ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Балан С.А., Новиков В.В., Становская Т.П., Трофименко Е.Г.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть необходимо термообработать некоторую плоскую прямоугольную поверхность размером a x b сканирующим движением источника тепла вдоль обрабатываемой поверхности (рис. 1).

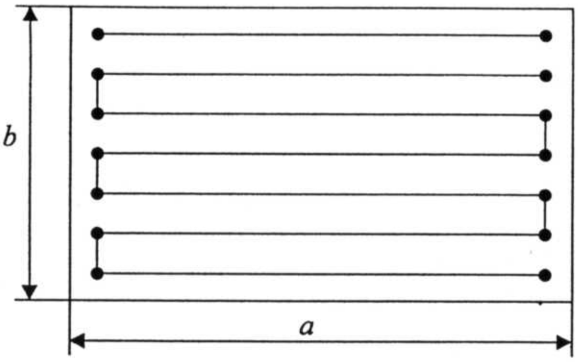

Рис. 1.

Заменим непрерывное движение источника прерывистым по точкам с выдержкой времени остановки на каждой точке τ_{ij} и мгновенным перемещением из точки в точку (рис. 2).

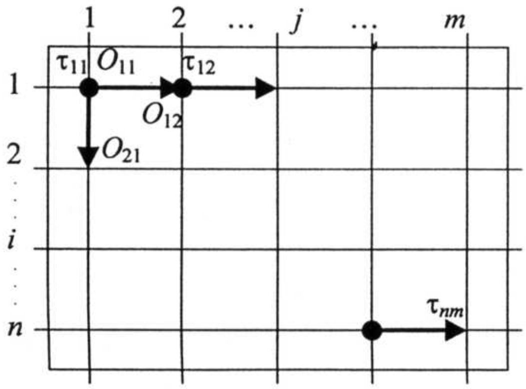

Рис. 2.

Основным условием обработки является нагрев всех точек A_{ij}, находящихся на одной нормали к обрабатываемой поверхности с «точками стояния» источника O_{ij} и лежащими на глубине z_1 от этой поверхности $(O_{ij} - A_{ij} = z_1 \forall ij)$,до температуры $T_{обр}$. Общее количество таких контрольных точек равно ij .Температура может достигаться в каждой из них неодновременно.

Разрешим также произвольное движение источника (не обязательно в соответствии с «телевизионной» траекторией, как это показано на рис. 1), но обязательно вдоль линий, параллельных сторонам прямоугольника.

Пусть процесс начинается с остановки над точкой O_{11}(рис. 2). После выдержки времени τ_{11} (т.е. после нагрева точки A_{11} до $T_{обр}$) необходимо перейти в одну из соседних точек, лежащих на ортогональных направлениях: O_{12} или O_{21}. Выбор направления будем осуществлять из следующих соображений. К моменту завершения интервала τ_{11} точки A_{12} и A_{21} приобретут некоторую температуру $T_{12}^{\tau_{11}}$ и

$T_{21}^{\tau_{11}}$.Очевидно, что если $T_{12}^{\tau_{11}} \neq T_{21}^{\tau_{11}}$, то выгоднее сначала нагреть до $T_{обр}$ более нагретую точку, иначе тепло, которое содержится в ее окрестностях, рассеется в нагреваемом теле, и эту точку придется нагревать еще раз, расходуя энергию и затрачивая время.

Таким образом, каждый раз будем выбирать для «догревания» самую горячую из ближайших ортогонально расположенных точек. После ее «догрева» до $T_{обр}$, выбираем следующую наиболее горячую и т.д.

Предлагаемый метод напоминает метод детерминированного покоординатного спуска [1], с той разницей, что на каждой итерации выбирается не направление наискорейшего спуска, а направление «наимедленнейшего» спуска с обязательным условием обхода всех точек.

В методе детерминированного покоординатного спуска за направление движения последовательно выбираются орты. Параметры метода ρ и δ вычисляются в процессе работы алгоритма. Алгоритм включает «большие» итерации по индексу k и «малые» — по индексу j, причем при каждом k «малые» итерации заканчиваются при конечном значении индекса j

Алгоритм.

Начало. I. Выбрать произвольное начальное приближение $x^0 \in X$ и вычислить $f_0(x^0)$

II. Выбрать произвольные константы ρ_0, δ_0, ω, удовлетворяющие неравенствам

$$\rho_0 > 0; \delta_0 > 0; \omega > 1 .$$

III. Задать векторы $e^1 \ldots, e^n$ (здесь e^i, $i = 1,...,n$ - вектор, i -я координата которого равна единице, а остальные равны нулю).

IV. Положить $k = 0$.

Основной цикл. V. Положить $j = 0$.

VI. Вычислить индекс $i_k (i_k \in [1:n])$ по правилу

$$i_k = k - nEnt(k/n) + 1,$$

где $Ent(t)$ - целая часть числа t

VII. Положить $h^k = e^{ik}$.

VIII. Вычислить векторы

$$x^{k(+)} = x^k + (\rho_k / 2^j)h^k ; \; x^{k(-)} = x^k - (\rho_k / 2^j)h^k .$$

IX. Если $x^{k(+)} \in X$ и $x^{k(-)} \in X$ то перейти к шагу X; если $x^{k(+)} \in X$ и $x^{k(-)} \notin X$, то вычислить $f_0(x^{k(+)})$ и перейти к шагу XV; если $x^{k(+)} \notin X$ и $x^{k(-)} \in X$ то вычислить $f_0(x^{k(-)})$ и перейти к шагу XVI; если $x^{k(+)} \notin X$ и $x^{k(-)} \notin X$, то положить $j = j+1$ и перейти к шагу VIII.

X. Вычислить $f_0(x^{k(+)})$

XI. Если выполняется неравенство

$$f_0(x^{k(+)}) - f_0(x^{k(-)}) \leq -\rho_k \delta_k / 2^j$$

то положить

$$x^{k+1} = x^{k(+)}; \rho_{k+1} = \rho_k ; \delta_{k+1} = \delta_k ; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(+)})$$

и перейти к шагу XVIII; иначе перейти к шагу XII.

XII. Вычислить $f_0(x^{k(-)})$.

XIII. Если выполняется неравенство

$$f_0(x^{k(-)}) - f_0(x^k) \le -\rho_k \delta_k / 2^j$$

то положить

$$x^{k+1} = x^{k(-)}; \rho_{k+1} = \rho_k; \delta_{k+1} = \delta_k; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(-)})$$

и перейти к шагу XVIII; иначе перейти к шагу XIV.

XIV. Если выполняется неравенство

$$\left| f_0(x^{k(+)}) - f_0(x^{k(-)}) \right| \le 2\rho_k \omega \delta_k / 2^j$$

, то перейти к шагу XVII; иначе положить $j = j+1$ перейти к шагу VIII.

XV. Если выполняется неравенство (1), то положить

$$x^{k+1} = x^{k(+)}; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(+)}); \rho_{k+1} = \rho_k; \delta_{k+1} = \delta_k$$

и перейти к шагу XVIII; иначе перейти к шагу XVII.

XVI. Если выполняется неравенство (2), то положить

$$x^{k+1} = x^{k(-)}; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^{k(-)}); \rho_{k+1} = \rho_k; \delta_{k+1} = \delta_k$$

и перейти и шагу XVIII; иначе перейти к шагу XVII.

XVII. Если выполняются равенства

$$i_k = n; x^k = x^{k-n+1}$$

то положить

$$x^{k+1} = x^k; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^k); \rho_{k+1} = \rho_k / 2; \delta_{k+1} = \delta_k / 2$$

и перейти к шагу XVIII; если $i_k \ne n; x^k \ne x^{k-n+1}$ то положить

$$x^{k+1} = x^k; f_0(x^{k+1}) = f_0(x^k); \rho_{k+1} = \rho_k; \delta_{k+1} = \delta_k$$

и перейти к шагу XVIII.

XVIII. Положить $k = k+1$ и перейти к шагу V.

Кроме того, в нашем методе на каждом шаге градиент рассчитывается по основной функции, (в данном случае - функции температуры в точке), а минимизация ведется по целевой функции - суммарным затратам времени на обработку всех точек

$$\tau_{\Sigma O} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij}$$

Докажем, что такое движение минимизирует xz. Для этого выполним следующий вычислительный эксперимент.

Рассчитаем $\tau_{\Sigma O}$ и отложим его на оси τ графика (рис. 3).

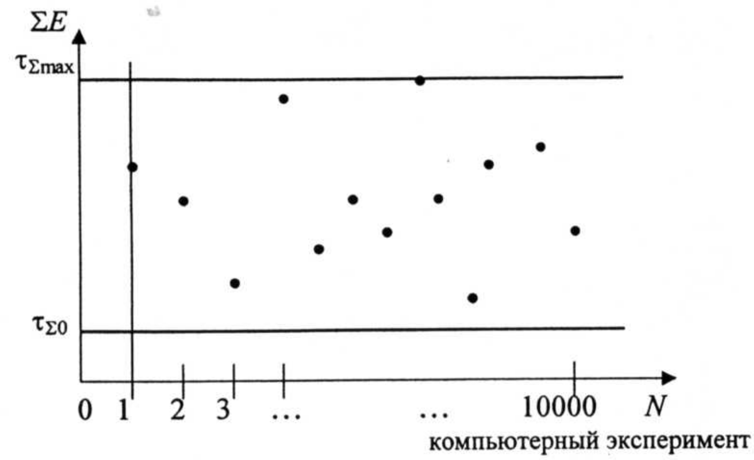

Рис.3.

Рассчитаем также гипотетическое значение $\tau_{\Sigma\max}$ - максимального времени работы источника, когда каждая точка теплоизолирована от соседей:

$$\tau_{\Sigma\max} = nm\tau_{11}$$

и также отложим его на оси т. Далее проведем большое количество компьютерных экспериментов, в каждом из которых направление движения по ортам будет выбираться случайным образом (т.е. реализуем идею метода случайного покоординатного спуска [1]).

В методе случайного покоординатного спуска за направление движения в $k-й$ итерации случайно выбирается i_k-й орт. Для вычисления шаговых множителей рк приводятся три различные правила, легко реализуемые на практике.

Алгоритм.

Начало. I. Выбрать произвольное начальное приближение $x^0 \in X$.

II. Задать векторы $e^1,...,e^n$ (здесь $e^i, i = 1,...,n - i -$ й координатный вектор).

III. Положить $k = 0$.

Основной цикл. IV. Найти независимую реализацию i_k случайной величины $\tilde{i}$, которая принимает значения из множества $\{1,...,n\}$,соответственно, с вероятностями $\rho_1 = 1/n,...,\rho_n = 1/n$.

V.Вычислить частную производную $\frac{\partial}{\partial x_{ik}} f_0 - (x^k)$

VI. Вычислить шаговый множитель

$$\rho_k = \begin{cases} -\min\left\{x_{ik}^k - \alpha_{ik}, \frac{\partial}{\partial x_{ik}} f_0(x^k)/\gamma \right\}, если \frac{\partial}{\partial x_{ik}} f_0(x^k) \geq 0; \\ -\min\left\{\beta_{ik} - x_{ik}^k, \frac{\partial}{\partial x_{ik}} f_0(x^k)/\gamma \right\}, если \frac{\partial}{\partial x_{ik}} f_0(x^k) \leq 0. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что известна константа Липшица γ в условии (i) предположения 0. Если константа γ неизвестна, то ρ_k вычисляется по формулам, приведенным в замечании 2.

Вычислить следующее приближение $x^{k+1} = x^k - \rho_k e^k$.

Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу IV.

Литература

1. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. - К.: Вища школа, 1983. - 512 с.