

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Векторні і тензорні поля.

1. Векторний простір, його розмірність і базис.
2. Перетворення компонент векторів при повороті і при інверсії декартової системи координат. Взаємні базиси. Контраваріантні і коваріантні компоненти.
3. Тензори n -го рангу.
4. Перетворення компонентів тензора. Метричний тензор. Піднімання й опускання (перекидання) індексів.
5. Операції з тензорами.
6. Власні вектори і власні значення тензора.
7. Приведення тензора до діагонального виду.

Векторний простір, його розмірність і базис

Розглянемо непорожню множину V елементів $x, y, z, \dots$ і множину R дійсних чисел. Множина V елементів $x, y, z, \dots$ називається *лінійним або векторним простором* (ЛП), якщо:

- 1) заданий закон, згідно з яким, будь-якій парі x, y елементів множини V ставиться у відповідність деякий елемент цієї ж множини V , який називається сумою x та y і позначається $x + y$ (внутрішня операція);
- 2) заданий закон, згідно з яким кожному елементу $x \in V$ і будь-якому дійсному числу α ставиться у відповідність деякий елемент цієї ж множини V , який називається добутком елемента x на число α і позначається αx (зовнішня операція).

Припустимо, що для введених операцій виконуються наступні властивості – аксіоми лінійного простору:

1°. $x + y = y + x$ (комутативність додавання).

2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність додавання).

3°. Існує нульовий елемент $0 \in V$, такий, що $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in V$.

4°. Для будь-якого $x \in V$ існує елемент $(-x)$, який називається протилежним для x , такий, що $x + (-x) = 0$.

5°. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha, \beta \in R$.

6°. $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$.

7°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha, \beta \in R$.

8°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in R$.

Елементи лінійного простору будемо називати векторами незалежно від їх природи.

Наслідки з аксіом.

1. Існує лише один нульовий елемент.
2. Існує лише один протилежний елемент $-x = (-1) \cdot x$.
3. Для $\forall x \in V : \theta \cdot x = \theta$.
4. Для $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot \theta = \theta$.

Приклади лінійних просторів.

1. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.
2. Множина упорядкованих наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з n дійсних чисел утворює арифметичний простір $\mathbb{R}^n$.
3. Сукупність матриць $R^{m \times n}$ розміру $m \times n$ з означеними діями додавання матриць та множення матриці на число.
4. Множина геометричних векторів простору.
5. Множина $C[a, b]$ функцій, неперервних на $[a, b]$.
6. Множина всіх многочленів степеня $\leq n$.

Лінійна залежність векторів. Базис

Вектор $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, $a_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ називається лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Означення. Система векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ називається *лінійно незалежною*, якщо $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$; *лінійно залежною*, якщо хоч одне з чисел $\alpha_i \neq 0$.

Приклади лінійно незалежних векторів.

1. Система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.
2. Два не колінеарні вектори на площині.
3. Три некомпланарні вектори у просторі.
4. Сукупність функцій $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$, $x \in \mathbb{R}$.
5. Сукупність функцій $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$.

Означення. Якщо в лінійному просторі V виконуються дві умови

1. існує система з n лінійно незалежних векторів
2. будь-яка система з $n + 1$ векторів лінійно залежна

тоді n – розмірність векторного простору $\dim V = n$ (фр. – dimension)

Зауваження. Якщо простір складається з одного елемента, то його розмірність рівна нулю.

Базисом називається будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних векторів.

Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис n – вимірного лінійного простору, тоді $\forall x \in V$ система з $n + 1$ вектора лінійно залежна, отже, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координати вектора x в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Приклад. Розглянемо множину квадратних матриць розміром 2×2 . Вона утворює лінійний простір розмірності 4. Базисом цього простору є, наприклад, четвірка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Їх лінійна комбінація дорівнює $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ і може бути нульовою лише у

випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Матриця системи векторів

Нехай система векторів $x_1, x_2, \dots, x_m$ своїми координатами у деякому базисі n -мірного простору V .

Матрицею системи векторів A будемо називати матрицю, кожний стовпчик якої складається з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$x_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \dots + a_{n2}e_n$$

.....

$$x_m = a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + a_{3m}e_3 + \dots + a_{nm}e_n$$

1. Для того, щоб m векторів n -вимірному лінійного простору були лінійно незалежними, необхідно і достатньо

$$\text{rang} A = m.$$

2. Для того, щоб n векторів n -вимірному лінійного простору були лінійно незалежними, необхідно і достатньо

$$\det A \neq 0$$

3. Якщо $\text{rang} A = r$, то максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи дорівнює r .

Матриця переходу від одного базису до іншого

Нехай в n -вимірному лінійному просторі V задано два базиси:

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (1) \text{ так званий старий}$$

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n \quad (2) \text{ так званий новий.}$$

Зрозуміло, що кожний з векторів нового базису має у базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ власні координати:

$$e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n$$

$$e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n$$

.....

$$e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)T, \text{ або в матричному вигляді: } e' = eT.$$

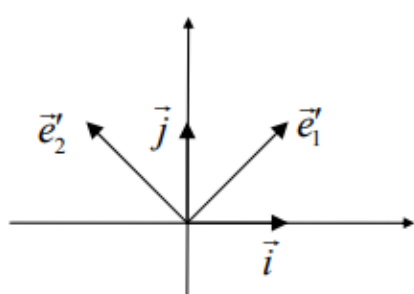
Оскільки система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ лінійно незалежна, то $\det T \neq 0$.

$$e = e'T^{-1}.$$

Тобто T^{-1} – матриця переходу від (2) до (1).

Висновок. Якщо є два базиси, то матриці переходу від одного до іншого взаємно обернені.

Приклад 1. На площині розглянемо два базиси: $(\vec{i}, \vec{j})$, та новий, одержаний з $(\vec{i}, \vec{j})$ поворотом на 45° проти годинникової стрілки.



$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{i}, \vec{j}) \quad (1)$$

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) = (\vec{i} + \vec{j}, -\vec{i} + \vec{j}) \quad (2)$$

Координати нового базису в старому

$$\vec{e}'_1 = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1)$$

$$\vec{e}'_2 = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця переходу від (1) до (2)}$$

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$\det T = 2; \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця переходу від (2) до (1)}.$$

$$e = e' T^{-1}$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2}{2}, \frac{\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2}{2} \right).$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2}{2}; \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2}{2}.$$

Звісно, коли система n векторів, це не так тривіально.

Перетворення компонент векторів при повороті і при інверсії декартової системи координат. Взаємні базиси. Контраваріантні і коваріантні компоненти.

За своєю математичною природою величини бувають трьох типів: скаляри, вектори, тензори. Такий підхід до застосування величин при моделюванні дозволяє сформулювати фізичні закони в інваріантному виді. Інваріантність розуміється в такий спосіб — якщо в просторі змінити систему координат, то це приводить до відповідних змін в описі процесів й явищ, але форма запису не повинна змінюватися. Тому представляється доцільним використати скалярні, векторні й тензорні величини, які при таких перетвореннях не змінюють запису законів.

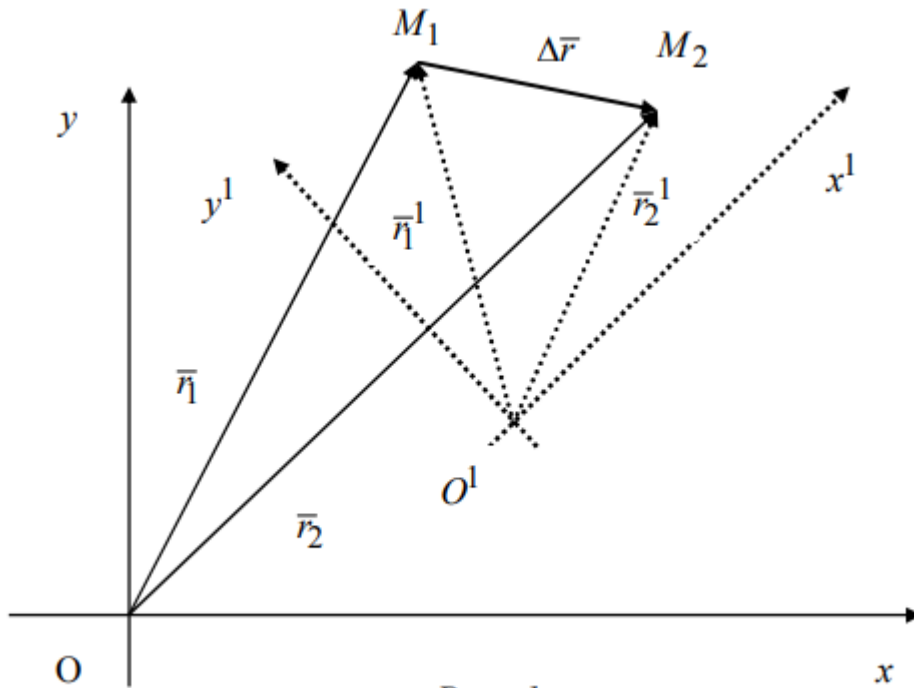


Рис. 1

Наприклад, відстань між точками M_1 і M_2 — інваріант при переході від системи Oxy до системи $O^1x^1y^1$ (рис.1).

Нехай в системі Oxy : $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$, $O^1x^1y^1$: $M_1(x_1^1, y_1^1)$; $M_2(x_2^1, y_2^1)$.

Величина $\Delta S = d(M_1, M_2)$ не змінюється тому, що $\Delta S = \sqrt{\Delta \bar{r}^2}$,
де $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}_2^1 - \bar{r}_1^1$.

Скаляри (густина, температура, маса тощо) характеризуються одним числом (функцією), що не змінюється при перетворенні координат. Вектори — спрямовані відрізки, характеризуються величинами і напрямками у просторі та не залежать від вибору системи координат. Тензори є величинами більш складної природи. Наприклад, тензор другого рангу можна визначити в тривимірному просторі трійкою векторів або таблицею дев'яти компонентів. Використання векторного та тензорного аналізу для моделювання фізичних явищ зумовлене не лише наочністю і зручністю математичних формул. Застосування тензорів в фізиці обумовлено властивостями та структурою фізичного світу, які відображаються у математичних моделях.

Розглянемо тривимірний векторний простір R^3 . Будь-яка трійка некомпланарних векторів із загальним початком утворюють базис: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, який будемо називати *основним*. Будь який вектор $\bar{b} \in R^3$ можна розкласти по цьому базису (рис. 2), тобто

$$\bar{b} = B^1 \bar{e}_1 + B^2 \bar{e}_2 + B^3 \bar{e}_3. \quad (2.1)$$

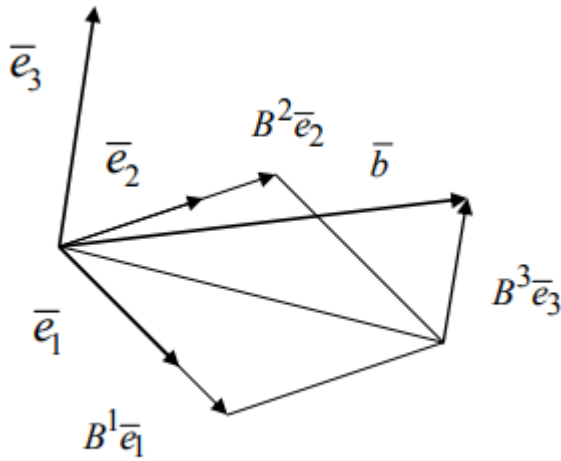
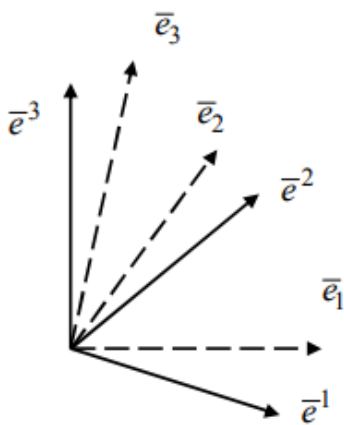


Рис. 2

Коефіцієнти розкладу (2.1) B^1, B^2, B^3 по основному базису називаються **контраваріантними** компонентами вектора $\bar{b}$ (індекси зверху). Для того, щоб визначити контраваріантні компоненти аналітично необхідно ввести взаємний базис. Базиси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ й $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ — називаються *взаємними*, якщо виконуються наступні співвідношення [2]:

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

де δ_j^i — символ Кронекера.



Вектори взаємного базису, як видно із властивостей скалярного добутку, перпендикулярні до векторів основного базису з незбіжними індексами і утворюють гострий кут з вектором основного базису з таким же індексом (рис. 3), тобто

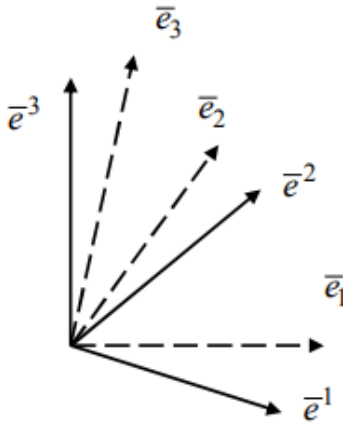
$$\bar{e}^i \perp \bar{e}_j, \quad \cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i) > 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3).$$

Якщо взяти базис декартової прямокутної системи координат (рис. 3), то взаємний базис збігається з ним. Якщо в афінних (кутових) системах координат розкладання по взаємних базисах не збігаються $B^i \neq B_i$, (рис. 4), то в декартових системах через збіг базисів контраваріантні й коваріантні компоненти співпадають, тому в написанні індексів не роблять розходження.

того, щоб визначити контраваріантні компоненти аналітично необхідно ввести взаємний базис. Базиси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ й $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ — називаються *взаємними*, якщо виконуються наступні співвідношення [2]:

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

де δ_j^i — символ Кронекера.



Вектори взаємного базису, як видно із властивостей скалярного добутку, перпендикулярні до векторів основного базису з незбіжними індексами і утворюють гострий кут з вектором основного базису з таким же індексом (рис. 3), тобто

$$\bar{e}^i \perp \bar{e}_j, \quad \cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i) > 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3).$$

Рис. 3

Якщо взяти базис декартової прямокутної системи координат (базисні вектори взаємно перпендикулярні), то взаємний базис збігається з ним. Якщо в афінних (косокутних) системах координат розкладання по взаємних базисах не збігаються $B^i \neq B_i$,

то в декартових системах через збіг базисів контраваріантні й коваріантні компоненти співпадають, тому в написанні індексів не роблять розходження.

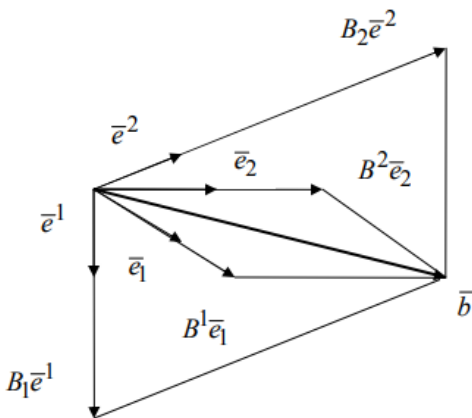


Рис. 4

Аналітично компоненти векторів знаходять за допомогою скалярного добутку. Якщо $\bar{b} = B^1 \bar{e}_1 + B^2 \bar{e}_2 + B^3 \bar{e}_3 = B_1 \bar{e}^1 + B_2 \bar{e}^2 + B_3 \bar{e}^3$, то $B^i = \bar{b} \cdot \bar{e}^i$ — **контраваріантні** компоненти, $B_j = \bar{b} \cdot \bar{e}_j$ — **коваріантні** компоненти.

Для скорочення запису в тензорній алгебрі та тензорному аналізі приймається правило Ейнштейна або умова про підсумовування:

$$\bar{b} = B^1 \bar{e}_1 + B^2 \bar{e}_2 + B^3 \bar{e}_3 = \sum B^i \bar{e}_i = B^i \bar{e}_i.$$

Якщо використані повторювані індекси (один зверху, інший знизу), то мається на увазі, (якщо не обговорене протилежне), підсумовування.

Визначимо тепер аналітично вектори взаємного базису по векторах даного базису. Нехай даний базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, тоді

$$\bar{e}^1 \perp \bar{e}_2, \quad \bar{e}^1 \perp \bar{e}_3, \quad \bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)},$$

тому, що за визначенням $\bar{e}^1 \cdot \bar{e}_1 = 1$,

$$k (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = 1, \quad k = \frac{1}{(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1},$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_2 \cdot (\bar{e}_3 \times \bar{e}_1)}, \quad \bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_3 \cdot (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)}.$$

Аналогічно визначаються вектори основного базису, якщо задано взаємний базис (міняємо індекси верхній на нижній і навпаки у формулах).

Тензори n-го рангу

Розглянемо простір R^3 , у ньому скалярні, векторні й тензорні величини визначаються відповідними впорядкованими наборами компонентів. Кількість компонентів $n = 3^N$, де N — ранг тензора. Маємо:

1) скаляр - тензор нульового рангу $n = 3^0 = 1$.

2) вектор - тензор першого рангу $n = 3^1 = 3$.

3) тензор другого рангу $n = 3^2 = 9$, тощо.

Діадою або невизначеним добутком двох базисних векторів будемо називати добутки виду $\bar{e}_i \bar{e}_j$: $\bar{e}_1 \bar{e}_1, \bar{e}_1 \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_3 \bar{e}_3$, інші позначення $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$.

Тензором другого рангу або *діади́ком* називається будь-яка лінійна комбінація діад:

$$D = \alpha \bar{e}_1 \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \dots + \omega \bar{e}_3 \bar{e}_3. \quad (3.1)$$

Коефіцієнти в лінійних комбінаціях діад є компонентами тензора. Так як нами використаний основний базис, то це будуть контраваріантні компоненти

$$D^{11} = \alpha, \quad D^{12} = \beta, \quad \dots, \quad D^{33} = \omega.$$

Якщо брати тріади базисних векторів виду $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3, \bar{e}_3 \bar{e}_2 \bar{e}_3, \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2$ і т. ін., то їхня лінійна комбінація визначає тензор третього рангу або *тріа́дик*. Використовуючи невизначені добутки базисних векторів по чотирьох (тетради) $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_4, (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_4)$ при розгляді їх усіляких лінійних комбінацій приходимо до *тетра́диків* або тензорів четвертого рангу. Процес можна продовжувати по індукції, одержуючи тензори 5-го, 6-го та вищих рангів.

Перетворення компонентів тензора. Метричний тензор. Піднімання й опускання (перекидання) індексів

Розглянемо перетворення системи координат, вважаючи даними основ-

ний $\bar{e}_i$ і взаємний $\bar{e}^j$ базиси, де $i, j = 1, 2, 3$. Можна зробити перехід до

нового основного й взаємного базисів $\bar{e}'_k$ і $\bar{e}'^{s'}$:

$$\bar{e}_i = \alpha_i^k \bar{e}'_k = \sum \alpha_i^k \bar{e}'_k \quad (4.1)$$

$$\bar{e}^j = \beta_s^j (\bar{e}'^s)' = \sum \beta_s^j (\bar{e}'^s)' \quad (4.2)$$

Якщо розглядається p – вимірний простір, то підсумовування ведеться до p . При переході до нових базисів компоненти тензорів, взагалі кажучи, змінюються. Для простоти розглянемо зміни компонентів векторів (тензорів першого рангу). Отримаємо:

$$\bar{b} = B^j \cdot \bar{e}_j = B^j \cdot \alpha_j^k \cdot \bar{e}_k' = (B^k)' \cdot \bar{e}_k' \quad \text{тобто} \quad (B^k)' = \alpha_j^k \cdot B^j \quad \text{— закон}$$

зміни контраваріантних компонентів вектора.

$$\bar{b} = B_i \cdot \bar{e}^i = B_i \cdot \beta_l^i \cdot \bar{e}^{l'} = B_l' \cdot \bar{e}^{l'}, \quad \text{тобто} \quad B_l' = \beta_l^k \cdot B_k \quad \text{— закон зміни}$$

коваріантних компонентів вектора.

Перейдемо до тензора другого рангу $T_{ij} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j$, який можна представити, як діадик по основному, взаємному й змішаному базисам:

$$T = T^{ji} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad T = T_i^j \bar{e}^i \bar{e}_j = T_{ij} \beta_k^i \bar{e}^{k'} \beta_l^j \bar{e}^{l'} = T_{kl}' \bar{e}^{k'} \bar{e}^{l'}, \quad \text{де}$$

$$T_{kl}' = \beta_k^i \beta_l^j T_{ij} \quad \text{— закон зміни коваріантних компонентів тензора II-го рангу.}$$

$$T^{kl'} = \alpha_i^k \alpha_j^{l'} T^{ij} \quad \text{— закон зміни контраваріантних компонентів.}$$

$$T_k^{l'} = \alpha_i^l \beta_k^j T_j^i \quad \text{— закон зміни змішаних компонентів.}$$

У сучасній науково-технічній літературі використовується два підходи до визначення тензора. Перший (більш традиційний) підхід заснований на використанні закону перетворення його компонентів. Якщо дано якийсь набір величин (з верхніми й нижніми індексами), які при перетворенні базисів змінюються як коваріантні, контраваріантні й змішані компоненти, то говорять, що такий набір визначить відповідний тензор. Наприклад, тензор другого рангу визначається як набір дев'яти компонентів (коваріантних, контраваріантних або змішаних).

Другий підхід є геометричним. Тензори розглядаються як полілінійні добутки (діадики, тріадики, тетрадики) векторів базису. Тоді закони перетворення компонентів задаються перетворенням векторів базису.

Якщо в просторі уведено скалярний добуток, тобто простір є евклідовим, то між коваріантним, контраваріантним і змішаним компонентами тензора можна встановити зв'язок. Нехай у просторі дані основний і взаємний базиси $\bar{e}_i$ та $\bar{e}^j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Розглянемо добуток базисних векторів

$$g_{ik} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k$$

$$g^{jk} = \bar{e}^j \cdot \bar{e}^k$$

Якщо розглянути повні набори величин $g_s^r = \bar{e}^r \cdot \bar{e}_s$, то вони будуть змінюватися при зміні базису як компоненти відповідного тензора. По цьому їхній повний набори розглядаються як тензор (дивися підхід 1). Цей тензор називається метричним:

$$\begin{aligned} G &= g^{jl} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_l \\ G &= g_s^r \bar{e}_r \otimes \bar{e}^s \\ G &= g_{ik} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^k \end{aligned}$$

Природно розглянути G як той самий тензор, але при використанні векторів основного або взаємного базису.

Метрика простору це:

$$dS^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = dx_i \cdot \bar{e}^i \cdot dx_j \cdot \bar{e}^j = g^{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j = dx^k \cdot \bar{e}_k \cdot dx^l \cdot \bar{e}_l = g_{kl} \cdot dx^k \cdot dx^l.$$

Користуючись компонентами метричного тензора встановлюємо зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами.

Якщо дано основний і взаємний базиси, то:

$$B = B^j \cdot \bar{e}_j = B_k \cdot \bar{e}^k, \quad (4.3)$$

$$\bar{e}_j \cdot \bar{e}^k = \delta_j^k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}.$$

Якщо обидві частини (4.3) помножити на $\bar{e}^s$, то $B^j \bar{e}_j \cdot \bar{e}^s = B_k \bar{e}^k \cdot \bar{e}^s$,

отже, $B^s = B_k g^{ks}$ — зв'язок між контраваріантними й коваріантними компонентами (перекидання індексів). Аналогічно можна встановити, що $B_r = g_{rt} B^t$.

Для тензора другого й вище рангу компоненти метричного тензора можна використати кілька разів $T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl}$, тощо.

Зауваження: по формулі перетворення компонентів тензора при переході від старого основного до нового основного схожа на перетворення компонентів при переході від основного до взаємного базису й навпаки. Збіг має місце для базисів у декартових прямокутних системах координат. (Основний і взаємний базиси збігаються). Компоненти метричного тензора в

декартовому базисі
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Операції з тензорами

Лінійні операції (додавання або віднімання, множення на скаляр) виконуються з тензорами одного рангу. Для визначеності будемо використовувати тензори другого рангу. Для тензора більш високого рангу міркування проводиться по індукції. Для визначеності також будемо використовувати декартові базиси, коли контраваріантні, коваріантні й змішані компоненти не розрізняються.

Розглянемо два тензори

$$A = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = A_{11} \bar{e}_1 \bar{e}_1 + \dots + A_{12} \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \dots + A_{33} \bar{e}_3 \bar{e}_3,$$

$$B = B_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = B_{11} \bar{e}_1 \bar{e}_1 + \dots + B_{33} \bar{e}_3 \bar{e}_3.$$

Тоді $C = A \pm B$ теж буде тензором другого рангу $C = (A_{ij} \pm B_{ij}) \bar{e}_i \bar{e}_j$.

Компоненти суми (різниці) тензорів знаходяться підсумовуванням або відніманням компонентів цих тензорів.

При множенні тензора на скаляр виходить тензор того ж рангу: $D = \lambda A$; $D_{ij} = \lambda A_{ij}$, зв'язок додавання й множення на скаляр, наприклад, $2A = A + A$.

Якщо розглядати тензори другого рангу, то їх можна характеризувати матрицями компонентів. Уведені лінійні операції з тензорами зводяться до відповідних операцій з матрицями їхніх компонентів.

Крім того, вводяться спеціальні тензорні операції. *Тензорний добуток* (множення) тензорів: $M = AB = A \otimes B$, де $A = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$, $B = B_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l$. Тоді

$$M = A_{ij} B_{kl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = M_{ijkl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l.$$

Тензорним добутком є тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників, а компоненти визначаються за законом:

$$M_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}, \text{ де } i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Згортання тензора.

Якщо по парі будь-яких індексів компонентів тензора зробити підсумовування, то така операція називається згортанням тензора. У результаті одержуємо тензор, ранг якого на дві одиниці менше. Згортання можна розглянути як результат скалярного множення тензорів.

Візьмемо, наприклад, тензор другого рангу:

$$A = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j; \quad B = B_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l;$$

$$C = A \cdot B = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot B_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = A_{ij} B_{kl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l =$$

$$= C_{ijkl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = D_{il} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_l$$

$$C_{ijkl} \delta_{jk} = D_{il}, \quad \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k = \delta_{jk}.$$

Кажуть, що тензор симетричний, якщо при перестановці індексів він не змінюється, тобто $A_{ij} = A_{ji}$, у цьому випадку тензор має тільки 6 незалежних компонентів, його матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця компонентів симетрична відносно головної діагоналі.

Зауваження. Якщо дано тензор вище другого рангу, то узагальненням симетричного тензора є тензор симетричний по парі індексів.

Наприклад: якщо $B_{ijl} = B_{ilj}$, то говорять що тензор B симетричний по парі останніх індексів.

Кажуть, що тензор є кососиметричним або антисиметричним, якщо при перестановці індексів змінюється знак компонента:

$$A_{ij} = -A_{ji}.$$

Кососиметричний тензор другого рангу має три незалежних компоненти, тому що діагональні компоненти повинні обертатися в нуль.

$$A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow 2 A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0,$$

а між компонентами, симетричними щодо головної діагоналі, розходження тільки в знаках.

Кососиметричний тензор має вигляд:
$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Деякий тензор другого рангу можна розкласти на симетричну й антисиметричну частини $A = A_+^* + A_-^*$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}),$$

де $(A_+^*)_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ — симетрична частина тензора,

$(A_-^*)_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$ — кососиметрична частина тензора.

Виділення симетричної частини тензора називається його *симетруванням*, а виділення антисиметричної частини — *альтернуванням* тензора.

Власні вектори і власні значення тензора

Нехай даний тензор T і вектор $\bar{a}$. Їхній скалярний добуток буде вектором $\bar{b} = T \cdot \bar{a}$. Взагалі кажучи, вектор $\bar{b}$ відрізняється від вектора $\bar{a}$ величиною і напрямком.

Наприклад, якщо $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ і $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, тоді дістаємо, що

$$T \cdot \bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що $\bar{a} = (3; 2; 1)$ та $\bar{b} = (3; 25; 13)$. Тоді $|\bar{a}| = \sqrt{14}$, $|\bar{b}| = \sqrt{803}$ і

$$\cos(\bar{a} \wedge Ox) = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos(\bar{b} \wedge Ox) = \frac{3}{\sqrt{803}}.$$

Розрізняються модулі векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ і направляючі косинуси, тобто вектори не збігаються ні по величині, ні по напрямку. Однак існують такі напрямки в просторі, які під дією тензора не змінюються. Такі напрямки в просторі називаються головними. Якщо взяти вектор головного напрямку, то під дією тензора він переходить у колінеарний. Вектор $T \cdot \vec{n} = \lambda \cdot \vec{n}$, тобто напрямок у просторі зберігається. Коефіцієнт λ , що характеризує зміну модуля вектора головного напрямку під дією тензора, називається *власним значенням*. Головні напрямки тензора і відповідні власні значення визначаються в такий спосіб:

$\lambda \cdot \vec{n} = \lambda \cdot E \cdot \vec{n}$ — по властивостях одиничного тензора.

Тоді дістаємо рівняння $(T - \lambda E) \vec{n} = 0$, де

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо перейти до скалярної форми, то для визначення власних значень і власних напрямків одержуємо однорідну лінійну систему виду:

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 = 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 = 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 = 0 \end{cases}$$

Однорідна система завжди має тривіальний (нульовий) розв'язок, але нульовий вектор ніякого напрямку в просторі не визначає. Тому шукаємо ненульові розв'язки системи. У цьому випадку система буде невизначеною (не одне, а кілька рішень). Тоді визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримаємо алгебраїчне рівняння третього степеня, що називається *характеристичним рівнянням*, і приводимо його до виду: $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, де a_1, a_2, a_3 — коефіцієнти рівняння та

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= f_1(T_{ij}) \\ a_2 &= f_2(T_{ij}) \\ a_3 &= f_3(T_{ij}) \end{aligned} \right\} \text{ — різні функції від компонентів тензора } T_{ij} \text{ } (i, j = 1, 2, 3).$$