

Тема 1. Елементи теорії похибок

Типи чисельних методів

Чисельні методи класифікують за різними ознаками. За характером отримання розв'язку розрізняють **прямі методи**, які дають розв'язок за скінченне число операцій, та **ітераційні методи**, що формують послідовність наближень до точного розв'язку. За типом задач виділяють чисельні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь і систем, методи чисельного інтегрування та диференціювання, методи оптимізації, а також методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Поняття ітераційного методу

Ітераційний метод – це чисельний метод, у якому розв'язок задачі знаходиться шляхом побудови послідовності наближень, що поступово збігаються до точного значення. Формально ітераційний процес задається співвідношенням

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}),$$

де $x^{(k)}$ – наближення на k -ій ітерації, а Φ – ітераційний оператор. Процес ітерацій продовжується до виконання заданого критерію зупинки, наприклад досягнення необхідної точності або зменшення різниці між послідовними наближеннями нижче заданого порога. Ітераційні методи широко застосовуються для розв'язання задач великої розмірності та задач, у яких прямі методи є обчислювально неефективними або непридатними.

Ітерація – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі.

Нехай x^* – розв'язок задачі, тоді ітераційний метод будує так звану *ітераційну послідовність* $\{x^{(k)}\}$ ($k=0,1,2,\dots$) наближень розв'язку, при цьому $x^{(k)}$ повинно наближатися до x^* зі збільшенням k .

Алгоритм ітераційного методу в найзагальнішому вигляді :

1. Задається початкове наближення розв'язку $x^{(0)}$.
2. На k -й ітерації методу ($k=0,1,2,\dots$) буде поточне наближення розв'язку $x^{(k)}$. Далі обчислюється наступне наближення $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, де Φ і є сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі.
3. Перевіряється чи є отримане наближення $x^{(k+1)}$ розв'язку x^* достатньо близьким. Якщо цього немає, то відбувається перехід до наступної ітерації.

Похибки обчислень

Похибки обчислень можна поділити на похибки вхідних даних і спрощення моделей компонентів; округлення під час обчислень. Основна задача теорії похибок – оцінка та контроль точності результатів, отриманих під час чисельних розрахунків, визначити величину похибок та їхній вплив на кінцевий результат, щоб представити його у вигляді інтервалу значень з певною ймовірністю довіри (наприклад, $A=a\pm\Delta a$).

Похибки, що виникають при розв'язуванні задачі, можна поділити на три групи:

1. неусувна похибка
2. похибка методу
3. похибка обчислень

Неусувна похибка є наслідком неточності вхідних даних, що входять до математичного опису задачі, а також невідповідності математичної моделі реальній задачі (похибка математичної моделі).

Похибка методу пояснюється тим, що для розв'язування математичної задачі доводиться використовувати наближені методи, оскільки отримання точного розв'язку необмеженої або неприйнятно великої кількості арифметичних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо.

Похибка обчислень виникає при введенні-виведенні даних до ПК та при виконанні математичних операцій.

Округлення при обчисленнях. Будь-які обчислення виконують з певною кількістю значущих цифр. Це вносить у відповідь похибку округлення, яка накопичується в процесі обчислень. Будь-які обчислення виконуються з кінцевим числом розрядів. Решта розрядів числа відкидається, що і визначає похибка округлення. Чим більше кількість розрядів числа зберігається, тим менше похибка округлення. При виконанні рішення комп'ютером, похибка округлення зазвичай невелика.

Пряма та обернена задачі теорії похибок

Пряма задача полягає у оцінюванні похибки результату обчислень, якщо відомі оцінки похибок вхідних даних.

Обернена задача полягає у визначенні необхідної точності вхідних даних, що забезпечує задану точність результату обчислень.

Абсолютна та відносна похибки

Нехай a – точне значення деякої величини,

a^* – найближче значення цієї величини.

Тоді **похибка** ε наближеного значення величини визначається за формулою:

$$a - a^* = \varepsilon.$$

Абсолютна похибка Δ_a наближеного значення величини визначається формулою:

$$\Delta_a = |a - a^*| = |\varepsilon|.$$

Гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta_a}$ наближеного значення величини визначається за формулою:

$$\Delta_a = |a - a^*| \leq \overline{\Delta_a}.$$

На практиці задають граничну абсолютну похибку $\overline{\Delta_a}$, користуючись правилом (якщо невідомі інші дані про $\overline{\Delta_a}$): *Якщо наближене значення деякої величини записане у десятковій системі числення, то гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta_a}$ дорівнює одиниці останнього знаку (якщо значення одержане без округлення) та половині одиниці останнього знаку (якщо значення одержане з округленням). Останнім знаком вважають перший справа.*

Відносна похибка δ наближеного значення величини визначається як відношення абсолютної похибки до модуля точного або наближеного значення

$$\delta_a = \frac{|\varepsilon|}{|a|} = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad \text{або} \quad \delta_a = \frac{|\varepsilon|}{|a^*|} = \frac{\Delta_a}{|a^*|}$$

Граничною відносною похибкою називають величину $\overline{\delta_a}$, що задовольняє умову:

$$\frac{\Delta_a}{|a|} \leq \overline{\delta_a} \quad \text{або} \quad \frac{\Delta_a}{|a^*|} \leq \overline{\delta_a}.$$

Таким чином,

$$a = a^* \pm \Delta_a,$$

де $\Delta_a = |a - a^*|$.

А оскільки $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a^*|}$, то $a = a^*(1 \pm \delta_a)$

Або, оскільки $|a - a^*| \leq \overline{\Delta_a}$, то

$$a^* - \overline{\Delta_a} \leq a \leq a^* + \overline{\Delta_a}$$

$$a^*(1 - \overline{\delta_a}) \leq a \leq a^*(1 + \overline{\delta_a})$$

Тут $\overline{\Delta_a}$ і $\overline{\delta_a}$ граничні абсолютна та відносна похибки; $\overline{\delta_a} = \frac{\overline{\Delta_a}}{|a^*|}$.

Значущі цифри. Правильні значущі цифри

Значущими цифрами числа називають всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Наприклад:

1. $x = 4,570345$ – всі цифри в запису цього числа значущі;
2. $x = 0,007614$ – значущі цифри тільки 7,6,1,4;

3. $x = 0,03105600$ – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0 (два останні нулі в запису числа є значущими);

4. а) $x = 3750000$ – всі цифри значущі;

б) $x = 3,75 \cdot 10^6$ – значущі цифри тільки 3,7,5.

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною в широкому сенсі (розумінні)**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta}_a$ цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі. В іншому випадку цифра називається **сумнівною в широкому сенсі**.

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною у вузькому сенсі**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta}_a$ цього числа не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі. В іншому випадку цифра називається **сумнівною у вузькому сенсі**.

Зауваження 1. Сумнівні цифри замінюють у цілому числі нулями.

Зауваження 2. Якщо наближене число записується без вказівки його граничної абсолютної похибки $\overline{\Delta}_a$, то записується тільки правильні його цифри (як у широкому так і у вузькому сенсі). При цьому правильні нулі у кінці числа не відкидаються.

Приклад. Нехай задано наближене число $a^*=7,158$. Гранична абсолютна похибка $\Delta=0,009$. Визначити правильні та сумнівні в широкому та вузькому сенсі цифри даного наближеного числа.

Наприклад, для цифри 7 одиниця десяткового розряду дорівнює 1, для цифри 1 одиниця десяткового розряду дорівнює 0,1 і т.д. Проведемо порівняння цих чисел з заданою граничною абсолютною похибкою $\Delta=0,009$.

Оскільки $0,009 < 1$, то цифра 7 правильна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,1$, то цифра 1 правильна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,01$, то цифра 5 правильна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,001$, то цифра 8 сумнівна в широкому сенсі.

Оскільки $0,009 < 0,5$, то цифра 7 правильна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,05$, то цифра 1 правильна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,005$, то цифра 5 сумнівна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,0005$, то цифра 8 сумнівна у вузькому сенсі.

Похибки округлення

У тих випадках, коли наближене число містить зайву кількість невірних значущих цифр, удаються до округлення. При округленні використовують наступне **правило округлення**. Якщо в старшому з розрядів, що відкидаються, стоїть цифра менша п'яти, то вміст розрядів, що зберігаються, не міняється. У протилежному випадку, в молодший розряд, що зберігається, додається одиниця.

Абсолютна похибка округлення не перевершує половини одиниці молодшого розряду, що залишається. При округленні наближеного числа його абсолютна похибка збільшується з урахуванням похибки округлення.

Приклад заокруглення чисел.

$x=4,167493$ — заокруглити до 5ти знаків десяткових знаків після коми
 $x^*=4,16749$

$x=4,167493$ — заокруглити до 4х знаків десяткових знаків після коми
 $x^*=4,1675$

Приклади заокруглення чисел.

$x=2,8497621$	$x=345,453275$
$x^*=2,849762$	$x^*=345,45328$
$x^*=2,84976$	$x^*=345,4533$
$x^*=2,8498$	$x^*=345,453$
$x^*=2,850$	$x^*=345,45$
$x^*=2,85$	$x^*=345,5$
$x^*=2,8$	$x^*=345$
$x^*=3$	$x^*=3,5 \cdot 10^2$

При заокругленні цілого числа відкинуті знаки не можна замінювати нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь

Розв'язання типових задач за темою «Похибки обчислень»

Приклад 1. Визначити, яка рівність точніша: $\sqrt{18} \approx 4.24$ чи $\frac{9}{11} \approx 0.818$.

Розв'язання. Позначимо: $\sqrt{18} \approx 4.24 = x_1$, $\frac{9}{11} \approx 0.818 = x_2$. Знаходимо значення даних виразів із більшою кількістю десяткових знаків, ніж наявні наближення: $X_1 = \sqrt{18} \approx 4.2426$, $X_2 = \frac{9}{11} \approx 0.81818$. Обчислюємо граничні абсолютні похибки, округляючи їх із надлишком:

$$\Delta x_1 = |x_1 - X_1| = |4.24 - 4.2426| = 0.0026 \leq 0.0027 = \overline{\Delta x_1}$$

$$\Delta x_2 = |x_2 - X_2| = |0.818 - 0.81818| = 0.00018 \leq 0.00019 = \overline{\Delta x_2}$$

Граничні відносні похибки становитимуть:

$$\overline{\delta x_1} = \left| \frac{\overline{\Delta x_1}}{x_1} \right| = \frac{0.0027}{4.24} \approx 0.0006367 \approx 0.00064 \text{ (0.064\%)}$$

$$\overline{\delta x_2} = \left| \frac{\overline{\Delta x_2}}{x_2} \right| = \frac{0.00019}{0.818} \approx 0.0002322 \approx 0.00024 \text{ (0.024\%)}$$

Оскільки $\overline{\delta x_2} < \overline{\delta x_1}$, то рівність $\frac{9}{11} \approx 0.818$ є більш точною.

Відповідь: Рівність $\frac{9}{11} \approx 0.818$ точніша.

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри, залишивши вірні знаки:

а) числа 72.353 ± 0.026 у вузькому розумінні;

б) числа 2.3544 ; $\delta=0.2\%$ у широкому розумінні;

Розв'язання.

а) Нехай $72.353 \pm 0.026 = x$. За умовою $\Delta x = 0.026 < 0.05$. Це означає, що у числі 72.353 вірними у вузькому розумінні є три цифри 7, 2, 3.

За правилом округлення знайдемо наближене значення числа: $x^* = 72.4$.

$$\Delta x^* = \Delta x + \Delta_{\text{окр}} = 0.026 + 0.047 = 0.073.$$

$\Delta x^* > 0.05$, отже, потрібно зменшити кількість цифр у наближеному числі до двох: $x^{**} = 72$. Тоді

$$\Delta x^{**} = \Delta x + \Delta_{\text{окр}} = 0.026 + 0.353 = 0.379.$$

Оскільки $\Delta x^{**} < 0.5$, то в округленому числі 72 обидві цифри, що залишилися, вірні у вузькому розумінні.

Відповідь: $x=72$.

б) Нехай $x=2.3544$; $\delta x=0.2\%$.

Абсолютна похибка $\Delta x = x \cdot \delta x = 2.3544 \cdot 0.002 = 0.00471$.

$\Delta x < 0.01$. Це означає, що у числі 2.3544 вірними у широкому розумінні є три цифри, тому округлюємо його, залишаючи ці три цифри: $x^*=2.35$.

$$\Delta x^* = \Delta x + \Delta_{окр} = 0.0044 + 0.00471 = 0.00911.$$

Оскільки $\Delta x^* < 0.01$, то в округленому числі 2.35 всі три цифри вірні у широкому розумінні.

Відповідь: $x=2.35$.

Приклад 3. Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел:

а) 0.4357; б) 12.384,

якщо вони мають лише вірні цифри: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні.

Розв'язання.

а) Оскільки всі чотири цифри числа $x=0.4357$ вірні у вузькому розумінні, то гранична абсолютна похибка $\Delta x = 0.00005$, а гранична відносна похибка

$$\overline{\delta x} = \left| \frac{\overline{\Delta x}}{x} \right| = \frac{0.00005}{0.4357} \approx 0.00011476 \approx 0.00012 \text{ (0.012\%)}.$$

Відповідь: $\Delta x = 0.00005$; $\overline{\delta x} = 0.00012 \text{ (0.012\%)}$.

б) Оскільки всі п'ять цифр числа $x=12.384$ вірні у широкому розумінні, то гранична абсолютна похибка $\Delta x = 0.001$, а гранична відносна похибка

$$\overline{\delta x} = \left| \frac{\overline{\Delta x}}{x} \right| = \frac{0.001}{12.384} \approx 0.0000807 \approx 0.000081 \text{ (0.0081\%)}.$$

Відповідь: $\Delta x = 0.001$; $\overline{\delta x} = 0.000081(0.0081\%)$.

Похибки при обчисленні наближених значень функції однієї змінної

Нехай задана деяка диференційна функція $y = f(x)$ та x -наближене значення аргументу x_0 .

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y = f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$. Виникає запитання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому приросту аргумента $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \cdot \Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x) > |x - x_0|$, то абсолютну похибку функції можна визначити по формулі

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається по формулі

$$\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \Delta(x).$$

Як приклади визначимо абсолютні і відносні похибки деяких основних елементарних функцій.

1) Логарифмічна функція $f(x) = \log_a(x)$.

Абсолютна похибка логарифмічної функції має вигляд

$$\Delta(\log_a(x)) = \frac{1}{|x|} \cdot |\log_a(e)| \cdot \Delta(x) = |\log_a(e)| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |\log_a(e)| \cdot \delta(x),$$

$$\text{где } \delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}.$$

Зокрема, якщо $a = 10$, то $\lg(e) \approx 0,5$ і $\Delta(\lg(x)) \approx 0,5 \cdot \delta(x)$, якщо ж $a = e$, то $\Delta(\ln(x)) = \delta(x)$ ($\ln(e) = 1$). Абсолютна похибка логарифмічної функції з підставою e дорівнює відносній похибці аргументу. Відносну похибку функції знаходимо по формулі

$$\delta(\log_a(x)) = \left| \frac{\log_a(e)}{\log_a(x)} \right| \cdot \delta(x).$$

2) *Степенева функція* $f(x) = x^a$, (a – кожне дійсне число).

$$\Delta(x^a) = |a \cdot x^{a-1}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(x^a) = \left| \frac{ax^{a-1}}{x^a} \right| \cdot \Delta(x) = |a| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |a| \cdot \delta(x).$$

Отже, відносна похибка степеневі функції пропорційна відносній похибці аргументу. Зокрема,

$$\delta(x^2) = 2\delta(x), \quad \delta(x^3) = 3\delta(x),$$

$$\delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\delta(x), \quad \delta(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\delta(x).$$

3) *Показова функція* $f(x) = a^x$.

$$\Delta(a^x) = a^x |\ln(a)| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(a^x) = |\ln(a)| \cdot \Delta(x).$$

4) *Тригонометричні функції* $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

$$\Delta(\sin x) = |\cos x| \cdot \Delta(x) \leq \Delta(x),$$

$$\Delta(\cos x) = |\sin x| \cdot \Delta(x) \leq \Delta(x).$$

Отже, абсолютні похибки функцій синус і косинус не перевершують абсолютної похибки свого аргументу. Відносні похибки можна оцінити по формулах

$$\delta(\sin x) = |\operatorname{ctgx}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(\cos x) = |\operatorname{tgx}| \cdot \Delta(x).$$

Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних

Розглянемо тепер функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0 , обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u = f(x, y, z)$, а точним значенням вважають $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції одної змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$ знаходимо по формулі

$$\Delta(u) = \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right| \Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u) = \frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Приклад 8. Обчислити абсолютну і відносну похибки функції $u = xyz$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$, то абсолютна похибка обчислюється по формулі

$$\Delta(u) = |yz| \cdot \Delta x + |xz| \cdot \Delta y + |xy| \cdot \Delta z,$$

а відносна похибка по формулі

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \frac{|yz| \cdot \Delta x + |xz| \cdot \Delta y + |xy| \cdot \Delta z}{|xyz|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|} = \\ &= \delta(x) + \delta(y) + \delta(z) \end{aligned}$$

Отримана формула є формулою відносної похибки добутку.

Нехай задано диференційовану функцію f , що залежить від n змінних; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – точні значення, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – наближені значення змінних, а $\Delta_i = |x_i - a_i|$, $i = \overline{1, n}$ – їх абсолютні похибки. Тоді абсолютна похибка значення функції в точці $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – це її приріст $\Delta f = |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)|$. Оскільки на практиці числа Δ_i значно менші, ніж абсолютні значення змінних x_i , $i = \overline{1, n}$, то приріст функції можна замінити її диференціалом

$$\Delta f \approx |df(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta_i \right|.$$

Ця нерівність підсилюється після заміни абсолютних похибок Δ_i граничними абсолютними похибками Δ_{x_i} , тобто $\Delta f \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}$.

Це означає, що граничну абсолютну похибку функції f можна визначити за формулою

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \quad (3)$$

З формули (3) легко отримати оцінку граничної відносної похибки функції:

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f|} = \sum_{i=1}^n \frac{|f'_{x_i}|}{|f|} \cdot \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}.$$

Для того, щоб виразити δ_f через граничні відносні похибки значень аргументів, помножимо і поділимо останню рівність на $|x_i|$. Тоді

$$\delta_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \cdot |x_i| \cdot \delta_{x_i}. \quad (4)$$

Формули (3) і (4) мають загальний характер. З них можна отримати не тільки всі формули для обчислення граничних абсолютних та відносних похибок елементарних функцій, але і формули для визначення граничних похибок результатів арифметичних дій.

Для прикладу розглянемо випадки алгебраїчної суми і множення. Нехай $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x - y$. Тоді з формули (3) отримаємо

$$\Delta_f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta_y = \Delta_x + \Delta_y, \quad \Delta_g = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \Delta_y = \Delta_x + \Delta_y.$$

Нехай $f(x, y) = x \cdot y$. Тоді за формулою (4)

$$\begin{aligned} \delta_f &= \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x} \right| \cdot |x| \cdot \delta_x + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial y} \right| \cdot |y| \cdot \delta_y = \left| \frac{f'_x}{f} \right| \cdot |x| \cdot \delta_x + \left| \frac{f'_y}{f} \right| \cdot |y| \cdot \delta_y = \\ &= \left| \frac{y}{xy} \cdot x \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{x}{xy} \cdot y \right| \cdot \delta_y = \delta_x + \delta_y. \end{aligned}$$

Аналогічно можна вивести формули для похибок результатів інших арифметичних дій. Для зручності всі формули зведені в загальну таблицю

Оцінка похибки

Операція	Δ	δ	Операція	Δ	δ
$x + y$	$\Delta_x + \Delta_y$	$\frac{ x }{ x + y } \delta_x + \frac{ y }{ x + y } \delta_y$	x / y	$\frac{x\Delta_y + y\Delta_x}{y^2}$	$\delta_x + \delta_y$
$x - y$	$\Delta_x + \Delta_y$	$\frac{ x }{ x - y } \delta_x + \frac{ y }{ x - y } \delta_y$	x^n	$nx^{n-1}\Delta_x$	$n\delta_x$
$x \cdot y$	$x\Delta_y + y\Delta_x$	$\delta_x + \delta_y$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x$	$\frac{\delta_x}{n}$

Приклад 1.

Нехай $a = 27,35 \pm 0,02$; $b = 33,87 \pm 0,03$.

Тоді $S = a + b = 61,22 \pm 0,05$.

де

$$61,22 = 27,35 + 33,87$$

$$0,05 = 0,02 + 0,03.$$

Приклад 2.

Нехай $a = 58,9 \pm 0,2$; $b = 27,3 \pm 0,1$.

Тоді $R = a - b = 31,06 \pm 0,3$.

де

$$31,6 = 58,9 - 27,3$$

$$0,3 = 0,2 + 0,1.$$

Приклад 3.

Нехай $a = 6,81 \pm 0,01$; $b = 7,43 \pm 0,02$.

Тоді $D = a \cdot b = 50,6 \pm 0,21$.

де

$$50,6 \approx 6,81 \cdot 7,43$$

$$0,21 \approx 6,81 \cdot 0,02 + 7,43 \cdot 0,01.$$

Приклад 4.

Нехай $a = 4,21 \pm 0,01$; $b = 2,84 \pm 0,02$.

Тоді $K = a / b = 1,48 \pm 0,91$.

де

$$1,48 \approx 4,21 / 2,84$$

$$0,91 \approx (4,21 \cdot 0,02 + 2,84 \cdot 0,01) / 2,84^2.$$

Приклад 5.

Нехай $a = 1,2 \pm 0,1$.

Тоді $S = a^3 = 1,728 \pm 0,432$.

де

$$1,728 = 1,2^3$$

$$0,432 \approx 3 \cdot 1,2^2 \cdot 0,1$$

Приклад 6.

Нехай $a = 8,3 \pm 0,2$.

Тоді $R = \sqrt{a} = 2,88 \pm 0,04$.

де

$$2,88 \approx \sqrt{8,3}$$

$$0,04 \approx \frac{\sqrt{8,3}}{2 \cdot 8,3} \cdot 0,2$$

Тема 2. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Жордана – Гауса

Розглянемо СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомими:

[illegible]

Алгоритм методу Жордана – Гауса:

1 крок. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (3.2)$$

2 крок. Серед елементів a_{ij} вибирається ведучий елемент, який знаходиться на перетині ведучого рядка та ведучого стовпчика;

(для зменшення чутливості розв'язку до похибки обчислень рекомендується за ведучий елемент вибрати максимальний за абсолютною величиною елемент матриці A).

3 крок. Перераховуємо елементи ведучого рядка за формулою:

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}}, \quad (3.3)$$

де q - номер ведучого рядка; p - номер ведучого стовпчика.

4 крок. Елементи інших рядків розширеної матриці (3.2) обчислюються за правилом прямокутника:

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{qk} \cdot a_{ip}}{a_{qp}}, \quad i \neq q, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

(після обчислень (3.3), (3.4) ведучий стовпчик перетворюється на одиничний – елемент a'_{qp} дорівнює одиниці, а всі решта елементів ведучого стовпчика дорівнюють нулю).

5 крок. Повторити кроки 2-4 вибравши за ведучий елемент інший (інший ведучий рядок та інший ведучий стовпчик); (коли нема можливості вибрати ведучий елемент алгоритм закінчується).

6 крок. Проаналізувати кількість розв'язків системи; визначити базисні та вільні змінні; (змінні, які відповідають лінійно незалежним одиничним стовпчикам називають базисними, решта змінних - вільні).

7 крок. Знайти базисний розв'язок системи, прирівнявши всі вільні змінні до нуля; 8 крок перевірити розв'язок підстановкою у вихідну систему.

Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 0,25x_1 + 0,61x_2 + 0,53x_3 = 2,04 \\ 0,28x_1 - 0,36x_2 + 0,18x_3 = 1,03 \\ 1,12x_1 - 2,31x_2 - 3,41x_3 = 4,26 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,25 & 0,61 & 0,53 & 2,04 \\ 0,28 & 0,36 & 0,18 & 1,03 \\ 1,12 & 2,31 & 3,41 & 4,26 \end{array} \right)$$

Оберемо ведучий елемент

$$\max(|a_{ij}|) = 3,41$$

Перерахуємо елементи розширеної матриці за формулами (3.3), (3.4). Знову виберемо ведучий елемент і повторимо кроки алгоритму. Всі розрахунки занесемо у Таблицю (ведучий елемент у кожній матриці підкреслений):

Таблиця

0,25	0,61	0,53	2,04
0,28	0,36	0,18	1,03
1,12	2,31	<u>3,41</u>	4,26

0,075924	<u>0,250968</u>	0	1,377889
0,22088	0,238065	0	0,805132
0,328446	0,677419	1	1,249267

0,302524	1	0	5,490301
<u>0,14886</u>	0	0	-0,50191
0,12351	0	1	-2,46997

0	1	0	6,51033
1	0	0	-3,37173
0	0	1	-2,05353

Оскільки всі стовпчики основної матриці системи перетворились в одиничні, то система має єдиний розв'язок. З останньої ітерації генеруємо розв'язок системи:

$$x_1 = -3,372; \quad x_2 = 6,510; \quad x_3 = -2,054.$$

Метод простих ітерацій (Якобі)

Для застосування методу простих ітерацій представимо систему лінійних рівнянь $Ax = b$ і $a_{ii} \neq 0$ у вигляді:

$$x = Cx + d, \text{ де } d = (d_i) = b_i / a_{ii}, \text{ а } c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} / a_{ii}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}. \quad (1)$$

Вхідними даними є вектор початкових наближень $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ на основі якого будується ітераційна послідовність векторів наближень за формулою:

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d, \quad k = 1, 2, \dots \text{ або } x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) \quad (2)$$

і точність ε з якою відшуковуються корені (процес пошуку продовжується поки $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$).

Приклад. Нехай задана система рівнянь. Розв'язок: (2;4;3)

-3x	+y	+5z	=15		x=	$(-15+y+5z)/3$		$x_k=$	$(-15+y_{k-1}+5z_{k-1})/3$	2
4x	-8y	+z	=-21	$\Rightarrow$	y=	$(21+4x+z)/8$	$\Rightarrow$	$y_k=$	$(21+4x_{k-1}+z_{k-1})/8$	4
4x	-y	+z	=7		z=	$7-4x+y$		$z_k=$	$7-4x_{k-1}+y_{k-1}$	3

Задамо початкове наближення $(x_0, y_0, z_0) = (1; 2; 2)$. Якщо виконати ітерації, то стане очевидно, що метод розбігається.

k	x_1	x_2	x_3
0	1	2	2
1	-1,5	3,375	5
2	6,6875	2,5	16,
3	34,6875	8,0115625	37,5

Теорема. Якщо $\|C\| < 1$, то система рівнянь $x = Cx + d$ має єдиний розв'язок $\bar{x}^*$ і ітерації, задані формулою (2) (послідовність наближень) збігаються до розв'язку зі швидкістю геометричної прогресії.

Умові теореми задовольняють матриці з явно домінуючою головною діагоналлю і для таких систем метод є досить ефективним. Так в нашому прикладі $\|C\|_1 = 17$ або $\|C\|_2 = \sqrt{129}$ – обидві норми значно більші за одиницю і не задовольняють умові теореми.

Якщо матриця не відповідає вимогам теореми, то елементарними перетвореннями її можна привести до матриці з домінуючою діагоналлю. Перестановкою рядків (1-го і 3-го) матрицю нашого прикладу можна переписати наступним чином:

4x	-y	+z	=7		x=	$(7+y-z)/4$		$x_k=$	$(7+y_{k-1}-z_{k-1})/4$	2
4x	-8y	+z	=-21	$\Rightarrow$	y=	$(21+4x+z)/8$	$\Rightarrow$	$y_k=$	$(21+4x_{k-1}+z_{k-1})/8$	4
-2x	+y	+5z	=15		z=	$(15+2x-y)/5$		$z_k=$	$(15+2x_{k-1}-y_{k-1})/5$	3

То отримаємо матрицю з домінуючою головною діагоналлю. Візьмемо ті ж самі початкові наближення $(x_0, y_0, z_0) = (1; 2; 2)$ і отримаємо збіжну послідовність ітерацій:

k	x_1	x_2	x_3
0	1	2	2
1	1,75	3,375	3,0

2	1,84375	3,875	3,025
3	1,9625	3,925	2,965

На похибку простих ітерацій можна дати наступну оцінку:

$$\|x^* - x^{(k-1)}\| \leq \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|C\| \cdot \|x^* - x^{(k-1)}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \text{ і } \|x^* - x^{(k)}\| \leq \|C\| \cdot \|x^* - x^{(k-1)}\| \text{ то}$$

$$\text{остаточно отримаємо } \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

Метод Зейделя

Збіжність послідовності ітерацій можна прискорити, якщо на кожному кроці ітерацій у рекурентну формулу визначення $x_i^{(k)}$ підставляти вже знайдені значення $x_j^{(k)}$, $j < i$. Така підстановка називається ітераціями Зейделя. Ітерації Зейделя можна записати наступною рекурентною формулою:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + d.$$

Умови збіжності методу простих ітерацій і Зейделя не співпадають але перетинаються.

Теорема. Для існування єдиного розв'язку системи (1) і збіжності методу Зейделя достатньо, що б виконувалась хоча б одна з умов:

1. $\sum_{j \neq i} |c_{ij}| < |c_{ii}|$, $i = \overline{1, n}$ (матриця строго діагонально домінуюча);
2. матриця C є симетричною додатньо визначеною (всі її власні числа додатні).

Приклад. Візьмемо матрицю з прикладу простих ітерацій:

4x	-y	+z	=7		x=	(7+y-z)/4		x _k =	(7+y _{k-1} -z _{k-1})/4	2
4x	-8y	+z	=-21	⇒	y=	(21+4x+z)/8	⇒	y _k =	(21+4x _k +z _{k-1})/8	4
-2x	+y	+5z	=15		z=	(15+2x-y)/5		z _k =	(15+2x _k -y _k)/5	3

Скориставшись ітераціями Зейделя, можна побачити, що збіжність буде більш швидкою:

k	x ₁	x ₂	x ₃
0	1	2	2
1	1,75	3,75	2,95
2	1,95	3,968	2,98625
3	1,995	3,996	2,99901

Тема 3.

Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь з одним невідомим

Нехай задано рівняння виду:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

де $f(x)$ – нелінійна неперервна функція однієї змінної

Функція f визначена та неперервна на проміжку $x \in [a, b]$.

Якщо функція f – алгебраїчний многочлен, рівняння називають **алгебраїчним**.

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

$$12 + 3.1x + 2x^6 = 0$$

$$1 + x + x^2 + x^3 = 0$$

Якщо функція f містить тригонометричні, логарифмічні, показникові та інші, відмінні від многочленів, функції, рівняння називають **трансцендентним**.

$$ax + b \cdot \lg(x) = c \quad , \quad ae^{-x} + b \cdot \operatorname{tg}(x) = 5$$

Розв'язати рівняння (1) – означає знайти таке $x^* \in \mathbb{R}^1$, для якого $f(x^*) = 0$.
При цьому x^* називають **коренем рівняння**.

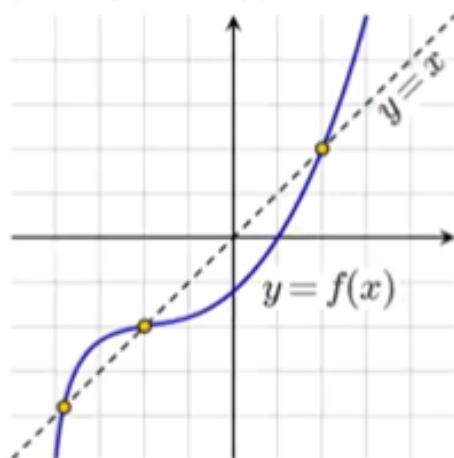
Аналітичний та графічний методи відокремлення коренів

Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на таких теоремах:

Теорема 1. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізка, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині цього відрізка міститься *принаймні один корінь рівняння* $f(x) = 0$, тобто існує хоча б один x^* , такий, що $f(x^*) = 0$.

Теорема 2. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізка, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, а похідна $f'(x)$ зберігає знак всередині цього відрізка, то всередині відрізка існує *тільки один корінь рівняння* $f(x) = 0$.

Графічний метод зводиться до побудови графіка функції та візуального визначення точки, де вона перетинає вісь ординат. Іноді побудова графіка функції $f(x)$ складна, але рівняння можна переписати у вигляді $f(x)=g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ – функції з простими графіками. Тоді графічний метод зводиться до знаходження точки перетину двох функцій.



Приклад 1. Графічно відокремити корені рівняння

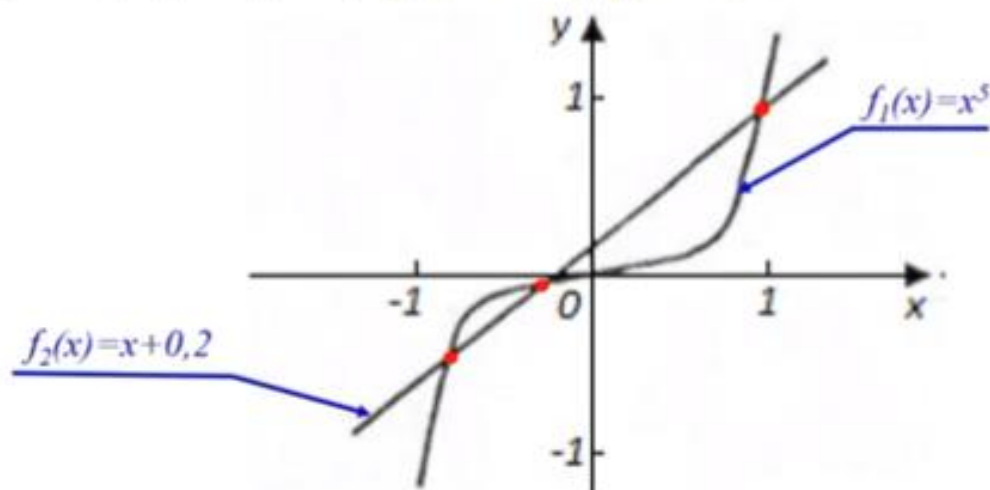
$$x^5 - x - 0,2 = 0$$

так, щоб довжина відрізка $[a, b]$, що містить корінь, не перевищувала 0,5; тобто $b - a \leq 0,5$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Зводимо рівняння до вигляду:

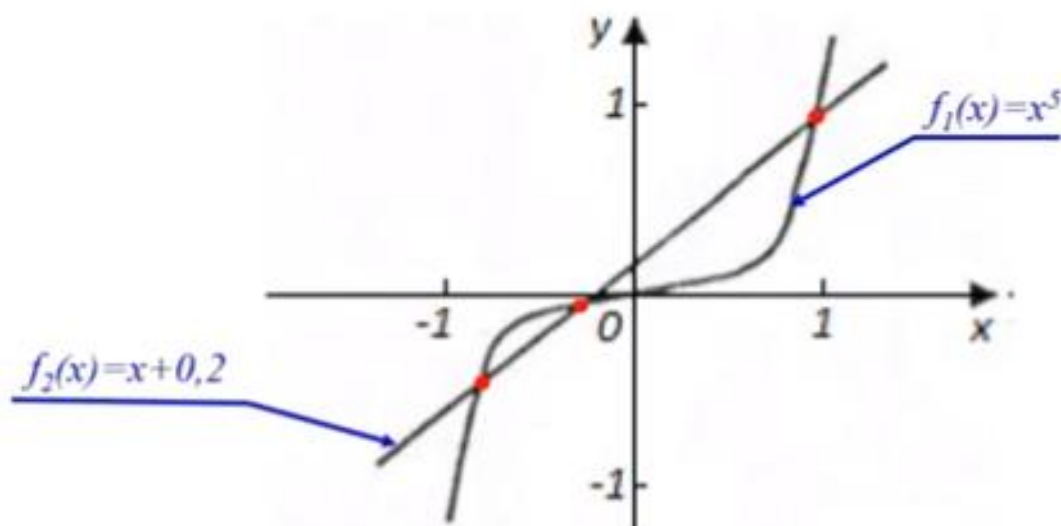
$$x^5 = x + 0,2$$

і будуємо графіки функцій $f_1(x)=x^5$ та $f_2(x)=x+0,2$.



Задане рівняння має три дійсні корені:

$$x_1 \approx -0,2; x_2 \approx -0,9; x_3 \approx 1,1.$$



Три дійсні корені: $x_1 \approx -0,2$; $x_2 \approx -0,9$; $x_3 \approx 1,1$.

Причому $x_1 \in [-0,4; 0]$; $x_2 \in [-1,0; -0,8]$; $x_3 \in [1,0; 1,3]$.

Для знайдених відрізків умова $b - a \leq 0,5$ виконується.

Перевіряємо умову $f(a) \cdot f(b) < 0$ для кожного відрізка.

$$f(x) = x^5 - x - 0,2$$

$$f(-0,4) = (-0,4)^5 + 0,4 - 0,2 = 0,18976 > 0; \quad f(0) = -0,2 < 0;$$

$$f(-1) = (-1)^5 + 1 - 0,2 < 0; \quad f(-0,8) = (-0,8)^5 + 0,8 - 0,2 > 0;$$

$$f(1) = 1 - 1 - 0,2 < 0; \quad f(1,3) > 0.$$

Отже, корені рівняння відокремлено.

Метод ділення відрізка навпіл (бісекцій)

Нехай треба знайти з заданою точністю ε дійсний корінь рівняння $f(x)=0$, що міститься в інтервалі (a,b) .

Найпростішим методом уточнення коренів є **метод ділення відрізка навпіл (метод бісекцій)**.

В якості початкового наближення кореня x_0 приймаємо середину цього відрізка, т. б. $x_0 = (a + b) / 2$. Далі досліджуємо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізків $[a, x_0]$ та $[x_0, b]$, т. б. у точках a, x_0, b . Той з них, на кінцях якого $f(x)$ приймає значення різних знаків, містить шуканий корінь. Тому його приймаємо в якості нового відрізка. Другу половину $[a; b]$, на якій знак $f(x)$ не змінюється, відкидаємо. В якості першої ітерації кореня x_1 приймаємо середину нового відрізка й проводимо ті ж міркування.

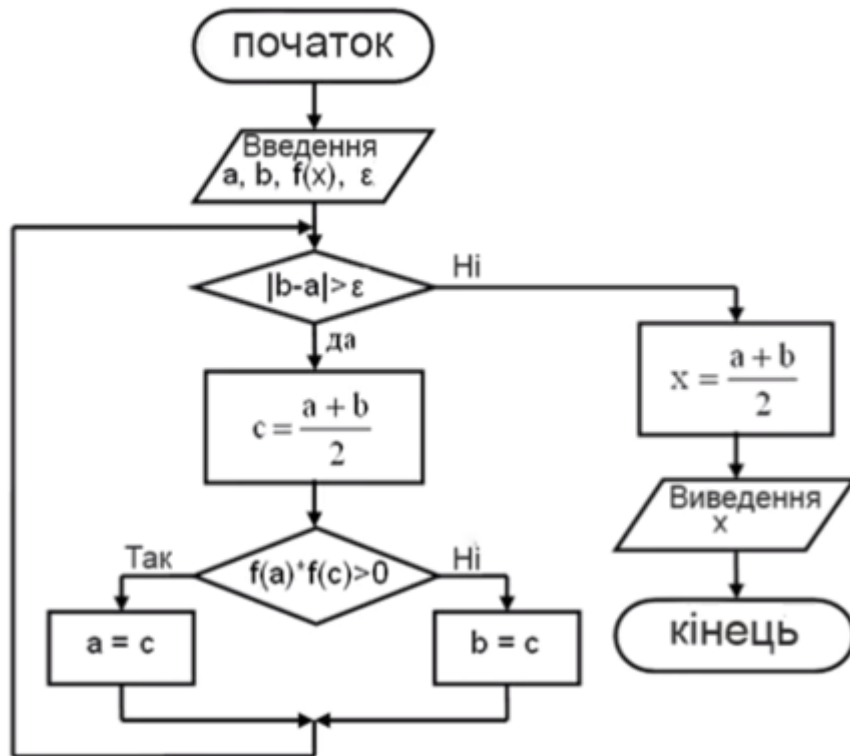
Загальна *формула методу бісекції* має вигляд:

$$x_n = (a_n + b_n) / 2.$$

Ітераційний процес продовжуємо до тих пір, поки не буде отримано відрізок $[a_n; b_n]$ такий, що $|b_n - a_n| \leq 2\varepsilon$. За наближене значення кореня беруть середину цього відрізка: $\xi \approx (a_n + b_n) / 2$. Або ж до тих пір, поки значення функції $f(x)$ після n -тої ітерації не стане меншим за модулем заданого малого числа ε , т. б. $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Збіжність методу ділення відрізка навпіл повільна. На практиці цей метод зручно застосовувати для грубої оцінки кореня рівняння $f(x)=0$.

Блок-схема метода ділення відрізка навпіл



Алгоритм методу

Нехай задано рівняння $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

Задано відрізок $[a, b]$, на кінцях цього відрізка значення функції $f(x)$ має різні знаки. Необхідно знайти проміжок для наступної ітерації, тобто $a^{(k+1)}$ і $b^{(k+1)}$ та $x^{(k)}$.

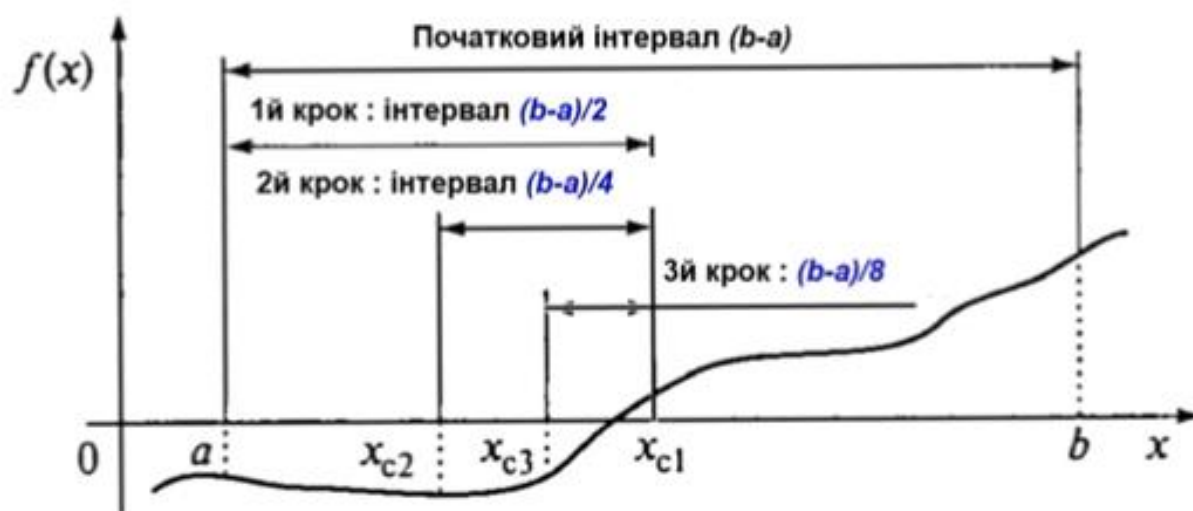
1. На кожному кроці процесу пошуку ділимо відрізок $[a, b]$ навпіл.

Тобто на k -ому кроці: $x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$.

2. Обчислюємо значення функції $f(x)$ в точках $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ та $x^{(k)}$. Відповідно отримуємо значення $f(a^{(k)})$, $f(b^{(k)})$ та $f(x^{(k)})$.
3. Порівнюємо знаки чисел, тобто перевіряємо умову $f(a^{(k)}) \cdot f(x^{(k)}) < 0$:
якщо знаки різні, то робимо заміну $a^{(k+1)} = a^{(k)}$, $b^{(k+1)} = x^{(k)}$;
якщо знаки чисел однакові, переходимо до наступного пункту.
4. Порівнюємо знаки чисел, тобто перевіряємо умову $f(b^{(k)}) \cdot f(x^{(k)}) < 0$:
якщо знаки різні, то робимо заміну $a^{(k+1)} = x^{(k)}$, $b^{(k+1)} = b^{(k)}$;
якщо знаки чисел однакові, значить корінь рівняння не міститься на заданому проміжку.

5. Процес повторення ітерацій продовжується, поки не буде досягнуто заданої точності, тобто $\frac{b^{(k+1)} - a^{(k+1)}}{2^{k-1}} \leq \varepsilon$.

Тобто після k ділень довжина відрізка, на якому лежить корінь, зменшується в 2^k разів, тоді очевидно, що коли виконується умова точності, то відстань від середини цього інтервалу $x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$ до кореня рівняння x^* буде не більше ε , тобто $x^* \approx x^{(k)}$ і виконується з потрібною точністю.



Приклад 2. Розв'язати нелінійне рівняння $x^2 - 3x - 3 = 0$ на проміжку $[-1; 7]$ методом ділення відрізка навпіл. Виконати п'ять ітерацій з визначенням точності ε .

Ітерація 1

1) Ділимо відрізок навпіл $x^{(1)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$

2) Обчислюємо значення функції $f(x) = x^2 - 3x - 3$ в трьох точках:

$$\left. \begin{aligned} f(a^{(1)}) &= f(-1) = 1 + 3 - 3 = 1 \\ f(b^{(1)}) &= f(7) = 49 - 21 - 3 = 25 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{значення функції} \\ \text{на кінцях відрізка} \end{array}$$

$$f(x^{(1)}) = f(3) = 9 - 9 - 3 = -3 \quad \begin{array}{l} \text{значення функції в точці,} \\ \text{що є серединою відрізка } [-1; 7] \end{array}$$

3) Перевіряємо умову $f(a^{(1)}) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, тобто знаки чисел $a^{(1)}$ та $x^{(1)}$ різні, тоді робимо заміну: $a^{(2)} = a^{(1)} = -1$, $b^{(2)} = x^{(1)} = 3$. Отримали $[-1; 3]$.

4) Перевіряємо умову $f(b^{(1)}) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, тобто знаки чисел $b^{(2)}$ та $x^{(2)}$ різні, значить корінь рівняння також може знаходитись в проміжку $[3; 7]$.

Розглянемо спочатку $[-1; 3]$ та знайдемо наближене значення кореня x_1^* .



Ітерація 2

1) Ділимо відрізок навпіл $x^{(2)} = \frac{a^{(2)} + b^{(2)}}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$

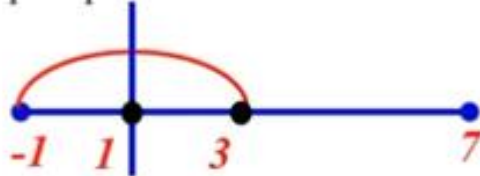
2) Обчислюємо значення функції $f(x) = x^2 - 3x - 3$ в трьох точках:

$$\left. \begin{aligned} f(a^{(2)}) &= y(-1) = 1 + 3 - 3 = 1 \\ f(b^{(2)}) &= y(3) = 9 - 9 - 3 = -3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{значення функції} \\ \text{на кінцях відрізка} \end{array}$$

$$f(x^{(2)}) = y(1) = 1 - 3 - 3 = -5 \quad \begin{array}{l} \text{значення функції в точці,} \\ \text{що є серединою відрізка } [-1, 3] \end{array}$$

3) Перевіряємо умову $f(a^{(2)}) \cdot f(x^{(2)}) < 0$, тобто знаки чисел $a^{(2)}$ та $x^{(2)}$ різні, тоді робимо заміну: $a^{(3)} = a^{(2)} = -1$, $b^{(3)} = x^{(2)} = 1$. Отримали $[-1; 1]$.

4) Перевіряємо умову $f(b^{(2)}) \cdot f(x^{(2)}) \geq 0$, тобто знаки чисел $b^{(2)}$ та $x^{(2)}$ однакові, значить корінь рівняння не міститься на $[1; 3]$.



Ітерація 3

1) Ділимо відрізок навпіл $x^{(3)} = \frac{a^{(3)} + b^{(3)}}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$

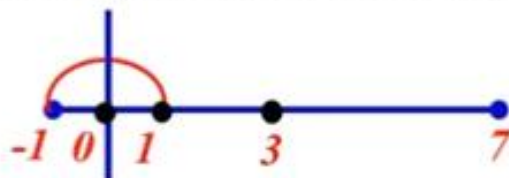
2) Обчислюємо значення функції $f(x) = x^2 - 3x - 3$ в трьох точках:

$$\left. \begin{aligned} f(a^{(3)}) &= y(-1) = 1 + 3 - 3 = 1 \\ f(b^{(3)}) &= y(1) = 1 - 3 - 3 = -5 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{значення функції} \\ \text{на кінцях відрізка} \end{array}$$

$$f(x^{(3)}) = y(0) = 0 - 0 - 3 = -3 \quad \begin{array}{l} \text{значення функції в точці,} \\ \text{що є серединою відрізка } [-1, 1] \end{array}$$

3) Перевіряємо умову $y(a^{(3)}) \cdot y(x^{(3)}) < 0$, тобто знаки чисел $a^{(3)}$ та $x^{(3)}$ різні, тоді робимо заміну: $a^{(4)} = a^{(3)} = -1$, $b^{(4)} = x^{(3)} = 0$. Отримали $[-1; 0]$.

4) Перевіряємо умову $f(b^{(3)}) \cdot f(x^{(3)}) > 0$, тобто знаки чисел $b^{(3)}$ та $x^{(3)}$ однакові, значить корінь рівняння не міститься на $[0; 1]$.



Ітерація 4

1) Ділимо відрізок навпіл $x^{(4)} = \frac{a^{(4)} + b^{(4)}}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2}$

2) Обчислюємо значення функції $y(x) = x^2 - 3x - 3$ в трьох точках:

$$\left. \begin{aligned} f(a^{(4)}) &= y(-1) = 1 + 3 - 3 = 1 \\ f(b^{(4)}) &= y(0) = 0 - 0 - 3 = -3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{значення функції} \\ \text{на кінцях відрізка} \end{array}$$

$$f(x^{(4)}) = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 3 = -1,25 \quad \begin{array}{l} \text{значення функції в точці,} \\ \text{що є серединою відрізка } [-1, 0] \end{array}$$

3) Перевіряємо умову $f(a^{(4)}) \cdot f(x^{(4)}) < 0$, тобто знаки чисел $a^{(4)}$ та $x^{(4)}$ різні, тоді робимо заміну: $a^{(5)} = a^{(4)} = -1$, $b^{(5)} = x^{(4)} = -\frac{1}{2}$. Отримали $[-1; -\frac{1}{2}]$.

4) Перевіряємо умову $f(b^{(4)}) \cdot f(x^{(4)}) > 0$, тобто знаки чисел $b^{(4)}$ та $x^{(4)}$ однакові, значить корінь рівняння не міститься на $[-\frac{1}{2}; 0]$.



Ітерація 5

1) Ділимо відрізок навпіл $x^{(5)} = \frac{a^{(5)} + b^{(5)}}{2} = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{2} = -0,75$

Визначення точності ε .

З останньої 5-тої ітерації: $x = -0,75$

Обчислимо: $f(x) = x^2 - 3x - 3$

$$f(x) = f(-0,75) = -0,1875$$

$$|f(x)| = |-0,1875| = 0,1875 < 1$$

Отже, корінь рівняння $x_1^* \in [-1; -\frac{1}{2}]$ та $x_1^* \approx -0,75$ – корінь рівняння з точністю $\varepsilon=1$.

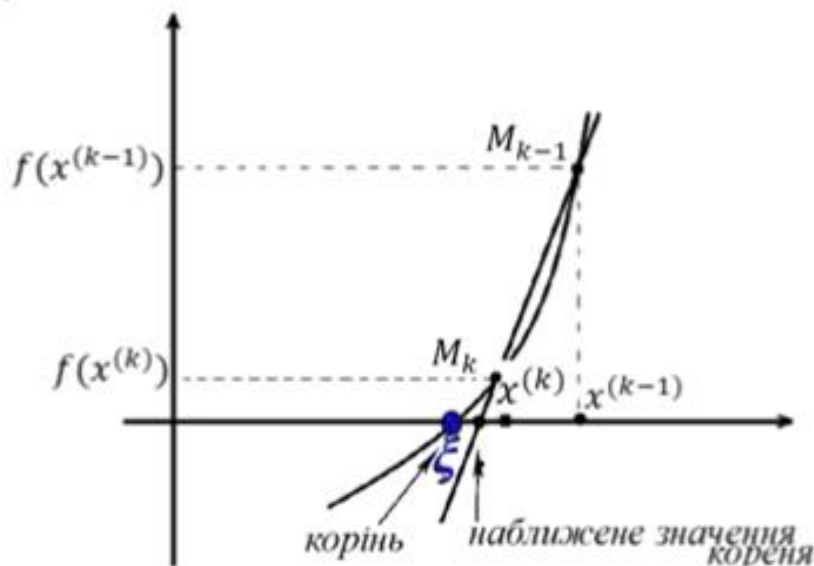
Аналогічно знаходимо наближене значення кореня x_2^* на $[3; 7]$, виконуючи n ітерацій відповідно до алгоритму метода ділення відрізка навпіл.



Отже, корінь рівняння $x_2^* \in [3,5; 4]$ та $x_2^* \approx 3,75$ – корінь рівняння з точністю $\varepsilon=1$.

Метод хорд (січних)

При розв'язанні нелінійного рівняння $f(x)=0$ методом хорд задаються відрізок $[a,b]$, на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність $\varepsilon > 0$ розв'язку задачі.



Геометрична інтерпретація методу хорд:

замість точки перетину осі OX та графіку функції $f(x)$ (ζ – точний корінь) розглядається точка перетину осі OX та відрізка прямої (хорди), що з'єднує кінці дуг графіка ($x^{(k+1)}$ – наближений корінь).

Знайдемо рівняння хорди (січної), що проходить через дві точки $M_{k-1}(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ та $M_k(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$:

$$\frac{x - x^{(k)}}{x^{(k-1)} - x^{(k)}} = \frac{y - f(x^{(k)})}{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)})}$$

Підставимо замість x та y координати точки $O(x^{(k+1)}, 0)$, яка належить хорді:

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k-1)} - x^{(k)}} = \frac{0 - f(x^{(k)})}{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)})}$$

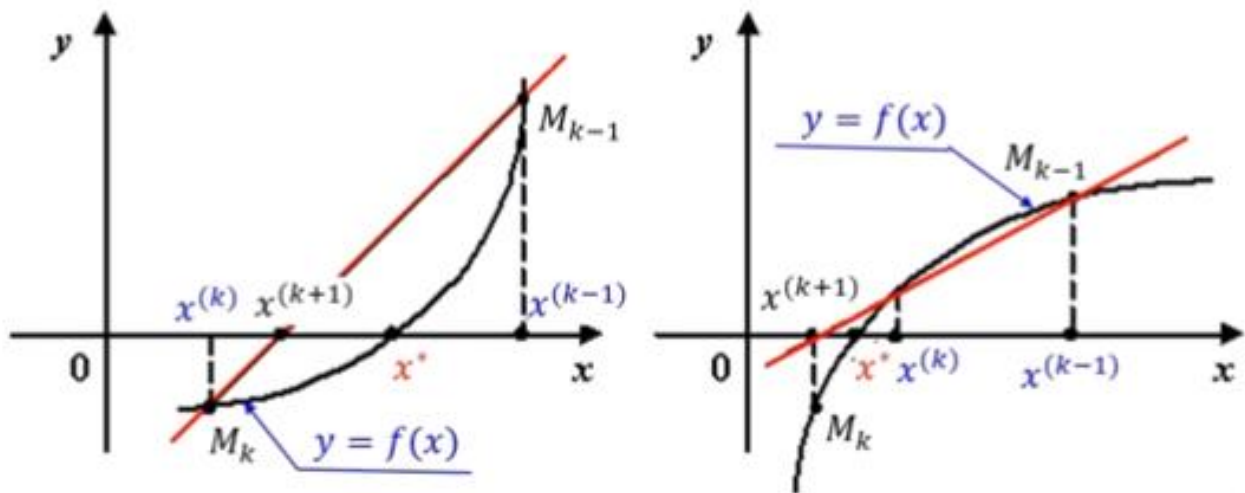
Виразивши з останньої формули $x^{(k+1)}$ одержимо **формулу хорди**:

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k-1)} \cdot f(x^{(k)}) - x^{(k)} \cdot f(x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

Ідея **методу хорд** полягає у знаходженні наступного наближеного розв'язку рівняння $x^{(k+1)}$ за двома попередніми наближеннями $x^{(k-1)}$ та $x^{(k)}$.

За двома точками $M_{k-1}(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ та $M_k(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ необхідно побудувати пряму, тобто хорду, що з'єднуватиме дві точки графіка $y = f(x)$, і взяти як наступне наближення $x^{(k+1)}$ абсцису точки перетину цієї прямої з віссю OX .

В залежності від розташування точок $x^{(k-1)}$ та $x^{(k)}$ (по одну сторону, або по різні, від кореня x^*), отримуємо наступні графіки:



Отже, наступне послідовне наближення буде залежати від двох попередніх.

Алгоритм методу хорд

Нехай задано рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

Задано значення аргументів для двох попередніх наближень $x^{(k-1)}$ та $x^{(k)}$. Знайти наближення $x^{(k+1)}$ методом хорд з точністю ε .

1. Обчислюємо значення функції $f(x)$ в точках $x^{(k-1)}$ та $x^{(k)}$. Відповідно отримуємо значення $f(x^{(k-1)})$, $f(x^{(k)})$.
2. Обчислюємо наступне наближення $x^{(k+1)}$ за формулою:

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k-1)} \cdot f(x^{(k)}) - x^{(k)} \cdot f(x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

3. Обчислення продовжуються, поки не буде виконуватися умова $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

Метод Ньютона (метод дотичних)

Нехай нам вдалося відокремити відрізок $[a; b]$, в якому розташоване шукане значення кореня рівняння $f(x)=0$. За початкове наближення x_0 обираємо точку $B(b; f(b))$. Проводимо у цій точці дотичну до кривої $y = f(x)$, що задається рівнянням $y - f(b) = f'(b)(x - b)$.

Перше наближення кореня x_1 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю Ox . Для цього потрібно підставити в рівняння дотичної $y = 0$, $x = x_1$. Отримуємо:

$$-f(b) = f'(b)(x_1 - b).$$

Звідки:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

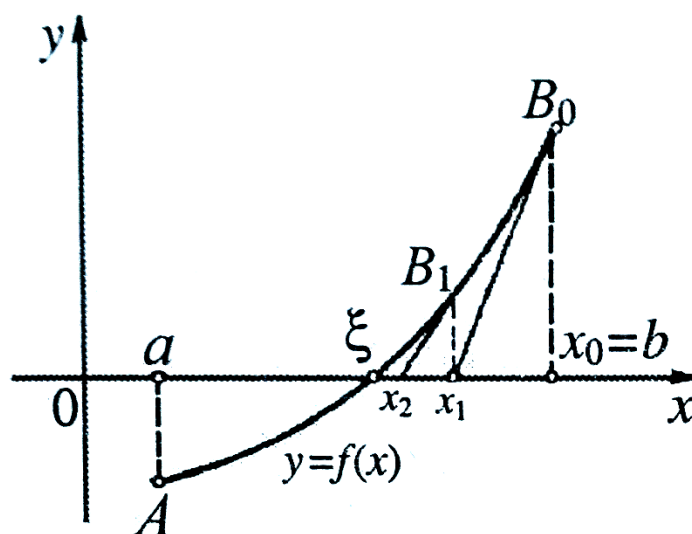


Рис. Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Очевидно, що тепер корінь ξ знаходиться на відрізку $[a; x_1]$. Проводимо наступну дотичну в точці $B_1(x_1; f(x_1))$ і друге наближення кореня x_2 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю Ox :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогічно знаходимо й наступні наближення кореня.

Загальна формула методу дотичних має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

У якості критерію закінчення ітераційного процесу може бути використана умова:

$$|f(x_n)| < \varepsilon.$$

Можна також оцінювати близькість двох послідовних наближень:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Послідовні наближення $x_0 = b, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ утворюють обмежену монотонно спадаючу послідовність, причому $a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із надлишком.

Якщо перша дотична проводиться до кривої $y = f(x)$ у точці $A_0(a; f(a))$, то отримаємо послідовні наближення $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, які утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність, причому $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \xi < b$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із нестачею.

Для того, щоб визначити, до якого з кінців відрізка $[a, b]$ проводити першу дотичну, треба скористатися одним з наступних правил:

- в методі Ньютона першу дотичну проводять до того кінця відрізка $[a; b]$, для якого знак функції співпадає зі знаком другої похідної, тобто за початкове наближення беремо точку a , якщо $f(a) \cdot f''(x) > 0$; за початкове наближення беремо точку b , якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$;

- якщо в інтервалі $[a; b]$ знаки першої і другої похідних функції $f(x)$ співпадають, тобто для всіх $x \in [a; b]$ справедлива нерівність $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то першу дотичну в методі Ньютона слід проводити в правому кінці відрізка $[a; b]$; якщо знаки похідних різні, тобто для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то перша дотична проводиться в лівому кінці.

Приклад. Розв'язати нелінійне алгебраїчне рівняння $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ з точністю до 0.01.

Розв'язання.

1) Відокремлення коренів рівняння проводимо аналітично.

Позначимо $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

Знаходимо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$$

Знаходимо корені похідної $f'(x) = 0$:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(4x - 3) = 0$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3/4$$

Складаємо таблицю знаків функції $f(x)$, покладаючи x рівним кореням похідної (критичним значенням функції) та граничним значенням області визначення:

x	$-\infty$	-1	$3/4$	1	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	+	-	-	-	+

Оскільки відбуваються дві зміни знаків, то робимо висновок, що рівняння має два дійсних кореня:

$$x_1 \in (-\infty; -1], x_2 \in [1, +\infty)$$

Зменшимо якомога проміжки, в яких знаходяться корені:

x	-2	-1	1	2
$\text{sign } f(x)$	+	-	-	+

Отже, маємо

$$x_1 \in [-2; -1], x_2 \in [1; 2].$$

2) Корінь $x_1 \in [-2; -1]$ уточнимо методом Ньютона.

За початкове наближення кореня беремо лівий кінець відрізка $[-2; -1]$, оскільки в точці -2 знак функції співпадає зі знаком другої похідної.

Обчислення проводимо за формулою $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \dots$ й заносимо до таблиці:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
0	-2	7	-33	
1	-1.787879	1.1759957	-22.29791	0.21212121
2	-1.735139	0.061515	-19.987533	0.05274018
3	-1.732061	0.0002012	-19.856836	0.00307767

Оскільки $|x_3 - x_2| = 0.0030777 < \varepsilon$, а також $|f(x_3)| = 0.0002012 < \varepsilon$, то ітераційний процес зупиняємо. Можемо прийняти $x_1 \approx -1.73$.

Методом бісекції уточнимо другий корінь $x_2 \in [1; 2]$.

Обчислення проводимо за формулою $x_n = (a_n + b_n) / 2$ і заносимо до таблиці:

n	a_n^-	b_n^+	$x_n = (a_n + b_n) / 2$	$f(x_n)$	$ a_n - b_n $
0	1	2	1.5	-1.3125 < 0	1
1	1.5	2	1.75	0.144531 > 0	0.5
2	1.5	1.75	1.625	-0.72437 < 0	0.25
3	1.625	1.75	1.6875	-0.32909 < 0	0.125
4	1.6875	1.75	1.71875	-0.1026 < 0	0.0625

5	1.71875	1.75	1.734375	0.018318>0	0.03125
6	1.71875	1.734375	1.726563	-0.04279<0	0.015625

Оскільки $|a_6 - b_6| = |1.71875 - 1.734375| = 0.015625 < 2\varepsilon$, то ітераційний процес зупиняємо. За наближене значення кореня можемо прийняти середину відокремленого проміжку:

$$x_2 \approx \frac{1}{2}(1.71875 + 1.734375) \approx 1.7265625 \approx 1.73.$$

Відповідь: $x_1 \approx -1.73$, $x_2 \approx 1.73$.

Тема 4. Апроксимація функцій

Апроксимація, інтерполяція та екстраполяція

Наближення функції $f(x)$ більш простішою функцією $\varphi(x)$ називають **апроксимацією** (від латинської *approximo* – наближатися). При цьому функцію $\varphi(x)$ будуть називати апроксимуючою. Апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ будують таким чином, щоб відхилення від $f(x)$ на заданому проміжку було мінімальним. Апроксимація (*approximation*) взагалі – це наближений опис однією функцією $\varphi(x)$ (апроксимаційною) іншої функції $f(x)$ (апроксимованої), яка задається у будь-якому вигляді (при апроксимації даних вона задається у вигляді масивів даних).

Нехай нам відомі значення функції y_i у вузлових точках x_i , які можуть бути отримані різними способами, у результаті експерименту, або обчислені $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{1, n}$. Існують різні способи отримання аналітичних виразів наближення функції. Якщо при цьому аналітичний вираз функції будується таким чином, щоб значення функції $y=f(x)$ та шуканого аналітичного виразу співпадали у вузлових точках x_i , то така апроксимація називається **інтерполюванням**.

На відміну від задачі інтерполяції, тобто відновлення функції між полюсами, задача **екстраполяції** полягає в відновленні функції за межами полюсів. Тобто, якщо для деякої функції $f(x)$, $f: R^1 \rightarrow R^1$ відомо, що в n точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ вона приймає, відповідно, значення $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{1, n}$, то потрібно відновити її значення при $x > x_n$ або $x < x_1$.

Постановка задачі апроксимації. Метод найменших квадратів

Задача апроксимації полягає в тому, що на підставі даних спостережень двох кількісних ознак x і y потрібно визначити вид функціональної залежності однієї з них від іншої для подальшої обробки експериментальних даних.

Для розв'язання задачі апроксимації варто побудувати апроксимуючу функцію, що відображає характер залежності випадкових величин y і x , згладивши випадкові відхилення, які обумовлені різного роду похибками спостережень.

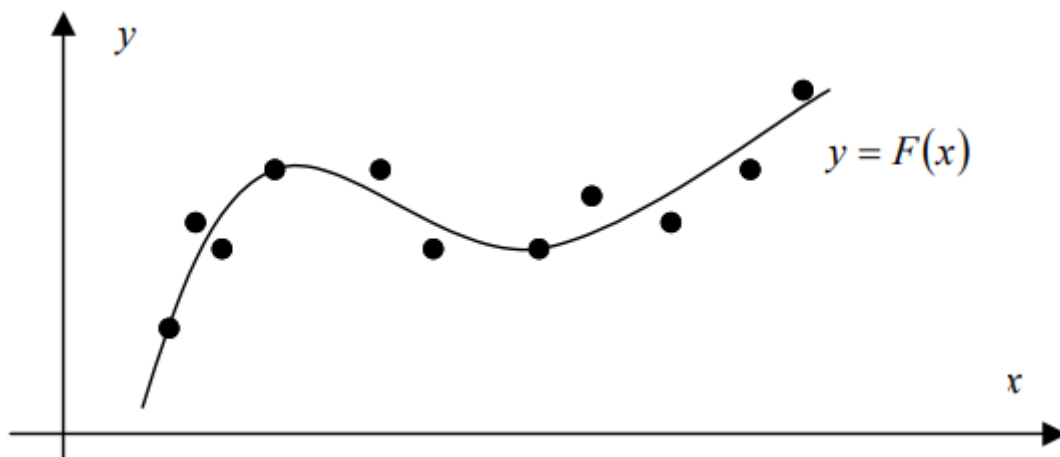
Функція $y = F(x)$ називається апроксимуючою, якщо вона задовольняє умовам:

- 1) є безперервною;
- 2) не обов'язково проходить через всі задані в таблиці точки;
- 3) відображає загальну поведінку множини точок, заданих в таблиці, згладжуючи випадкові відхилення.

З теоретичного розуміння аналізу досліджуваних величин або по виду поля розсіювання потрібно вибрати вид апроксимуючої функції, що згладжує випадкові відхилення. Це може бути лінійна, квадратична, експонентна, дробово-раціональна або

будь-яка інша функція, що найбільше точно відображає поле розсіювання точок на площині, заданих у таблиці.

Після того як вид залежності обраний, ставиться запитання про знаходження параметрів цієї залежності, які і визначають апроксимуючу функцію $y = F(x)$.



Однозначність побудови апроксимуючої функції визначається методом найменших квадратів.

Відповідно до принципу максимальної правдоподібності необхідно вибрати функцію виду $y = F(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$, що визначається параметрами $a_1, a_2, \dots, a_k$ так, щоб сума квадратів відхилень значень функції $y = F(x_i)$ від спостережуваних значень y_i , $i = \overline{1, n}$, була мінімальною

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min.$$

Для знаходження невідомих параметрів $a_1, a_2, \dots, a_k$ потрібно скористатися необхідною умовою існування екстремума функції багатьох змінних, для цього прирівняти до нуля частки похідної функції $y = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_2} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_k} = 0. \end{cases}$$

і розв'язати систему k алгебраїчних рівнянь відносно k невідомих параметрів $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Функція $y = F(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ зі знайденими значеннями параметрів є апроксимуючою і також розв'язанням задачі апроксимації.

Лінійна апроксимація

Нехай згладжуюча крива є прямою лінією, рівняння якої визначається двома параметрами $F(x, a, b) = ax + b$.

За даними спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ знайдемо такі значення параметрів a і b , щоб точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, побудовані на площині xOy (поле розсіювання), якнайближче розташовувалися до шуканої прямої, тобто – сума квадратів відхилень $(y_i - (ax_i + b))$ була мінімальною

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min$$

Скористаємося необхідною умовою існування екстремума і дорівнюємо до нуля частки похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Тоді параметри a та b знайдемо як розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right), \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right), \\ n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - an \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i + a \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів визначають лінійну апроксимуючу функцію $y = ax + b$.

Квадратична апроксимація

Якщо згладжувальну криву взяти як квадратичну параболу, рівняння якої визначається трьома параметрами

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c,$$

то, застосовуючи метод найменших квадратів, одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів a , b та c за даними спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \dots$

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Значення параметрів a , b і c , що є розв'язаннями системи лінійних алгебраїчних рівнянь, визначають квадратичну апроксимуючу функцію $y = ax^2 + bx + c$.

Постановка задачі інтерполяції. Інтерполяційна формула Лагранжа

Нехай відомі значення функції f в $n+1$ різних точках: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$.

$(x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$: $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

Наприклад, ці значення знайдені експериментально або отримані у результаті розрахунків. Виникає задача наближено відбудувати функцію f у довільній точці x .

Для розв'язання цієї задачі побудуємо алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ степеня n , який в точках x_i приймає ті ж значення y_i , що й функція $f(x)$, тобто:

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n).$$

Многочлен $L_n(x)$ називають **інтерполяційним**. Точки x_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) називають **вузлами інтерполяції**.

Будемо шукати інтерполяційний многочлен у вигляді лінійної комбінації многочленів степеня n :

$$L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots + y_n \cdot l_n(x) \quad (1)$$

При цьому вимагатимемо, щоб кожен многочлен $l_i(x)$ обертався в нуль в усіх вузлах інтерполяції, за винятком одного i -го вузла, де він повинен дорівнювати одиниці. Легко перевірити, що цим умовам задовольняє многочлен виду

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) у вираз (1), отримуємо

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (3)$$

Інтерполяційний многочлен, представлений у вигляді (3), називають **інтерполяційним** многочленом **Лагранжа**, а функції $l_i(x)$, представлені у вигляді (3), – **лагранжевими коефіцієнтами**.

Окремі випадки

Лінійна інтерполяція. За $n = 1$ (інтерполюємо за двома точками)

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Квадратична інтерполяція. За $n = 2$ (інтерполюємо за трьома точками)

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею:

x_i	0	2	3	5
$f(x_i)$	1	3	2	5

Знайти наближене значення функції у заданій точці $x=4$ з точністю до 0.001.
Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок.

Розв'язання:

У випадку $n=3$ розрахункова формула матиме вигляд:

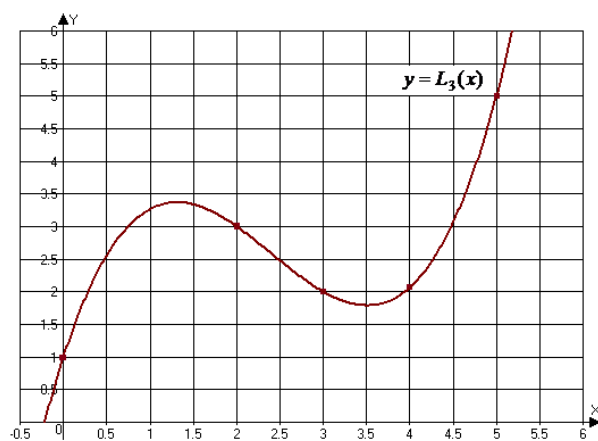
$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

Отже:

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3 \cdot \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} + \\ + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} = \\ = \frac{x^3 - 10x^2 + 31x - 30}{-30} + \frac{x^3 - 8x^2 + 15x}{2} + \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-3} + \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{6} = \\ = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

$$f(4) \approx L_3(4) = \frac{3}{10} \cdot 4^3 - \frac{13}{6} \cdot 4^2 + \frac{62}{15} \cdot 4 + 1 \approx 2.067$$

Побудуємо графік інтерполяційної функції $y = L_3(x)$:



Відповідь: $L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$, $f(4) \approx 2.067$.

Тема 5. Чисельні методи диференціювання та інтегрування

Чисельне диференціювання на основі інтерполяційних формул Ньютона

Один із способів розв'язання задачі наближеного диференціювання – це використання інтерполяційних многочленів.

Розглянемо функцію $y = f(x)$ задану на відрізку $[a; b]$. Будемо замінювати інтерполяційною функцією $\varphi(x)$ та покладемо, що

$$f'(x) = \varphi'(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Аналогічно поступають для знаходження значення похідних функції $y = f(x)$ вищих порядків.

Розглянемо чисельне диференціювання на основі *інтерполяційної формули Ньютона*, тобто покладемо, що функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці з постійним кроком $h = x_{i+1} - x_i$.

Запишемо для функції $y = f(x)$ перший інтерполяційний многочлен Ньютона:

$$y \approx N_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots$$

Перепишемо, розкриваючи дужки:

$$y \approx N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots$$

Враховуючи правило диференціювання складної функції

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}$$

матимемо:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right). \quad (1)$$

Аналогічно, враховуючи, що

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{dq},$$

отримуємо:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right). \quad (2)$$

У такий самий спосіб за необхідністю можна обрахувати похідні функції $y = f(x)$

будь-якого порядку.

Проте кожного разу, обчислюючи значення похідної у фіксованій точці x за формулами (1) та (2), в якості x_0 слід обирати найближче зліва вузлове значення аргумента.

Формули (1) та (2) значно спрощуються, якщо шуканим значенням x виявляється один з вузлів таблиці. Оскільки в цьому випадку кожне табличне значення можна вважати за початкове, то, покладаючи $x = x_0$, отримуємо $q = 0$. Тоді формули матимуть вигляд:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right),$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right).$$

Аналогічно виводяться формули для чисельного диференціювання на основі другої інтерполяційної формули Ньютона.

Запишемо для функції $f(x)$ другий інтерполяційний багаточлен Ньютона:

$$y \approx N_n(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \dots$$

Перепишемо цей поліном, розкриваючи дужки:

$$y \approx N(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{q^4 + 6q^3 + 11q^2 + 6q}{24} \Delta^4 y_{n-4} + \dots$$

Враховуючи правило диференціювання складної функції матимемо:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2q+1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3q^2+6q+2}{6} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right). \quad (3)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + (q+1) \Delta^3 y_{n-3} + \frac{6q^2+18q+11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right). \quad (4)$$

У вузлових точках формули (3) та (4) матимуть вигляд:

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3} + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4} + \frac{\Delta^5 y_{n-5}}{5} + \dots \right),$$

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right).$$

Приклад. За допомогою інтерполяційних формул Ньютона з точністю до 0.0001 знайти значення першої та другої похідних в точці $x = 0.1$ для функції $y = f(x)$, що задана таблицею:

x_i	y_i
0	1.2733
0.1	1.8007
0.2	2.3606
0.3	2.9577
0.4	3.5969
0.5	4.2833

Розв'язання:

Складемо для заданої функції таблицю кінцевих різниць:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	0	1.2733	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002	0
1	0.1	1.8007	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002	
2	0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051		
3	0.3	2.9577	0.6392	0.0472			
4	0.4	3.5969	0.6864				
5	0.5	4.2833					

За умовою крок таблиці $h = 0.1$. Шукане значення x співпадає з вузлом таблиці. Тобто табличне значення x_1 можна вважати за початкове: $x_0 = x_1 = 0.1$. Тоді $q = 0$.

Обчислення проводимо за формулами:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_1}{2} + \frac{\Delta^3 y_1}{3} - \frac{\Delta^4 y_1}{4} \right), y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_1 \right).$$

Отже

$$y'(0.1) \approx \frac{1}{0.1} \left(0.5599 - \frac{0.0372}{2} + \frac{0.0049}{3} - \frac{0.0002}{4} \right) = 10(0.5599 - 0.0186 + 0.00163 - 0.00005) \approx 5.4288.$$

$$y''(0.1) \approx \frac{1}{0.1^2} \left(0.0372 - 0.0049 + \frac{11}{12} \cdot 0.0002 \right) = 100(0.0372 - 0.0049 +$$

$$+0.000183) \approx 3.2483.$$

Відповідь: $y'(0.1) \approx 5.4288$, $y''(0.1) \approx 3.2483$.

Наближене обчислення визначених інтегралів. Метод прямокутників. Метод трапецій. Методом Симпсона

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана функція $y = f(x)$. За допомогою точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n елементарних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), причому $x_0 = a$, $x_n = b$. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) (рис. 2):

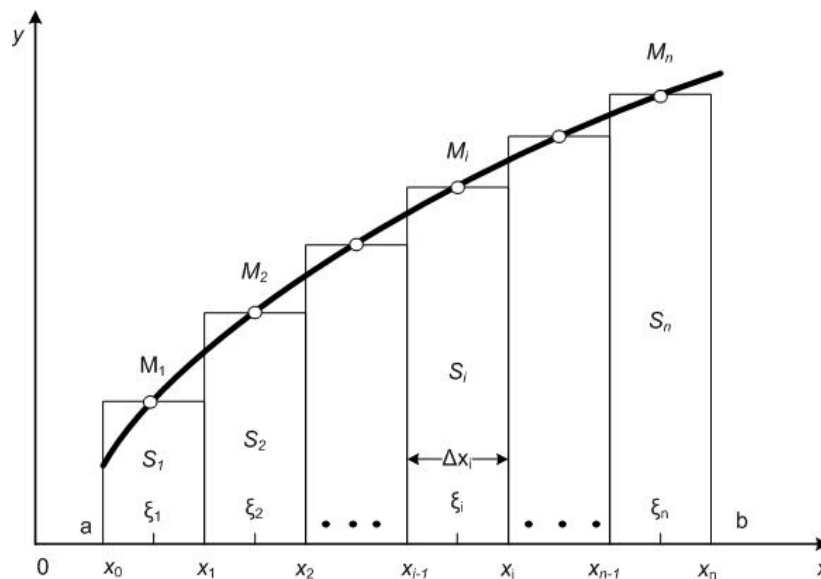


Рис. 2. Геометрична інтерпретація методу прямокутників

Знайдемо добутки s_i значення функції в цій точці $f(\xi_i)$ на довжину елементарного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$s_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (1)$$

Складемо суму всіх таких добутків:

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2)$$

Суму S_n називають **інтегральною сумою**.

Метод прямокутників

Метод прямокутників використовує заміну визначеного інтеграла інтегральною сумою (2). В якості точок ξ_i можуть обиратися ліві ($\xi_i = x_{i-1}$) чи праві ($\xi_i = x_i$) межі елементарних відрізків (рис. 3).

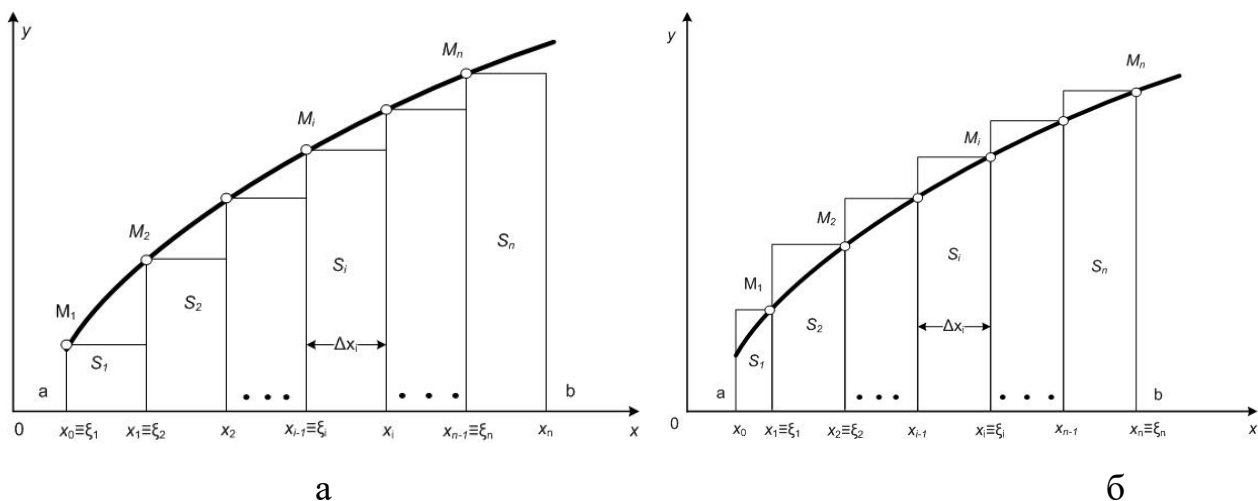


Рис. 3. Геометрична інтерпретація:

а - методу лівих прямокутників; б - методу правих прямокутників

Позначивши $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, отримуємо *формули методу прямокутників*.

Формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1}.$$

Формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n.$$

Проте, більш точним є вид формули прямокутників, що використовує значення функції в середніх точках елементарних відрізків.

Формула середніх прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right).$$

Важливим окремим випадком розглянутих формул є їхнє застосування під час чисельного інтегрування з постійним кроком:

$$h_i = h = \frac{b-a}{n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

У такому випадку формули прямокутників спрощуються.

Формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_i.$$

Формула середніх прямокутників: $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$

Метод Сімпсона

Метод Сімпсона використовує квадратичну інтерполяцію. Відрізок інтегрування $[a; b]$ розбивається на парне число n рівних частин із кроком h . На кожному відрізку $[x_0; x_2]$, $[x_2; x_4]$, ..., $[x_{n-2}; x_n]$ підінтегральну функцію $y = f(x)$ замінюють інтерполяційним багаточленом $\varphi(x)$ другого степеня (наприклад, багаточленом Лагранжа). Геометрично – замінюють параболою, що проходить через точки $M_{i-1}(x_{i-1}; y_{i-1})$, $M_i(x_i; y_i)$ та $M_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$, ($i = 1, 3, 5, \dots, n-1$) (рис. 4).

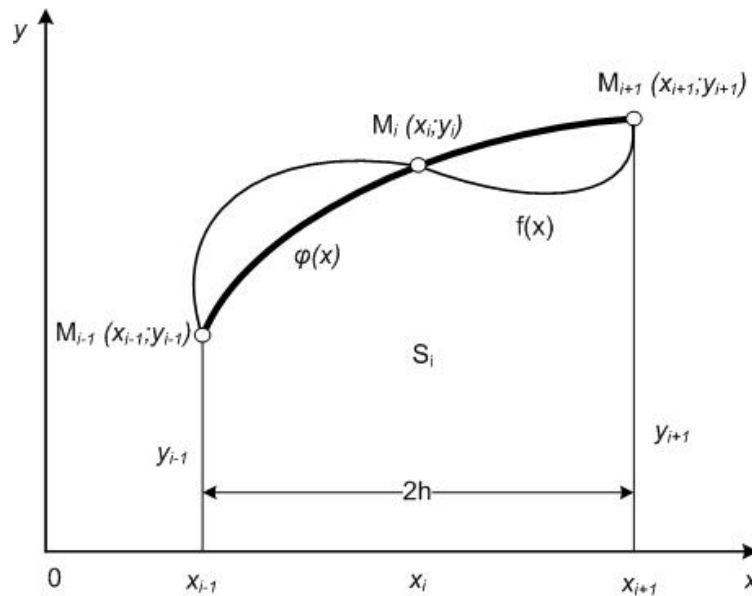


Рис. 4. Геометрична інтерпретація методу Сімпсона

На відрізку $[x_0; x_2]$ елементарна площа s_1 може бути обчислена за допомогою визначеного інтеграла

$$s_1 = \int_{x_0}^{x_2} \varphi_1(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Враховуючи, що n – парне, провівши такі ж самі обчислення для кожного елементарного відрізка $[x_{i-1}; x_{i+1}]$, ($i = 1, 3, 5, \dots, n-1$) та додавши отримані вирази матимемо:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + y_n].$$

Цю формулу називають **формулою Сімпсона**.

Метод трапецій

Метод трапецій використовує лінійну інтерполяцію. Геометрично графік функції $y = f(x)$ представляється у вигляді ламаної, що з'єднує точки $M_i(x_i; y_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) (рис. 5).

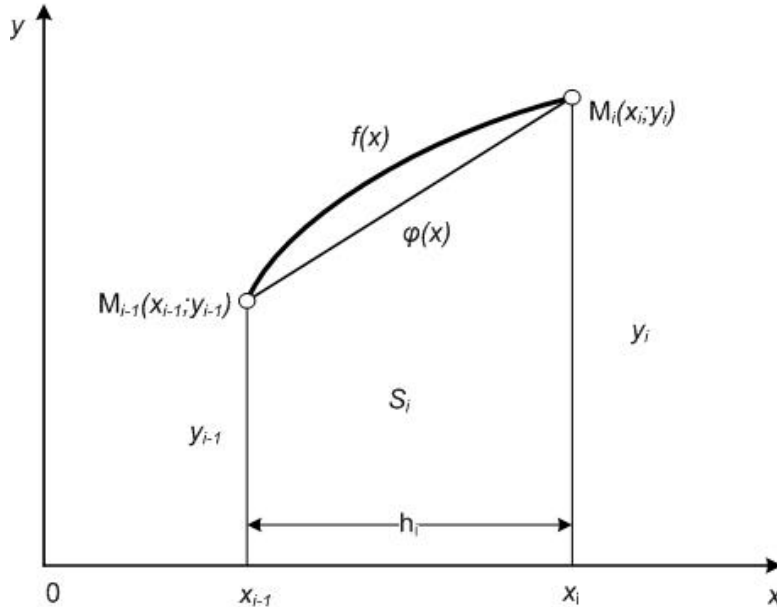


Рис. 5. Геометрична інтерпретація методу трапецій

В цьому випадку площа всієї фігури (криволінійної трапеції) складається з площ елементарних прямолінійних трапецій.

Площа кожної такої трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту:

$$s_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Додавши отримані вирази, отримуємо **формулу трапецій** для чисельного інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (y_{i-1} + y_i).$$

Важливим частковим випадком розглянутих формул є їхнє застосування для чисельного інтегрування з постійним кроком $h_i = h = \frac{b-a}{n}$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Формула трапецій в цьому випадку приймає вигляд:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right).$$

Приклад 1. З точністю до 0.001 обчислити значення визначеного інтегралу

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \text{ за формулами лівих, правих та середніх прямокутників за умови } n=10.$$

Розв'язання.

Для обчислення інтегралу методом прямокутників за умови $n = 10$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.5; 2.3]$ на 10 рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.3-1.5}{10} = 0.08$.

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	$\sqrt{0.3x_i + 1.2} = y_i$
0	1.5	1.2845
1	1.58	1.2938
2	1.66	1.3031
3	1.74	1.3122
4	1.82	1.3214
5	1.90	1.3304
6	1.98	1.3394
7	2.06	1.3483
8	2.14	1.3572
9	2.22	1.3660
10	2.30	1.3748

За формулою лівих прямокутників: $\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^9 y_i$.

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2845 + 1.2938 + 1.3031 + 1.3122 + 1.3214 + 1.3304 + 1.3394 + 1.3483 + 1.3572 + 1.3660) \approx 0.08 \cdot 13.2563 \approx 1.060504.$$

За формулою правих прямокутників: $\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^{10} y_i$.

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2938 + 1.3031 + 1.3122 + 1.3214 + 1.3304 + 1.3394 + 1.3483 + 1.3572 + 1.3660 + 1.3748) \approx 0.08 \cdot 13.3466 \approx 1.067728.$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в середніх точках відрізків ділення:

i	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	1.54	1.2892
1	1.62	1.2985
2	1.70	1.3077
3	1.78	1.3168
4	1.86	1.3259
5	1.94	1.3349
6	2.02	1.3439
7	2.10	1.3528
8	2.18	1.3616
9	2.26	1.3704

За формулою середніх прямокутників $\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^9 f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2892 + 1.2985 + 1.3077 + 1.3168 + 1.3259 + 1.3349 + 1.3439 + 1.3528 + 1.3616 + 1.3704) \approx 0.08 \cdot 13.3017 \approx 1.064136.$$

Відповідь: $\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 1.061$ (за формулою лівих прямокутників),

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 1.068$$
 (за формулою правих прямокутників),

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 1.064$$
 (за формулою середніх прямокутників).

Приклад 2. З точністю до 0.001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx$ методом Сімпсона за умови $n=8$.

Розв'язання:

Для обчислення інтеграла методом Сімпсона за умови $n=8$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.2; 1.6]$ на 8 рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.6-1.2}{8} = 0.05$.

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1.20	0.1211		
1	1.25		0.1520	
2	1.30			0.1782
3	1.35		0.2000	
4	1.40			0.2176
5	1.45		0.2312	
6	1.50			0.2410
7	1.55		0.2473	
8	1.60	0.2503		
Σ		0.3713	0.8305	0.6368

Обчислення проводитимемо за формулою

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8].$$

Отже:

$$\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx \approx \frac{0.05}{3} (0.3714 + 4 \cdot 0.8305 + 2 \cdot 0.6368) \approx \frac{0.05}{3} \cdot 4.9670 \approx 0.08278$$

Відповідь: $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx \approx 0.083$.

Приклад 3. З точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$ методом трапецій за умови $n=20$.

Розв'язання:

Для обчислення інтеграла методом трапецій за умови $n = 20$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[0.7; 1.3]$ на 20 рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.3-0.7}{20} = 0.03$.

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	y_i		i	x_i	y_i
0	0.7	0.88386		11	1.03	0.64259
1	0.73	0.85572		12	1.06	0.62657
2	0.76	0.82898		13	1.09	0.61140
3	0.79	0.80366		14	1.12	0.59669
4	0.82	0.77973		15	1.15	0.58272
5	0.85	0.75700		16	1.18	0.56935
6	0.88	0.73546		17	1.21	0.55658
7	0.91	0.71501		18	1.24	0.54431
8	0.94	0.69551		19	1.27	0.53253
9	0.97	0.67700		20	1.30	0.52129
10	1.00	0.65937				

Обчислення проводитимемо за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + \sum_{i=1}^{19} y_i \right).$$

Отже

$$\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.03 \left(\frac{0.88386 + 0.52129}{2} + 12.77022 \right) \approx 0.40418.$$

Відповідь: $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.4042.$

Чисельні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

Метод Ейлера розв'язання диференційного рівняння першого порядку

Розглянемо задачу чисельного розв'язання диференційного рівняння

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0$$

на відрізку $x \in [a; b]$.

Для знаходження чисельного розв'язання задачі розіб'ємо проміжок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин, довжина яких $h = \frac{b-a}{n}$.

Число h називається *кроком інтегрування*. Значення шуканої функції $y = y(x)$ будемо визначати в точках ділення

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_n = b.$$

Метод Ейлера є найбільш простим із всіх методів чисельного розв'язання диференційних рівнянь. Геометрично він полягає в тому, що на малому відрізку $x \in [x_k; x_{k+1}]$ розв'язання $y = y(x)$ диференційного рівняння замінюється відрізком її дотичної в точці $(x_k; y(x_k))$.

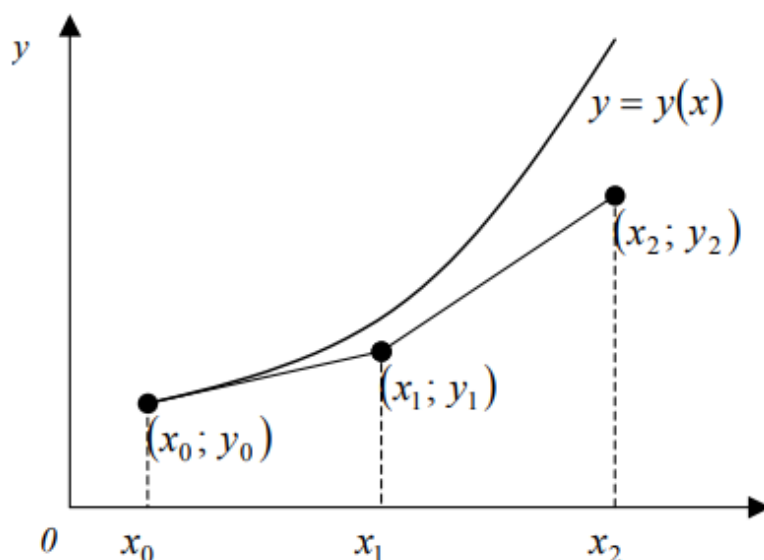
На першому відрізку $x \in [x_0; x_1]$ проводимо дотичну до графіка шуканої функції $y = y(x)$ в точці з координатами $(x_0; y_0)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, рівняння якої

$$y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

Визначимо значення $y = y_1$ на дотичній в точці $x = x_1$, при цьому одержимо

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad \text{или} \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Число y_1 вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_1 .



Повторюємо ту ж процедуру на відрізку $x \in [x_1; x_2]$. А саме, будуємо дотичну до графіка шуканої функції, що проходить через точку з координатами $(x_1; y_1)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$, рівняння якої

$$y - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1),$$

і знаходимо ординату y_2 точки $(x_2; y_2)$, що лежить на цій прямій,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{або} \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h.$$

Число y_2 вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_2 .

Продовжуємо цю процедуру доти, поки не одержимо відрізок $x \in [x_{n-1}; x_n]$ і не визначимо

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$$

Число y_n вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_n .

У результаті застосування методу Ейлера одержимо множину значень аргументу $x_0, x_1, \dots, x_n$ і відповідну множину значень шуканої функції $y_0, y_1, \dots, y_n$, які є розв'язанням диференційного рівняння в табличному вигляді.

З'єднавши точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$ відрізками прямих, одержимо ламану лінію, що приблизно представляє графік функції, що є розв'язанням диференційного рівняння із заданою початковою умовою. Цю ламану лінію називають *ламаною Ейлера*. Ця ламана є кусково-лінійною функцією і вона є наближеним розв'язанням задачі на відрізку $x \in [a; b]$.

Алгоритм метода Ейлера.

Нехай відомі:

- функція $f(x, y)$ з диференційного рівняння $y' = f(x, y)$,
- початкові значення x_0, y_0 ,
- проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a; b]$ на часткові та обчислимо крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.

2. На k -ом кроці виконаємо обчислення по ітераційних формулах методу Ейлера

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k) \cdot h, \\x_{k+1} &= x_k + h, \\k &= k + 1.\end{aligned}$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення $y_0, y_1, \dots, y_n$ є значеннями шуканого розв'язання рівняння в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Обчислення по методу Ейлера доцільно оформляти у вигляді таблиці. Для наочності можна побудувати ламану Ейлера, що приблизно є інтегральною кривою задачі Коші.

У теорії диференційних рівнянь доводиться, що якщо функція $f(x, y)$ в диференційному рівнянні, задовольняє умовам Коші, то послідовність ламаних Ейлера при необмеженому збільшенні числа точок розбивки (при $n \rightarrow \infty$) прагне до певної межі $y = y(x)$, що є єдиним розв'язанням задачі Коші.

Похибка при заміні розв'язання $y = y(x)$ ламаної Ейлера, що обчислюється в точці x_n , має порядок $\frac{1}{n}$ або h . Тому, чим менше крок інтегрування h , тим краще наближене розв'язання представляє точне.

Звичайно для оцінки точності наближеного розв'язання y_n в точці x_n , отриманого із кроком h , повторюють обчислення з подвоєним кроком $2h$ і абсолютною похибкою $\Delta(y_n)$ визначають по формулі

$$\Delta(y_n) = |y_n - \hat{y}_n|,$$

де $\hat{y}_n$ – наближене розв'язання в точці x_n , отримане з кроком $2h$.

Приклад. Знайти чисельне розв'язання диференційного рівняння $y' = \frac{1}{2}xy$; $y(0)=1$; $x \in [0; 1]$; $n = 5$.

Розв'язання. Розв'язанням рівняння є функція $y = y(x)$, одержана у вигляді таблиці, де $h = 0.2$:

$k = 0$,	$x_0 = 0.0$,	$y_0 = 1.000000$;	
$k = 1$,	$x_1 = 0.2$,	$y_1 = y_0 + 0.5x_0y_0h$,	$y_1 = 1.000000$;
$k = 2$,	$x_2 = 0.4$,	$y_2 = y_1 + 0.5x_1y_1h$,	$y_2 = 1.020000$;
$k = 3$,	$x_3 = 0.6$,	$y_3 = y_2 + 0.5x_2y_2h$,	$y_3 = 1.060800$;
$k = 4$,	$x_4 = 0.8$,	$y_4 = y_3 + 0.5x_3y_3h$,	$y_4 = 1.124448$;
$k = 5$,	$x_5 = 1.0$,	$y_5 = y_4 + 0.5x_4y_4h$,	$y_5 = 1.214404$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стрелковська І.В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч.5 / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ВМВ, 2018. – 508 с.
2. Стрелковська І.В. Диференціальні рівняння для фахівців в галузі ІТ-галузі / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2018. – 188 с.
3. Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с.
4. Методи обчислень. Лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», освітньої програми «Інформаційні технології в біології та медицині» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. О. Абакумова. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 68 с.
5. Чисельні методи : конспект лекцій / уклад. О. В. Шибаніна, С. І. Тищенко, І. І. Хилько, О. Ю. Пархоменко, В. О. Крайній. Миколаїв : МНАУ, 2024. 100 с.
6. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник. Т. 1 / В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін. Львів : Новий Світ-2000, 2018. 470 с.
7. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник. Т. 2 / В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін. Львів : Новий Світ-2000, 2018. 536 с.
8. Шибаніна О. В., Тищенко С. І., Хилько І. І., Крайній В. О. Чисельні методи: конспект лекцій. Миколаїв : МНАУ, 2024. 100 с.