

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Національний університет «Одеська юридична
академія»**

Кафедра кібербезпеки

ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

**Методичні вказівки до самостійної роботи
для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»
за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення»**

122 «Комп'ютерні науки»

125 «Кібербезпека»

Одеса 2020

УДК 519.64+514.12

*Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична академія»,
протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.*

Укладач:

Баландіна Н.М. – старший викладач кафедри кібербезпеки
Національного університету «Одеська юридична академія».

Рецензенти:

Ковальчук В.В. – доктор фізико-математичних наук, професор,
академік Інженерної Академії України, директор Одеського фахового
коледжу комп'ютерних технологій Одеського державного екологічного
університету;

Логінова Н.І. – доцент, кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри
інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична
академія».

Методичні вказівки містять стислий теоретичний матеріал з двох тем курсу, приклади розв'язання задач, вправи для самостійної роботи з відповідями і перелік рекомендованої літератури. Призначено для студентів першого курсу, з метою закріплення лекційного матеріалу і підготовки до практичних занять з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія».

Баландіна Н.М. Елементи алгебри та аналітичної геометрії: метод. вказівки для самостійної роботи / Баландіна Н.М. – Одеса, 2020. – 39 с. – Режим доступу:
<https://hdl.handle.net/11300/14507>

УДК 519.64+514.12

© Баландіна Н.М., 2020

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є невід’ємною частиною базової математичної підготовки студентів і належить до фундаментальних дисциплін, на яких ґрунтуються методи побудови різноманітних математичних моделей процесів, пов’язаних з професійною діяльністю.

Метою викладання навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є формування у студентів базових знань лінійної алгебри та аналітичної геометрії, розвиток абстрактного мислення та просторової уяви, озброєння алгебраїчним апаратом та геометричними знаннями, необхідними для подальшого успішного вивчення інших фізико-математичних дисциплін та їх прикладного застосування.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є оволодіння математичним апаратом лінійної алгебри та аналітичної геометрії, який повинен бути достатнім для подальшого опанування методів лінійного програмування і застосування до оптимізаційних задач в області комп’ютерних наук.

У процесі навчання студенти отримують необхідні знання під час проведення аудиторних занять (лекційних, практичних) та самостійної роботи.

Велике значення в процесі вивчення та закріплення знань має самостійна робота студентів, на яку відводиться значна частина кількості годин, які приділяються на вивчення дисципліни.

Наведені методичні вказівки містять стислий виклад лекційного матеріалу з двох тем курсу:

Тема 3. Комплексні числа

Тема 5. Аналітична геометрія.

Теоретичний матеріал супроводжується прикладами вирішення завдань та вправами для самостійної роботи і відповідями.

Методичні вказівки призначені для студентів факультету кібербезпеки та інформаційних технологій.

Комплексні числа

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Комплексне число можна записати у вигляді: $z = a + bi$,

де $a, b \in \mathbb{R}$, i - уявна одиниця ($i^2 = -1$).

Цей запис називається алгебраїчною формою комплексного числа.

$Re\ z = a$ - дійсна частина комплексного числа.

$Im\ z = bi$ - уявна частина комплексного числа, b - коефіцієнт при уявній частині комплексного числа.

Два комплексних числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти уявних частин, тобто

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d.$$

Додавання, множення і ділення комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі проводиться таким чином:

$$1). (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

тобто, щоб скласти два комплексних числа, записаних в алгебраїчній формі, потрібно скласти їх дійсні і уявні частини.

$$2) (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Отже, щоб перемножити два комплексних числа в алгебраїчній формі, потрібно перемножити їх як звичайні двочлени і врахувати, що $i^2 = -1$, звести подібні.

$$3) \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Цю формулу не потрібно запам'ятовувати, тому що пізніше ми отримаємо просте правило ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі.

Спряжені комплексні числа та їх властивості

Спряженим комплексному числу $z = a + bi$ називається комплексне число $\bar{z} = a - bi$.

Властивості спряжених комплексних чисел

1. Спряжене спряженому комплексного числа z є число z , тобто

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Дійсно, якщо $z = a + bi$, тоді $\overline{z} = a - bi$.

Тоді $\overline{\overline{z}} = a - (-b)i = a + bi = z$

2. Спряжене суми двох комплексних чисел дорівнює сумі спряжених доданком, тобто

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Нехай $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, тоді

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

Порівнюючи ці рівності, маємо $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3. Спряжене добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові спряжених співмножників, тобто

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Доводиться аналогічно другій властивості

4. Добуток комплексного числа і його спряженого - число дійсне. Тобто $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

$$z = a + bi, \text{ тоді } \overline{z} = a - bi,$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2, \text{ т.к. } i^2 = -1$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ то } (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}$$

5. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$

Сума комплексного числа z і спряженого йому $\overline{z}$ дорівнює подвійній дійсній частині z .

(Довести самостійно)

6. $\bar{z} - z = 2Im\ z$

Різниця комплексного числа z і спряженого йому $\bar{z}$ дорівнює подвійній уявній частині z .
(Довести самостійно)

7. Правило ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі

Знайдемо частку від ділення числа $a + bi$ на $c + di \neq 0$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на число, спряжене знаменнику

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Практична частина

Приклади розв'язування задач

1. Обчислити $(8 + 9i) + (7 - 2i)$.

Маємо

$$(8 + 9i) + (7 - 2i) = (8+7) + (9 - 2)i = 15 + 7i.$$

2. Обчислити $(3 + 5i)(4 - i)$.

Маємо

$$(3 + 5i)(4 - i) = 12 - 3i + 20i - 5i^2 = 17 + 17i.$$

3. Обчислити $(4 - 3i)^2 + (2 + i)^2$.

Маємо

$$\begin{aligned} (4 - 3i)^2 + (2 + i)^2 &= 16 - 24i + 9i^2 + 4 + 4i + i^2 = \\ &= 16 - 24i - 9 + 4 + 4i - 1 = 10 - 20i. \end{aligned}$$

4. Обчислити $\frac{(3-i)^2}{1-i}$.

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{(3-i)^2}{1-i} &= \frac{9-6i-1}{1-i} = \frac{(8-6i)(1+i)}{2} = \frac{8+8i-6i+6}{2} = \frac{14+2i}{2} = \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

5. Обчислити $\frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}$.

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2} &= \frac{1 + 4i + 4i^2 - 8 + 12i - 6i + i^3}{1 - 3i + 3i^2 - i^3 + 4 + 4i + i^2} = \\ &= \frac{1 + 4i - 4 - 8 + 12i + 6 - i}{1 - 3i - 3 + i + 4 + 4i - 1} = \frac{-5 + 15i}{1 + 2i} = \frac{(-5 + 15i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \\ &= \frac{-5 + 10i + 15i + 30}{5} = \frac{25 + 25i}{5} = 5 + 5i. \end{aligned}$$

6. Користуючись формулою бінома Ньютона знайти $(1+i)^5$.

Маємо

$$\begin{aligned} (1+i)^5 &= 1 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i + 10 \cdot 1^3 \cdot i^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 + 5 \cdot 1 \cdot i^4 + 1 \cdot i^5 = \\ &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

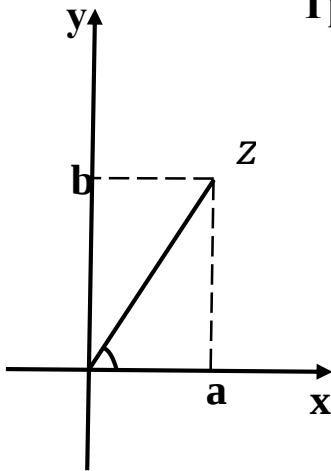
1. Обчислити $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$
2. Обчислити $i(2 + 7i)^2$
3. Обчислити $(4 - 7i)^3$
4. Обчислити $(2 + i)^7$
5. Обчислити $\frac{3-i}{4+5i}$
6. Обчислити $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$
7. Розв'язати рівняння $z^2 + z\bar{z} = 8 - 4i$

Відповіді на завдання для самостійної роботи

1. 46
2. $-28 - 45i$
3. $-524 + 7i$
4. $-278 - 29i$
5. $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$
6. $-\frac{14}{5}i$
7. $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$

Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Тригонометрична форма комплексного числа

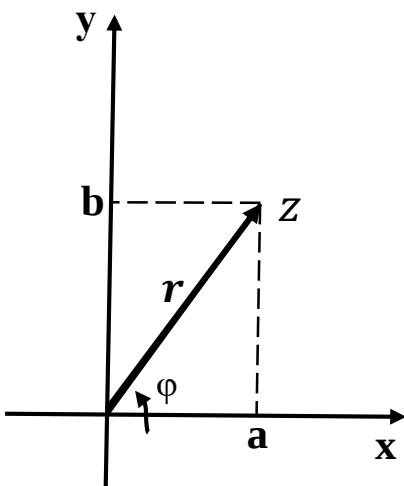


Комплексному числу $z = a + bi$ поставимо у відповідність точку площини з координатами $(a; b)$. За таким правилом кожному комплексному числу однозначно ставиться у відповідність точка площини і навпаки.

Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається комплексною площиною.

Вісь абсцис називається дійсною, а вісь ординат - уявною віссю.

Ця геометрична інтерпретація називається точковою



Оскільки кожна точка площини однозначно визначає вектор, що виходить із початку координат і з кінцем в даній точці, то між такими векторами і комплексними числами встановлено взаємно однозначна відповідність.

Це друга геометрична інтерпретація комплексних чисел. Вона називається векторною.

З малюнка видно, що $a = r \cdot \cos \varphi$, $b = r \cdot \sin \varphi$.

Маємо ще одну форму запису комплексного числа: $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Ця форма запису називається **тригонометричною** формою комплексного числа.

Модулем комплексного числа називається відстань від початку координат до точки, яка зображує комплексне число.

Позначається $|z| = r$

Обчислюється $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ назвається кут φ між додатнім напрямком вісі ОХ з радіус-вектором, проведеним з початку координат в точку, яка зображує комплексне число.

Позначається $\arg z = \varphi$.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, а з точністю до доданка $2k\pi$.

Отже, щоб перейти від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної, використовують формули

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

Умова рівності двох комплексних чисел

Два комплексних числа, які записані у тригонометричній формі, **рівні** між собою тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи відрізняються на величину, кратну 2π .

Це можна записати так:

нехай

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тоді $z_1 = z_2$ має місце тоді і тільки тоді, коли $r_1 = r_2$,

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Додамо z_1 і z_2 :

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2)i.$$

Результат ми отримали в алгебраїчній формі. Значить, нераціонально використовувати тригонометричну форму при додаванні комплексних чисел. Множення і ділення комплексного чисел в тригонометричній формі дуже зручно.

Теорема (про модуль і аргумент добутку двох комплексних чисел). Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів. Аргумент добутку дорівнює сумі аргументів співмножників.

Доведення. Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,
 $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$,

тоді

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + r_1 r_2 i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Отже, $|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Формула Муавра

Для піднесення комплексного числа до цілого ступеня користуються **формулою Муавра**

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

тобто при піднесенні до цілого ступеня модуль комплексного числа підносять до цього ступеня, а аргумент множать на показник ступеня.

Теорема (про модуль і аргументи частки)

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

Доведення.

Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_2 \neq 0.$$

Знайдемо

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$\text{Отже, } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Добування кореня з комплексного числа

Для кожного натурального n і будь-якого комплексного z завжди знайдеться комплексне число β , що задовольняє $\beta^n = z$, тобто з будь-якого комплексного z завжди можна добути корінь n -го ступеня.

Якщо $z=0$, то єдиним значенням $\sqrt[n]{0}$ є число 0.

Тому будемо розглядати випадок $z \neq 0$.

Теорема. Корені n -го ступеня з комплексного числа $z \neq 0$ існують і знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \beta_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Зауваження. Всі корені n -го ступеня з комплексного числа z розташовані на колі радіусом $|z|^{\frac{1}{n}}$ з центром на початку координат і поділяють це коло на n рівних частин.

Корені з одиниці

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

Оскільки $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1, \dots, n-1$$

Множину значень $\sqrt[n]{1}$ позначають C_n .

$$C_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}.$$

Первісні корені

Ті значення кореня n -го ступеня з одиниці, які не є значеннями кореня з одиниці меншого ступеня ніж n , називаються **первісними коренями** n -го ступеня з одиниці.

Теорема (критерій первісності кореня)

Якщо ε – первісний корінь n -го ступеня з одиниці, то ε_k первісний корінь n -го ступеня з одиниці тоді і тільки тоді, коли числа n і k взаємно прості ($(k,n)=1$).

Приклад.

Знайти всі первісні корені 8-го степеня з 1.

Маємо: $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7$ – первісні корені 8-го ступеня з 1:

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\varepsilon_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$$

$$\varepsilon_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$$

Показникова форма комплексного числа

Часто може бути застосована наступна форма запису комплексного числа z з модулем r і аргументом φ

$$z = re^{i\varphi}.$$

Так, наприклад, число $1 + i\sqrt{3}$ може бути записано

в алгебраїчній формі $1 + i\sqrt{3}$

в тригонометричній формі $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

в показниковій формі $2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

Дії над комплексними числами в показниковій формі

Нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} , \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Приклади

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i}$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i}$$

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

Практична частина

Приклади розв'язування задач

1. Користуючись формулою Муавра знайти $(-1 + i \sqrt{3})^{60}$.

Запишемо число $-1 + i \sqrt{3}$ в тригонометричній формі

$$-1 + i \sqrt{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

За формулою Муавра отримаємо

$$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}(\cos(60 \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \sin(60 \cdot \frac{2\pi}{3})) = 2^{60}(\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}.$$

2. Знайти

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10}$$

Запишемо у тригонометричній формі чисельник і знаменник дробу, що у дужках:

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right),$$

тоді згідно з формулою ділення комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} &= \frac{2}{\sqrt{2}} 2^{60} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

І згідно з формулою Муавра:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos\left(10 \cdot \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{7\pi}{12}\right) \right) = \\ &= 2^5 \left(\cos \frac{70\pi}{12} + i \sin \frac{70\pi}{12} \right) = \\ &= 32 \left(\cos \left(4\pi + \frac{22\pi}{12}\right) + i \sin \left(4\pi + \frac{22\pi}{12}\right) \right) = \\ &= 32 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = 16(\sqrt{3} - i) = 16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-4}$.

Маємо

$$-4 = \sqrt[4]{4} (\cos \pi + i \sin \pi).$$

За формулою добування кореня з комплексного числа маємо

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Звідси отримуємо

$$\beta_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$$

$$\beta_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i$$

$$\beta_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i$$

$$\beta_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 1 - i$$

4. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{(1 + i)^8}$.

Маємо

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^4 (\cos 0 + i \sin 0).$$

За формулою добування кореня з комплексного числа маємо

$$\sqrt[4]{(1 + i)^8} = \sqrt[4]{2^4} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Звідси отримуємо

$$\beta_0 = 2$$

$$\beta_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$\beta_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$\beta_3 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

5. Знайти всі значення
$$\sqrt[6]{\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6}} \quad .$$

Знайдемо тригонометричну форму підкореневого виразу:

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$(1 - i)^2 = (\sqrt{2})^2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \left(2 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(2 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} = 2^{-5} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \right) =$$

$$= 2^{-5} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

Отже,

$$\sqrt[6]{\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6}} = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\beta_0 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\beta_1 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\beta_3 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$\beta_4 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

$$\beta_5 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

Завдання для самостійної роботи

1. Вказати тригонометричну формулу комплексних чисел.

а) $1 + i$; б) $1 - i$; в) $-1 + i$; г) $-1 - i$

2. Обчислити

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1 - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$$

3. Користуючись формулою Муавра, знайти $(1 + i)^{12}$

4. Знайти

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right)^{18}$$

5. Знайти всі значення кореня

$$\text{а) } \sqrt[3]{i} ; \text{ б) } \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$$

6. Знайти всі значення кореня з одиниці $\sqrt[3]{1}$

7. Знайти всі первісні корені 24-го ступеня з одиниці

Відповіді на завдання для самостійної роботи

1. а) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

б) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

в) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

г) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

2. $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{12} \right) \right)$

3. $2^{12} (1 + i)$

4. 1

5. а) $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

б) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}} \left(\cos \frac{5\pi + 24\pi k}{96} + i \sin \frac{5\pi + 24\pi k}{96} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

6. $1; -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{17}, \varepsilon_{19}, \varepsilon_{23}$.

Аналітична геометрія

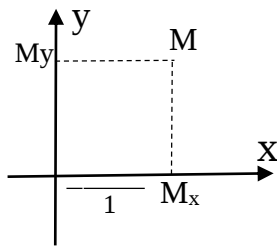
Аналітична геометрія на площині

Пряма, на якій вибрано позитивний напрямок, називають **віссю**.

Відрізок вісі, обмежений якимись точками А та В, називається **спрямованим**, якщо вказано, яка з цих точок вважається початком відрізка, а яка- кінцем.

Спрямований відрізок з початком А і кінцем В позначається символом $\overline{AB}$. Довжина відрізка позначається символом $|AB|$.

Декартова прямокутна система координат, визначається завданням лінійної одиниці для вимірювання довжин і двох взаємно перпендикулярних вісей занумерованих у будь-якому порядку.



Точка перетину вісей називається **початком координат**, а самі вісі - **вісями координат**.

Відстань між двома точками

Якщо на площині дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, то відстань d між ними визначається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ділення відрізка в даному відношенні

Якщо точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і дано відношення

$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в якому точка M ділить відрізок $\overline{M_1M_2}$, то координати точки M

визначаються за формулами: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Якщо точка M є серединою відрізка $\overline{M_1M_2}$, то її координати визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Лінії першого порядку

Загальне рівняння прямої

В декартових координатах кожна пряма визначається рівнянням першої степеню і, обернено, кожне рівняння першої степені визначає пряму.

Рівняння виду:

$$Ax + By + C = 0$$

називається **загальним рівнянням прямої**.

Кут α називається **кутом нахилу** прямої до вісі O_x . Тангенс кута нахилу прямої до вісі O_x називається **кутовим коефіцієнтом** прямої.

Його, зазвичай, позначають буквою k :

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Рівняння $y = kx + b$ називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**, де

k -кутовий коефіцієнт, b -величина

відрізка, який відсікає пряму на

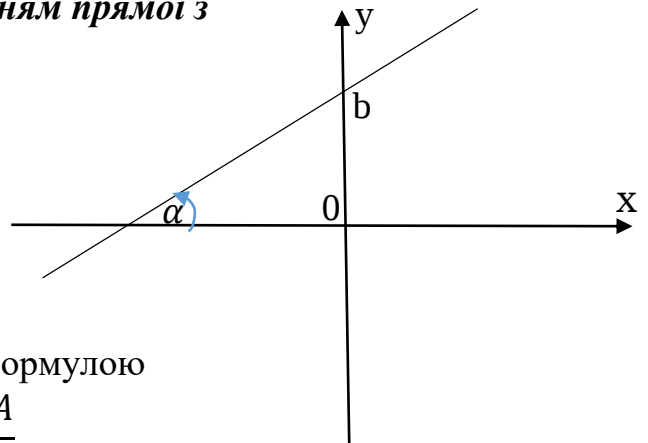
вісі O_y .

Якщо пряма задана загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою

$$k = -\frac{A}{B}$$



Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, та має кутовий коефіцієнт k .

Рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

є рівнянням прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$.

Рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(де $a = -C/A$, $b = -C/B$), називається рівнянням прямої «у відрізках».

(Якщо дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, то, щоб привести його до нормального виду, потрібно всі члени цього рівняння помножити на

нормуючий множник μ , визначаємий формулою $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак нормуючого множника обирається протилежним до знаку вільного члена нормуючого рівняння).

Линії другого порядку

Коло

Рівняння

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

визначає коло радіусом R з центром $C(\alpha, \beta)$.

Якщо центр кола співпадає з початком координат, то рівняння(1) приймає вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, які називаються **фокусами**, є постійна величина, більша, ніж відстань між фокусами.

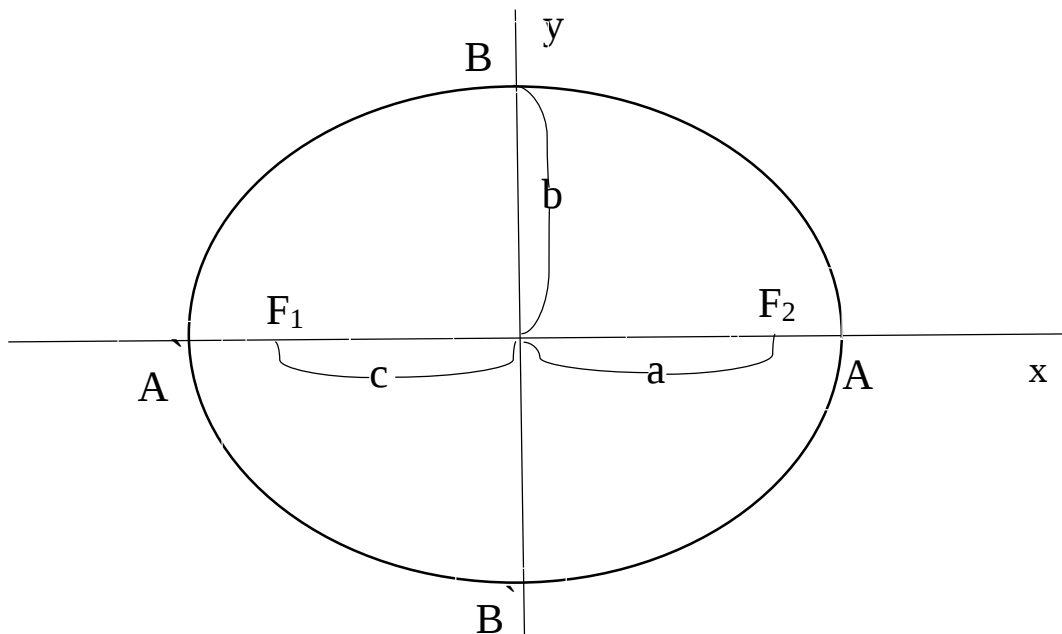
Постіну суму відстаней довільної точки еліпса до фокусів прийнято позначати через $2a$. Фокуси еліпсу позначають літерами F_1 та F_2 , відстань між ними – через $2c$.

За визначенням еліпсу $2a > 2c$ або $a > c$.

Рівняння еліпсу має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

де $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > b$. Рівняння виду (2) називається канонічним рівнянням еліпсу.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$,

де a – велика піввісь, називається **ексцентриситетом** еліпсу.

Якщо еліпс визначен рівнянням (2) та $a > b$, то прямі

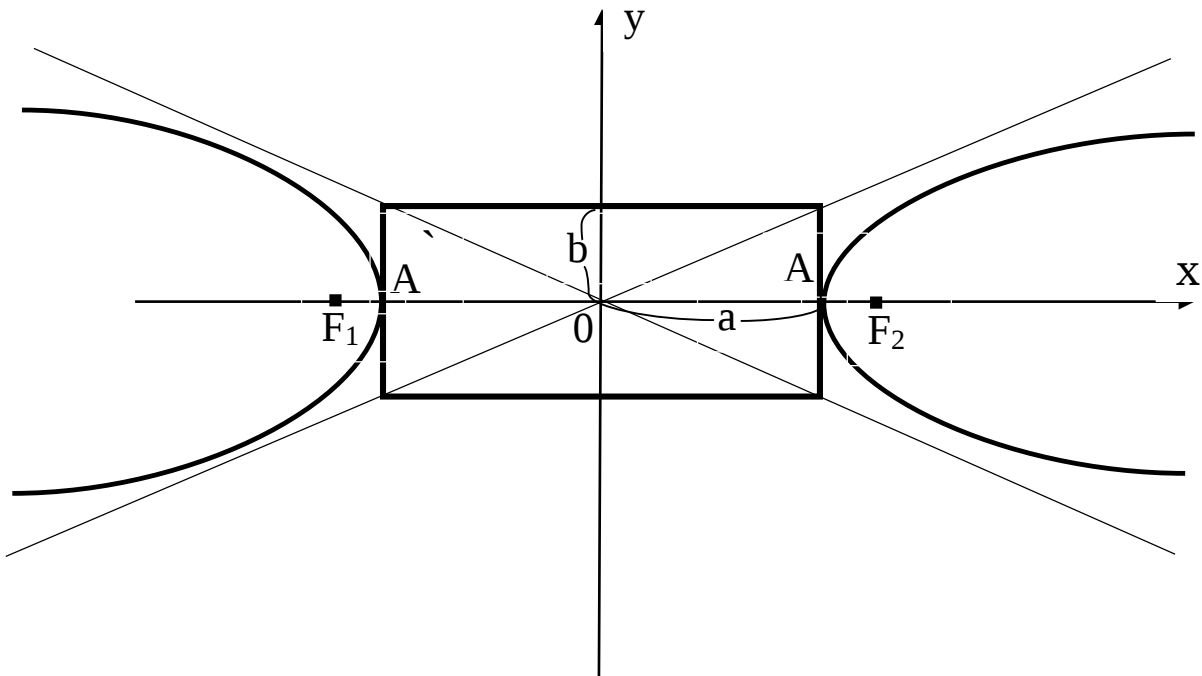
$x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами** еліпсу.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, називаємих **фокусами**, є постійна величина; вказана різниця береться за абсолютним значенням та позначається через $2a$. Фокуси гіперболи позначаються літерами F_1 та F_2 , відстань між ними – через $2c$. За визначенням гіперболи $2a < 2c$ або $a < c$.

Рівняння гіперболи має вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3)

де $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Рівняння виду (3) називається **канонічним рівнянням гіперболи**.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$,

де a – відстань від центру гіперболи до її вершин, називається **ексцентриситетом** гіперболи. Якщо гіпербола задана рівнянням (3), то прямі, що визначаються рівняннями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються її **директрисами**.

Парабола

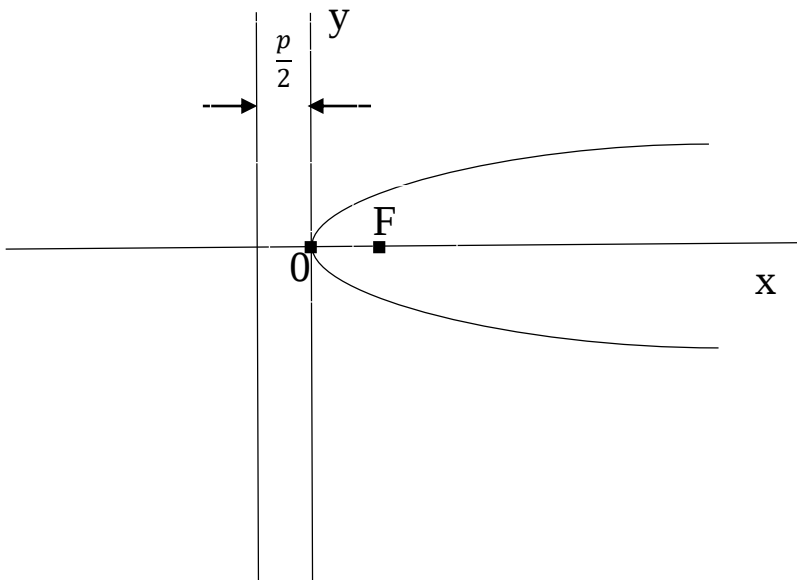
Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з якої відстань до деякої фіксованої точки площини, яка називається **фокусом**, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається **директрисою**.

Фокус параболи позначається літерою F , відстань від фокуса до директриси – літерою p . Число p називається **параметром** параболи.

Парабола визначається рівнянням

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

Рівняння (4) називається **канонічним рівнянням параболи**.

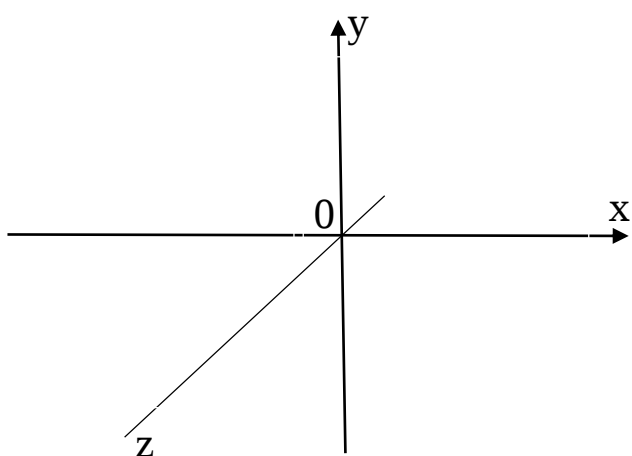


Директриса даної параболи має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.

Аналітична геометрія у просторі

Декартова прямокутна система координат у просторі

Декартові прямокутні координати у просторі визначаються завданням лінійної одиниці для виміру довжин та трьох взаємоперекреслюючихся в одній точці вісей, занумерованих у будь-якому порядку.



Точка перекреслення вісей називається початком координат, самі вісі-координатними осями. Перша координатна вісь називається віссю *абсцис*, друга – віссю *ординат*, третя – віссю *аплік*.

Відстань між двома точками

Ділення відрізка в даному відношенні

Відстань d між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ у просторі визначається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координати x, y, z точки M , яка поділяє відрізок M_1M_2 , обмежений точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в відношенні λ визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

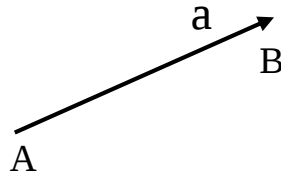
Зокрема, при $\lambda = 1$ маємо координати середини даного відрізка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Векторна алгебра

Вектор як спрямований відрізок як і раніше будемо записувати двома великими латинськими літерами із загальною рисою нагорі за умови, що перша з них позначає початок, друга - кінець вектора.

Поряд з цим будемо також позначати вектор однією малою латинською літерою.



Вектори називаються рівними, якщо вони мають однакові довжини, лежать на паралельних прямих або на одній прямій та спрямовані в один бік.

Число, рівне довжині вектора називається його **модулем**. Модуль вектора a позначається $|a|$. Якщо $|a| = 1$, то вектор a називається **одиничним**.

Одиничний вектор, який має однаковий напрямок з цим вектором a , називається **ортом** вектора a .

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь u називається число, рівне величині відрізка $\overline{A_1B_1}$ вісі u , де точка A_1 є проекцією точки A на вісь u , а B_1 – проекцією точки B на цю вісь.

Проекція вектора a на вісь u виражається через його модуль і угол φ нахилу до вісі u формулою

$$\text{пр}_u a = |a| \cos \varphi$$

Проекції вектора на координатні вісі називають також его **координатами**. Якщо дано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які є відповідно початком і кінцем вектора a , то його координати X, Y, Z визначаються за формулами:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Формула $|a| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

дозволяє за координатами вектора визначити його модуль.

Лінійні операції над векторами

Сумою $a + b$ двох векторів a та b називається вектор, який йде з початку вектора a в кінець вектора b за умовою, що вектор b прикладений до кінця вектора a (**правило трикутника**)



Поряд з правилом трикутника часто користуються **правилом паралелограма**: якщо вектори a та b приведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $a + b$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, який йде із загального початку a и b . Звідси відразу випливає, що $a + b = b + a$.

Різницею $a - b$ двох векторів a та b називається вектор, який в сумі з вектором b складає вектор a . Якщо два вектори a и b приведені до спільного початку, то різниця їх $a - b$ є вектор, що йде з кінця b до кінця a .

Добутком αa вектора a на число α називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора a на модуль числа α ; він паралельний вектору a або лежить з ним на одній прямій та спрямований так само, як вектор a , якщо α – число додатне, і протилежний вектору a , якщо α – число, що є від'ємним.

Сумування векторів та множення вектора на число називаються лінійними операціями над векторами.

Зокрема, якщо

$$a = (X_1, Y_1, Z_1),$$

$$b = (X_2, Y_2, Z_2)$$

$$a + b = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2)$$

$$a - b = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2)$$

$$\alpha a = (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$$

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$(a, b) = |a||b| \cos \varphi.$$

Якщо вектори a і b задані своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad b = (X_2, Y_2, Z_2)$$

то їх скалярний добуток може бути обчислений за формулою:

$$(a, b) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Звідси випливає необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Кут φ між векторами $a = (X_1, Y_1, Z_1)$ і $b = (X_2, Y_2, Z_2)$

задається формулою

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|},$$

чи в координатах

$$\cos \varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора a на вектор b називається вектор, що позначається символом $[a, b]$ і визначається наступними трьома умовами:

1. Модуль вектора $[a, b]$ дорівнює $|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами a та b ;
2. Вектор $[a, b]$ перпендикулярний до кожного з векторів a та b ;
3. Напрямок вектора $[a, b]$ відповідає «правилу правої руки». Це означає, що якщо вектори a і b і $[a, b]$ приведені до спільного початку, то вектор $[a, b]$ повинен бути спрямований так, як спрямований середній палець правої руки, великий палець якої спрямований по першому співмножнику (тобто по вектору a), а вказівний – за другим (тобто по вектору b).

Векторний добуток залежить від порядку співмножників, саме:

$$[a, b] = -[b, a]$$

Модуль векторного добутку $[a, b]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах a і b :

$$|[a, b]| = S$$

Векторний добуток $[a, b]$ перетворюється на нуль тоді та тільки тоді, коли вектори a і b колінеарні.

Якщо система координатних осей права та вектори a і b задані в цій системі своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1) \quad \text{і} \quad b = (X_2, Y_2, Z_2),$$

то векторний добуток вектора a на вектор b визначається формулою

$$[a, b] = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right)$$

чи

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів

Трійкою векторів називаються три вектори, якщо вказано, який з них вважається першим, який другим і який третім.

Трійка колінеарних векторів a, b, c називається **правою**, якщо складаючі її вектори, будучи приведені до загального початку, розташовуються в порядку нумерації аналогічно тому, як розташовані великий, вказівний та середній пальці правої руки. Якщо вектори a, b, c розташовані аналогічно тому, як розташовані великий, вказівний і середній пальці лівої руки, то трійка цих векторів називається **лівою**.

Мішаний добуток (a, b, c) дорівнює обсягу паралелепіпеда, побудованого на векторах a, b, c , взятому зі знаком плюс, якщо трійка a, b, c права, і зі знаком мінус, якщо ця трійка ліва. Якщо вектори a, b, c колінеарні, то мішаний добуток (a, b, c) дорівнює нулю.

Якщо вектори a, b, c задано своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1), \quad b = (X_2, Y_2, Z_2), \quad c = (X_3, Y_3, Z_3),$$

то мішаний добуток (a, b, c) визначається формулою

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Рівняння площини

В декартових координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня і кожне рівняння першого степеня визначає площину.

Всякий вектор, який не дорівнює нулю, перпендикулярний до даної площини, називається її **нормальним вектором**.

Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

визначає площину, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $n = (A, B, C)$.

Розкриваючи в рівнянні (1) дужки і позначаючи число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ буквою D , представивши його у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Це рівняння називається **загальним** рівнянням площини.

Рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{де } a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

називається рівнянням площини «у відрізках».

Рівняння прямої

Пряма, як перетин двох площин, визначена спільним завданням двох рівнянь першого степеня

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кожен вектор, який не дорівнює нулю та лежить на даній прямій або паралельної їй, називається **напрямним вектором** цієї прямої.

Якщо відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої та напрямний вектор $q = (l, m, n)$, то пряма може бути визначена рівняннями виду

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

в такому вигляді рівняння прямої називаються **канонічним**.

Канонічні рівняння прямої, що проходить через дані точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, мають вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в напрямку вектора $q = (l, m, n)$

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt.$$

Практична частина

Приклади розв'язування задач

Дано координати піраміди

$$A_1(-1;0,1) \quad , \quad A_2(4,3,2) \quad , \quad A_3(1,2,4), \quad A_4(0,4,-1)$$

1. Знайти довжини ребер $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ піраміди.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

Маємо $\overline{A_1A_2} = (5,3,1)$,

$\overline{A_1A_3} = (2,2,3)$,

$\overline{A_1A_4} = (1,4,-2)$.

Оскільки $|A_1A_2| = |\overline{A_1A_2}|$, то $|A_1A_2| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$

$$|A_1A_3| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$|A_1A_4| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

2. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 .

Розв'язання.

Оскільки $\overline{A_1A_2} = (5,3,1)$ та $\overline{A_1A_4} = (1,4,-2)$, то косинус кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos(\widehat{\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}}) = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{25+9+1} \cdot \sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді $\widehat{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})} = \arccos \frac{\sqrt{15}}{7}$.

Величина кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4

Тому

$$\left(\widehat{\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}}\right) = \left(\widehat{A_1A_2, A_1A_4}\right) = \arccos \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

3. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

Розв'язання. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$, тобто половині модуля векторного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$.

Оскільки $\overline{A_1A_2} = (5, 3, 1)$, $\overline{A_1A_3} = (2, 2, 3)$, то

$$[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \bar{j} \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot$$

$$(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot \bar{i} - 13\bar{j} + 4\bar{k} = (7, -13, 4)$$

Отже

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]| = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + (-13)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{234} = \frac{7}{2} \sqrt{26}$$

4. Знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ модуля мішаного добутку векторів $\overline{A_1A_2} = (5, 3, 1)$, $\overline{A_1A_3} = (2, 2, 3)$, $\overline{A_1A_4} = (1, 4, -2)$

Знайдемо їх мішаний добуток:

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -53$$

$$\text{Отже, } V = \frac{1}{6} |-53| = \frac{53}{6} = 8\frac{5}{6}.$$

5. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = (3, -5, 1)$ та $\overline{b} = 2\bar{j} - \bar{k}$

Розв'язання. Згідно з означенням суми та різниці векторів довжина однієї діагоналі паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює модулю суми цих векторів, а другої – модулю їх різниці.

Знайдемо координати суми та різниці цих векторів:

$$\overline{a} + \overline{b} = (3, -5, 1) + (0, 2, -1) = (3, -3, 0),$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (3, -5, 1) - (0, 2, -1) = (3, -7, 2).$$

Знайдемо

$$\alpha_1 = |\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\alpha_2 = |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + 2^2} = \sqrt{62}$$

6. Відомі координати двох суміжних вершин паралелограма $A(2,3,0)$, $B(-1,0,4)$ та точка перетину діагоналей $O(1,-1,1)$. Знайти координати двох інших вершин.

Розв'язання. Відомо, що діагоналі паралелограма в точці перетину діляться навпіл, тому, якщо $C(x_1, y_1, z_1)$ и $D(x_2, y_2, z_2)$, маємо

$$\frac{2 + x_1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\frac{3 + y_1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -5$$

$$\frac{0 + z_1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2$$

Отже, $C(0,-5,2)$.

Так само знаходимо координати точки D :

$$\frac{-1 + x_2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

$$\frac{0 + y_2}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -2$$

$$\frac{4 + z_2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = -2$$

Отже, $D(3,-2,-2)$

7. Задані вершини трикутника $A(2,2)$, $B(-2,-8)$, $C(-6,-2)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з точки C .

Розв'язання. Щоб знайти рівняння медіани CF , знайдемо координати точки F – середини відрізка AB :

$$x_F = \frac{x_A + x_B}{2} = 0, \quad y_F = \frac{y_A + y_B}{2} = -3, \quad F(0,-3).$$

Знайдемо рівняння прямої CF :

$$\frac{x - x_C}{x_F - x_C} = \frac{y - y_C}{y_F - y_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{x + 6}{0 + 6} = \frac{y + 2}{-3 + 2}$$

Або

$$\frac{x+6}{6} = \frac{y+2}{-1}$$

В загальному вигляді $x + 6y + 18 = 0$, а через кутовий коефіцієнт

$$y = -\frac{1}{6}x - 3.$$

8. Задані послідовні вершини паралелограма ABCD A(3,0,-1), B(1,2,4), C(0,7,-2). Знайти рівняння його сторони AD.

Розв'язання: Знайдемо рівняння прямої (AD), що проходить через точку A паралельно вектору $\overline{BC} = (1,5,2)$.

Для цього скористуємось канонічними рівняннями прямої у просторі

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-0}{5} = \frac{z-(-1)}{2}, \text{ або}$$
$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$$

9. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-2,3,1)$ паралельно площині $4x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуємо рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x, y, z)$ перпендикулярно до заданого вектора $\overline{n} = (A, B, C)$.

Нормальний вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ визначимо з умови паралельності площин

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{3} = \frac{C}{-2}$$

Оберемо числа A, B, C, що задовільняють цій умові. Наприклад, A=4, B=3, C=-2.

Тоді шукане рівняння має вигляд:

$$4(x - (-2)) + 3(y - 3) - 2(z - 1) = 0$$
$$4x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику з вершинами $A(5,4)$, $B(-1,2)$, $C(5,1)$ проведена медіана AD . Знайти її довжину.
2. Вершини трикутника містяться в точках $A(2,-1,3)$, $B(4,0,1)$, $C(-10,5,3)$. Знайти косинус кута ABC .
3. Знайти площу трикутника, вершинами якого є $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$, $C(7,3,4)$.
4. Знайти об'єм тетраедра, вершини якого містяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.
5. Задані вершини тетраедра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Знайти довжину його висоти опущеної з вершини D .
6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ паралельно прямій $5x + 8y = 0$.
7. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,-1,3)$ й має нормальний вектор $\vec{n} = (5,0,4)$.
8. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,-3,7)$ паралельно площині $2x - 6y - 3z + 5 = 0$.
9. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x + y - z + 1 = 0.$$

10. Знайти проекцію точки $(2,1,1)$ на площину $x + y + 3z + 5 = 0$.
11. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A\left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$.
12. Знайти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,7,-2)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3, -2, 4)$.
13. Знайти геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох точок $F_1(-3,0)$ та $F_2(3,0)$ є величина стала, яка дорівнює 10.
14. Знайти геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох точок $F_1(-5,0)$ та $F_2(5,0)$ є величина стала, яка дорівнює 6.
15. Знайти геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3,0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$.

Відповіді на завдання для самостійної роботи

1. $\frac{\sqrt{61}}{2}$

2. $\frac{3}{5}$

3. $\frac{49}{2}$

4. 3

5. 11

6. $5x + 8y + 11 = 0$

7. $5x + 4z - 22 = 0$

8. $2x - 6y - 3z - 1 = 0$

9. (-7,-5,-11)

10. (1,0,-2)

11. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$

12. $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 7 \\ z = 4t - 2 \end{cases}$

13. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

14. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

15. $y^2 = 12x$

Список рекомендованої літератури

1. Конет І.М. Алгебра та геометрія. / І.М Конет, В.В. Мойко, В.А. Сорич. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2011. – 452 с.
2. Петренко М. П. Курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. / М. П. Петренко, О. П. Бойчук, Л. Г. Авраменко, В. В. Ясінський. – Київ : ІЗМН, 2000. – 224 с.
3. Слєсарєв В.В. Елементи лінійної алгебри: навч. посібн. / В. В. Слєсарєв, С. О. Сушко, Л. Я. Фомичова; М-во освіти і науки, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2005. – 285 с.
4. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник – Чернівці, 2018. –336с.
5. Годич В.І. Лінійна алгебра. Частина І. / В.І. Годич, Ю.В. Гнатюк. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – 124 с.
6. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел, ч.1.- К.: Вища школа, 1983.-232 с
7. Діскант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, - К.: Вища школа, 2001.- 303 с.
8. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії// За ред. Рудаковського Ю.К.-Львів: Бескид-Біт, 2002.-256 с.
9. Збірник задач з аналітичної геометрії / За редакцією В.В. Кириченка. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005. – 228 с.
- 10.Завало С.Т., Левіщенко С.С. Алгебра і теорія чисел,практикум.-К.: Вища школа,1986.-264 с.

Зміст

Передмова.....	3
Комплексні числа.....	4
Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.....	4
Спряжені комплексні числа та їх властивості.....	4
Практична частина.....	6
Приклади розв’язування задач.....	6
Завдання для самостійної роботи.....	7
Відповіді на завдання.....	7
Геометрична інтерпретація комплексних чисел.....	8
Тригонометрична форма комплексного числа.....	8
Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.....	8
Формула Муавра.....	10
Добування кореня з комплексного числа.....	11
Корені з одиниці.....	11
Первісні корені.....	12
Показникова форма комплексного числа.....	12
Дії над комплексними числами в показниковій формі.....	13
Практична частина.....	13
Приклади розв’язування задач.....	13
Завдання для самостійної роботи.....	17
Відповіді на завдання.....	18
Аналітична геометрія.....	19

Аналітична геометрія на площині.....	19
Відстань між двома точками.....	19
Ділення відрізка в даному відношенні.....	19
Лінії першого порядку.....	20
Загальне рівняння прямої.....	20
Коло.....	21
Еліпс.....	21
Гіпербола.....	22
Парабола.....	23
Аналітична геометрія у просторі.....	24
Відстань між двома точками.....	24
Ділення відрізка в даному відношенні.....	24
Векторна алгебра.....	25
Лінійні операції над векторами.....	26
Скалярний добуток векторів.....	27
Векторний добуток векторів.....	27
Мішаний добуток векторів.....	28
Рівняння площини.....	29
Рівняння прямої.....	29
Практична частина.....	30
Приклади розв'язування задач.....	30
Завдання для самостійної роботи.....	34
Відповіді на завдання.....	35
Список рекомендованої літератури.....	36

Навчально-методичне видання

Баландіна Н.М.

ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

**Методичні вказівки до самостійної роботи
для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»
за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення»**

122 «Комп'ютерні науки»

125 «Кібербезпека»