ln t, \\ y = bt^2 \end{cases}$$

$$15. a) y = (5x^2 - 3\sqrt{x^2} - 2)^3,$$

$$б) y = \frac{2^x + ctgx}{\sqrt{4 + 2x^3}},$$

$$в) y = e^{\sin x} \cdot \arccos 3x,$$

$$г) y = \arctg \ln 7x,$$

$$д) \begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^t \end{cases}$$

$$30. a) y = \left(2 + \frac{5}{x^2} + \sqrt{x} \right)^2,$$

$$б) y = \sin 3x \cdot \cos^2 x,$$

$$в) y = \frac{2x-1}{\ln x},$$

$$г) y = \arctg e^{2x},$$

$$д) \begin{cases} x = 6t^2 + 2t - 1, \\ y = t^3 + 5 \end{cases}$$

Тема 2. Похідна функції у точці

Якщо $y = f(x)$ - функція,

$y = f'(x)$ - похідна функції,

x_0 - точка, то

$f'(x_0)$ - значення похідної функції у точці x_0 , яке знаходиться підстановкою

значення x_0 у похідну функції замість змінної x .

Приклад 1. Задано функцію $f(x) = e^{\cos 2x} - 2e^{\sin 2x}$. Знайти похідну даної

функції $f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x) = e^{\cos 2x} \cdot (\cos 2x)' - 2e^{\sin 2x} \cdot (\sin 2x)' = e^{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' - 2e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{\cos 2x} - 4\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}.$$

Обчислимо похідну функції у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{4}$, підставляючи $\frac{\pi}{4}$

замість змінної x у вираз знайденої похідної:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)} - 4\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)} = -2 \cdot 1 \cdot e^0 - 4 \cdot 0 \cdot e^1 = -2. \quad f'\left|\left(\frac{\pi}{4}\right)\right. = -2.$$

Приклад 2. Задано функцію $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$. Знайти похідну даної функції $f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x) = (x+1)' \sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})'(x+1) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}.$$

Обчислимо похідну функції у точці з абсцисою $x_0 = 5$, підставляючи 5

замість змінної x у вираз знайденої похідної:

$$f'(5) = \frac{5}{2\sqrt{5-1}} = \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}. \quad f'(5) = \frac{5}{4}.$$

Приклад 3. Задано функцію $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$. Знайти похідну даної функції $f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x) = (x+1)' \sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})'(x+1) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}.$$

Обчислимо похідну функції у точці з абсцисою $x_0 = 5$, підставляючи 5

замість змінної x у вираз знайденої похідної:

$$f'(5) = \frac{5}{2\sqrt{5-1}} = \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} \quad f'(5) = \frac{5}{4}$$

Завдання для контролю

Знайти похідну функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

1. а) $f(x) = 3x - 4\sqrt{x} + 1$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \frac{2}{(3x^2 - 5)^2}$, $x_0 = -1$
2. а) $f(x) = (2 - x)^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
3. а) $f(x) = 0,5x^2 - 4\sqrt{2x+1}$, $x_0 = 4$
 б) $f(x) = e^{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$
4. а) $f(x) = 8\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 3$, $x_0 = 4$
 б) $F(x) = \ln \operatorname{tg} 2x + 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$
5. а) $f(x) = (x - 4)^3 - 2x$, $x_0 = 4$
 б) $f(x) = x \ln x - x$, $x_0 = e^3$
6. а) $f(x) = (3 - 2x)^2 - \sqrt{3+x}$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
7. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{9}{16}}}$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \ln \operatorname{tg}^2 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$
8. а) $f(x) = \ln^2 x - 5$, $x_0 = e$
 б) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $x_0 = \sqrt{3}$
9. а) $f(x) = \frac{1-2x}{1-4x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$
 б) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$
10. а) $f(x) = 2 + \sqrt{5-1} + 4x$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x_0 = 0$
11. а) $f(x) = \sqrt{3+2x^3}$, $x_0 = 0$
 б) $f(x) = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$
16. а) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{ctg} 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$
 б) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 4}$, $x_0 = -1$
17. а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 3x - 2$, $x_0 = 0$
 б) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x_0 = 0$
18. а) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1} - 3x + 2$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \sqrt{x+5}$, $x_0 = 2$
19. а) $f(x) = 3\sqrt{x} - x \ln x$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \arcsin 4x + e^{3x}$, $x_0 = 0$
20. а) $f(x) = (2-3x)^4 - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$
21. а) $f(x) = 0,25x^2 - \sqrt{2x-3}$, $x_0 = 2$
 б) $f(x) = \ln \cos^2 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{16}$
22. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16} + 3x$, $x_0 = 5$
 б) $f(x) = \sin^4 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$
23. а) $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
 б) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 2}$, $x_0 = 2$
24. а) $f(x) = \frac{x-1}{9-4x}$, $x_0 = 2$
 б) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$
25. а) $f(x) = \sqrt[2]{15+x} + \sqrt[2]{7x-1}$, $x_0 = 1$
 б) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
26. а) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 2x - 4$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$
 б) $f(x) = \frac{3x}{2-x}$, $x_0 = 3$

$$12. a) f(x) = \frac{(x-2)^2}{1+x} - 3x + 1, \quad x_0 = 2$$

$$б) f(x) = \ln \frac{x}{1-x}, \quad x_0 = 3$$

$$13. a) f(x) = \sqrt{9x-8} + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2, \quad x_0 = 1$$

$$б) f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$14. a) f(x) = \frac{2}{x-4} + \sqrt{x^2-9}, \quad x_0 = 5$$

$$б) f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$15. a) f(x) = \frac{2x+1}{1-x}, \quad x_0 = -1$$

$$б) f(x) = \ln \frac{x}{1-x^4}, \quad x_0 = 2$$

$$27. a) f(x) = \sqrt{3x+1} - \ln x, \quad x_0 = 1$$

$$б) f(x) = \sin^4 x \cos 4x, \quad x_0 = 0$$

$$28. a) f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{2x-3}, \quad x_0 = 2$$

$$б) f(x) = 4 \sin^5 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$29. a) f(x) = 4 \sin^2 x - \cos 2x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}$$

$$б) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x_0 = 2$$

$$30. a) f(x) = \sqrt{5+x} + 7x - 1, \quad x_0 = 4$$

$$б) f(x) = \ln \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}$$

Тема 3. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на відрізку $[a, b]$. Похідна цієї функції у точці x відрізка $[a, b]$ визначається рівністю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ наближається до числа $f'(x)$, тому відрізняється від похідної $f'(x)$ на величину нескінченно малу: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо всі члени останньої рівності помножимо на Δx то будемо мати: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$. При $\Delta x \rightarrow 0$ $\alpha\Delta x \rightarrow 0$, а $f'(x)\Delta x$ - величина нескінченно мала, яку називають диференціалом функції.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну у точці x , то добуток похідної $f'(x)$ на приріст Δx аргументу називається диференціалом функції та позначається символом dy .

Якщо $\Delta x \approx dx$ (диференціал незалежної змінної співпадає з її приростом), то $dy = f'(x)dx$.

Розглянемо геометричне тлумачення диференціалу. Нехай задана функція $y = f(x)$ та її крива, $M(x, y)$ - точка на кривій,

PM - дотична до кривої у точці M ,

α - кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі OX .

Задамо приріст незалежній змінній $x + \Delta x$, тоді функція дістане приріст $\Delta y = NM_1$.

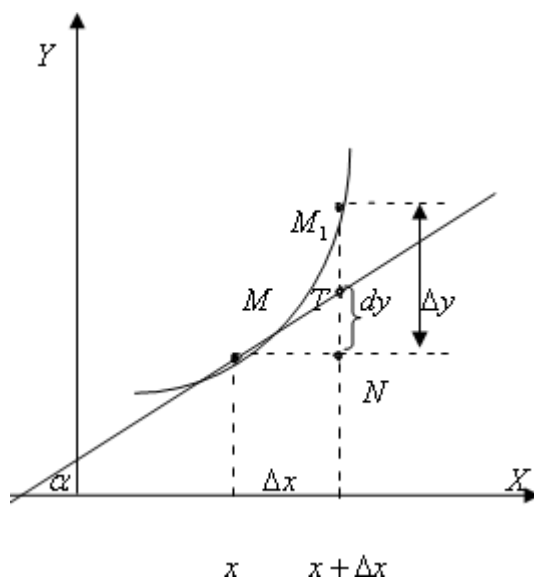
$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ - точка на кривій, яка відповідає приростам.

Розглянемо $\triangle MNT$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NT}{MN}$

$$NT = \operatorname{tg} \alpha \cdot MN$$

$$NT = f'(x)\Delta x \text{ і } dy = f'(x)dx,$$

тобто $NT = dy$.



Геометричне тлумачення диференціалу таке:

диференціал функції $y = f(x)$, який відповідає значенням x і Δx , дорівнює **приросту ординати дотичної до кривої** $y = f(x)$ **у даній точці** x .

Приклад 1. Знайти диференціал функції $s = 3t^2 - 5t - 7$.

$$ds = (3t^2 - 5t - 7)' dt = (6t - 5)dt$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $y = \ln(x^2 + 3)$.

$$dy = (\ln(x^2 + 3))' dx = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x dx = \frac{2x dx}{x^2 + 3}.$$

Приклад 3. Знайти диференціал функції $y = \sin \sqrt{x-2}$.

$$dy = (\sin \sqrt{x-2})' dx = \left(\cos \sqrt{x-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \right) dx = \frac{\cos \sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}} dx.$$

Завдання для контролю

Знайти диференціал функції:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. а) $S = t^2 - 4t + 5$ | 16. а) $S = t - t^3$ |
| б) $y = \sin 2x$ | б) $y = \cos(4x - 2)$ |
| 2. а) $S = 5t^3 - 2t^2 + 7t$ | 17. а) $S = 2t + 5t^2$ |
| б) $y = \ln 5x$ | б) $y = \operatorname{ctg}(4 - 3x)$ |
| 3. а) $S = 4t^3 - 5t - 8$ | 18. а) $S = 3t^3 - 2t + 1$ |
| б) $y = \cos \frac{x}{3}$ | б) $y = \ln(5x^2 + 1)$ |
| 4. а) $S = t^5 - 4t^3 + 2t$ | 19. а) $S = t^3 + 2t - 8$ |
| б) $y = \operatorname{tg} 3x$ | б) $y = e^{4x-1}$ |
| 5. а) $S = t^2 - 8$ | 20. а) $S = 4t^2 - 4t + 4$ |
| б) $y = \arcsin 4x$ | б) $y = \operatorname{arctg} x^2$ |
| 6. а) $S = 5 - 8t^3$ | 21. а) $S = 6 - 4t^3$ |
| б) $y = \operatorname{arctg} 5x$ | б) $y = 4^{3x-1}$ |
| 7. а) $S = 7t + t^2$ | 22. а) $S = -12t^2 + 2t - 3$ |
| б) $y = 3^{x+3}$ | б) $y = e^{\sin x}$ |
| 8. а) $S = 8 - t^2 + t^3$ | 23. а) $S = 5t^2 + 4t - 8$ |
| б) $y = \ln(x - 2)$ | б) $y = \operatorname{ctg}(3x + 2)$ |
| 9. а) $S = 4t^3 + 5t^2 + 3$ | 24. а) $S = 6t^3 - 2t^2 + t$ |
| б) $y = \sin(8x - 4)$ | б) $y = \sin(x - 3)$ |
| 10. а) $S = t^4 - 2t$ | 25. а) $S = 4t^2 - 5t^3$ |
| б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$ | б) $y = \ln(4x + 1)$ |
| 11. а) $S = \frac{1}{2}t^2 + t - 3$ | 26. а) $S = t + 3t^3$ |

- б) $y = e^{3x+1}$
12. а) $S = t^3 + 3t^2 - 2t$
- б) $y = \arccos 3x$
13. а) $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{8}t$
- б) $y = e^{-2x}$
14. а) $S = 0,5t^3 - t^2$
- б) $y = \cos \frac{x}{2}$
15. а) $S = 3t^2 - 2t + 1$
- б) $y = tg(7x-1)$
29.) б)
30. а) б)
- б) $y = \sin \frac{x}{5}$
27. а) $S = 2t - 4t^2$
- б) $y = tg \frac{x}{4}$
28. а) $S = \frac{1}{4}t^4 + 5t$
- б) $y = \ln(3x+4)$
- $S = t^2 - 2t + 4$
- $y = 3\cos 4x$
- $S = 2t^3 - \frac{1}{3}t^2 + 1$
- $y = \ln(6x - x^2)$

Тема 4. Застосування диференціалу у наближених обчисленнях

4.1 Наближені обчислення значень функцій.

Нехай задана функція $y = f(x)$. Приріст цій функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Її диференціал $dy = f'(x)dx$. Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \approx dy$. Тобто

$$dy = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f'(x)dx = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

Для наближених обчислень значень функцій будемо користуватися

Формулою $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$

Приклад 1. Знайти наближене значення приросту функції $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ і $\Delta x = 0,001$.

Розв'язання: $\Delta y \approx dy$, $dy = y'dx$, $\Delta x \approx dx$. Тому

$$dy = (2x^3 + 5)'dx = 6x^2dx$$

$$\Delta y \approx 6 \cdot 2^2 \cdot 0,001 = 0,024.$$

Приклад 2. Знайти наближене значення функції $y = 5x^3 - 2x + 3$ при $x = 2,01$.

Розв'язання: Нехай $x = 2$ і $\Delta x = 0,01$, тоді

$$y(2 + 0,01) = y(2) + y'(2) \cdot 0,01$$

$$y(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 39$$

$$y' = 15x^2 - 2$$

$$y'(2) = 15 \cdot 2^2 - 2 = 58$$

$$y(2 + 0,01) = 39 + 58 \cdot 0,01 = 39,58$$

4.2 Формули для наближених числових значень :

Із рівності $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$ отримаємо формули для наближених числових обчислень:

$$I \quad (x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$$

$$\sqrt[n]{x} \approx \frac{20}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\text{II} \quad \sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \quad + \quad \quad^1 \quad \cdot \Delta x$$

$$\begin{array}{ll} \text{III} & \frac{1}{x + \Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \Delta x \\ \text{IV} & \ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x} \cdot \Delta x \\ \text{V} & e^{x+\Delta x} \approx e^x + e^x \cdot \Delta x \\ \text{VI} & \sin \Delta x \approx \Delta x \\ \text{VII} & \operatorname{tg} \Delta x \approx \Delta x \end{array}$$

Приклад 1. Обчислити $(9,06)^2$.

Користуємось формулою I. Нехай $x=9$, $\Delta x=0,06$, $n=2$.

Тоді $(9+0,06)^2 \approx 9^2 + 2 \cdot 9^{2-1} \cdot 0,06 = 81 + 18 \cdot 0,06 = 81 + 1,08 = 82,08$.

Приклад 2. Обчисліть $(0,975)^4$.

Користуємось формулою I. Нехай $x=1$, $\Delta x=-0,025$, $n=4$.

Тоді $(1-0,025)^4 \approx 1^4 + 4 \cdot 1^{4-1} \cdot (-0,025) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Приклад 3. Обчисліть $\sqrt[3]{1,012}$.

Користуємось формулою II. Нехай $x=1$, $\Delta x=0,012$, $n=3$.

Тоді $\sqrt[3]{1+0,012} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{0,012}{3\sqrt[3]{1^{3-1}}} \approx 1 + \frac{0,012}{3 \cdot 1} = 1 + 0,04 = 1,04$.

Приклад 4. Обчисліть $\frac{1}{9,93}$.

Користуємось формулою III. Нехай $x=10$, $\Delta x=-0,07$.

Тоді $\frac{1}{10-0,07} \approx \frac{1}{10} - \frac{-0,07}{10^2} = \frac{1}{10} + 0,0007 = 0,1 + 0,0007 = 0,1007$.

Приклад 5. Обчисліть $\sin 2^{\circ}06'$.

Користуємось формулою VI. Запишемо кут $2^{\circ}06'$ у радіанах.

$$\begin{aligned} 180^{\circ} &= 3,14 \\ 6' &= \left(\frac{1}{6}\right)^{\circ} = 0,1^{\circ} \\ \left|\sqrt[60]{\frac{1}{60}}\right| &, \quad \frac{2,1^{\circ}}{2,1^{\circ} \cdot 3,14} = \frac{x}{6,594} \\ 2^{\circ}06' &= 2,1^{\circ} \quad x = \frac{2,1^{\circ} \cdot 3,14}{180^{\circ}} = \frac{6,594}{180} \approx 0,0366 \end{aligned}$$

Тобто, $\sin 2^{\circ}06' = \sin 0,0366 \approx 0,0366$.

Завдання (№1-2) для контролю

Завдання 1. Знайти наближені значення функцій $f(x)$ при заданому значенні змінної x та Δx .

1. $y = 3x^2 + 5x + 1$, $x = 3,001$

16. $y = 5x^3 + x^2 - 6$, $x = 2,03$

2. $y = x^3 + x - 1$, $x = 2,01$

17. $y = 2x^3 - 5x$, $x = 3,02$

3. $y = \frac{1}{4}x^4 + x$, $x = 1,0001$

18. $y = -x^3 + 4x^2$, $x = 1,03$

4. $y = 2x^2 - x + 1$, $x = 2,01$

19. $y = 3x^3 - 2x$, $x = 2,001$

5. $y = x^2 + 3x + 1$, $x = 3,02$

20. $y = x^3 + 3x^2$, $x = 3,002$

6. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$, $x = 1,01$

21. $y = 4x^3 - 2x + 3$, $x = 1,03$

$$7. y = \frac{1}{6}x^6 - 2x, \quad x = 1,03$$

$$8. y = 2x^3 + 5x, \quad x = 1,01$$

$$9. y = x^3 + x^2 + x, \quad x = 2,001$$

$$10. y = -x + 9x^2, \quad x = 1,002$$

$$11. y = -3x + 4x^2, \quad x = 3,001$$

$$12. y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2, \quad x = 2,01$$

$$13. y = -2x^2 + 9x - 4, \quad x = 1,02$$

$$14. y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2, \quad x = 3,03$$

$$15. y = 4x^3 + 2x - 4, \quad x = 1,01$$

$$22. y = 4x^2 - 2x + 3, \quad x = 2,01$$

$$23. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3, \quad x = 3,02$$

$$24. y = 4x^2 + 3x + 1, \quad x = 1,001$$

$$25. y = -2x^3 + 4x^2 + x, \quad x = 2,003$$

$$26. y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3, \quad x = 3,01$$

$$27. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2, \quad x = 1,02$$

$$28. y = 5x^2 + 3x - 5, \quad x = 2,001$$

$$29. y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1, \quad x = 3,002$$

$$30. y = \frac{1}{4}x^4 + 7x + 2, \quad x = 1,003$$

Завдання 2. Знайти наближені значення виразів за допомогою диференціалу:

$$1. \text{ а) } \sqrt[4]{15,8}$$

$$\text{б) } e^{8-1,95^3}$$

$$2. \text{ а) } (4,012)^2$$

$$\text{б) } \ln(3,96^2 - 15)$$

$$3. \text{ а) } \frac{1}{1,005}$$

$$\text{б) } \arctg 0,98$$

$$4. \text{ а) } \sqrt[3]{1,013}$$

$$\text{б) } 2 - \lg^4 42$$

$$5. \text{ а) } (9,06)^2$$

$$\text{б) } \ln(10 - 3,03^2)$$

$$6. \text{ а) } \sqrt{25,16}$$

$$\text{б) } e^{\sin 29^\circ}$$

$$7. \text{ а) } (1,013)^3$$

$$\text{б) } \arctg 0,97$$

$$8. \text{ а) } \sqrt{24,84}$$

$$\text{б) } 4 \ln 1,09 - 1$$

$$9. \text{ а) } \frac{1}{0,97}$$

$$\text{б) } \ln(1 - 0,01^4)$$

$$10. \text{ а) } (9,95)^3$$

$$16. \text{ а) } \frac{1}{9,91}$$

$$\text{б) } \ln(1 - 0,04^3)$$

$$17. \text{ а) } \sqrt[4]{1,012}$$

$$\text{б) } \ln 2,003 - 1,98^2$$

$$18. \text{ а) } (0,982)^4$$

$$\text{б) } e^{\sin 31^\circ}$$

$$19. \text{ а) } \sqrt[4]{1,04}$$

$$\text{б) } 3 \ln 1,08 - 1$$

$$20. \text{ а) } \frac{1}{1,02}$$

$$\text{б) } e^{\sqrt{1-1,04^3}}$$

$$21. \text{ а) } (0,993)^3$$

$$\text{б) } \frac{1}{\sqrt{4 - 3,007^5}}$$

$$22. \text{ а) } \frac{1}{1,97}$$

$$\text{б) } \ln(1 - 0,05^3)$$

$$23. \text{ а) } \sin 35,12'$$

$$\text{б) } 2 - \sqrt[3]{1,03^2}$$

$$24. \text{ а) } \ln 1,01$$

$$\text{б) } \sqrt{2 - \cos^3 5}$$

$$25. \text{ а) } e^{1,003^2 + 2}$$

11. а) $\sqrt[3]{4-3 \cdot 0,08^3}$
 б) $\ln^2 0,99$
 12. а) $(1,005)^{10}$
 б) $\ln \sqrt{1,03^3}$
 13. а) $\sqrt{99,5}$
 б) $\arctg 0,95$
 14. а) $\frac{1}{9,96}$
 б) $\sqrt{1+0,96^3}$
 15. а) $(0,975)^4$
 б) $\ln^3 0,97$
26. а) $\sqrt[3]{1,05}$
 б) $e^{1+1,94^3}$
 27. а) $(1,008)^6$
 б) $\arcsin 0,64$
 28. а) $\ln 1,004$
 б) $\sqrt{3+1,02^3}$
 29. а) $e^{2,93}$
 б) $\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1,98^4}{1,98^3 - 7}}$
 30. а) $\frac{1}{9,92}$
 б) $\arcsin 0,48$

Тема 5. Похідні та диференціали вищих порядків

5.1 Похідні вищих порядків.

Нехай $y = f(x)$ - функція.

$y^I, f^I(x), \frac{d^1 x}{d^1 y}$ - похідна функції першого порядку.

$y^{II}, f^{II}(x), \frac{d^2 x}{d^2 y}$ - похідна другого порядку (похідна від похідної першого порядку) тобто $f^{II}(x) = (f^I(x))^I$.

$y^{III}, f^{III}(x), \frac{d^3 x}{d^3 y}$ - похідна третього порядку (похідна від похідної другого порядку), тобто $f^{III}(x) = (f^{II}(x))^I$.

$y^{(IV)}, f^{(IV)}(x), \frac{d^4 x}{d^4 y}$ - похідна четвертого порядку (похідна від похідної третього порядку), тобто $f^{(IV)}(x) = (f^{III}(x))^I$.

$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n x}{d^n y}$ - похідна n-го порядку (похідна від похідної порядку n-1), тобто $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))^I$.

Приклад 1. Знайти похідну четвертого порядку функції $y = 2x^4 + 3x^2 - 4x + 1$.

$$y^I = 8x^3 + 6x - 4$$

$$y^{II} = 24x^2 + 6$$

$$y^{III} = 48x + 6$$

$$y^{(IV)} = 48$$

Приклад 2. Знайти похідну третього порядку функції $y = \sin x + \cos x$.

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

$$y''' = -\cos x + \sin x$$

Приклад 3. Знайти похідну другого порядку функції $y = e^{3x-5}$.

$$y' = e^{3x-5} \cdot (3x-5)' = e^{3x-5} \cdot 3 = 3e^{3x-5}$$

$$y'' = 3e^{3x-5} \cdot (3x-5)' = 3e^{3x-5} \cdot 3 = 6e^{3x-5}$$

Приклад 4. Знайти похідну другого порядку функції $y = \ln(4x^2 - 4x)$.

$$y' = \frac{1}{4x^2 - 4x} \cdot (4x^2 - 4x)' = \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x} = \frac{4(2x-1)}{4(x^2 - x)} = \frac{2x-1}{x^2 - x};$$

$$y'' = \left(\frac{2x-1}{x^2 - x} \right)' = \frac{(2x-1)'(x^2 - x) - (x^2 - x)'(2x-1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{2(x^2 - x) - (2x-1)(2x-1)}{(x^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2}.$$

Приклад 5. Знайти похідну другого порядку функції $y = \sqrt{1-x^2}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = -\frac{x' \sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)'}{1-x^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} + 2x^2}{1-x^2} = -\frac{1-x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

5.2 Диференціали вищих порядків.

Нехай $y = f(x)$ - функція.

dy - диференціал функції $dy = f'(x)dx$

d^2y - диференціал другого порядку (диференціал від диференціалу функції), тобто

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)dx$$

d^3y - диференціал третього порядку (диференціал від диференціалу

другого порядку), тобто $d^3y = d(d^2y) = (f''(x)dx^2)dx = f'''(x)dx^3$

$d^n y$ - диференціал n-го порядку (диференціал від диференціалу

порядку n-1), тобто $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$

Приклад 1. Знайти диференціал другого порядку функції $y = 5x^2 - 3x - 2$.

$$dy = (10x - 3)dx$$

$$d^2y = 10dx^2$$

Приклад 2. Знайти dy і d^2y функції $y = \sin x^2$.

$$dy = (\sin x^2)' dx = \cos x^2 \cdot (x^2)' dx = \cos x^2 \cdot 2x dx = 2x \cos x^2 dx$$

$$d^2 y = (2x \cos x^2)' dx^2 = 2(x' \cos x^2 + (\cos x^2)' x) dx^2 = 2(\cos x^2 - \sin x^2 \cdot 2x \cdot x) dx^2 = \\ = (2 \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2) dx^2.$$

Приклад 3. Знайти dy і $d^2 y$ функції $y = \ln^2(x-3)$
 $dy = 2 \ln(x-3) \cdot (\ln(x-3))' dx = 2 \ln(x-3) \cdot \frac{1}{x-3} \cdot (x-3)' dx = \frac{2 \ln(x-3)}{x-3} dx$

$$d^2 y = 2 \cdot \frac{(\ln(x-3))' (x-3) - (x-3)' \ln(x-3)}{(x-3)^2} dx^2 = \frac{x-3 - \ln(x-3)}{(x-3)^2} dx^2 = \frac{1 - \ln(x-3)}{(x-3)^2} dx^2.$$

Завдання (1-3) для контролю

Завдання 1. Знайти похідні четвертого порядку функції:

- $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 2,$
- $y = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 8x + 4,$
- $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 9x - 1,$
- $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7,$
- $y = 4x^2 - 8x^3 + 3x - 9,$
- $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{5}x^5 + 3,$
- $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^2 + 10x,$
- $y = 4x^4 - 5x + 9x^2 - 17,$
- $y = 2x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2,$
- $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 3x + 6,$
- $y = \frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 5,$
- $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + 9,$
- $y = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5,$
- $y = 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{5}x^5 - 28x,$
- $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9,$
- $y = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6,$
- $y = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + 5x - 1,$
- $y = 9x - 4x^2 + 8x^3,$
- $y = 4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4,$
- $y = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5,$
- $y = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 6,$
- $y = \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 5x + 1,$
- $y = 4x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x - 4,$
- $y = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 15,$
- $y = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3,$
- $y = \frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8},$
- $y = 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - 8,$
- $y = 4x^2 - 8x + \frac{1}{5}x^5 + x^6,$
- $y = 2 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{5}x^{10} + 4,$
- $y = \frac{1}{7}x^7 - 6x^3 - 5x - \frac{1}{4}.$

Завдання 2. Знайти похідну другого порядку функції:

- $y = \arcsin x,$
- $y = \sqrt{x^2 + 1},$
- $y = \arctg x,$
- $y = \sqrt{x^2 - 1},$
- $y = x \sin x,$
- $y = x^3 \ln x,$
- $y = tg x,$
- $y = \ln 3x,$
- $y = ctg x,$
- $y = \sin(2x - 1),$
- $y = 5^{\sin x},$
- $y = x^3 \cos 2x,$

$$7. \quad y = x^2 \cos x,$$

$$8. \quad y = \frac{\arccos x}{x^2 + 1},$$

$$9. \quad y = \frac{1}{x-1},$$

$$10.1 \quad y = x^3 e^x,$$

0

.

$$11.1 \quad y = x^2 \sin x,$$

1

.

$$12.1 \quad y = \ln(x^2 - 6),$$

$$2 \quad y = x \ln(x-1),$$

.

$$13.1$$

3

.

$$14.1 \quad y = \frac{2x}{1-x^2}$$

.

$$15.1 \quad y = x^2 e^{3x},$$

5

.

$$22. \quad y = \sqrt{x^4 + 1},$$

$$23. \quad y = x \ln x,$$

$$24. \quad y = x \cos 2x,$$

$$25. \quad y = \frac{x-3}{x+3},$$

$$26. \quad y = \frac{\sqrt{3x}}{1-5x},$$

$$27. \quad y = \ln(x^2 + 4),$$

$$28. \quad y = \sqrt{x-1},$$

$$29. \quad y = e^{\cos x},$$

$$30. \quad y = x^4 e^x.$$

Завдання 3. Знайти $d^2 y$ функцій:

$$1. \quad y = \frac{1}{8} \cos^8 2x,$$

$$2. \quad y = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \cos 4x,$$

$$3. \quad y = \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{4} x^4,$$

$$4. \quad y = \frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

$$5. \quad y = \frac{1}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} e^{3x},$$

$$6. \quad y = \cos x - \frac{1}{3} \ln 3x,$$

$$7. \quad y = \frac{1}{4} \sin 2x + e^{4x},$$

$$8. \quad y = 2x - \sin 3x + \cos 5x,$$

$$9. \quad y = 3 \sin 7x + \cos^2 x,$$

$$10. \quad y = 6 \sin^3 13x,$$

$$11. \quad y = 7 \sin x \cos x,$$

$$12. \quad y = \frac{1}{2} e^{-4x} + \frac{1}{3} \cos^3 x,$$

$$16. \quad y = e^{3x} + \ln(x+1),$$

$$17. \quad y = \frac{1}{7} \sin^7 x + \frac{1}{3} e^{6x},$$

$$18. \quad y = 6 \sin x \cos x,$$

$$19. \quad y = \frac{1}{4} e^{-2x} + \ln(x-2),$$

$$20. \quad y = (3x+5)^2 + \frac{1}{3} \sin^6 x,$$

$$21. \quad y = e^{2x} - \operatorname{tg} 3x,$$

$$22. \quad y = 5^{x+2} + \frac{1}{2} \sin^2 x,$$

$$23. \quad y = e^{-4x} + \frac{1}{6} \cos^6 5x,$$

$$24. \quad y = \frac{1}{3} \ln^3 x + \sin 2x,$$

$$25. \quad y = \frac{1}{3} \cos^3 2x + \frac{1}{5} e^{-5x},$$

$$26. \quad y = 2 \sin 3x \cos x,$$

$$27. \quad y = \frac{1}{5} \cos^5 3x - \frac{1}{3} e^{3x},$$

$$13. \quad y = e^{3x} + \cos^2 3x,$$

$$14. \quad y = 2 \sin 3x \cos x,$$

$$15. \quad y = \frac{1}{4} \sin^4 x + \frac{1}{2} \ln^2 x,$$

$$28. \quad y = \frac{1}{5} \sin^5 4x - e^{3x},$$

$$29. \quad y = \frac{1}{4} \ln^4 3x + 5x,$$

$$30. \quad y = \frac{1}{3} \sin^3 5x - \ln 5x.$$

Тема 6. Фізичний (механічний) зміст похідної

Задачі, які приводять до поняття похідної, пов'язані з нахождением швидкості зміни величини, яка залежить від деякої змінної. Розглянемо задачі механічного та фізичного змісту похідної.

6.1 Задачі про механічний зміст першої та другої похідної (прикладі 1-3)

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t)$. **Механічний зміст першої похідної:** швидкість точки у момент часу t дорівнює першій похідній шляху за часом t , тобто

$$v(t) = s'(t) \quad \text{або} \quad v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Механічний зміст другої похідної: прискорення руху точки у момент часу t дорівнює другій похідній шляху за часом t , тобто

$$a(t) = s''(t) \quad \text{або} \quad a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Якщо відомо закон зміни швидкості точки, то прискорення руху точки дорівнює першій похідній шляху за часом t , тобто

$$a(t) = v'(t) \quad \text{або} \quad a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Шлях s вимірюється у метрах ($м$), час t – у секундах ($с$), швидкість v – у метрах за секунду ($м/с$), прискорення a – у метрах за секунду у квадраті ($м/с^2$).

Приклад 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^3 + t^2 - 3$ ($м$). Знайти значення швидкості у момент часу $t = 4$ $с$.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = (4t^3 + t^2 - 3)' = 12t^2 + 2t$$

Розв'язання:

$$v(4) = 12 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 200 (м/с)$$

Щоб знайти швидкість у заданий момент часу, треба знайти першу похідну від шляху та підставити замість змінної t її значення.

Відповідь: Швидкість у момент часу 4 $с$ дорівнює 200 $м/с$.

Приклад 2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + t^2$ ($м$). Знайти момент часу, коли швидкість точки буде дорівнювати 10 $м/с$.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = (6t + t^2)' = 6 + 2t \quad 6 + 2t = 10$$

Розв'язання:

$$\frac{ds}{dt}, \text{ тобто } t = 2с$$

$$v(t) = 10$$

Відповідь: Швидкість дорівнює 10 $м/с$ у момент часу $t = 2$ $с$.

Приклад 3. Знайдіть у який момент часу прискорення a прямолінійного руху точки дорівнює 36 $м/с^2$. Яка буде швидкість v у знайдений момент часу, якщо закон руху задано рівнянням $s(t) = 3t + 2t^3$.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3 + 6t^2$$

Розв'язання:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t$$

Якщо $a(t) = 36$ $м/с^2$ за умовою, то $12t = 36, t = 3$ $с$

Швидкість точки у момент часу $t = 3$ $с$ дорівнює $v(3) = 3 + 6 \cdot 3^2 = 57$ ($м/с$). Відповідь:

Швидкість точки у знайдений момент часу $t = 3$ $с$ дорівнює 57 $м/с$.

6.2 Задачі про фізичний зміст похідної (прикладі 4-6)

Приклад 4. Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t^2 + t + 4$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через 4с після початку руху. Розв'язання: Кінетична енергія тіла $E = \frac{mv^2}{2}$ вимірюється у джоулях (Дж). Знайдемо швидкість руху тіла у момент заданого часу $t = 4с$:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t + 1$$

$$v(4) = 6 \cdot 4 + 1 = 25(м/с)$$

$$\text{Знайдемо кінетичну енергію тіла } E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 25^2}{2} = 3125(Дж).$$

Відповідь: Через 4с після початку руху кінетична енергія тіла дорівнює 3125Дж.

Приклад 5. Закон зміни температури $\dot{O}$ тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T = 0,2t^2$. Знайти швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 10с$.

Розв'язання: Температура вимірюється у градусах (град), час - у секундах (с). Швидкість нагріву тіла дорівнює похідній температури $\dot{O}$ за часом t , тобто

$$v = \frac{dT}{dt} = 0,4t$$

$$v(10) = 0,4 \cdot 10 = 4(град/с)$$

Відповідь: У момент часу $t = 10с$ швидкість нагріву тіла дорівнює 4град/с.

Приклад 6. Сила струму I змінюється за законом $I = 0,4t^2$. Знайти швидкість зміни сили струму у момент часу $t = 8с$.

Розв'язання: Сила струму I вимірюється у амперах (А), час t - у секундах (с). Швидкість зміни сили струму дорівнює похідній сили струму за часом t , тобто

$$v = \frac{dI}{dt} = 0,8t$$

$$v(8) = 0,8 \cdot 8 = 6,4(А/с)$$

Відповідь: Швидкість сили струму у момент часу $t = 8с$ дорівнює 6,4(А/с).

Завдання (№1-3) для контролю

Задача 1. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t)$, (S вимірюється у метрах, t - у секундах). Знайдіть швидкість точки у момент часу t .

$$1. S(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 7t + 2, \quad t = 1с$$

$$16. S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2, \quad t = 2с$$

$$2. S(t) = 2t^3 + 3t^2 - t + 1, \quad t = 2с$$

$$17. S(t) = 4t^3 - 2t + 1, \quad t = 3с$$

$$3. S(t) = 5t^2 + 3t + 4, \quad t = 1с$$

$$18. S(t) = 2t^3 + 3t^2 + 5, \quad t = 4с$$

$$4. S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad t = \frac{1}{2}с$$

$$19. S(t) = -t^3 + 4t^2, \quad t = 2с$$

$$5. S(t) = \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 3, \quad t = 2с$$

$$20. S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t, \quad t = 3с$$

$$6. S(t) = -2t^3 + 6t^2 + t, \quad t = 1с$$

$$21. S(t) = -t^3 + 4t^2, \quad t = 2с$$

$$7. S(t) = t^3 - 2t^2 + 5, \quad t = \frac{2}{1}с$$

$$22. S(t) = 5t^3 + 6t, \quad t = 1с$$

$$8. S(t) = 4t^2 - 2t + 1, \quad t = \frac{c}{2}$$

$$23. S(t) = -2t^4 + 16t^2, \quad t = 2с$$

$$9. S(t) = 5t^2 - 2t + 1, \quad t = 3с$$

$$24. S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 8t^2, \quad t = 1с$$

$$10. S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2, \quad t = 2c$$

$$11. S(t) = -3t^3 + 8t^2 + 4t, \quad t = 1c$$

$$12. S(t) = -2t^2 + 9t - 8, \quad t = 2c$$

$$13. S(t) = 4t^3 + 2t - 4, \quad t = 1c$$

$$14. S(t) = 5t^2 + 2t + 1, \quad t = 2c$$

$$15. S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t - 2, \quad t = 3c$$

$$25. S(t) = -3t + 4t^2, \quad t = 2c$$

$$26. S(t) = -t + 9t^2, \quad t = 1c$$

$$27. S(t) = t^3 + t^2 + t, \quad t = 2c$$

$$28. S(t) = 2t^3 + 9t^2, \quad t = 1c$$

$$29. S(t) = 2t^3 + 5t, \quad t = 3c$$

$$30. S(t) = \frac{1}{6}t^6 - 2t, \quad t = 2c$$

Задача 2. Знайдіть у який момент часу $t(c)$ прискорення руху точки дорівнює $a(m / c^2)$. Яка буде швидкість $V (m / c)$ у знайдений момент часу, якщо закон руху задано рівнянням $S(t)$.

$$1. S(t) = -t^3 + 5t^2 + 4t, \quad a = 4m / c^2$$

$$2. S(t) = -t + 9t, \quad a = 0m / c^2$$

$$3. S(t) = \frac{1}{6}t^6 - t^2, \quad a = 78m / c^2$$

$$4. S(t) = -t^3 + 2t, \quad a = 2m / c^2$$

$$5. S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t, \quad a = 0m / c^2$$

$$6. S(t) = -\frac{1}{5}t^5 + 2t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$7. S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 6t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$8. S(t) = t^3 + 2t^2, \quad a = 10m / c^2$$

$$9. S(t) = -2t^3 + 9t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$10. S(t) = -t^3 + 3t^2, \quad a = 6m / c^2$$

$$11. S(t) = t^3 - 3t^2, \quad a = 12m / c^2$$

$$12. S(t) = 2t^3 - 3, \quad a = 36m / c^2$$

$$13. S(t) = 2t^3 - 5, \quad a = 48m / c^2$$

$$14. S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7t + 8, \quad a = 0m / c^2$$

$$15. S(t) = -2t^3 + 6t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$16. S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$17. S(t) = 5t^3 + 3t^2 + 6t, \quad a = 36m / c^2$$

$$18. S(t) = 2t^3 + 4t + 1, \quad a = 12m / c^2$$

$$19. S(t) = 5t^3 - 2t, \quad a = 60m / c^2$$

$$20. S(t) = 2t^3 + 5t, \quad a = 24m / c^2$$

$$21. S(t) = -t^3 + 9t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$22. S(t) = -t^3 + 2t^2, \quad a = 2m / c^2$$

$$23. S(t) = \frac{1}{7}t^7 - 3t^2 + 9t + 10, \quad a = 0m / c^2$$

$$24. S(t) = t^3 + t^2, \quad a = 14m / c^2$$

$$25. S(t) = -5t^3 + 15t^2, \quad a = 0m / c^2$$

$$26. S(t) = 2t^3 + 9t^2, \quad a = 24m / c^2$$

$$27. S(t) = 3t^3 + 5t^2 + 3t, \quad a = 28m / c^2$$

$$28. S(t) = 4t^3 + 12t^2 + 7t, \quad a = 0m / c^2$$

$$29. S(t) = -\frac{1}{8}t^8 + 7t, \quad a = 0m / c^2$$

$$30. S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t + 3, \quad a = 18m / c^2$$

Задача 3.

1. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,4t^3 + 2t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 7c$ секунди.

2. Тіло масою $m = 4kg$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 2t^2 + 3t - 2$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 2c$ після початку руху.

3. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,4t^2 + 6t$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 10c$.

4. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,23t^2$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 5c$ секунди.
5. Тіло масою $m = 10\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 3t^2 + 2t + 4$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 1c$ після початку руху.
6. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,32t^2$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 4c$.
7. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,7t^2 + 0,2t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 8c$ секунди.
8. Тіло масою $m = 6\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 4t^3 - 3t^2 - 1$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 3c$ після початку руху.
9. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,5t^3 + 4$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 3c$.
10. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,4t^2 + 0,5t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 4c$ секунди.
11. Тіло масою $m = 8\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t + 2$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 4c$ після початку руху.
12. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 6t^2 - 2t$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 0,2c$.
13. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,1t^3 + 0,6t^2$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 2c$ секунди.
14. Тіло масою $m = 5\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 3$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 1c$ після початку руху.
15. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 3t^2 + 3t$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 0,8c$.
16. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = 0,9t^2 + 2t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 3c$ секунди.
17. Тіло масою $m = 0,5\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{1}{5}t^5 + 2t$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 2c$ після початку руху.
18. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,6t^2$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 9c$.
19. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = t + 0,8t^2$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 9c$ секунди.
20. Тіло масою $m = 1\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 0,8t^2 + 0,5t^2$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 5c$ після початку руху.
21. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,4t^2 + 2t$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 5c$.
22. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(c)$ за законом $I(t) = t^2 + 0,3t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 6c$ секунди.
23. Тіло масою $m = 3\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 2t^3 + 3t^2 - 2$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 2c$ після початку руху.

24. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,64 + 2t^2$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 2\text{с}$.
25. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(\text{с})$ за законом $I(t) = t^2 + 0,2t$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 10\text{с}$ секунди.
26. Тіло масою $m = 8\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 4t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 4$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 3\text{с}$ після початку руху.
27. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,9t^2 + 1$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 3\text{с}$.
28. Сила струму змінюється у залежності від часу $t(\text{с})$ за законом $I(t) = 0,87t^2$. Знайдіть швидкість зміни сили струму у кінці $t = 11\text{с}$ секунди.
29. Тіло масою $m = 4\text{кг}$ рухається прямолінійно за законом $S(t) = 3t^3 + 2t^2 - 3$. Знайдіть кінетичну енергію тіла через $t = 1\text{с}$ після початку руху.
30. Закон зміни температури T тіла у залежності від часу t задано рівнянням $T(t) = 0,7t^2$. Знайдіть швидкість нагріву тіла у момент часу $t = 8\text{с}$.

Тема 7. Геометричний зміст похідної

7.1 Дотична до кривої.

- На графіку функції візьмемо точку $M(x; y)$ та зафіксуємо точку $M_0(x_0; y_0)$.
- Проведемо січну пряму M_0M .
- Нехай точка $M(x; y)$ рухається вдовж кривої до точки $M_0(x_0; y_0)$. Тоді $M_0M \rightarrow 0$.

Означення. Положення січної, коли вона має одну спільну точку з кривою $y = f(x)$, називається граничним.

Означення. Граничне положення січної називається дотичною до кривої у точці.

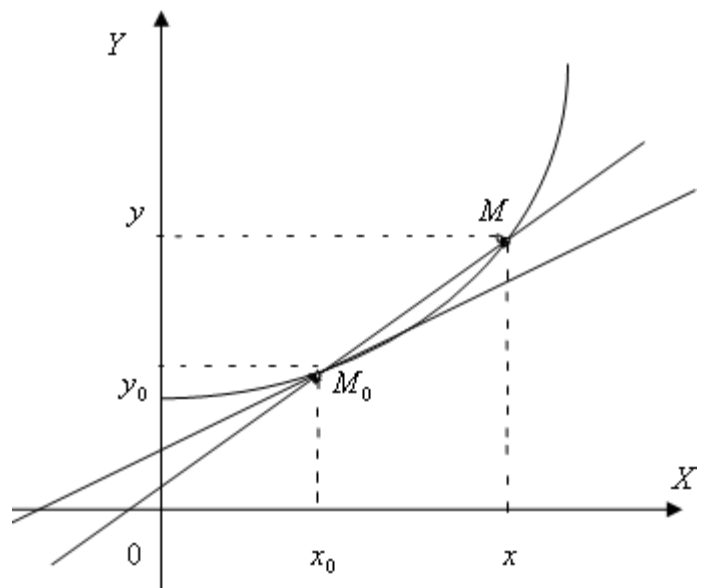


Рис.5

7.2 Геометричний зміст похідної.

Розглянемо неперервну функцію $y = f(x)$, диференційовану у точці $x_0 \in [a; b]$ та її графік.

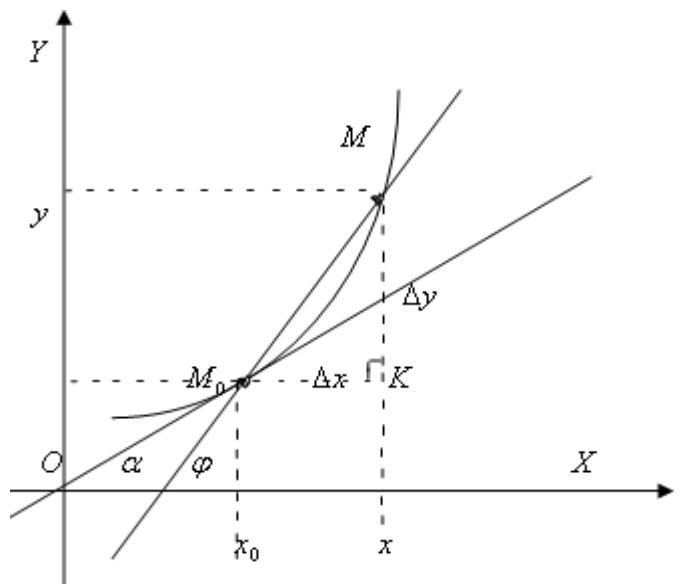
Якщо $M \rightarrow M_0$, то $\Delta x \rightarrow 0$,

$\varphi \rightarrow \alpha$, де α - кут між дотичною і додатного напрямку вісі OX ,
 $\text{tg} \varphi \rightarrow \text{tg} \alpha$.

Розглянемо трикутник M_0MK :

$M_0K = \Delta x$ - приріст аргументу, $MK = \Delta y$

- приріст функції, $\text{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, але



$\operatorname{tg} \phi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$, тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$.

За означенням похідної $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, то $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, або $k = f'(x_0)$, де k - кутовий коефіцієнт дотичної.

Геометричний зміст похідної полягає у наступному:

Значення похідної у точці x_0 дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці x_0 з додатним напрямом вісі OX , тобто $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.
або

Кутовий коефіцієнт k дотичної, яка проведена до кривої $y = f(x)$ у точці x_0 , дорівнює значенню похідної функції у цій точці, тобто $k = f'(x_0)$,

7.3 Рівняння дотичної

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$. Дотична проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, тому координати точки задовольняють рівнянню прямої, а значить $y - y_0 = k(x - x_0)$. Але $k = f'(x_0)$, $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, тому рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , має такий вигляд:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

7.4 Нормаль до кривої. Рівняння нормалі.

Означення. Нормаллю до кривої $y = f(x)$ у точці x_0 називається пряма, яка проведена перпендикулярно дотичній до кривої у тій самій точці.

Нормаль перпендикулярна дотичній, тому кутовий коефіцієнт нормалі

до кривої $y = f(x)$ дорівнює $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$f(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо приклади (1-4) розв'язування задач геометричного змісту похідної.

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $f(x) = 3x^2 - x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання:

$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ - рівняння дотичної,

$f(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ - рівняння нормалі.

Знайдемо:

- 1) значення функції $f(x) = 3x^2 - x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$,
 $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$,
- 2) похідну функції $f(x) = 3x^2 - x$,
 $f'(x) = 6x - 1$,
- 3) значення похідної функції у точці з абсцисою $x_0 = 1$,

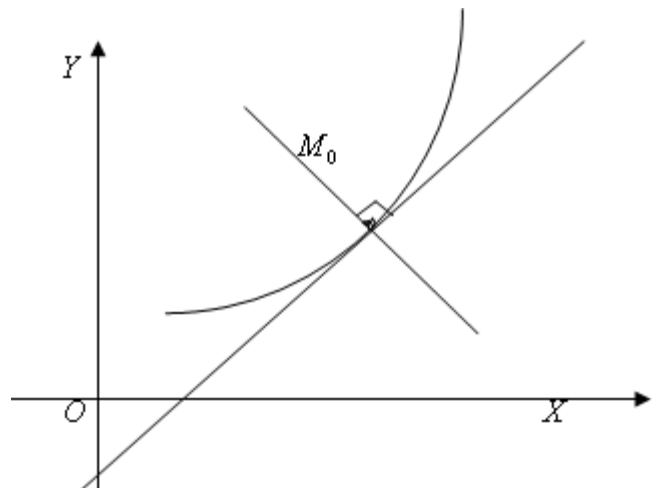


Рис.7

$$f'(1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5,$$

4) складемо рівняння дотичної та нормалі

$$f(x) = 5 \cdot (x - 1) + 2 = 5x - 5 + 2 = 5x - 3,$$

$$f(x) = 5x - 2 \text{ - рівняння дотичної,}$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 1) + 2 = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} + 2 = -\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5},$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5} \text{ - рівняння нормалі.}$$

Відповідь: $f(x) = 5x - 2$ - рівняння дотичної, $f(x) = -\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5}$ - рівняння нормалі.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = \ln x + x$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання:

Знайдемо значення функції у точці $f(3) = \ln 3 + 3$, похідну функції $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$,

значення похідної функції у точці $f'(3) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$,

скориставшись рівнянням дотичної $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$,

матимемо $f(x) = \frac{4}{3}(x - 3) + \ln 3 + 3$, $f(x) = \frac{4}{3}x + \ln 3 - 1$,

рівнянням нормалі $f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0) + f(x_0)$, матимемо $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 3) + \ln 3 + 3$,

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{4} + \ln 3 + 3 = -\frac{3}{4}x + \ln 3 + \frac{21}{4}, \quad f(x) = -\frac{3}{4}x + \ln 3 + \frac{21}{4}$$

Відповідь: $f(x) = \frac{4}{3}x + \ln 3 - 1$ - рівняння дотичної, $f(x) = -\frac{3}{4}x + \ln 3 + \frac{21}{4}$ - рівняння

нормалі.

Приклад 3. Який кут з віссю абсцис утворює дотична до параболи $y = x^2 - 4x + 8$ в точці (3;5)?

Розв'язання:

Безпосередньо підстановкою координат заданої точки в рівняння параболи переконуємося, що вона їй належить.

Знайдемо похідну $y' = 2x - 4$.

Тоді $\operatorname{tg} \alpha = 2x_0 - 4 = 6 - 4 = 2$. Звідси $\alpha = \operatorname{arctg} 2$

Відповідь: $\alpha = \operatorname{arctg} 2$

Приклад 4. Дотична до графіка функції $y = x^2 - 3x + 4$

нахилена до осі абсцис під кутом $\frac{\pi}{4}$. Знайти координати точки дотику.

Розв'язання:

Знайдемо похідну функції: $y' = 2x - 3$.
 $\frac{\pi}{4}$ $2x_0 - 3 = 1, x_0 = 2,$

За умовою $y'(x_0) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ маємо $y_0 = 4 - 6 + 4 = 2$.

отже, дотична до параболи проходить через точку A(2;2).

Відповідь: A(2;2).

Завдання для контролю

Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

1. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2, \quad x_0 = 0;$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x_0 = -2;$
3. $f(x) = \ln(2x+4), \quad x_0 = -\frac{1}{2};$
4. $f(x) = \frac{1}{2} \overline{\frac{tg(x+\frac{\pi}{4})}{4}}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}, \quad x_0 = -1;$
6. $f(x) = x\sqrt{x-1}, \quad x_0 = 2;$
7. $f(x) = e^{2x+1}, \quad x_0 = 1;$
8. $f(x) = \sin^2 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3};$
9. $f(x) = x + e^{-2x}, \quad x_0 = 1;$
10. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 1;$
11. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x_0 = 2;$
12. $f(x) = 4e^x - 5x, \quad x_0 = 0;$
13. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x_0 = 1;$
14. $f(x) = \cos^2 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6};$
15. $f(x) = 2x + 3e^{3x}, \quad x_0 = 0;$
16. $f(x) = x^2 \ln x, \quad x_0 = e;$
17. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad x_0 = 1;$
18. $f(x) = \ln(2x+2), \quad x_0 = -\frac{1}{2};$
19. $f(x) = \frac{2x}{1-\sqrt{x-1}}, \quad x_0 = 2;$
20. $f(x) = \frac{1-\sqrt{2x-1}}{1-4x}, \quad x_0 = \frac{1}{4};$
21. $f(x) = \ln^2 x - 5, \quad x_0 = e;$
22. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}, \quad x_0 = 5;$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 3x - 2, \quad x_0 = 0;$
24. $f(x) = 3\sqrt{x} - x \ln x, \quad x_0 = 1;$
25. $f(x) = 0,25x^2 - \sqrt{2x-3}, \quad x_0 = 2;$
26. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}, \quad x_0 = 5;$
27. $f(x) = tg^2 2x - 2ctg 4x, \quad x_0 = \frac{\pi}{8};$
28. $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{2x-3}, \quad x_0 = 2;$
29. $f(x) = 0,5x^2 - 4\sqrt{2x+1}, \quad x_0 = 4;$
30. $f(x) = 8\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x+3}, \quad x_0 = 4.$

Тема 8. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Розглянемо неперервну функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Теорема Вейєрштраса. *Неперервна на відрізку функція має на цьому відрізку найбільше та найменше значення.*

Розглянемо випадки:

I. **Функція** на відрізку $[a;b]$ **не має критичних точок**, тобто функція монотонна на відрізку (зростає або спадає). **Найбільше та найменше значення функції знаходяться на кінцях відрізу $[a;b]$.**

II. **Функція** на відрізку $[a;b]$ **має критичні точки**. **Найбільше та найменше значення функції знаходяться у критичних точках або на кінцях відрізу $[a;b]$.**

При знаходженні найбільшого та найменшого значень функції на відрізку користуються **схемою**:

- 1⁰ **Знайти похідну функції та її критичні точки;**
- 2⁰ **Перевірити належність знайдених критичних точок заданому відрізку;**
- 3⁰ **Знайти значення функції на кінцях відрізу;**
- 4⁰ **Знайти значення функції у критичних точках, які належать даному відрізку;**

5⁰ Серед всіх знайдених значень функцій вибрати найбільше та найменше значення, які позначають $\max_{[a;b]} f(x)$, $\min_{[a;b]} f(x)$.

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на відріжку $[1;3]$.

Розв'язання: Знайдемо похідну та критичні точки,
 $f'(x) = x - x^2$, $f'(x) = 0$, $x - x^2 = 0$, $x(1-x) = 0$, $\begin{cases} x=0, \\ 1-x=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ x=1. \end{cases}$

$x=0 \notin [1;3]$, $x=1 \in [1;3]$ - критична точка, яка співпадає з кінцем відрізка.

Знайдемо значення функції на кінцях відрізка,

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = \frac{9}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9-27}{2} = -\frac{27}{6}.$$

Відповідь: $\min_{[1;3]} f(3) = -\frac{27}{6}$, $\max_{[1;3]} f(1) = \frac{1}{6}$.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}$ на відріжку $[-2;2]$.

Розв'язання: Знайдемо похідну та критичні точки,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2},$$

$$f'(x) = 0, \quad -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} = 0, \quad -\frac{1}{(x+3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}, \quad (x+3)^2 = (x-3)^2,$$

$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9$, $12x = 0$, $x = 0 \in [-2;2]$ - критична точка.

Знайдемо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка:

$$f(0) = \frac{2}{3}, \quad f(-2) = \frac{6}{5}, \quad f(2) = \frac{6}{5}$$

Відповідь: $\min_{[-2;2]} f(0) = \frac{2}{3}$, $\max_{[-2;2]} f(-2) = \frac{6}{5}$, $\max_{[-2;2]} f(2) = \frac{6}{5}$.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 4x^2$ на відріжку $[-1;1]$.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції та її критичні точки,

$$f'(x) = x^4 + 8x$$

$$f'(x) = 0, \quad x^4 + 8x = 0, \quad x(x^3 + 8) = 0, \quad \begin{cases} x=0, \\ x^3 = -8, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ x=-2. \end{cases}$$

$x=0 \in [-1;1]$, $x=-2 \notin [-1;1]$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізка

$$f(-1) = -\frac{1}{5} + 4 = 3\frac{4}{5}, \quad f(1) = \frac{1}{5} + 4 = 4\frac{1}{5}.$$

Знайдемо значення функції у критичній точці $x=0 \in [-1;1]$,

$$f(0) = 0.$$

Відповідь: $\min_{[-1;1]} f(0) = 0$, $\max_{[-1;1]} f(1) = 4\frac{1}{5}$.

Завдання для контролю

Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1. a) $f(x) = x^2 - 6x + 13$, $[0;6]$

б) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, $[0;3]$

2. a) $f(x) = 8 - 0,5x^2$, $[-2;2]$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

3. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $[1;3]$

б) $f(x) = x - 2\sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

4. a) $f(x) = 6x^2 - x^3$, $[-1;6]$

б) $f(x) = \cos 2x + 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

5. a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $[-4;4]$

б) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 20}{x+2}$, $[-1;6]$

6. a) $f(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{3x+15} - 24x + 10$, $[0;3]$

б) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 16}$, $[-3;2]$

7. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3}$, $[-2;2]$

б) $f(x) = \frac{20x+100}{x^2-9}$, $[-2;1]$

8. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - 4$, $[-4;2]$

б) $f(x) = \frac{5x-25}{x^2-9}$, $[-1;2]$

9. a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$, $[0;5]$

б) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+16}$, $[-5;5]$

10. a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $[0;6]$

б) $f(x) = \frac{10x+30}{x^2+4x+5}$, $[-2;1]$

11. a) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$, $[-1;1]$

б) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 25}{x-3}$, $[4;8]$

12. a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$, $[-3;0]$

16. a) $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3$, $[-1;1]$

б) $f(x) = \frac{7x-5}{x^2-16}$, $[-1;3]$

17. a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 7$, $[0;3]$

б) $f(x) = \frac{4x+4}{x^2+2x+5}$, $[-5;3]$

18. a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$, $[0;2]$

б) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, $[0;3]$

19. a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-6x^2+9x+3}$, $[0;2]$

б) $f(x) = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $[-1;2]$

20. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$, $[0;3]$

б) $f(x) = \frac{2x^2+6}{x^2+2x+5}$, $[-5;1]$

21. a) $f(x) = 3 + 8x - x^2$, $[2;25]$

б) $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $[-2;1]$

22. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, $[-2;1]$

б) $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, $[1;4]$

23. a) $f(x) = 3 + 2x^2 - 8x^3$, $[-2;0]$

б) $f(x) = 2x + 5 + \frac{8}{x-2}$, $3[-2;1]$

24. a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $[-3;2]$

б) $f(x) = 5 - x - \frac{4}{x^2-2x+1}$, $[2;5]$

25. a) $f(x) = -3x + 6x^2 - 1$, $[-2;2]$

б) $f(x) = \sqrt{3x-2}\sin x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

26. a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $[-1;5]$

б) $f(x) = -x - \frac{4}{x^2+2x+4} + 3$, $[-1;2]$

27. a) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$

$$\begin{array}{ll}
\text{б) } f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x^2 + 2x + 5}, & [-5;1] \\
13. \text{ а) } f(x) = \frac{x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3}{x^2 - x + 16}, & [-1;2] \\
\text{б) } f(x) = \frac{1}{x-1}, & [2;9] \\
14. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5, & [2;4] \\
\text{б) } f(x) = \frac{1}{x-1}, & [-3;0] \\
15. \text{ а) } f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 1}{x^2 - 4x + 4}, & [0;3] \\
\text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2}, & [1;4] \\
\text{б) } f(x) = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13, & [2;5] \\
28. \text{ а) } f(x) = x^2 + \frac{16}{-4x^2 - 6x} - 16, & [1;4] \\
\text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, & [-2;1] \\
29. \text{ а) } f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}, & [1;4] \\
\text{б) } f(x) = 6 - x - \frac{1}{x^2 + 8x + 16}, & [-2;4] \\
30. \text{ а) } f(x) = \frac{-x + 2}{4x} \sqrt{x-1} + 2, & [1;5] \\
\text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}, & [0;4]
\end{array}$$

Тема 9. Критичні точки функції. Знаходження критичних точок
Означення. Критичними точками функції називаються внутрішні точки її області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Критичні точки функції знаходяться за допомогою похідної.

Схема:

$y = f(x)$ - функція

1⁰ Знайти область визначення функції (ОДЗ)

2⁰ Знайти похідну функції y'

3⁰ Розв'язати рівняння $y' = 0$

Приклад 1. Знайти критичні точки функції $f(x) = x^4 - 4x + 3$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$4x^3 - 4 = 0, \quad x^3 = 1, \quad x = 1 \in \text{ОДЗ}$$

У точці $x = 1$ похідна дорівнює нулю.

Відповідь: $x = 1$ - критична точка.

Приклад 2. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \neq 0$

Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)' \cdot x - x' \cdot (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$\begin{array}{l}
x^2 - 1 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \in \text{ОДЗ} \\ x = -1 \in \text{ОДЗ} \end{array} \right. \\
x^2 \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

У точках $x = -1$, $x = 1$ похідна дорівнює нулю, у точці $x = 0$ похідна не існує.

Відповідь: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ - критичні точки.

Приклад 3. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x > 0$

Знайдемо похідну функції: $f'(x) = x - \frac{1}{x}$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$x - \frac{1}{x} = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \in \text{ОДЗ} \\ x = -1 \notin \text{ОДЗ} \end{cases}$$

У точці $x = 1$ похідна дорівнює нулю, у точці $x = 0$ похідна не існує.

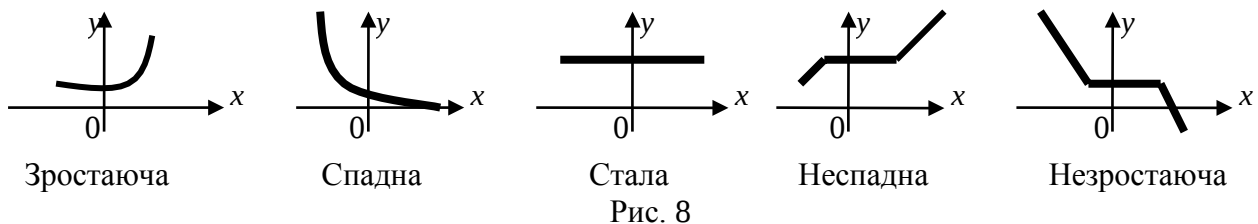
Точка $x = -1$ не належить ОДЗ.

Відповідь: $x = 0, x = 1$ - критичні точки.

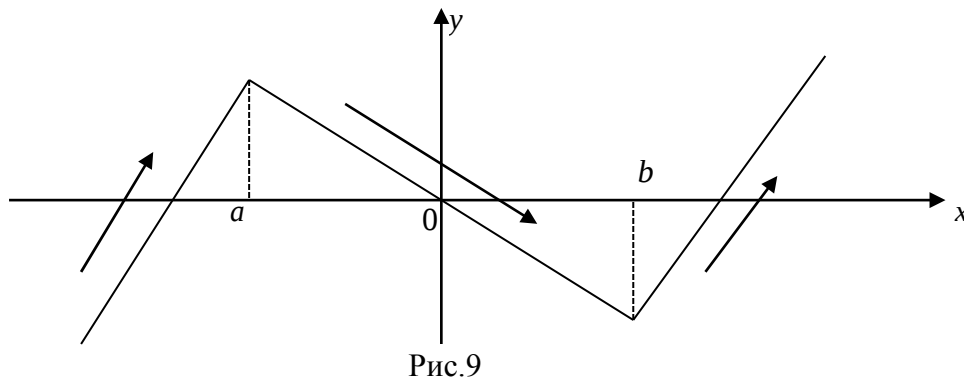
Тема 10. Монотонність функції. Дослідження функції на монотонність.

10.1 Монотонність функції

Означення 1. Функція, яка на всій області визначення є зростаючою, або спадною, або не зростаючою, або не спадною, називається монотонною.



Означення 2. Функція називається монотонною на інтервалах, якщо на кожному інтервалі її області визначення, вона є монотонною.



Елементарні функції монотонні або на всій області визначення, або на інтервалах.

10.2 Дослідження функції на монотонність

Монотонність функції характеризується знаком першої похідної.

Схема:

$y = f(x)$ - функція

1⁰ Знайти ОДЗ

2⁰ Знайти критичні точки функції та установити їх належність ОДЗ

3⁰ На прямій, яка символізує ОДЗ відмітити критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначити знак першої похідної, підставляючи значення змінної із інтервалу у першу похідну функції.

4⁰ Установити зростання або спадання функції на інтервалах, користуючись критерієм монотонності:

Якщо $f'(x) > 0$ у кожній точці інтервалу, то функція зростає на інтервалі, якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці інтервалу, то функція спадає на інтервалі.

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x + 1$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

Знайдемо першу похідну функції та її критичні точки:

$$f'(x) = -x^3 - 1$$

$$f'(x) = 0, \quad -x^3 - 1 = 0, \quad -x^3 = 1, \quad x = -1 \in \text{ОДЗ},$$

$x = -1$ - критична точка

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичну точку. Дивимось рисунок 10.

Визначимо знак першої похідної на кожному інтервалі, підставляючи значення змінної x із інтервалу у першу похідну функції:

Розглянемо інтервал $x \in (-\infty; -1)$,

$x = -2 \in (-\infty; -1)$, $f'(-2) = 7 > 0$, ставимо на інтервалі знак «+»;

розглянемо інтервал $x \in (-1; +\infty)$,

$x = 0 \in (-1; +\infty)$, $f'(0) = -1 < 0$, ставимо на інтервалі знак «-».

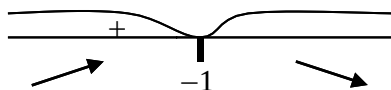


Рис.10

Установити зростання або спадання функції на інтервалах, користуючись критерієм монотонності.

Відповідь: Функція зростає при $x \in (-\infty; -1)$, спадає при $x \in (-1; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = \frac{1}{3x-2}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $3x - 2 \neq 0, \quad x \neq \frac{2}{3}$.

Знайдемо першу похідну функції та її критичні точки:

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot (3x-2) - (3x-2)' \cdot 1}{(3x-2)^2} = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0, \quad -\frac{3}{(3x-2)^2} \neq 0 \text{ при будь-яких значень змінної } x \text{ із ОДЗ. При } x = \frac{2}{3} \text{ похідна не}$$

існує.

$x = \frac{2}{3}$ - критична точка.

$$f'(x) = -\frac{3}{(3x-2)^2} < 0 \text{ для будь-яких значень змінної } x \text{ із ОДЗ}$$

Функція спадає при будь-яких значень змінної x із ОДЗ.

Приклад 3. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = \sqrt{x - 2x^2}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x - 2x^2 \geq 0$ - неповна квадратна нерівність, яку розв'яжемо методом інтервалів:

$$x(1 - 2x) \geq 0,$$

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2} - \text{нулі функції}$$

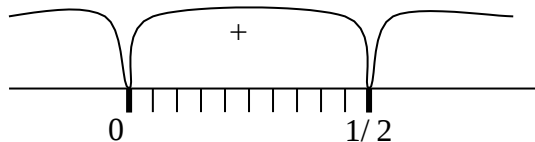


Рис.11

$$x \in \left[0; \frac{1}{2} \right].$$

Знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 2x^2}} \cdot (x - 2x^2)' = \frac{1 - 4x}{2\sqrt{x - 2x^2}}$$

Знайдемо критичні точки функції:

$$f'(x) = 0, \quad \frac{1 - 4x}{2\sqrt{x - 2x^2}} = 0, \quad \begin{cases} 1 - 4x = 0 \\ \sqrt{x - 2x^2} \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \in \text{ОДЗ}, \\ x(1 - 2x) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 0 - \text{критичні точки функції}$$

Установимо інтервали зростання і спадання функції:

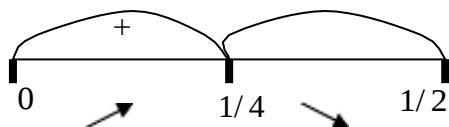


Рис.12

Відповідь: Функція зростає при $x \in \left[0; \frac{1}{4} \right)$, спадає при $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$.

Тема 11. Екстремуми функції. Дослідження функції на екстремум.

11.1 Екстремуми функції.

Означення 1. Екстремумом функції називається її максимум та мінімум.

Означення 2. Точкою екстремуму функції називається точка максимуму або мінімуму.

Позначається $f_{\max}(x_0)$ - максимум, x_0 - точка максимуму,

$f_{\min}(x_0)$ - мінімум, x_0 - точка мінімуму

Означення 3. Точка x_0 із області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму функції, якщо для будь-яких $x \neq x_0$ із околу δ точки x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

На рисунку 13 зображені графіки функцій, які мають точку максимуму x_0 , $f_{\max}(x_0)$ – максимум.

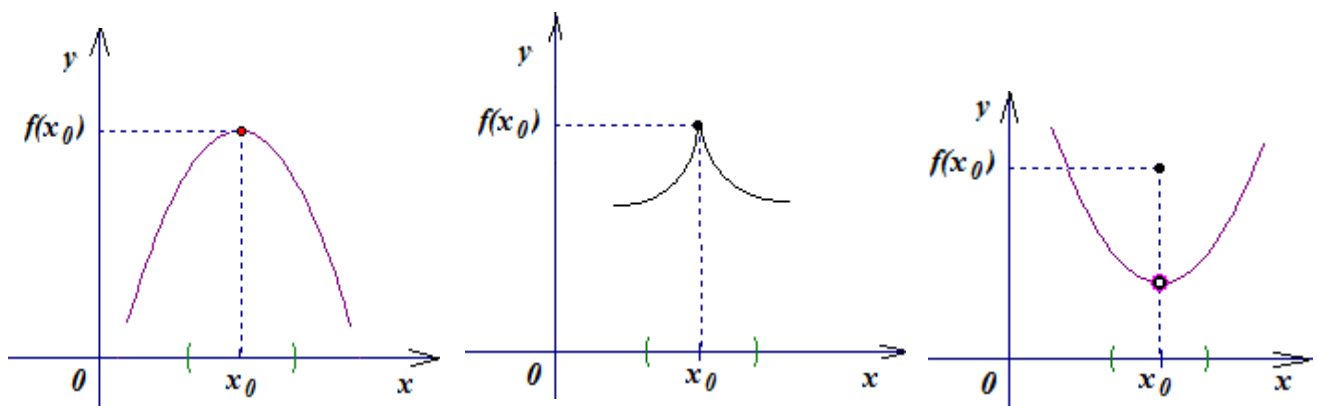


Рис.13

Означення 4. Точка x_0 із області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму функції, якщо для будь-яких $x \neq x_0$ із околу δ точки x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

На рисунку 14 зображені графіки функцій, які мають точку мінімуму x_0 , $f_{\min}(x_0)$ – мінімум.

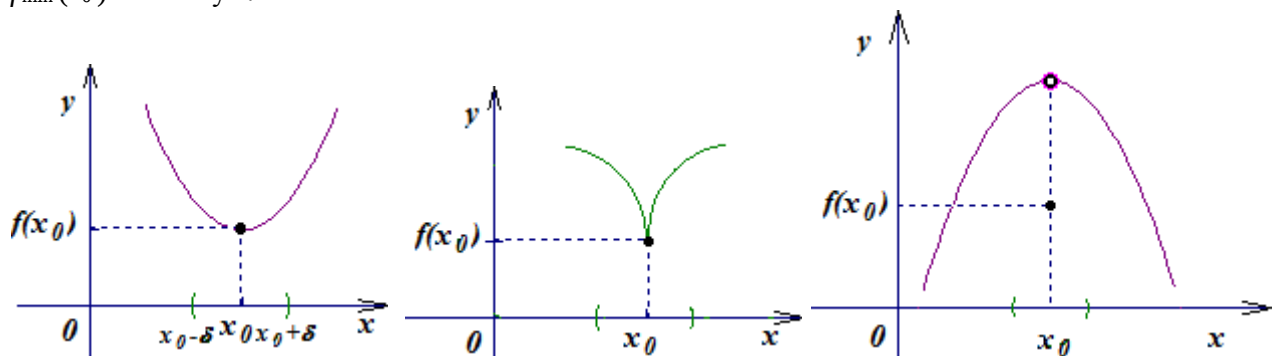


Рис.14

11.2 Дослідження функції на екстремум.

Екстремуми функції знаходяться за допомогою першої похідної.

Схема:

$y = f(x)$ - функція

1⁰ Знайти ОДЗ

2⁰ Знайти критичні точки та установити їх належність ОДЗ

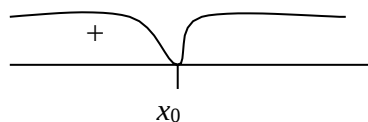
3⁰ На прямій, яка символізує ОДЗ відмітити критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначити знак першої похідної, підставляючи значення змінної x

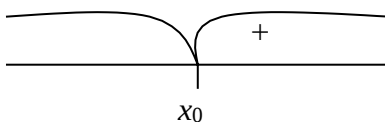
із інтервалу у першу похідну функції.

4⁰ Установити точки екстремумів, користуючись критерієм існування екстремуму:

Якщо функція неперервна у точці і похідна функції змінює знак при переході через критичну точку x_0 , x_0 - точка екстремуму. Якщо з «+» на «-», то x_0 - точка максимуму, якщо з «-» на «+», то x_0 - точка мінімуму. Дивимось рисунок 15.



x_0 - точка максимуму



x_0 - точка мінімуму

Рис.15

5⁰ **Обчислити екстремуми** $f_{\max}(x_0)$, $f_{\min}(x_0)$ **як значення функції у точках максимуму та мінімуму.**

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$

Знайдемо першу похідну функції та її критичні точки:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$f'(x) = 0, \quad 6x^2 - 18x + 12 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 = 0, \quad D = 1, \quad \begin{cases} x = 1 \in \text{ОДЗ}, \\ x = 2 \in \text{ОДЗ} \end{cases}$$

$x = 1$, $x = 2$ - критичні точки.

Дивимось рисунок 16.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначимо знак першої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у першу похідну функції.



Рис.16

Установимо точки екстремумів, користуючись критерієм існування екстремуму, обчислимо екстремуми:

$x = 1$ - точка максимуму, $f_{\max}(1) = -10$ - максимум,

$x = 2$ - точка мінімуму, $f_{\min}(2) = -11$ - мінімум.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x^2 + 1 \neq 0$ для будь-яких значень змінної $x \in R$.

Знайдемо першу похідну функції та її критичні точки:

$$f'(x) = \frac{(3x)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot 3x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0, \quad \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = 0, \quad \begin{cases} -3x^2 + 3 = 0 \\ (x^2 + 1)^2 \neq 0, \forall x \in R \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x \in R \end{cases}$$

$x = -1$, $x = 1$ - критичні точки.

Дивимось рисунок 17.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначимо знак першої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у першу похідну функції.

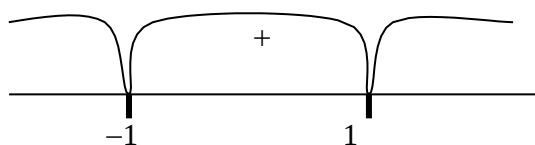


Рис.17

Установимо точки екстремумів, користуючись критерієм існування екстремуму, обчислимо екстремуми:

$x = -1$ - точка мінімуму, $f_{\max}^{(1)} = -\frac{3}{2}$ - мінімум,

$x = 1$ - точка максимуму, $f_{\max}^{(1)} = \frac{3}{2}$ максимум.

Тема 12. Опуклість функції. Дослідження функції на опуклість.

12.1 Опуклість функції. Напрями опуклості.

Означення 1. Крива $y = f(x)$ називається опуклою вниз на інтервалі $(a;b)$, якщо вона лежить вище дотичної, проведеної у будь-якій точці цього інтервалу.

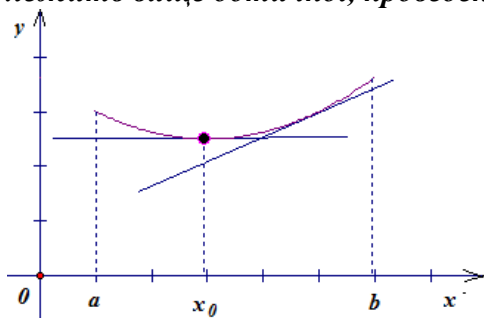


Рис.18

Означення 2. Крива $y = f(x)$ називається опуклою вгору на інтервалі $(a;b)$, якщо вона лежить нижче дотичної, проведеної у будь-якій точці цього інтервалу.

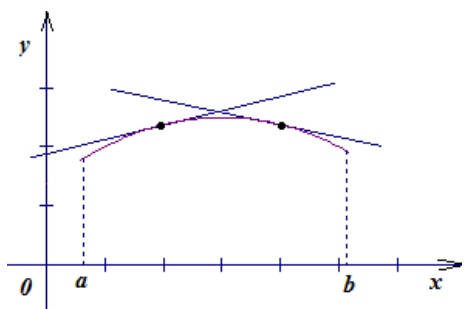


Рис.19

Означення 3. Інтервали, у яких графік функції має опуклість напрямку вниз або вгору, називають інтервалами опуклості функції.

12.2 Дослідження функції на опуклість.

Опуклість функції характеризується знаком другої похідної.

Схема:

$y = f(x)$ - функція

1⁰ Знайти ОДЗ

2⁰ Знайти другу похідну, критичні точки та установити їх належність ОДЗ.

3⁰ На прямій, яка символізує ОДЗ відмітити критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначити знак другої похідної, підставляючи значення змінної із інтервалу у другу похідну функції.

4⁰ **Визначити напрям опуклості за критерієм:**

Якщо у деякому проміжку $f''(x) > 0$. То крива опукла вниз на цьому проміжку.

Якщо $f''(x) < 0$, то крива опукла вгору на цьому проміжку.

Приклад 1. Визначити напрям опуклості графіка функції $y = x^2 + 3x - 1$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$

Знайдемо другу похідну та її критичні точки :

$y' = 2x + 3$, $y'' = 2$, критичних точок другої похідної немає.

Визначимо знак другої похідної:

$$y'' = 2 > 0, \forall x \in R$$

Крива $y = x^2 + 3x - 1$ опукла вниз на всієї ОДЗ.

Приклад 2. Визначити напрям опуклості графіка функції $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in R$

Знайдемо другу похідну та її критичні точки :

$$y' = 3x^2 - 12x + 2, y'' = 6x - 12,$$

$$y'' = 0, 6x - 12 = 0, x = 2 - \text{критична точка}$$

Дивимось рисунок 20.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичну точку.

На кожному інтервалі визначимо знак другої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у другу похідну функції, напрям опуклості.

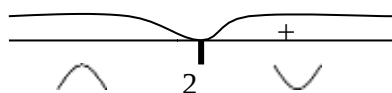


Рис. 20

Крива опукла вгору при $x \in (-\infty; 2)$, опукла вниз при $x \in (2; +\infty)$.

Приклад 3. Визначити напрям опуклості графіка функції $y = \ln(x^2 + 1)$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x^2 + 1 > 0$ для будь-яких значень змінної $x \in R$.

Знайдемо другу похідну та її критичні точки :

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y'' = \frac{(2x)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = 0, \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0, \begin{cases} -2x^2 + 2 = 0 \\ (x^2 + 1)^2 \neq 0, \forall x \in R \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \in \text{ОДЗ} \\ x = -1 \in \text{ОДЗ} \\ x \in R \end{array} \right.$$

$$x = -1, x = 1 - \text{критичні точки.}$$

Дивимось рисунок 21.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначимо знак другої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у другу похідну функції, напрям опуклості.

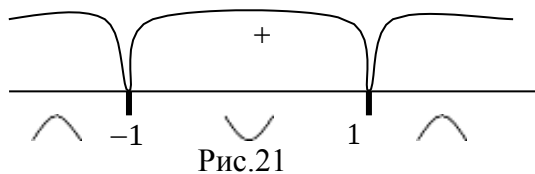


Рис.21

Крива опукла вгору при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, опукла вниз при $x \in (-1; 1)$.

Тема 13. Точки перегину. Дослідження функції на точки перегину

13.1 Точки перегину

Означення 1. Точки графіка функції, які поділяють протилежні напрями опуклості цього графіка, називаються точками перегину.

Означення 2. Точки перегину – критичні точки, які належать ОДЗ функції, у яких друга похідна функції дорівнює нулю або не існує.

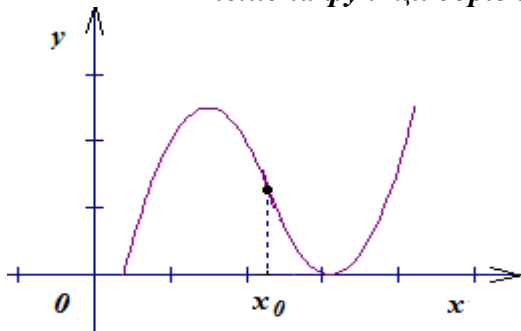


Рис.22

13.2 Дослідження функції на точки перегину.

Точки перегину знаходяться за допомогою другої похідної.

Схема:

$y = f(x)$ - функція

1⁰ Знайти ОДЗ

2⁰ Знайти другу похідну, критичні точки та установити їх належність ОДЗ.

3⁰ На прямій, яка символізує ОДЗ відмітити критичні точки у порядку зростання.

На кожному інтервалі визначити знак другої похідної, підставляючи значення змінної із інтервалу у другу похідну функції.

4⁰ Визначити точки перегину за допомогою критерію існування точок перегину:

Якщо друга похідна при переході через критичні точки змінює свій знак, то у цій точці існує перегин.

5⁰ Знайти значення функції у точках перегину.

Приклад 1. Знайти точки перегину функції $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

Знайдемо другу похідну та її критичні точки :

$$y' = x^2 - 6x + 8, \quad y'' = 2x - 6, \quad y'' = 0, \quad 2x - 6 = 0, \quad x = 3$$

$x = 3$ - критична точка

Дивимось рисунок 23.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичну точку.

На кожному інтервалі визначимо знак другої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у другу похідну функції.

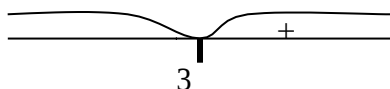


Рис.23

$x = 3$ - точка перегину

$y(3) = 2$ - значення функції у точці перегину.

Приклад 2. Знайти точки перегину функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x^2 - 3 \neq 0$, $x^2 \neq 3$, $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Знайдемо другу похідну та її критичні точки :

$$f'(x) = \frac{(x^3)' \cdot (x^2 - 3) - (x^2 - 3)' \cdot x^3}{(x^2 - 3)^2} = \frac{3x^2(x^2 - 3) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^4 - 9x^2)' \cdot (x^2 - 3)^2 - (x^4 - 9x^2) \cdot (x^2 - 3)'}{(x^2 - 3)^4} = \frac{(4x^3 - 18x)(x^2 - 3) - (x^4 - 9x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^4} = \frac{2x((2x^2 - 9)(x^2 - 3) - 2(x^4 - 9x^2))}{(x^2 - 3)^4} = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}$$

$$f''(x) = 0, \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3} = 0, \begin{cases} 6x = 0 \\ x^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (x^2 - 3)^3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -\sqrt{3} \end{cases}$$

$x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = 0$ - критичні точки

Дивимось рисунок 24.

На прямій, яка символізує ОДЗ відмітимо критичні точки.

На кожному інтервалі визначимо знак другої похідної, підставляючи значення змінної x із інтервалу у другу похідну функції.

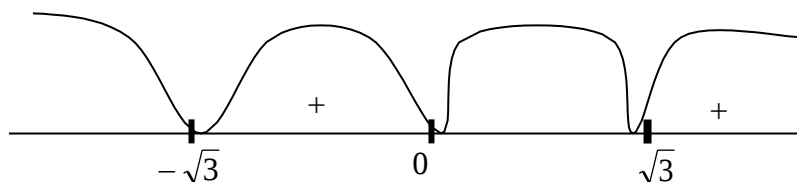


Рис.24

У точках $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ функція не існує,

$x = 0$ - точка перегину

$y(0) = 0$ - значення функції у точці перегину.

Тема 14. Дослідження функцій та побудова графіків.

14.1 Загальна схема дослідження функцій.

¹ Знайти область визначення функції та множину її значень.

² Дослідити функцію на парність та непарність, періодичність.

³ Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

⁴ Знайти асимптоти кривої, якщо вони існують. Дослідити поведінку функції в околах точок розриву.

5⁰ Знайти першу похідну функції, її критичні точки, дослідити функцію на монотонність та екстремуми.

6⁰ Знайти другу похідну функції, її критичні точки, дослідити функцію на точки перегину та опуклість.

7⁰ Результати дослідження занести у таблицю.

8⁰ Побудувати графік функції. (Іноді, для точності побудови, необхідно знайти достатню кількість контрольних точок, через які він проходить).

На практиці не завжди є потреба досліджувати функцію за наведеною схемою і в такій самій послідовності.

14.2 Твердження, якими можна користуватися при дослідженні функцій та побудові графіків.

Для складних функцій $y = f(\varphi(x))$ справедливі твердження:

1. Якщо функція $z = \varphi(x)$ парна, то складна функція також парна.
2. Якщо функція $y = f(z)$ і $z = \varphi(x)$ непарні, то складна функція непарна.
3. Якщо $z = \varphi(x)$ непарна, а функція $y = f(x)$ парна, то складна функція парна.
4. Якщо функція $z = \varphi(x)$ періодична, то і складна функція $y = f(\varphi(x))$ періодична, причому її період може бути меншим за період функції $z = \varphi(x)$, але не більшим; їх періоди збігаються, якщо функція f строго монотонна.

Для парних та непарних функцій справедливі твердження:

1. Сума скінченного числа парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією.
2. Добуток парних функцій є парною функцією;
3. Добуток непарних функцій є парною функцією, якщо число функцій-множників – парне число, і непарною, якщо число функцій-множників непарне.
4. Добуток (частка) парної і непарної функції є функцією непарною.

14.3 Дослідження функції та побудова графіків

Приклад 1. Дослідити функцію $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ за допомогою похідної та побудувати її графік.

- 1) Знайдемо область визначення функції:

$x \in \mathbb{R}$, многочлени неперервні.

- 2) Встановимо парність, непарність, періодичність функції:

$$f(x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 2(-x)^2 + 3(-x) + 4 = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \neq f(x)$$

$$-\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4\right) \neq -f(x)$$

Функція є ні парна ні непарна, ні періодична.

- 3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

Ох: $f(x) = 0$, задача розв'язання кубічного рівняння достатньо складна. До того ж цілі розв'язки таких рівнянь не завжди є.

$$\text{Оу: } x = 0, \quad f(x) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4 = 4, \quad (0; 4) - \text{ точка перетину графіка функції}$$

з віссю Оу.

- 4) Асимптот не має.

- 5) Знайдемо першу похідну та її критичні точки. Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми.

Знайдемо похідну: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

Знайдемо критичні точки: $f'(x) = 0$,

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$x=1, x=3$ - критичні точки першої похідної

Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

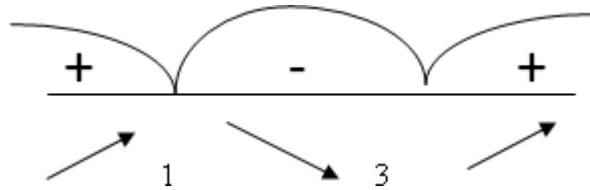


Рис.25

Похідна додатна на інтервалах $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, тому функція зростає на цих інтервалах.

Похідна від'ємна на інтервалі $(1; 3)$, тому функція спадає на цьому інтервалі.

Похідна при переході через критичну точку $x=1$ змінює свій знак з «+» на «-», тому у цій точці існує максимум. У точці $x=3$ похідна змінює свій знак з «-» на «+», тому у точці існує мінімум.

6) Знайдемо другу похідну, її критичні точки. Дослідимо функцію на опуклість та точки перегику.

Знайдемо другу похідну: $f''(x) = 2x - 4$

Знайдемо критичні точки другої похідної: $f''(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$x = 2$ - критична точка другої похідної.

Дослідимо функцію на опуклість та точки перегику:

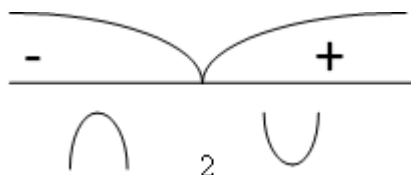
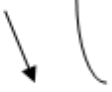
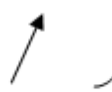


Рис.26

Друга похідна на інтервалі $(-\infty; 2)$ від'ємна, тому функція опукла вгору на цьому інтервалі. На інтервалі $(2; +\infty)$ друга похідна додатна, тому функція на інтервалі опукла вниз. Друга похідна змінює свій знак при переході через точку $x = 2$, у цій точці існує перегин.

7) Результати досліджень занесемо у таблицю:

	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-		-	0	+		+
$f(x)$		$5\frac{1}{3}$ max		$4\frac{2}{3}$ Перегин		4 min	

8) Побудуємо графік функції:

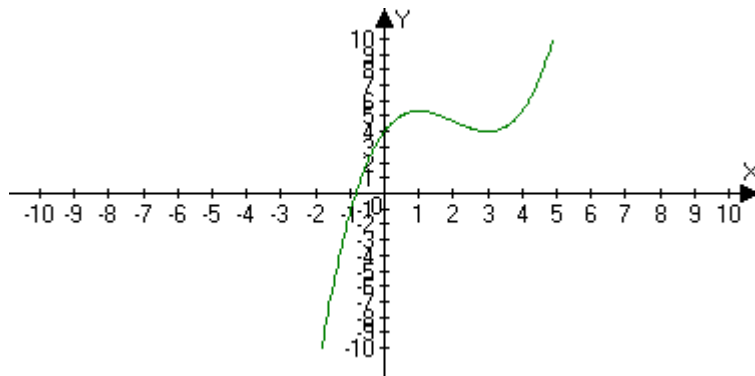


Рис.27

Приклад 2. Дослідити функцію $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ за допомогою похідної та побудувати її графік.

1) Знайдемо область визначення функції:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$|x| \neq 2, \text{ тобто } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$x \neq \pm 2$$

$$x \neq \pm 2$$

2) Встановимо періодичність, парність або непарність функції:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = f(x). \text{ Функція парна. Тому її графік симетричний}$$

відносно осі ординат.

Функція не є періодичною. Це впливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

Точки перетину графіка функції з віссю $OX: y = 0$,

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}, \quad x^2 + 4 \neq 0, \text{ тому точок перетину з віссю } OX \text{ немає.}$$

Точки перетину графіка функції з віссю $OY: x = 0$,

$$\frac{0^2 + 4}{0^2 - 4} = -1,$$

тому графік функції перетинає вісь ординат у точці $(0;1)$.

4) Знайдемо асимптоти кривої.

I. Вертикальні асимптоти.

Функція має точки розриву $x = -2$, $x = 2$. Тому $x = -2$, $x = 2$ - рівняння вертикальних асимптот. Дослідимо поведінку функції в околах точок розриву:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = -\infty$$

II. Похилі асимптоти, горизонтальні асимптоти.

Нехай $y = kx + b$ - рівняння похилої асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} - 0 \cdot x \right] = 1,$$

$y = 0x + 1 = 1$, $y = 1$ - горизонтальна асимптота.

5) Знайдемо першу похідну, її критичні точки. Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми.

Знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2};$$

Знайдемо критичні точки першої похідної. Критичними точками називають точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. Тому $f'(x) = 0$,

$$\frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -16x = 0 \\ (x^2 - 4)^2 \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases},$$

$x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ - критичні точки першої похідної.

Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

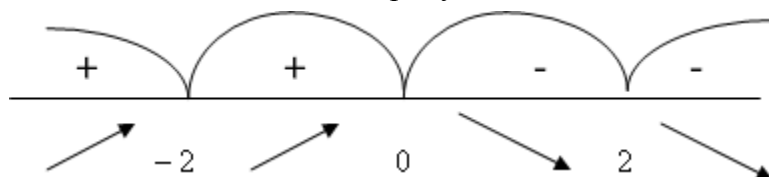


Рис.28

Похідна додатна на інтервалах $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, тому функція зростає,

Похідна від'ємна на інтервалах $(0; 2) \cup (2; +\infty)$, тому функція спадає. У точці $x = 0$, тому у цій точці існує максимум.

6) Знайдемо другу похідну функції, її критичні точки. Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину.

Знайдемо другу похідну функції:

$$f''(x) = -16 \cdot \frac{(x-4)^2 - x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -16 \cdot \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^4} = 16 \cdot \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}.$$

Знайдемо критичні точки другої похідної:

$$f'' = 0, \quad 16 \cdot \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2+4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:

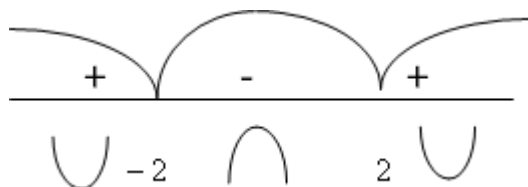


Рис.29

На проміжках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку $(-2; 2)$ $f''(x) < 0$, а тому графік функції опуклий вверх. Друга похідна не існує у точках $x = -2, x = 2$. Тому точок перегину кривої немає.

7) Результати досліджень занесемо у таблицю:

⊕

	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	не існ.	+	0	-	не існ.	-
$f''(x)$	+	не існ.	-		-	не існ.	+
$f(x)$		не існ.		-1 max		не існ.	

8) Побудуємо графік функції:

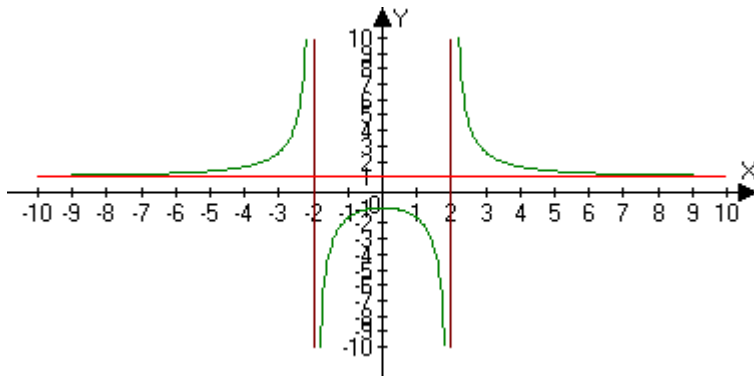


Рис.30

Приклад 3. Дослідити функцію $f(x) = \sin x - \ln \sin x$ за допомогою похідної та побудувати її графік.

1) Знайдемо область визначення функції:

$$\sin x > 0$$

$$x = (2\pi k; \pi + 2\pi k).$$

2) Функція не належить ні до парних, ні до непарних. Це безпосередньо впливає з того, що область її визначення несиметрична відносно нуля.

Період функції $T = 2\pi$. Тому дослідження функції достатньо спочатку провести на проміжку $(0; \pi)$. Крім того, враховуючи, що $\sin(\pi - x) = \sin x$, робимо висновок про симетричність графіка відносно прямої $x = \frac{\pi}{2}$ на проміжку $(0; \pi]$. Тому можна обмежитися дослідженням функції на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Знайдемо точки перетину з осями координат.

$$\text{Ох: } f(x) = 0, \text{ але } f(x) = \sin x - \ln \sin x \neq 0, \text{ тому що } \sin x > 0, \ln \sin x < 0, \\ f(x) = \sin x - \ln \sin x > 0$$

Точок перетину з віссю Ох не має.

$$\text{Оу: } x = 0, \text{ але область визначення функції } x = (2\pi k; \pi + 2\pi k), \text{ тому } x \neq 0.$$

Точок перетину з віссю Оу не має.

4) Знайдемо асимптоти кривої, якщо вони існують.

Визначимо поведінку функції біля нуля справа і біля π зліва:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x - \ln \sin x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} (\sin x - \ln \sin x) = +\infty.$$

Отже, прямі $x=0$, $x=\pi$ – вертикальні асимптоти.

Тоді прямі з рівняннями $x=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – вертикальні асимптоти.

5) Знайдемо першу похідну та її критичні точки. Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x \left(1 - \frac{1}{\sin x} \right).$$

Знайдемо критичні точки: $f'(x) = 0$, $\cos x \left(1 - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$, $\cos x = 0$ або $1 - \frac{1}{\sin x} = 0$

$$\cos x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$1 - \frac{1}{\sin x} = 0, \quad \frac{1}{\sin x} = 1, \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \text{критичні точки першої похідної.}$$

Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ $f'(x) < 0$

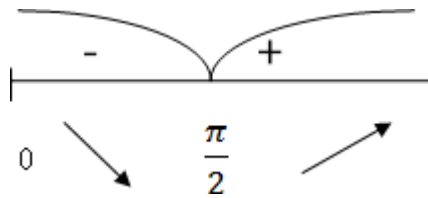


Рис.31

. Тому функція на цьому проміжку спадає. Тоді на проміжку $x = \frac{\pi}{2}$ має мінімум, який дорівнює 1.

$\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ вона зростає, а в точці $\frac{\pi}{2}$

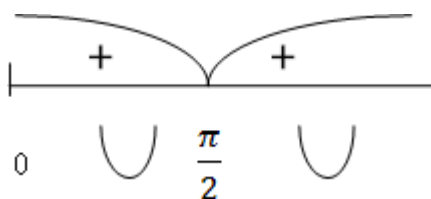
Враховуючи періодичність функції, робимо висновок, що вона на проміжках $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$ і зростає на проміжках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ набуває мінімального значення, яке дорівнює 1.

6) Дослідимо функцію на опуклість на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Знайдемо другу похідну: $f''(x) = -\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Знайдемо критичні точки: $f''(x) = 0$, $-\sin x + \frac{1}{\sin^2 x} = 0$, $\frac{-\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin^3 x + 1 = 0, \\ \sin^2 x \neq 0 \end{cases}$
 $-\sin^3 x = -1$, $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Дослідимо функцію на опуклість:



Звідси безпосередньо випливає, що для $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вгору. Тоді і на проміжку $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ він опуклий вгору. Таким чином, на проміжках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ графік функції опуклий вгору.

7) Побудуємо графік функції:

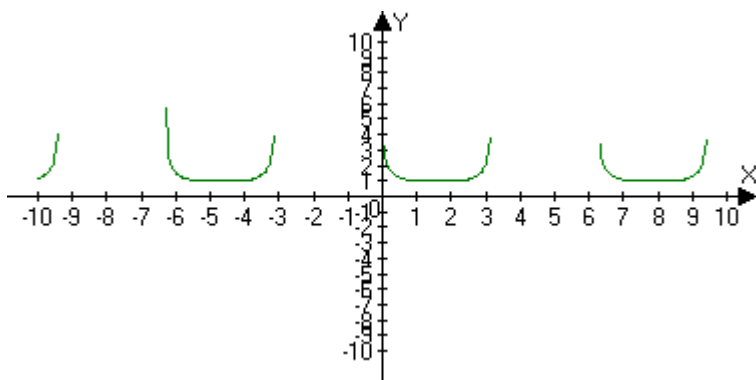


Рис.33

Завдання для контролю

Дослідити функцію за допомогою похідної та побудувати графік:

1. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$,
б) $y = \frac{x^2}{4 - x^3}$;
2. а) $y = \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 8}{2}$,
б) $y = \frac{x^2}{x^2 + 2x}$;
3. а) $y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 5}$,
б) $y = \frac{x^2}{x - 3}$;
4. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 2$,
б) $y = \frac{x^2}{x - 1}$;
5. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$,
16. а) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$,
б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;
17. а) $y = \frac{x^3 - 3x}{x^3 + 4}$,
б) $y = \frac{x^2}{x^2}$;
18. а) $y = \frac{x^3 - 3x}{2x}$,
б) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$;
19. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$,
б) $y = \frac{x^3}{x - 1}$;
20. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$,

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad y &= \frac{x^3}{x^2 + 1}; \\ 6. \text{ а)} \quad y &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{4x^3 + 5}{x}; \\ 7. \text{ а)} \quad y &= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{4x}{4 + x^2}; \\ 8. \text{ а)} \quad y &= x^3 - 9x^2 + 24x - 12, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{9 - x^2}; \\ 9. \text{ а)} \quad y &= x^3 - 3x^2 + 1, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{1 - x^2}; \\ 10. \text{ а)} \quad y &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{x^2 - 6x + 5}; \\ 11. \text{ а)} \quad y &= 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{x^2 + 2x + 1}; \\ 12. \text{ а)} \quad y &= -\frac{1}{4}x^4 - x + 1, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{x^2 - 4x + 3}; \\ 13. \text{ а)} \quad y &= x^3 - 6x^2 + 4, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{4x^3}{x^3 - 1}; \\ 14. \text{ а)} \quad y &= x^4 - 4x + 3, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^4}{x^3 - 1}; \\ 15. \text{ а)} \quad y &= 2x^4 - 8x, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{5x}{5 + x^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad y &= \frac{x^2 + 6x - 5}{x}; \\ 21. \text{ а)} \quad y &= x^3 - 6x^2 + 16, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}; \\ 22. \text{ а)} \quad y &= 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{3x^2 - 1}{x^3}; \\ 23. \text{ а)} \quad y &= \frac{-x^4 + 8x^2 + 9}{4x^3 + 1}, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{x^4}; \\ 24. \text{ а)} \quad y &= x^4 - 5x^2 + 4, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{2x}{1 + x^2}; \\ 25. \text{ а)} \quad y &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{16 - x^2}; \\ 26. \text{ а)} \quad y &= x^4 - 4x + 4, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x}{x^2 + 2x - 3}; \\ 27. \text{ а)} \quad y &= x^3 + 3x^2, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^3 + 1}{x^2}; \\ 28. \text{ а)} \quad y &= \frac{1}{3}x^3 - 4x, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^3}{x^2 - 4}; \\ 29. \text{ а)} \quad y &= x^3 - 12x^2 + 1, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^3}{x - 2}; \\ 30. \text{ а)} \quad y &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}, \\ \text{б)} \quad y &= \frac{x^2}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Рекомендована література

1. *Богомолов Н.В.* Практические занятия по математике / Учеб.пособие для техникумов.-3-е узд., перераб. и доп. - М.: Высш.шк., 1990.-495с.
2. *Бубняк Т.І.* Вища математика / Т.І. Бубняк Навчальний посібник.- Львів: «Новий Світ-2000», 2007. – 436 с.
3. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч / за заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П.Овчинникова.
 - 3.1 Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн.навч.закл./ – 2-ге вид., стереотип. – К.:Техніка, 2004.-279 с.
 - 3.2 Ч.2: Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння мат. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і мат. Статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи: Навч. посібник для студ. вищ. техн.навч.закл./ – 2-ге вид., стереотип. - К.: Техніка, 2004.-376 с.
4. *Овчинников П.П.* Вища математика/ Підручник. У 2 ч.
 - 4.1 Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення/ П.П.Овчинников, Яремчук Ф.П., Михайленко В.М; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка.-3-тє вид., випр.-К.: Техніка, 2003.-600с.
 - 4.2 Ч. 2: Диференціальні рівняння.Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики.Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П.П.Овчинникова; Пер. з рос. Є.В. Бондарчук, Ю.Ю. Костриці, Л.П. Оніщенко.3-тє вид., випр.-К.:Техніка,2004.-792с.

Допоміжна

5. *Коваленко І.П.* Вища математика/ Коваленко І.П. Навч. посіб. - К.: Вища шк., 2006. – 343 с.
6. *Лейфура В.М.* Математика / В.М. Лейфура Г.І. Голодницький, Й.І.Файст : Підручник для студентів екон. спеціальностей вищ. навч. закладів І-ІІ рівнів акредитації / – К.: Техніка, 2003. - 640 с.

Навчально-методичне видання

Бакуніна О.В.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Похідні, диференціали та їх застосування

**Методичні вказівки до практичних занять
для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»
за спеціальністю 125 «Кібербезпека»**