МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра інформаційних технологій

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник для фахівців у галузі ІТ, які навчаються
за спеціальностями галузі 12 - Інформаційні технології

Одеса 2023

Затверджено Вченою Радою Міжнародного гуманітарного університету
(№ 2 від 20 жовтня 2023 р.)

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Математична статистика: навчальний посібник для фахівців у галузі ІТ, які навчаються за спеціальностями галузі 12 - Інформаційні технології. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету. – Одеса: МГУ, 2023. – 110 с.

У навчальному посібнику математичну статистику подано з урахуванням її застосування спеціалістами у галузі інформаційних технологій. Навчальний посібник містить теоретичний курс, велику кількість відповідних прикладів з докладними поясненнями по розв’язуванню, а також задачі для самостійного розв’язування; контрольні запитання; перевірні тести та тренувальні вправи.

Навчальний посібник відповідає вимогам програми курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для здобувачів вищої освіти.

ЗМІСТ

Глава 1. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ 5
1.1 Основні задачі математичної статистики 5
1.2 Генеральна та вибіркова сукупність 6
1.3 Статистичний розподіл варіаційної сукупності 8
1.4 Геометричні характеристики статистичного ряду розподілу 17
1.5 Числові характеристики статистичного ряду розподілу 29
1.5.1 Вибіркові середні статистичного ряду розподілу 29
1.5.2 Мода та медіана статистичного ряду розподілу 33
1.6 Показники варіації статистичного ряду розподілу 36
1.6.1 Поняття про показники варіації 36
1.6.2 Розмах варіації статистичного ряду розподілу 36
1.6.3 Середнє лінійне відхилення статистичного ряду розподілу 37
1.6.4 Дисперсія статистичного ряду розподілу 37
1.6.5 Емпіричні початкові та центральні моменти статистичного ряду розподілу 40
1.6.6 Емпіричні асиметрія та ексцес 42
1.7 Спрощені методи розрахунку числових характеристик 46
1.7.1 Умовні варіанти 46
1.7.2 Умовні емпіричні моменти 47
1.7.3 Метод добутків для знаходження числових характеристик вибіркової сукупності 48
1.7.4 Метод сум для знаходження числових характеристик вибіркової сукупності 53

Глава 2. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ 63
2.1 Незсунені, ефективні та обґрунтовані оцінки параметрів статистичного розподілу 63

2.2 Оцінка генеральної середньої та генеральної дисперсії 64
2.3 Довірчий інтервал. Довірча ймовірність 66

Глава 3. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ 70
3.1 Вирівнювання статистичних параметрів 70
3.2 Перевірка гіпотези про закон розподілу статистичної випадкової величини 71
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ 86
ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ 87
ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ 92
ДОДАТКИ 100
Додаток 1. Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 100
Додаток 2. Таблиця значень t_β 105
Додаток 3. Критичні точки $u = u(\alpha, q)$ розподілу χ^2 106
Додаток 4. Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 108
СПИСОК ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ 110

Глава 1
ВИБІРКОВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Основні задачі математичної статистики

Об’єктом дослідження математичної статистики є випадкові масові явища або процеси тієї чи іншої природи.

В основу досліджень в області математичної статистики покладено основні положення теорії ймовірностей відносно закономірностей, яким підкоряються масові випадкові явища чи процеси.

Дослідженню підлягають статистичні дані, а саме, результати спостережень за відповідними явищами або процесами або ж результати певних експериментів.

Збирання статистичних даних має відбуватись так, щоб забезпечувати максимальну об’єктивність у характеристиці досліджуваного явища чи процесу.

Розробка методів збирання статистичних даних є першою основною задачею математичної статистики.

Розробка методів аналізу отриманих статистичних даних складає другу основну задачу математичної статистики.

Третя основна задача математичної статистики полягає у тому, щоб на основі проведеного аналізу зробити певні наукові висновки та рекомендації щодо прийняття практичних рішень.

Статистичним показником називається кількісна та якісна характеристика досліджуваного явища чи процесу.

Статистичний показник має бути адекватним.

Адекватність показника – це його спроможність відображувати саме ті властивості досліджуваного явища чи процесу, які передбачені програмою досліджень.

Статистичне спостереження це – спрямоване, систематизоване і науково організоване збирання масових даних про досліджувані явища або процеси.

1.2. Генеральна та вибіркова сукупності

Розглянемо деяку сукупність однорідних об’єктів, які мають бути досліджені статистичними методами відповідно певної кількісної або якісної ознаки.

У деяких випадках дослідженню піддаються усі об’єкти означеної сукупності. Таке дослідження називається суцільним дослідженням. Але у більшості випадків суцільні дослідження не практикується. Якщо кількість об’єктів сукупності є великою, то суцільні дослідження є занадто трудомістким. Якщо процес дослідження пов’язаний з руйнуванням досліджуваного об’єкту, то зрозуміло, що суцільне дослідження у такому випадку недоцільне. Тому звичайно дослідження виконується не над усіма об’єктами, а лише над деякою частиною усієї сукупності об’єктів. Таке дослідження називається вибірковим.

Уся сукупність об’єктів, які мають бути дослідженні за тією чи іншою ознакою, називається генеральною сукупністю, а кількість об’єктів N генеральної сукупності називається її об’ємом.

Та частина об’єктів генеральної сукупності, яка практично піддається дослідженню, називається вибірковою сукупністю, а кількість об’єктів n вибіркової сукупності називається її об’ємом.

Зрозуміло, що вибіркова сукупність має бути утворена таким чином, щоб вона могла об’єктивно характеризувати усю генеральну сукупність.

Вибіркова сукупність буває безповторною або повторною.

Безповторна вибіркова сукупність характеризується тим, що кожен об’єкт вибіркової сукупності досліджується та вже не повертається у генеральну сукупність.

Повторна вибіркова сукупність характеризується тим, що кожен об’єкт вибіркової сукупності після дослідження повертається знов у генеральну

сукупність і не виключена можливість, що цей об’єкт знов попаде у вибіркову сукупність.

На практиці найчастіше користуються безповторною вибірковою сукупністю. Усі елементи вибіркової сукупності обираються з генеральної сукупності випадковим чином. Якщо елементи генеральної сукупності можуть бути пронумеровані, то об’єкти вибіркової сукупності можна обирати за допомогою спеціальних статистичних таблиць. Таблиця відкривається випадковим чином на будь-якій сторінці і об’єкти з номерами, що містяться на цій сторінці включають у вибіркову сукупність.

Перелічені способи утворення вибіркової сукупності характеризуються тим, що вони не потребують розподілення генеральної сукупності на частини. Але в деяких випадках розподілення генеральної сукупності на частини буває доцільним.

Розглянемо відповідні цій ситуації способи утворення вибіркової сукупності.

1. Механічний спосіб

При такому способі елементи вибіркової сукупності відбираються через певний інтервал. Це дуже зручний спосіб утворення вибіркової сукупності, але цей спосіб не завжди забезпечує об’єктивність вибіркової сукупності. Наприклад, генеральна сукупність складається з деталей, виготовлених за допомогою слюсарного станка. Елемент, за допомогою якого виточується деталь, затуплюється після виготовлення 100 деталей. Отже, якщо до вибіркової сукупності обирати деталі з номерами 1, 101, 201, …, то показник буде завищений, а якщо обирати деталі з номерами 99, 199, 299, …, то показник буде занижений. Отже, за такою структурою генеральної сукупності механічний спосіб утворення вибіркової сукупності не є доцільним.

2. Типовий спосіб

Якщо генеральна сукупність складається з об’єктів, які можуть бути об’єднані за якоюсь ознакою у типові групи, то вибіркова сукупність складається таким чином, щоб з кожної типової групи були обрані об’єкти

пропорційно об’ємам цих груп. Приміром, типовий спосіб доцільно використовувати, якщо генеральна сукупність складається з деталей, виготовлених на станках з різною технологією.

3. Серійний спосіб

Якщо елементи генеральної сукупності є достатньо однорідними, то генеральну сукупність розбивають на серії і до вибіркової сукупності обирають не окремі об’єкти, а цілі серії. Це достатньо простий спосіб, але він є не достатньо об’єктивним.

Якщо вибіркова сукупність здатна надати достатньо повну характеристику генеральної сукупності, то така вибіркова сукупність називаються репрезентативною.

Значну роль при утворенні вибіркової сукупності відіграє її об’єм. Об’єм вибіркової сукупності має бути достатньо великим, щоб забезпечити репрезентативність вибіркової сукупності. Водночас об’єм вибіркової сукупності має бути не дуже великим, щоб зменшити матеріальні або фізичні затрати на дослідження. Тобто, доцільно знайти розумну середину між цими протиречивими вимогами.

1.3 Статистичний розподіл вибіркової сукупності

Після того, як у той чи інший спосіб утворена вибіркова сукупність, об’єм якої дорівнює n, починається її дослідження за певною ознакою X, яка допускає кількісну характеристику.

Дослідженню кожного елемента вибіркової сукупності відповідає певна випадкова величина: $X_1, X_2, ..., X_n$.

Можливі значення, які набувають ці випадкові величини будемо позначати відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$. Тобто x_1 це – можливе значення, яке набуває випадкова величина X_1, x_2 – це можливе значення, яке набуває випадкова величина X_2, …, x_n – це можливе значення, яке набуває випадкова величина X_n.

Результат кожного окремого дослідження називається варіантою.

В процесі дослідження усі варіанти послідовно заносять в таблицю, перший рядок якої – це порядковий номер варіанти, а другий рядок – відповідне значення варіанти.

№	1	2	3	…	n
x	x_1	x_2	x_2	…	x_n

Така таблиця називається несгрупованим статистичним рядом. Обробляти таку таблицю не дуже зручно. Тому, далі варіанти записують у зростаючому або спадаючому порядку, внаслідок чого утворюється так званий ранжирований статистичний ряд. Статистичний ранжирований ряд називають варіаційним рядом.

Може статись, що у варіаційному ряді усі варіанти різні. У цьому випадку ряд називається простим варіаційним рядом.

Якщо ж у ранжированому ряді зустрічаються однакові варіанти, то їх об'єднують у групи. Кількість варіантів у групах позначають відповідно $m_1, m_2, ..., m_k$, де числа $m_1, m_2, ..., m_k$ називаються частотами відповідних варіант.

Приміром, варіанта x_1 повторюється m_1 разів, варіанта x_2 – m_2 разів, …, x_k – m_k разів, де $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Варіаційний ряд, в якому кожній варіанті відповідає її частота називається статистичним розподілом вибіркової сукупності. Для подальшої роботи зі статистичним розподілом більш зручно замість частот m_i записувати відносні частоти $w_i = \frac{m_i}{n}$, де $i = 1; 2; …; k$.

Частоти та відносні частоти інколи називаються відповідно вагами статистичного розподілу та відносними вагами статистичного розподілу.

В деяких випадках зручно користуватись такими поняттями як накопичена частота та відносна накопичена частота.

Накопиченою частотою варіанти x_i називається число, що дорівнює кількості появ усіх варіант, які не більш за x_i, тобто

$$m_i^{нак} = m_1 + m_2 + ... + m_{i-1} + m_i .$$

Так,

$$m_1^{нак} = m_1 ;\ m_2^{нак} = m_1 + m_2 ;\ m_3^{нак} = m_1 + m_2 + m_3 , \ldots,$$

$$m_i^{нак} = m_1 + m_2 + ... + m_{i-1} + m_i .$$

Відносною накопиченою частотою варіанти x_i називається число $w_i^{нак}$, яке визначається формулою

$$w_i^{нак} = \frac{m_i^{нак}}{n},$$

де n – об'єм вибіркової сукупності.

Ряди розподілу бувають як дискретними так і інтервальними.

Інтервальний ряд відрізняється від дискретного ряду тим, що в ньому частота вказується для усієї групи варіант, які належать відповідному інтервалу.

Дискретні ряди розподілу бувають такими, в яких різниця між двома сусідніми значеннями не є однаковою. Є також такі дискретні ряди, в яких різниця між сусідніми варіантами завжди однакова, тобто завжди дорівнює одному і тому ж числу h, що називається шагом ряду розподілу. Ті чи інші статистичні розрахунки є більш простими для рядів з рівновіддаленими варіантами.

Інтервальні ряди розподілу також бувають двох типів, а саме, з інтервалами різної довжини і з інтервалами однієї і тієї ж довжини, тобто такі ряди, в яких довжина кожного інтервала дорівнює одному і тому ж числу h, що називається шагом інтервального ряду.

Ті чи інші статистичні розрахунки є більш простими для рядів з однаковою довжиною інтервалів.

Якщо досліджувана ознака X характеризує процес, який не є достатньо однорідним, то доцільно користуватись інтервальним рядом з інтервалами

різної довжини. Приміром, частота ознаки X впродовж доби суттєво відрізняється. У такому разі сусідні інтервали з малими частотами об'єднують, що призводить до появи інтервалів різної довжини.

Після проведення досліджень на основі отриманого статистичного ряду будуємо інтервальний ряд.

Важливу роль при визначенні кількості інтервалів відіграє величина

$$R_в = x_{\max} - x_{\min}, \tag{1.1}$$

яка називається розмахом варіації.

До того ж слід мати на увазі, що чим більше інтервалів, тим більш точнішими але і більш трудомісткими будуть розрахунки. Якщо кількість інтервалів невелика, то розрахунки суттєво спрощуються, але точність розрахунків знижується.

Для того, щоб визначити доцільну кількість інтервалів для даного статистичного ряду, що відповідає вибірковій сукупності з об'ємом n, можна користуватись формулою Стерджеса

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r}, \tag{1.2}$$

де число $r = [1 + 3{,}322 \lg n]$ визначає доцільну кількість інтервалів.

При знаходженні характеристик дискретного ряду розподілу з великим об'ємом вибіркової сукупності доцільно перевести дискретний ряд в інтервальний. Далі цей інтервальний ряд знов переводиться в дискретний ряд у такий спосіб коли у відповідність кожному інтервалу ставиться одна варіанта, яка є серединою інтервала, а її частота дорівнює частоті інтервала.

Надалі домовимось розглядати ряди з однаковими інтервалами.

Для інтервальних рядів розподілу розглядається ще така характеристика, яка називається щільністю розподілу.

Абсолютною щільністю розподілу називається величина f^a, яка визначається формулою

$$f^a = \frac{m_i}{h}, \tag{1.3}$$

де $i = 1; 2; \dots ; r$.

Відносною щільністю розподілу називається величина f_i^b, яка визначається формулою

$$f_i^b = \frac{w_i}{h}, \qquad (1.4)$$

де $i = 1; 2; \dots ; r$.

Дискретний статистичний ряд розподілу має такий вигляд

X	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

Тут $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, де n – об'єм вибіркової сукупності

Якщо дискретний ряд розподілу є простим, то $m_1 = m_2 = \dots m_n = 1$.

Дискретний статистичний ряд розподілу з відносними частотами має такий вигляд:

X	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Тут $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$, де n – об'єм вибіркової сукупності

Якщо дискретний ряд розподілу є простим, то $w_1 = w_2 = \dots w_n = \frac{1}{n}$, а $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Дискретний статистичний ряд розподілу з накопиченими частотами має вигляд:

X	x_1	x_2	…	x_k
$m_i^{нак}$	$m_1^{нак}$	$m_2^{нак}$	…	$m_k^{нак}$

Тут $m_k^{нак} = n$, де n – об'єм вибіркової сукупності.

Дискретний статистичний ряд розподілу з відносними накопиченими частотами має вигляд:

X	x_1	x_2	…	x_k
$w_i^{нак}$	$w_1^{нак}$	$w_2^{нак}$	…	$w_k^{нак}$

Тут $w_k^{нак} = 1$.

Якщо дискретний статистичний ряд розподілу є простим, то $w_1^{нак} = 1$, $w_2^{нак} = 2$, …, $w_n^{нак} = n$.

Інтервальний статистичний ряд розподілу з частотами має вигляд:

I	$(\alpha_1; \alpha_2)$	$(\alpha_2; \alpha_3)$	…	$(\alpha_r; \alpha_{r+1})$
m_i	m_1	m_2	…	m_r

Тут $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, де n – об'єм вибіркової сукупності, r – кількість інтервалів.

Інтервальний статистичний ряд розподілу з відносними частотами має вигляд:

I	$(\alpha_1; \alpha_2)$	$(\alpha_2; \alpha_3)$	…	$(\alpha_r; \alpha_{r+1})$
w_i	w_1	w_2	…	w_r

Тут $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1$.

Інтервальний статистичний ряд розподілу з накопиченими частотами має вигляд:

I	$(\alpha_1; \alpha_2)$	$(\alpha_2; \alpha_3)$	…	$(\alpha_r; \alpha_{r+1})$
$m_i^{нак}$	$m_1^{нак}$	$m_2^{нак}$	…	$m_r^{нак}$

Тут $m_r^{нак} = n$, де n – об'єм вибіркової сукупності, а r – кількість інтервалів.

Інтервальний статистичний ряд розподілу з відносними накопиченими частотами має вигляд:

I	$(\alpha_1;\alpha_2)$	$(\alpha_2;\alpha_3)$	…	$(\alpha_r;\alpha_{r+1})$
$w_i^{нак}$	$w_1^{нак}$	$w_2^{нак}$	…	$w_r^{нак}$

Тут $w_r^{нак}=1$.

Інтервальний статистичний ряд розподілу з абсолютними щільностями розподілу має такий вигляд:

I	$(\alpha_1;\alpha_2)$	$(\alpha_2;\alpha_3)$	…	$(\alpha_r;\alpha_{r+1})$
f_i^a	f_1^a	f_2^a	…	f_r^a

Інтервальний статистичний ряд розподілу з відносними щільностями розподілу має такий вигляд:

I	$(\alpha_1;\alpha_2)$	$(\alpha_2;\alpha_3)$	…	$(\alpha_r;\alpha_{r+1})$
$f_i^в$	$f_1^в$	$f_2^в$	…	$f_r^в$

В теорії ймовірностей розглядаються дискретні та неперервні випадкові величини, розподіл ймовірностей яких знаходиться за певними законами.

Статистичні ряди розподілу можна вважати емпіричними випадковими величинами. В залежності від характеристики ознаки *X*, за якою відбувається дослідження вибіркової сукупності відповідна емпірична випадкова величина може бути дискретною або неперервною.

У законі розподілу емпіричної дискретної випадкової величини аналогом теоретичної ймовірності вважаються відносні частоти w_i (i = 1; 2; …, r).

У законі розподілу емпіричної неперервної випадкової величини аналогом теоретичної диференціальної функції розподілу вважається відносна щільність розподілу $f_i^в$ (i = 1; 2; …, r).

Приклад 1.1. Результати дослідження вибіркової сукупності за ознакою X подані у вигляді статистичного несгрупованого ряду

Таблиця 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	6	1	5	2	6	1	4	5	2	3	3	1	6	5	4

Скласти:

1) ранжируваний статистичний ряд;
2) статистичний ряд з частотами;
3) статистичний ряд з відносними частотами;
4) статистичний ряд з накопиченими частотами;
5) статистичний ряд з відносними частотами.

Р о з в ' я з а н н я

Ранжирований статистичний ряд:

Таблиця 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6

Статистичний ряд з частотами:

Таблиця 3

x_i	1	2	3	4	5	6
m_i	3	2	2	2	3	3

$$\sum m_i = 15$$

Статистичний ряд з відносними частотами:

Таблиця 4

x_i	1	2	3	4	5	6
w_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\sum w_i = 1$$

Статистичний ряд з накопиченими частотами:

Таблиця 5

x_i	1	2	3	4	5	6
$m_i^{нак}$	3	5	7	9	12	15

$m_6^{нак} = 15$

Статистичний ряд з відносними накопиченими частотами:

Таблиця 6

x_i	1	2	3	4	5	6
$w_i^{нак}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	1

$w_6^{нак} = 1$

В і д п о в і д ь : таблиці 2 – 6.

Приклад 1.2. Задано інтегральний статистичний ряд розподілу:

Таблиця 1

I	(–3; 1)	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)
m_i	8	6	2	4	5

$\sum m_i = 25$

Скласти:

1) статистичний інтервальний ряд з абсолютними щільностями;

2) статистичний інтервальний ряд з відносними щільностями.

Р о з в ’ я з а н н я

Шаг варіаційного ряду $h = 4$. Абсолютні щільності знаходимо за формулою (1.3)

Таблиця 2

I	(–3; 1)	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)
f_i^a	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$

Складаємо допоміжний статистичний ряд з відносними частотами:

Таблиця 3

I	(–3; 1)	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)
w_i	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$

Звідси знаходимо статистичний ряд з відносними щільностями.

Таблиця 4

I	(–3; 1)	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)
$f_i^{в}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$

В і д п о в і д ь : таблиці 2; 4.

1.4 Геометричні характеристики статистичних рядів розподілу

1. Емпірична функція розподілу ймовірностей

Емпіричною або статистичною функцією розподілу ймовірностей називається така функція $F^*(x)$, яка для кожного значення x кількісної ознаки X визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = w(X < x). \tag{1.5}$$

Властивості емпіричної функції $F^*(x)$:

1) Функція $F^*(x)$ набуває значення, які належать проміжку [0; 1], тобто

$$0 \le F^*(x) \le 1. \tag{1.6}$$

2) Якщо $x < x_{\min}$, то

$$F^*(x) = 0.$$

Якщо $x_{\max} < x$, то

$$F^*(x) = 1$$

3) Функція $F^*(x)$ є не спадаючою функцією, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Графік функції $F^*(x)$ є ступінчастою фігурою (рис. 1.1).

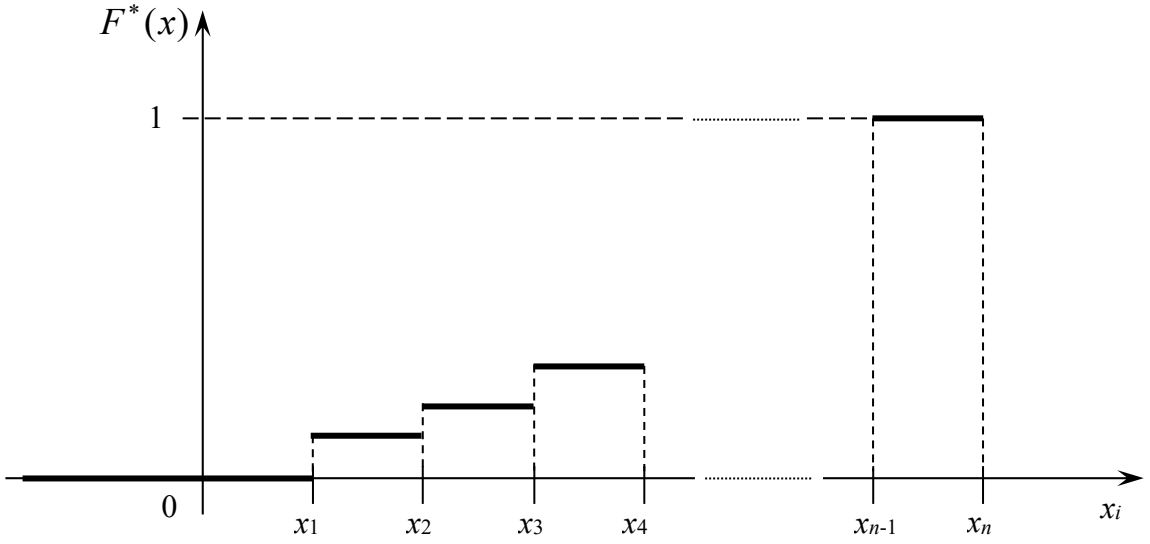


Рисунок 1.1

Емпірична функція розподілу ймовірностей $F^*(x)$ є аналогом інтегральної функції розподілу ймовірностей в теорії ймовірностей, яку іще називають теоретичною функцією розподілу ймовірностей.

Статистична та теоретична функції розподілу ймовірностей відрізняються тим, що функція $F^*(x)$ визначає відносну частоту події $X < x$, а функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$. Але, як звісно, чим більше кількість випробувань, тим більш відносна частота наближається до ймовірності.

Приклад 1.3. По заданому статистичному ряду знайти емпіричну функцію розподілу:

Таблиця 1

x_i	–3	–1	2	5	6	7
m_i	5	3	5	4	1	2

$\sum m_i = 20$

Р о з в ’ я з а н н я

Складаємо допоміжний статистичний ряд з відносними частотами.

Таблиця 2

x_i	–3	–1	2	5	6	7
m_i	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

$\sum w_i = 1$

Користуючись формулою (1.5) знаходимо емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Якщо $-\infty < x \le -3$, то $F^*(x) = 0$;

якщо $-3 < x \le -1$, то $F^*(x) = 0{,}25$;

якщо $-1 < x \le 2$, то $F^*(x) = 0{,}4$;

якщо $2 < x \le 5$, то $F^*(x) = 0{,}6$;

якщо $5 < x \le 6$, то $F^*(x) = 0{,}85$;

якщо $6 < x \le 7$, то $F^*(x) = 0{,}9$;

якщо $7 < x \le +\infty$, то $F^*(x) = 1$.

Отже, маємо

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x \le -3; \\ 0{,}25 & \text{якщо } -3 < x \le -1; \\ 0{,}4 & \text{якщо } -1 < x \le 2, \\ 0{,}65 & \text{якщо } 2 < x \le 5; \\ 0{,}85 & \text{якщо } 5 < x \le 6; \\ 0{,}9 & \text{якщо } 6 < x \le 7; \\ 1 & \text{якщо } 7 < x \le +\infty. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F^*(x)$.

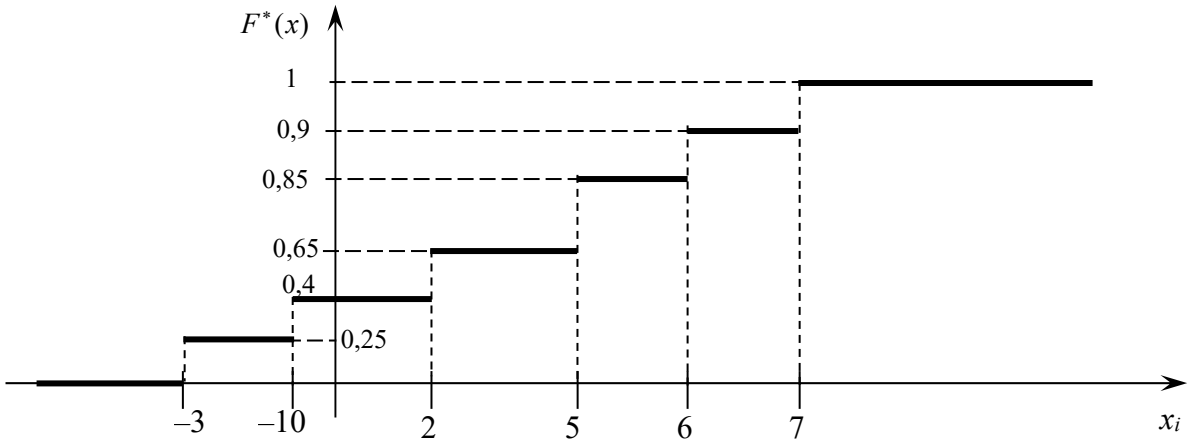


Рисунок до прикладу 1.3

2. Полігон частот та полігон відносних частот

Полігон частот та полігон відносних частот є геометричною характеристикою дискретного статистичного ряду.

Полігоном частот дискретного статистичного ряду є ламана з вершинами у точках (x_i; m_i), де i = 1; 2; …; k (рис. 1.2). Сума усіх ординат вершин ламаної дорівнює об’єму n вибіркової сукупності.

Полігоном відносних частот дискретного статистичного ряду є ламана з вершинами у точках (x_i; w_i), де i = 1; 2; …; k (рис. 1.3).

Сума усіх ординат вершин ламаної дорівнює одиниці.

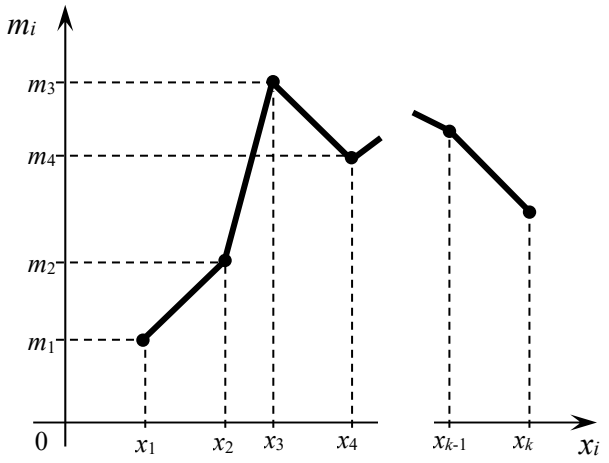


Рисунок 1.2

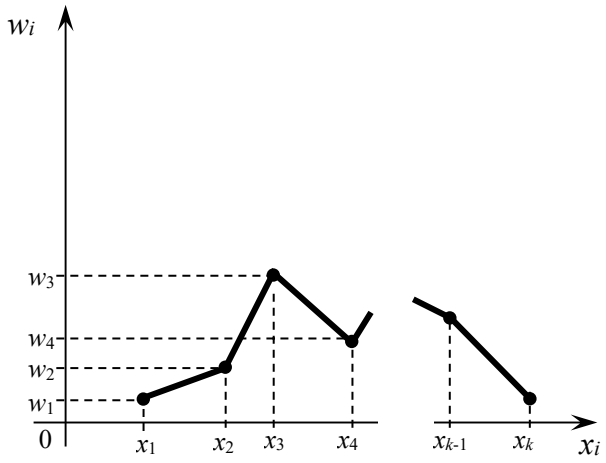


Рисунок 1.3

Приклад 1.4. По заданому статистичному ряду побудувати полігон частот та полігон відносних частот:

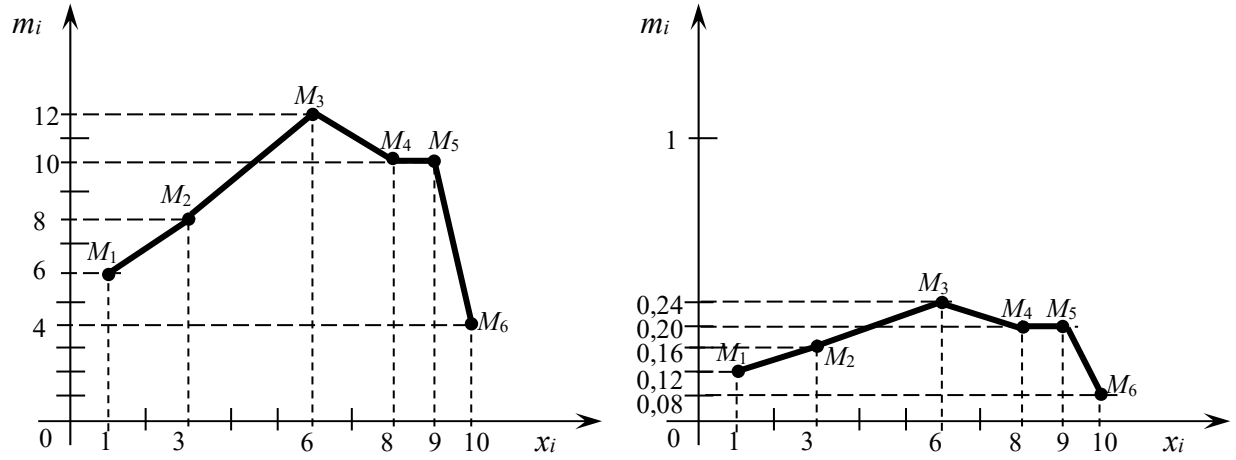
Таблиця 1

x_i	1	3	6	8	9	10
m_i	6	8	12	10	10	4

$$\sum m_i = 50$$

Р о з в ’ я з а н н я

Полігон частот – це ламана з вершинами у точках $M_1(1; 6)$, $M_2(3; 8)$, $M_3(6; 12)$, $M_4(8; 10)$, $M_5(9; 10)$, $M_6(10; 9)$ (рис. до прикладу 1.4, а)



а) б)

Рисунок до прикладу 1.4

Складаємо допоміжний статистичний ряд з відносними частотами:

Таблиця 2

x_i	1	3	6	8	9	10
w_i	0,12	0,16	0,24	0,2	0,2	0,08

$$\sum w_i = 1$$

Полігон відносних частот – це ламана з вершинами у точках $M_1(1; 0,12)$, $M_2(3; 0,16)$, $M_3(6; 0,24)$, $M_4(8; 0,2)$, $M_5(9; 0,2)$, $M_6(10; 0,08)$ (рис. до прикладу 1.4,б).

В і д п о в і д ь : рис. до прикладу 1.4.

3. Гістограма частот та гістограма відносних частот

Гістограма частот та гістограма відносних частот є геометричною характеристикою інтервального статистичного ряду.

Гістограмою частот інтервального статистичного ряду, що складається з r інтервалів, є ступінчаста фігура, яка складається з r прямокутників. Основою i-го прямокутника є і-й інтервал, а висота цього прямокутника дорівнює величині $\frac{m_i}{h}$, де h – шаг варіаційного ряду (рис. 1.4).

Гістограмою відносних частот інтервального статистичного ряду, що складається з r інтервалів, є ступінчаста фігура, яка складається з r прямокутників.

Основою i-го прямокутника є i-й інтервал, а висота цього прямокутника дорівнює величині $\frac{w_i}{h}$, де h – шаг статистичного ряду (рис. 1.5).

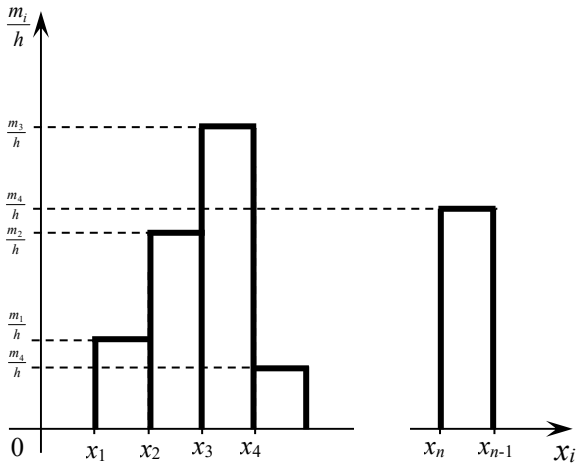


Рисунок 1.4

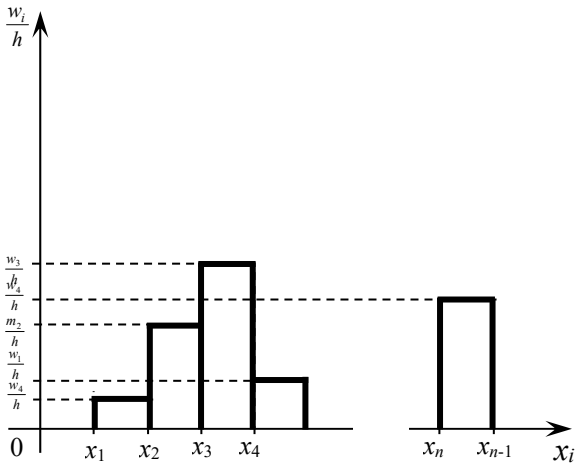


Рисунок 1.5

Площа фігури, що відповідає гістограмі частот, дорівнює

$$S = h \cdot \frac{m_1}{h} + h \cdot \frac{m_2}{h} + ... + h\frac{m_r}{h} \quad \text{або} \quad S = m_1 + m_2 + ... + m_r, \tag{1.7}$$

тобто ця площа дорівнює об’єму вибіркової сукупності.

Площа фігури, що відповідає гістограмі відносних частот дорівнює

$$S = h \cdot \frac{w_1}{h} + h \cdot \frac{w_2}{h} + ... + h\frac{w_r}{h} \quad \text{або} \quad S = w_1 + w_2 + ... + w_r \tag{1.8}$$

тобто ця площа дорівнює одиниці.

ЗАУВАЖЕННЯ. Оскільки статистичний ряд це емпіричний аналог випадкової величини, то можна вважати, що форма полігону та гістограми у першому наближені нагадують форму диференціальної функції теоретичної випадкової величини з якою, може бути, є схожість емпіричної випадкової величини.

Приклад 1.5. По заданому статистичному ряду побудувати гістограму частот та гістограму відносних частот:

Таблиця 1

I	(–4; 0)	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)	(12; 16)	(16; 20)
m_i	6	4	12	12	10	6

$$\sum m_i = 50$$

Побудувати: 1) гістограму частот; 2) гістограму відносних частот.

Р о з в ’ я з а н н я

Задано інтервал ний статистичний ряд з інтервалами однакової довжини. Шаг варіаційного ряду дорівнює 4. Гістограма частот складається з 6 прямокутників, основа кожного з них дорівнює h = 4, а відповідні висоти дорівнюють $\frac{m_i}{h}$.

Отже, висоти прямокутників дорівнюють відповідно: 1,5; 1; 3; 3; 2,5; 1,5.

Гістограма частот зображена на рис. а) до прикладу 1.5.

Складаємо допоміжний статистичний ряд з відносними частотами:

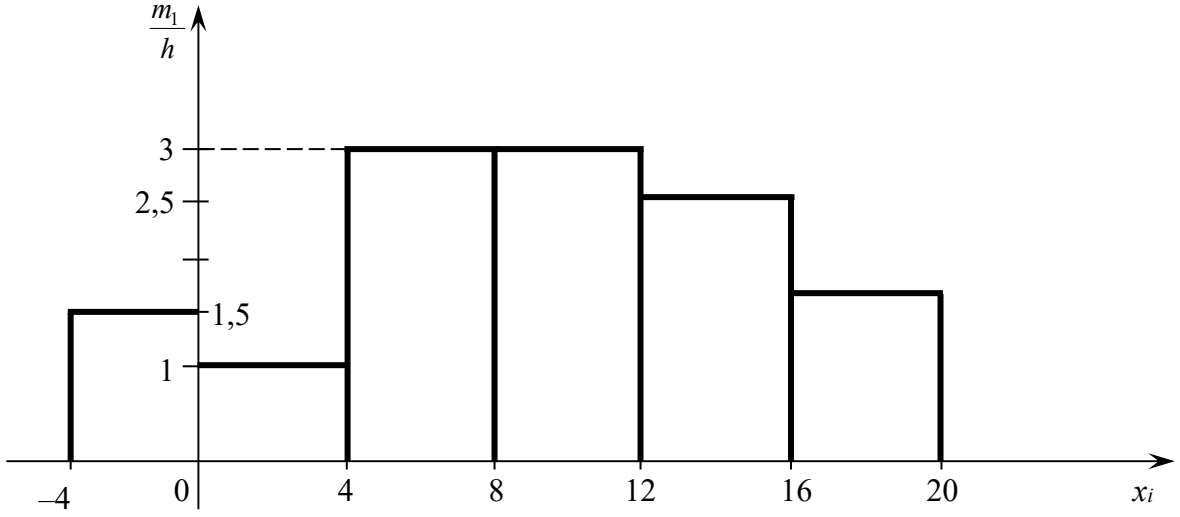
Таблиця 2

I_i	(–4; 0)	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)	(12; 16)	(16; 20)
w_i	0,12	0,08	0,24	0,24	0,2	0,12

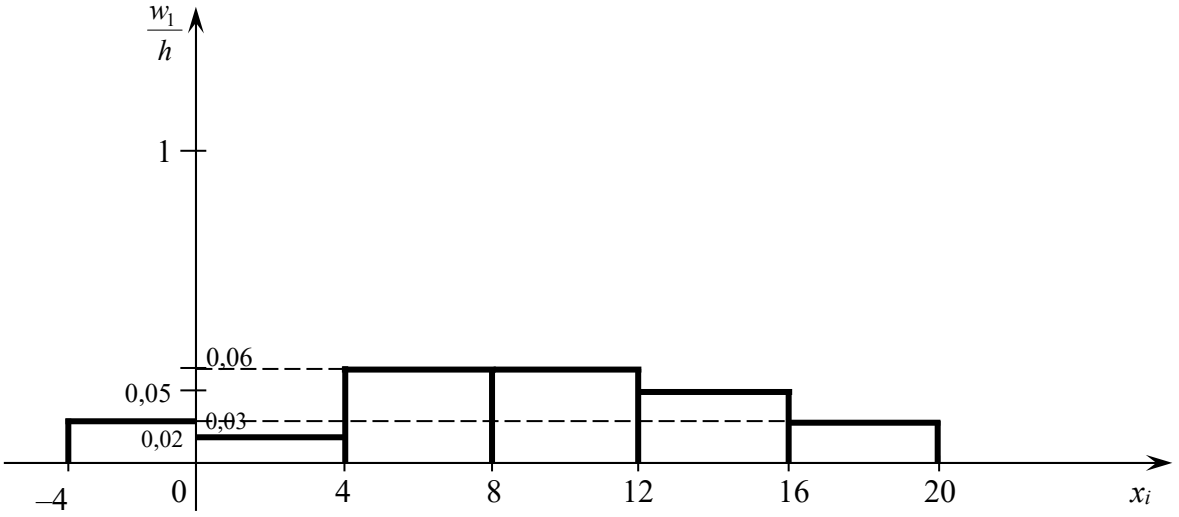
$$\sum w_i = 1$$

Гістограма відносних частот – це сукупність прямокутників, основою кожного з яких є h = 4, а відповідні висоти дорівнюють $\frac{w_i}{h}$, тобто 0,03; 0,02; 0,06; 0,06; 0,05; 0,03.

Гістограма відносних частот зображена на рис. б) до прикладу 1.5.



а)



б)

Рис. до прикладу 1.5

В і д п о в і д ь : рис. до прикладу 1.5.

4. Кумулята частот та кумулята відносних частот

Кумулятою частот дискретного статистичного ряду називається ламана, вершинами якої є точки (x_i; $m_i^{нак}$), де i = 1; 2; …; k (рис. 1.6).

Кумулятою відносних частот дискретного статистичного ряду називається ламана, вершинами якої є точки $(x_i;\ w_i^{нак})$, де $i = 1; 2; \ldots; k$ (рис. 1.7).

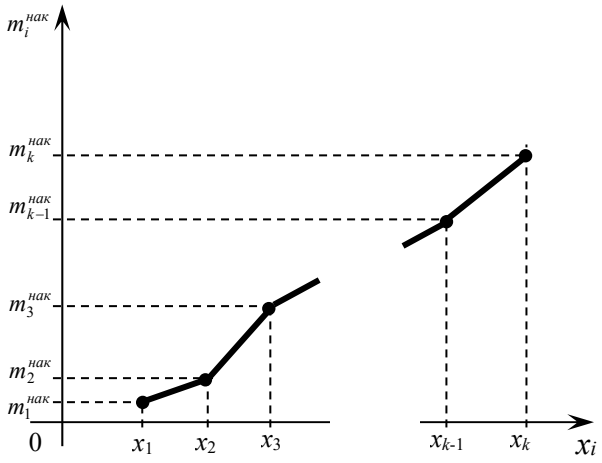


Рисунок 1.6

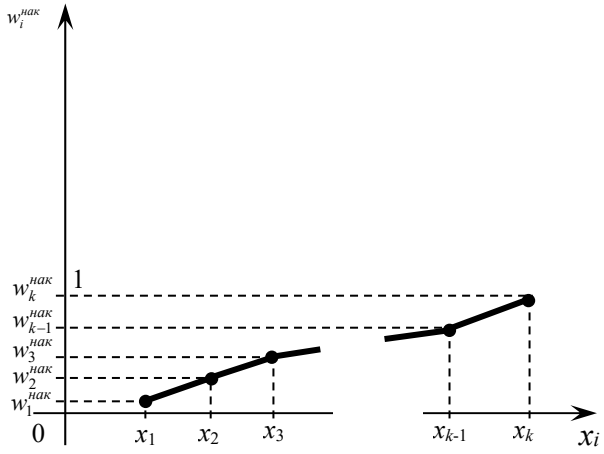


Рисунок 1.7

Кумулятою частот інтервального статистичного ряду називається ламана, вершинами якої є точки $(\alpha_{i+1}; m_i^{нак})$, де $i = 1; 2; \ldots; k$ (рис. 1.8).

Кумулятою відносних частот інтервального статистичного ряду називається ламана, вершинами якої є точки $(\alpha_{i+1}; w_i^{нак})$, де $i = 1; 2; \ldots; k$ (рис. 1.9).

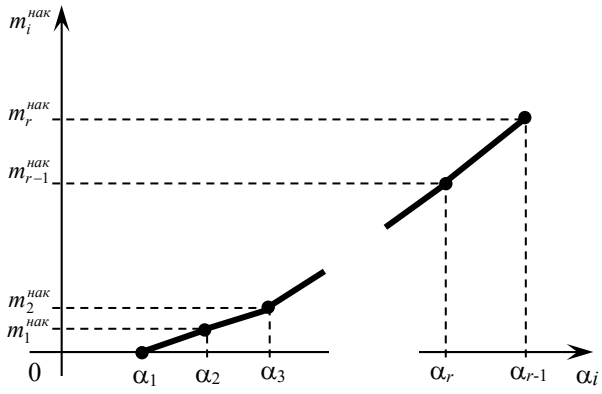


Рисунок 1.8

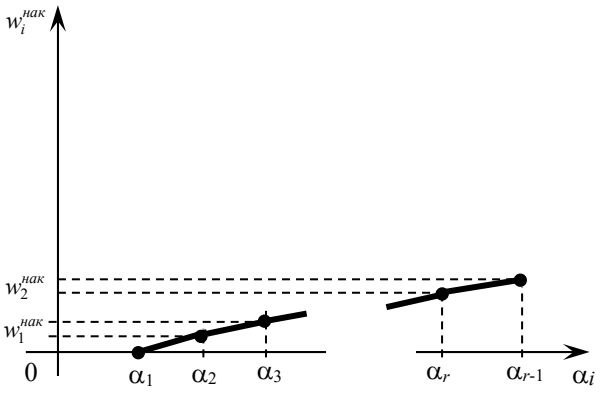


Рисунок 1.9

ЗАУВАЖЕННЯ. Для інтервальних рядів першою точкою кутуляти є лівий кінець першого інтервалу, тобто точка $(\alpha_1; 0)$.

Приклад 1.6. По заданому дискретному статистичному ряду побудувати кумуляту частот та кумуляту відносних частот:

Таблиця 1

x_i	0	2	4	6	9	12	15
m_i	6	12	15	12	6	3	6

$$\sum m_i = 60$$

Р о з в ’ я з а н н я

Кумулята частот заданого дискретного статистичного ряду це ламана з вершинами у точках $M_i(x_i;\ m_i^{нак})$. Тому необхідно побудувати допоміжний статистичний ряд з накопиченими частотами

Таблиця 2

x_i	0	2	4	6	9	12	15
$m_i^{нак}$	6	18	33	45	51	54	60

Отже, маємо побудувати ламану з вершинами у точках $M_1(0;\ 6)$, $M_2(2;\ 18)$, $M_3(4;\ 33)$, $M_4(6;\ 45)$, $M_5(9;\ 51)$, $M_6(12;\ 54)$, $M_7(15;\ 60)$ (рис. а) до прикладу 1.6).

Кумулятою відносних частот дискретного статистичного ряду є ламана з вершинами у точках $M_i(x_i;\ w_i^{нак})$. Кумулята відносних частот зображена на рис. а) до прикладу 1.6. Тому необхідно побудувати допоміжні статистичні ряди з відносними частотами та з накопиченими відносними частотами.

Таблиця 3

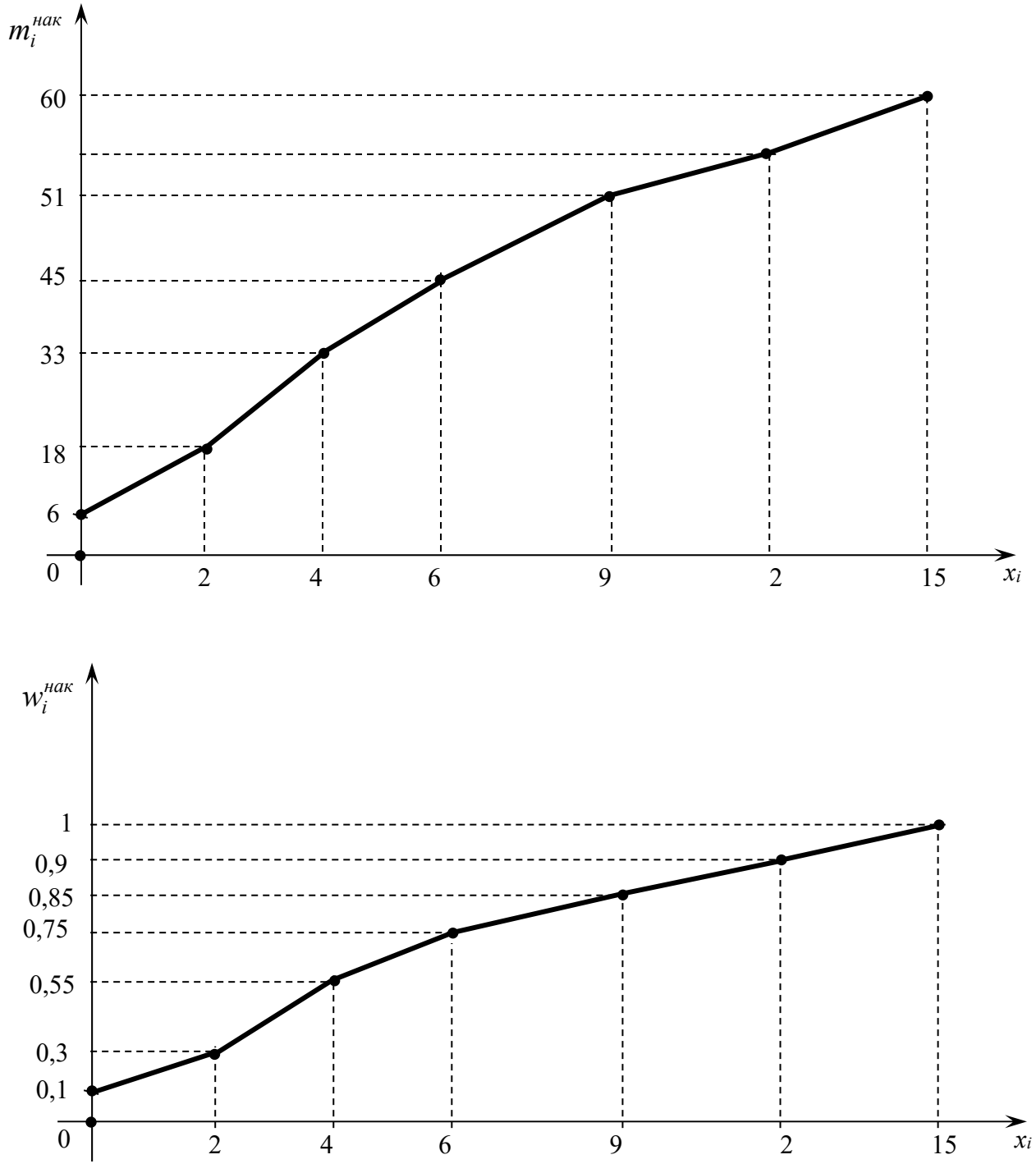
x_i	0	2	4	6	9	12	15
w_i	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1	0,05	0,1

$$\sum w_i = 1$$

Таблиця 4

x_i	0	2	4	6	9	12	15
$w_i^{нак}$	0,1	0,3	0,55	0,75	0,85	0,9	1

Кумулята відносних частот заданого дискретного статистичного ряду є ламана з вершинами у точках $M_1(0;\ 0{,}1)$, $M_2(2;\ 0{,}3)$, $M_3(4;\ 0{,}55)$, $M_4(6;\ 0{,}75)$, $M_5(9;\ 0{,}85)$, $M_6(12;\ 0{,}9)$, $M_7(15;\ 1)$ (рис. б) до прикладу 1.6).



а)

б)

Рисунок до прикладу 1.6

В і д п о в і д ь : рис. до прикладу 1.6.

Приклад 1.7. По заданому інтервальному статистичному ряду побудувати кумуляту частот та кумуляту відносних частот:

Таблиця 1

I	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
m_i	3	12	6	6	3

$$\sum m_i = 30$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для інтервального статистичного ряду кумулятою частот є ламана з вершинами у точках $(\alpha_{i+1}; m_i^{нак})$. При цьому першою точкою кутуляти є точка $M_0(\alpha_1; 0)$. Отже, для заданого ряду вершинами ламаної є точки M_0(–4; 0), M_1(–2; 3),

M_2(0; 15), M_3(2; 21), M_4(4; 27), M_5(6; 30) (рис. а) до прикладу 1.7).

Для побудови кутуляти відносних частот побудуємо допоміжні ряди.

Таблиця 2

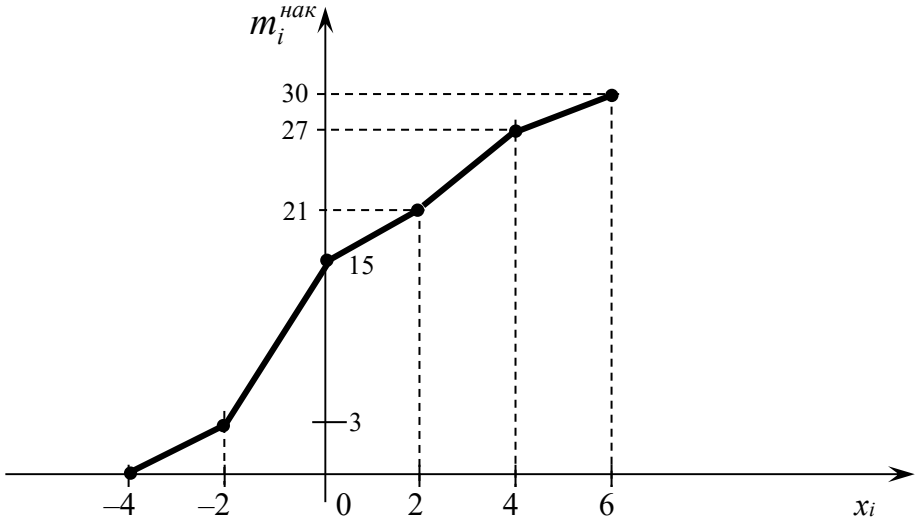
I	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
w_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

$$\sum w_i = 1$$

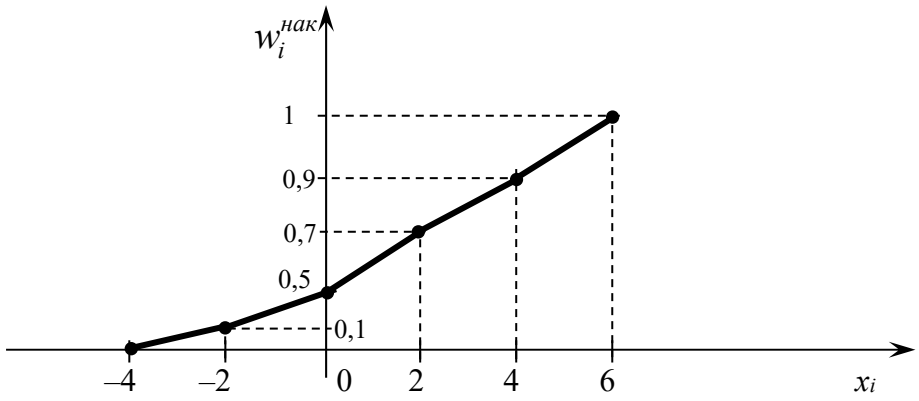
Таблиця 3

I	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
$w_i^{нак}$	0,1	0,5	0,7	0,9	1

Для заданого інтервального ряду вершинами ламаної є точки M_0(–4; 0), M_1(–2; 0,5), M_2(0; 0,5), M_3(2; 0,7), M_4(4; 0,9), M_5(6; 1) (рис. б) до прикладу 1.7).



а)



б)

Рисунок до прикладу 1.7

В і д п о в і д ь : рис. до прикладу 1.7.

1.5 Числові характеристики статистичного ряду розподілу

1.5.1 Вибіркові середні статистичного ряду розподілу

Вибіркову сукупність доцільно характеризувати за допомогою деяких усереднених значень її варіант у статистичному ряді розподілу.

Якщо статистичний ряд є простим, то усереднені характеристики називаються простими середніми.

Якщо ж статистичний ряд є таким, де частоти варіант є будь-якими числами m_1, m_2, …, m_k, а $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, де n – об'єм вибіркової сукупності, то усереднені характеристики називаються зваженими середніми.

Прості середні є частинним випадком зважених середніх, отже надалі будемо розглядати зважені середні.

Розглянемо типи середніх величин вибіркової сукупності.

1. Вибіркова середня арифметична.

Вибірковою середньою арифметичною називається величина, яка визначається формулою

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

або

$$\overline{x_в} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i m_i}{n}, \tag{1.9}$$

де m_i – частота варіанти x_i ($i = 1; 2; \ldots; k$), а $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Середня вибіркова $\overline{x_в}$ є статистичним аналогом математичного сподівання $M[x]$ теоретичної випадкової величини X, тому $\overline{x_в}$ інколи називають статистичним математичним сподіванням.

Розглянемо властивості величини $\overline{x_в}$.

1) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності $\overline{x_в}$ дорівнюють сталій c, то

$$\overline{x_в} = c .$$

2) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності $\overline{x_в}$ помножити або поділити на сталу c, то

$$\overline{(cx_в)} = c\overline{x_в} \tag{1.10}$$

та

$$\overline{\left(\frac{x_в}{c}\right)} = \frac{\overline{x_в}}{c}, \text{ якщо } c \neq 0 . \tag{1.11}$$

3) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності $\overline{x_в}$ збільшити або зменшити на сталу *c*, то

$$\overline{(x_в + c)} = \overline{x_в} + c \tag{1.12}$$

та

$$\overline{(x_в - c)} = \overline{x_в} - c\,. \tag{1.13}$$

4) Середня арифметична суми або різниці двох вибіркових сукупностей $\overline{x_в}$ та $\overline{y_в}$ дорівнює сумі або різниці середніх цих вибіркових сукупностей, тобто

$$\overline{(x_в + y_в)} = \overline{x_в} + \overline{y_в} \tag{1.14}$$

та

$$\overline{(x_в - y_в)} = \overline{x_в} - \overline{y_в} \tag{1.15}$$

5) Середня арифметична суми відхилень варіант x_i статистичного ряду від середньої арифметичної $\overline{x_в}$ цього ряду дорівнює нулю, тобто для простих середніх

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x_в})}{n} = 0 \tag{1.16}$$

та для зважених середніх

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \overline{x_в})m_i}{n} = 0\,. \tag{1.17}$$

2. Вибіркова середня степенева

Вибірковою середньою степеневою називається величина, яка визначається формулою

$$\overline{x_\alpha} = \left(\frac{x_1^\alpha m_1 + x_2^\alpha m_2 + \ldots + x_k^\alpha m_k}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.18}$$

де *n* – об’єм вибіркової сукупності

або

$$\overline{x_\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^\alpha m_i}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.19}$$

де *n* – об’єм вибіркової сукупності.

Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то маємо середню арифметичну $\overline{x_1} = \overline{x_в}$.

Якщо $\alpha = 2$, то маємо квадратичну середню вибіркову

$$\overline{x_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2 m_i}{n}}, \tag{1.20}$$

де n – об'єм вибіркової сукупності.

Якщо $\alpha = -1$, то маємо вибіркову середню гармонічну $\overline{x_{-1}}$.

$$\overline{x_{-1}} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^{-1} m_i}{n} \right)^{-1} \tag{1.21}$$

або

$$\overline{x_{-1}} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{x_i n} \right)^{-1}, \tag{1.22}$$

де n – об'єм вибіркової сукупності.

Можна також користуватися формулою

$$\overline{x_{-1}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{x_i}}. \tag{1.23}$$

Середня гармонічна використовується у випадках коли дослідженню підлягають величини, обернені до варіант. Середня гармонічна характеризується тим, що незмінною залишається сума величин, обернених до варіант.

3. Вибірковою середньою геометричною називається величина, яка визначається формулою

$$\overline{x_{геом}} = \left(x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.24}$$

або

$$\overline{x_{геом}} = \left(\prod_{i=1}^{l} x_i^{m_i} \right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.25}$$

де n – об'єм вибіркової сукупності.

Середня геометрична характеризується тим, що добуток варіант залишається незмінним.

Усі розглянуті середні у той чи інший спосіб характеризують варіанти. Такі середні називаються аналітичними.

Наведені формули для обчислювання аналітичних середніх розраховані на дискретні статистичні ряди.

Для того, щоб знайти аналогічні величини для інтервальних статистичних рядів належить від інтервального статистичного ряду перейти до дискретного.

1.5.2 Мода та медіана статистичного ряду розподілу

Нарівні із аналітичними середніми розглядаються також такі середні, які характеризують розміщення частот уздовж статистичного ряду. Такі середні називаються структурними. До структурних середніх належать емпіричні мода та медіана.

Модою $M_{\text{о}}^{*}$ дискретного статистичного ряду називається та з варіант статистичного ряду, яка має найбільшу частоту.

Мода інтервального статистичного ряду визначається за однією з формул:

$$M_{\text{о}}^{*} = x_{M_{\text{о}}^{*}}^{\text{л}} + \frac{w_{M_{\text{о}}^{*}} - w_{M_{\text{о}}^{*}-1}}{(w_{M_{\text{о}}^{*}} - w_{M_{\text{о}}^{*}-1}) + (w_{M_{\text{о}}^{*}} - w_{M_{\text{о}}^{*}+1})} \cdot h, \qquad (1.26)$$

де $x_{M_{\text{о}}^{*}}^{\text{л}}$ – лівосторонній кінець інтервала з найбільшою частотою;

$w_{M_{\text{о}}^{*}}$ – відносна частота інтервала з найбільшою частотою;

$w_{M_{\text{о}}^{*}-1}$ – відносна частота інтервала, який передує інтервалу з найбільшою частотою;

$w_{M_{\text{о}}^{*}+1}$ – відносна частота інтервала, який слідує за інтервалом з найбільшою частотою.

$$M_{\text{о}}^{*} = x_{M_{\text{о}}^{*}}^{\text{л}} + \frac{m_{M_{\text{о}}^{*}} - m_{M_{\text{о}}^{*}-1}}{(m_{M_{\text{о}}^{*}} - m_{M_{\text{о}}^{*}-1}) + (m_{M_{\text{о}}^{*}} - m_{M_{\text{о}}^{*}+1})} \cdot h, \qquad (1.27)$$

де $x^{л}_{M^*_o}$ – лівосторонній кінець інтервала з найбільшою частотою;

$m_{M^*_o}$ – частота інтервала з найбільшою частотою;

$m_{M^*_o-1}$ – частота інтервала, який передує інтервалу з найбільшою частотою;

$w_{M^*_o+1}$ – частота інтервала, який слідує за інтервалом з найбільшою частотою.

Інколи використовують наближену формулу

$$M^*_o = \frac{x^{л}_{M^*_o} m_{M^*_o-1} + x^{п}_{M^*_o} m_{M^*_o+1}}{m_{M^*_o-1} + m_{M^*_o+1}}, \qquad (1.28)$$

де $x^{л}_{M^*_o}$ та $x^{п}_{M^*_o}$ – відповідно лівосторонній та правосторонній кінці інтервала з найбільшою частотою;

$m_{M^*_o-1}$ та $m_{M^*_o+1}$ – відповідно частоти інтервалів, один з яких передує, а другій слідує за інтервалом з найбільшою частотою.

Для інтервальних статистичних рядів наближене значення моди можна знаходити і геометрично за допомогою гістограми у такий спосіб: точку *A* з'єднуємо з точкою *C*, а точку *B* з точкою *D* (рис. 1.10). З точки перетину побудованих ліній проводимо перпендикуляр до вісі *OX*. Основа цього перпендикуляра і визначає моду M^*_o.

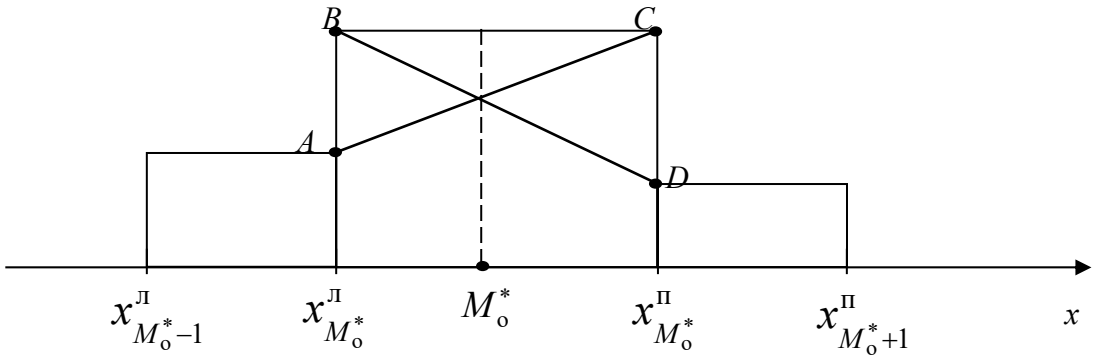


Рисунок 1.10

Варіанти, які знаходяться на початку або наприкінці статистичного ряду у разі їх змінення суттєво впливають на моду.

Мода є важливою характеристикою статистичного розподілу у тих випадках, коли є суттєвою інформація про те, яка х варіант зустрічається найчастіше.

Медіаною $M_{\text{е}}^*$ дискретного статистичного ряду з непарною кількістю варіант $2j+1$ є варіанта x_{j+1}, яка є серединою цього статистичного ряду, тобто

$$M_{\text{е}}^* = x_{j+1}. \qquad (1.29, \text{а})$$

Медіаною $M_{\text{е}}^*$ дискретного статистичного ряду з парною кількістю варіант $2j$ є число, яке визначається формулою

$$M_{\text{е}}^* = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}. \qquad (1.29, \text{б})$$

Розглянемо як знаходиться медіана інтервального статистичного ряду. Інтервал, який утримує медіану, має задовольняти такі умови:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{j} m_i < 0{,}5n; \\ \sum\limits_{i=1}^{j+1} m_i > 0{,}5n. \end{cases} \qquad (1.30)$$

Тоді медіана $M_{\text{е}}^*$ визначається формулою

$$M_{\text{е}}^* = x_{j+1}^{\text{л}} + \frac{0{,}5n - \sum\limits_{i=1}^{j} m_i}{m_{j+1}} \cdot h, \qquad (1.31)$$

де $x_{j+1}^{\text{л}}$ – лівосторонній кінець інтервала, який утримує медіану;

m_{j+1} – частота інтервала, що утримує медіану;

$\sum\limits_{i=1}^{j} m_i$ – сума частот інтервалів, які передують медіанному інтервалу;

n – об’єм вибіркової сукупності.

Наближене значення медіани може бути знайдено графічно за допомогою кумуляти. На графіку кутуляти частот медіані відповідає точка *x* з ординатою

$m_x^{нак} = 0{,}5n$. На графіку кутуляти відносних частот медіані відповідає точка x з ординатою $w_x^{нак} = 0{,}5$.

Основна властивість медіани дискретного статистичного ряду полягає у тому, що сума модулів відхилень варіант x_i від медіани менше від відповідних відхилень від будь-якої іншої точки x, тобто

$$\sum_{i=1}^{k} \left| x_i - M_e^* \right| < \sum_{i=1}^{k} \left| x_i - x \right|. \qquad (1.32)$$

Медіана характеризує поведінку середньої частини статистичного ряду, а варіанти, які знаходяться на початку та наприкінці статистичного ряду на медіану не впливають.

1.6 Показники варіації статистичного ряду розподілу

1.6.1 Поняття про показники варіації

Розглянуті у п. 1.5.1 типи середніх величин є важливою характеристикою статистичного ряду.

Приміром, середня арифметична вибіркової сукупності – це така точка навколо якої розміщуються інші варіанти статистичного ряду розподілу.

Але такої інформації замало. Необхідно ще знайти на якій відстані від своєї середньої арифметичної розміщені інші варіанти.

На такі та аналогічні запитання відповідають так звані показники розсіювання.

Розглянемо, якими бувають показники розсіювання.

1.6.2 Розмах варіації статистичного ряду розподілу

Розмах варіації $R_в$ – це величина, яка визначається формулою

$$R_в = x_{\max} - x_{\min},$$

де $x_{\min}$ та $x_{\max}$ – це відповідно найменша та найбільша варіанти статистичного ряду.

Розмах варіації не є достатньо об’єктивною характеристикою, тому що навіть одна варіанта може привести до зміни $R_{\text{в}}$.

1.6.3 Середнє лінійне відхилення статистичного ряду розподілу

Середнім лінійним або абсолютним відхиленням статистичного ряду розподілу називається величина $d_{\text{в}}$, яка визначається формулою

$$d_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left| x_i - \overline{x_{\text{e}}} \right| \cdot m_i}{n}. \tag{1.33}$$

Це достатньо об’єктивна характеристика розсіювання окремих варіант навколо середньої арифметичної, вона є достатньо об’єктивним показником, але обчислювання величини $d_{\text{в}}$ ускладняється у зв’язку з тим, що формула утримує модулі.

1.6.4 Дисперсія статистичного ряду розподілу

Дисперсією $D_{\text{в}}$ статистичного ряду розподілу називається середня арифметична квадратів відхилень варіант статистичного ряду розподілу від середньої арифметичної $\overline{x_{\text{в}}}$ статистичного ряду розподілу.

Дисперсія визначається формулою

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2 \cdot m_i}{n} \tag{1.34}$$

або формулою

$$D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2 \cdot w_i \,. \tag{1.35}$$

Можна показати, що з цих формул виходить і така формула

$$D_{\text{в}} = \overline{x_{\text{в}}^2} - (\overline{x_{\text{в}}})^2 \,. \tag{1.36}$$

Дисперсія $D_{\text{в}}$ називається емпіричною або вибірковою дисперсією.

Дисперсія $D_{\text{в}}$ вибіркової сукупності є аналогом дисперсії $D[X]$ теоретичної випадкової величини X.

ЗАУВАЖЕННЯ. Дисперсія $D_{\text{в}}$ вимірюється в одиницях квадратних по відношенню до варіант.

Властивості вибіркової дисперсії $D_{\text{в}}$ аналогічні властивостям дисперсії $D[X]$ теоретичної випадкової величини.

Розглянемо властивості $D_{\text{в}}$.

1) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності дорівнюють сталій c, то

$$D_{\text{в}}(c) = 0. \tag{1.37}$$

2) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності помножити або поділити на сталу c, то

$$D_{\text{в}}(cX) = c^2 D_{\text{в}}(X). \tag{1.38}$$

та

$$D_{\text{в}}\left(\frac{X}{c}\right) = \frac{D_{\text{в}}(X)}{c^2}, \tag{1.39}$$

де $c \neq 0$.

3) Якщо усі варіанти вибіркової сукупності збільшити або зменшити на сталу c, то

$$D_{\text{в}}(X + c) = D(X) \tag{1.40}$$

та

$$D_{\text{в}}(X - c) = D(X). \tag{1.41}$$

4) Дисперсія $D_{\text{в}}(X \pm Y)$ суми або різниці двох вибіркових сукупностей дорівнює сумі дисперсій цих сукупностей, тобто

$$D_{\text{в}}(X + Y) = D_{\text{в}}(X) + D_{\text{в}}(Y), \tag{1.42}$$

$$D_{\text{в}}(X - Y) = D_{\text{в}}(X) + D_{\text{в}}(Y). \tag{1.43}$$

5) Припустимо, що вибіркова сукупність X складається з s груп: X_1; X_2; …; X_s, об’єми яких відповідно дорівнюють $n_1; n_2; ...; n_s$. При цьому

$n_1 + n_2 + ... + n_s = n$, де n – об'єм усієї вибіркової сукупності. Для кожної з груп X_1; X_2; …; X_s можна знайти їхні середні арифметичні $\overline{x_{в1}}; \overline{x_{в2}}; ...; \overline{x_{вs}}$, які називаються груповими середніми арифметичними.

Загальною середньою $\overline{x_{вз}}$ у такому випадку називається середнє арифметичне групових середніх, тобто

$$\overline{x_{вз}} = \frac{\overline{x_{в1}} n_1 + \overline{x_{в2}} n_2 + ... + \overline{x_{вs}} n_s}{n}.$$

Для кожної групи знаходяться групові дисперсії $D_{в1}, D_{в2}, ..., D_{в5}$ за формулою

$$D_{вj} = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(x_i - \overline{x_{вj}})^2}{n_j}. \quad (1.44)$$

Внутрішньогруповою дисперсією називається дисперсія $D_{внтргр}$, яка є середньоарифметичною групових дисперсій та визначається формулою

$$D_{внтргр} = \frac{\sum_{i=1}^{s} D_{вi} \cdot n_i}{n}. \quad (1.45)$$

Міжгруповою дисперсією називається дисперсія групових середніх $\overline{x_{в1}}; \overline{x_{в2}}; ...; \overline{x_{вs}}$ відносно вибіркової середньої $\overline{x_в}$ для усієї вибіркової сукупності

$$D_{мгр} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (\overline{x_{вi}} - \overline{x_{вз}})^2 \cdot n_i}{n}, \quad (1.46)$$

де $\overline{x_{вi}}$ – вибіркова середня для і-ї групи; $\overline{x_{вз}}$ – загальна вибіркова середня усієї вибіркової сукупності; n_i – об'єм і-ї групи, n – об'єм усієї вибіркової сукупності.

Загальною дисперсією $D_{заг}$ називають дисперсією усієї вибіркової сукупності відносно загальної середньої $\overline{x_{вз}}$. Загальна дисперсія знаходиться за формулою

$$D_{\text{заг}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{вз}})^2 \cdot m_i}{n}. \quad (1.47)$$

Неважко помітити, що

$$D_{\text{заг}} = D_{\text{внутргр}} + D_{\text{мгр}}. \quad (1.48)$$

4. Середньоквадратичне відхилення статистичного ряду розподілу.

Середньоквадратичним відхиленням статистичного ряду розподілу називається величина $\sigma_в$, яка визначається формулою

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \quad (1.49)$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$ статистичного ряду розподілу дає ту саму інформацію, що і дисперсія $D_в$, але $\sigma_в$ на відміну від $D_в$ вимірюється у тих же одиницях, що і варіанти статистичного ряду розподілу.

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$ емпіричної випадкової величини є аналогом середньоквадратичного відхилення $\sigma[X]$ вторинної випадкової величини.

1.6.5 Емпіричні початкові та центральні моменти статистичного ряду розподілу

Емпіричним початковим моментом *j*-го порядку статистичного ряду називається величина, яка визначається формулою

$$\nu_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^j \cdot m_i}{n} \quad (1.50)$$

або

$$\nu_j^* = \sum_{i=1}^{k} x_i^j \cdot w_i. \quad (1.51)$$

Емпіричним центральним моментом *j*-го порядку статистичного ряду називається величина, яка визначається формулою

$$\mu_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^j \cdot m_i}{n} \tag{1.52}$$

або

$$\mu_j^* = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^j \cdot w_i \,. \tag{1.53}$$

Початковий та центральний емпіричні моменти є аналогом початкового та центрального теоретичних моментів.

Не важко помітити, що

$$\nu_1^* = \overline{x_в}\,,$$

$$\mu_1^* = 0\,,$$

$$\mu_2^* = D_в\,.$$

Наведемо властивості емпіричних початкових та центральних моментів.

1) Якщо усі варіанти статистичного ряду розподілу збільшити або зменшити на величину *c*, то центральний момент μ_j^* при цьому не зміниться, тобто

$$\mu_j^*(x + c) = \mu_j^*(x) \tag{1.54}$$

та

$$\mu_j^*(x - c) = \mu_j^*(x)\,. \tag{1.55}$$

2) Якщо усі варіанти статистичного ряду розподілу помножити на величину *c*, то справедливими є формули

$$\nu_j^*(cx) = c^j\ \nu_j^*(x) \tag{1.56}$$

та

$$\mu_j^*(cx) = c^j \mu_j^*(x)\,. \tag{1.57}$$

Початкові та центральні емпіричні моменти дозволяють більш точно ніж середня вибіркова $\overline{x_в}$ та вибіркова дисперсія $D_в$ з'ясувати деякі особливості розподілу статистичного ряду.

1.6.6 Емпіричні асиметрія та ексцес статистичного ряду розподілу

Якщо попередні дослідження вибіркової сукупності дозволяють зробити припущення, що статистична випадкова величина, можливо, розподілена за нормальним законом, або встановити наскільки відрізняються теоретичний розподіл від статистичного можна за допомогою таких показників варіації як асиметрія та ексцес.

1) Асиметрією емпіричного розподілу називається така характеристика a_s^*, яка визначається формулою

$$a_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}. \tag{1.58}$$

Чим менше асиметрія, тим менше відрізняються теоретичний та емпіричний розподіли.

Графік нормальної кривої теоретичного розподілу є симетричним відносно своєї моди M_o, тобто відносно прямої $x = M_o$. Якщо графік емпіричної кривої є симетричним відносно моди, тобто прямої $x = M_o$, то $a_s^* = 0$.

Якщо графік емпіричної кривої не є симетричним відносно прямої $x = M_o$, то $a_s^* \neq 0$. При цьому, якщо $a_s^* > 0$, то графік емпіричної кривої має форму, зображену на рис. 1.11, а якщо $a_s^* < 0$, то графік емпіричної кривої має форму, зображену на рис. 1.12.

Ексцесом емпіричного розподілу називається така характеристика e_k^*, яка визначається формулою

$$e_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3. \tag{1.59}$$

За допомогою ексцеса e_k^* можна дізнатись наскільки вище або нижче емпірична нормальна крива по відношенню до теоретичної нормальної кривої.

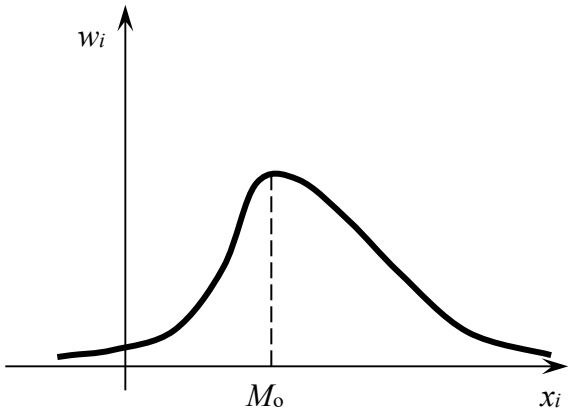


Рисунок 1.11

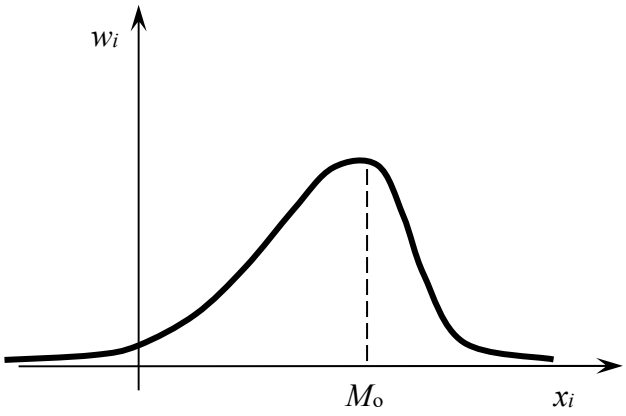


Рисунок 1.12

Для теоретичного нормального розподілу $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, тобто ексцес дорівнює нулю. Якщо $e_k > 0$, то емпірична крива має більш високу та загострену вершину (рис. 1.13) у порівнянні з теоретичною нормальною кривою, а якщо $e_k < 0$, то емпірична крива має більш низьку та більш пологу вершину у порівнянні з теоретичною нормальною кривою (рис. 1.14).

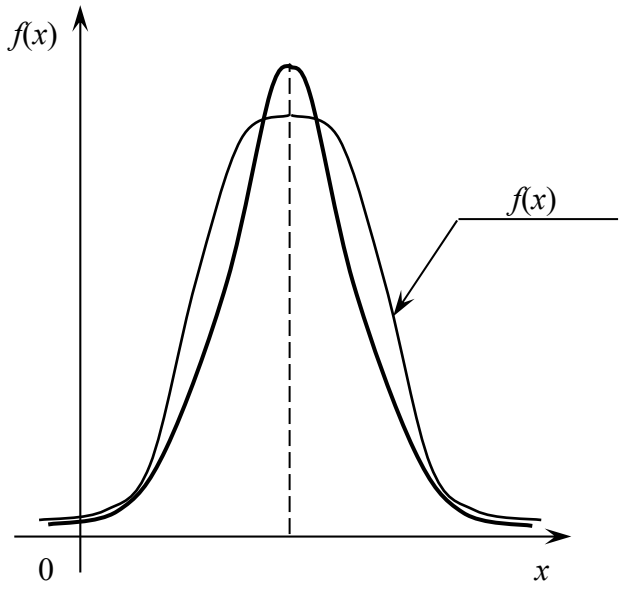


Рисунок 1.13

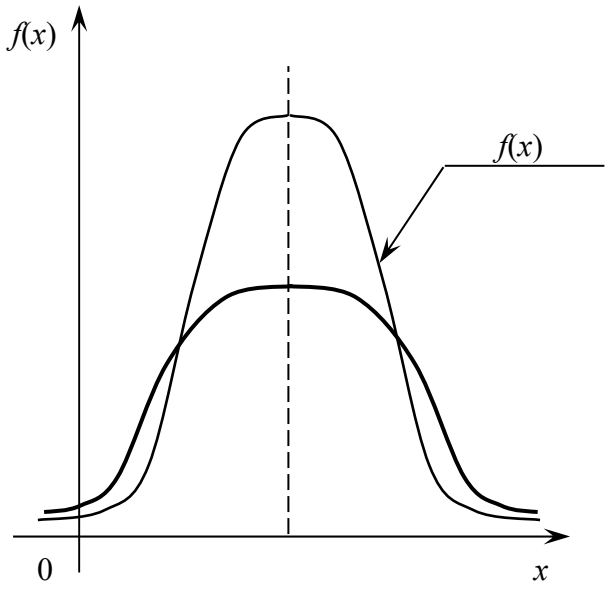


Рисунок 1.14

Приклад 1.8. По заданому статистичному ряду розподілу вибіркової сукупності знайти її числові характеристики:

1) вибіркову середню арифметичну $\overline{x_в}$;

2) вибіркову дисперсію $D_в$;

3) вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$;

4) емпіричні початкові та центральні моменти 1 – 4 порядків.

Таблиця 1

x_i	10	5	20	25	30
m_i	6	16	50	24	4

$\sum m_i = 100$

Розрахунки виконати з точністю до 0,0001.

Р о з в ' я з а н н я

1) По заданому ряду розподілу за формулою (1.9) знаходимо вибіркову середньоарифметичну $\overline{x_в}$.

$$\overline{x_в} = \frac{10 \cdot 6 + 15 \cdot 16 + 2 \cdot 50 + 25 \cdot 24 + 30 \cdot 4}{100} = 20{,}2\,.$$

2) Вибіркову дисперсію $D_в$ зручно знаходити за формулою (1.36). У зв'язку з цим необхідно знайти $\overline{x_в^2}$.

Таблиця 2

x_i^2	100	225	400	625	900
m_i	6	16	50	24	4

$\sum m_i = 100$

$$\overline{x_в^2} = \frac{100 \cdot 6 + 225 \cdot 16 + 400 \cdot 50 + 625 \cdot 24 + 900 \cdot 4}{100} = 428\,.$$

Тоді

$D_в = 428 - (20{,}2)^2 = 19{,}96.$

3) Вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_{в}$ знаходимо за формулою (1.49):

$$\sigma_{в} = \sqrt{19{,}96} = 4{,}4677.$$

4) Емпіричні початкові та центральні моменти ν_j^* та μ_j^* знаходимо відповідно за формулами (1.50) та (1.52).

$$\nu_1^* = \overline{x_в} = 20{,}2;$$

$$\nu_2^* = \overline{x_в^2} = 428;$$

$$\nu_3^* = \frac{1000 \cdot 6 + 3375 \cdot 16 + 8000 \cdot 50 + 15625 \cdot 24 + 27000 \cdot 4}{100} = 9430;$$

$$\nu_4^* = \frac{10000 \cdot 6 + 50625 \cdot 16 + 160000 \cdot 50 + 390625 \cdot 24 + 810000 \cdot 4}{100} = 214850;$$

$$\mu_1^* = \frac{(10 - 20{,}2) \cdot 6 + (15 - 20{,}2) \cdot 16 + (20 - 20{,}2) \cdot 50 + (25 - 20{,}2) \cdot 24 + (330 - 20{,}2) \cdot 4}{100} =$$

$$= \frac{-10{,}2 \cdot 6 - 5{,}2 \cdot 16 - 0{,}2 \cdot 50 + 4{,}8 \cdot 24 + 9{,}8 \cdot 4}{100} = 0.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Для знаходження μ_1^* можна було скористатись формулою (1.17), оскільки момент μ_1^* збігається з відхиленням вибіркової сукупності від середньої арифметичної $\overline{x_{в}}$.

$$\mu_2^* = D_{в} = 19{,}96;$$

$$\mu_3^* = \frac{-1061{,}208 \cdot 6 - 140{,}608 \cdot 16 - 0{,}008 \cdot 50 + 110{,}592 \cdot 24 + 941{,}192 \cdot 4}{100} = -21{,}984.$$

$$\mu_4^* = \frac{1824{,}3216 \cdot 6 + 731{,}1616 \cdot 16 + 0{,}0016 \cdot 50 + 530{,}8416 \cdot 24 + 9223{,}6816 \cdot 4}{100} =$$

$$= 1262{,}7952.$$

Відповідь: 1) $\overline{x_{в}} = 20{,}2$; 2) $D_{в} = 19{,}96$; 3) $\sigma_{в} = 4{,}4677$; 4) $\nu_1^* = 20{,}2$; $\nu_2^* = 428$; $\nu_3^* = 9430$; $\nu_4^* = 214850$; $\mu_1^* = 0$; $\mu_2^* = 19{,}96$; $\mu_3^* = -21{,}984$; $\mu_4^* = 1262{,}7952$.

1.7 Спрощені методи розрахунку числових характеристик вибіркової сукупності

1.7.1 Умовні варіанти

Числові характеристики, зазначені у п.1.5 для будь-якого дискретного статистичного ряду розподілу можуть бути обчислені безпосередньо за відповідними формулами.

Якщо статистичний ряд розподілу є інтервальним, то його можна перевести у дискретний та знайти відповідні числові характеристики.

У тих випадках, коли кількість варіант є достатньо великою, або коли варіанти – це дробові чи великі числа, що приводить до громіздких обчислювань, користуються спрощеними методами обчислювання числових характеристик.

Нехай маємо дискретний статистичний ряд з рівновіддаленими варіантами, відстань між якими дорівнює h:

Таблиця 1

x_i	x_1	x_1+h	x_1+2h	x_1+3h	…	x_1+lh	…	$x_1+(k-1)h$
m_r	m_1	m_2	m_3	m_4	…	m_{l+1}	…	m_k

З тієї чи іншої причини замість варіант x_i вводимо умовні варіанти u_i, такі, що

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},\ (i = 1; 2; ...; k), \tag{1.60}$$

де c – будь-яка стала.

У такому разі отримаємо замість варіант x_i умовні варіанти, які виражаються цілими числами.

У якості c доцільно взяти значення, яке збігається з якоюсь варіантною всередині статистичного ряду. Якщо можливо, то це має бути варіанта з найбільшою частотою, приміром x_l.

Тоді цій варіанті x_l відповідає значення умовної варіанти $u_l = 0$, а стала c при цьому називається хибним нулем.

Отже, замість варіант

$$x_1; x_2; x_3; \ldots ; x_{l-2}; x_{l-1}; x_l; x_{l+1}; x_{l+2}; \ldots; x_{k-l}$$

дістанемо умовні варіанти

$$-(l-1); -(l-2); \ldots ; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots; k-l.$$

1.7.2 Умовні емпіричні моменти

Умовним емпіричним моментом порядку j називається початковий момент порядку j, обчислений відносно умовних варіант:

$$M_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^j}{n} \tag{1.61}$$

або

$$M_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right)^j}{n}. \tag{1.62}$$

Зокрема,

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}{n}$$

або

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right)}{n}.$$

Тоді

$$M_1^* = \frac{1}{h}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i x_i}{n} - c \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{n} \right) = \frac{1}{h}\left(\overline{x_в} - c \right),$$

звідки

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c. \tag{1.63}$$

Наведемо формули, які встановлюють зв'язок між умовними емпіричними моментами, початковими та центральними емпіричними моментами.

$$\nu_1^* = M_1^* h + c; \tag{1.64}$$

$$\mu_1^* = 0; \tag{1.65}$$

$$\nu_2^* = M_2^* h^2 + 2M_1^* hc + c^2; \tag{1.66}$$

$$\mu_2^* = (M_2^* - (M_1^*)^2)h^2; \tag{1.67}$$

$$\nu_3^* = M_3^* h^3 + 3M_2^* h^2 c + 3M_1^* hc^2 + c^3; \tag{1.68}$$

$$\mu_3^* = (M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3)h^3; \tag{1.69}$$

$$\nu_4^* = M_4^* h^4 + 4M_4^* h^3 c + 6M_2^* h^2 c^2 + 4M_1^* hc^3 + c^4; \tag{1.70}$$

$$\mu_4^* = (M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4)h^4. \tag{1.71}$$

1.7.3 Метод добутків для знаходження числових характеристик вибіркової сукупності

Метод добутків застосовується до дискретних статистичних рядів з рівновіддаленими варіантами.

Якщо статистичний ряд розподілу є інтервальним з рівновеликими інтервалами, то цей ряд переводять у дискретний ряд в якому варіантами є середини інтревала. Така операція дозволяє знаходити числові характеристики методом добутків.

Якщо у дискретному статистичному ряді варіанти не є рівновіддаленими, то його переводять в інтервальний ряд, а потім у дискретний ряд з рівновіддаленими варіантами.

Основою методу добутків є розрахункова таблиця.

В перший стовпчик таблиці записують варіанти x_i дискретного ряду.

В другий стовпчик записують відповідні частоти m_i.

В третій стовпчик записують умовні варіанти u_i.

Для цього в таблиці знаходять варіанту з найбільшою частотою або будь-яку іншу варіанту, якщо вона розміщена у центральній частині таблиці. Така варіанта позначається через C і називається «хибний нуль». Умовні варіанти u_i знаходять за формулою (1.60)

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},$$

де $i = 1; 2; ...; k$.

Внаслідок переходу до умовних варіант замість варіант x_i, які виражаються будь-якими числами, подальші розрахунки будемо виконувати з цілими числами.

$$\ldots; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 4; \ldots,$$

що значно спрощує розрахунки.

В четвертий стовпчик записуються добутки $m_i u_i$.

В п'ятий стовпчик записують добуток $m_i u_i^2$.

В шостий стовпчик записують добутки $m_i (u_i + 1)^2$.

В сьомий стовпчик записують добутки $m_i u_i^3$.

В восьмий стовпчик записують добутки $m_i u_i^4$.

В дев'ятий стовпчик заносять добутки $m_i (u_i + 1)^4$.

Розрахункова таблиця має наступний вигляд:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	m_i	u_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i (u_i + 1)^2$	$m_i u_i^3$	$m_i u_i^4$	$m_i (u_i + 1)^4$
	$\sum_{i=1}^{k} m_i$		$\sum_{i=1}^{k} m_i u_i$	$\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2$	$\sum_{i=1}^{k} m_i (u_i + 1)^2$	$\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3$	$\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^4$	$\sum_{i=1}^{k} m_i (u_i + 1)^4$

Звідси $M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot u_i}{n}$; $M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot u_i^2}{n}$; $M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot u_i^3}{n}$; $M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot u_i^4}{n}$.

Якщо метод добутків використовується лише для того, щоб знайти $\overline{x_в}$, $D_в$ та $\sigma_в$, то достатньо обмежитись першими шістьма стовпчиками.

Перевірка розрахунків у цьому разі використовується за формулою:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + 2\sum_{i=1}^{k} m_i u_i + \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i (u_i + 1)^2 . \qquad (1.72)$$

Робочі формули:

Середня вибіркова визначається формулою (1.63)

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c$$

або

$$\overline{x_в} = \nu_1^* . \qquad (1.73)$$

Вибіркова дисперсія визначається формулою

$$D_в = \left(M_2^* - (M_1^*)\right)^2 h^2 \qquad (1.74)$$

або

$$D_в = \mu_2^* . \qquad (1.75)$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення визначається формулою (1.49)

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Якщо окрім $\overline{x_в}$, $D_в$ та $\sigma_в$ необхідно знайти ще емпіричні центральні моменти μ_3^*, μ_4^* або емпіричні асиметрію a_s^* та ексцес e_k^*, то використовуються усі дев'ять стовпчиків таблиці, а μ_3^* та μ_4^* знаходяться відповідно за формулами (1.69) та (1.71), асиметрія та ексцес знаходяться відповідно за формулами (1.58) та (1.59).

Перевірка розрахунків у цьому випадку виконується за формулою:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + 4\sum_{i=1}^{k} m_i u_i + 6\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 + 4\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3 + \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^4 = \sum_{i=1}^{k} m_i (u_i + 1)^4 . \qquad (1.76)$$

Приклад 1.9. По заданому статистичному ряду розподілу вибіркової сукупності методом добутків знайти її числові характеристики:

1) вибіркову середню арифметичну $\overline{x_в}$;

2) вибіркову дисперсію $D_в$;

3) вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$;

4) емпіричні початкові та центральні моменти 1-4 порядків.

Таблиця 1

x_i	10	15	20	25	30
m_i	6	16	50	24	4

$$\sum m_i = 100$$

Розрахунки виконати з точністю до 0,0001.

Р о з в ’ я з а н н я

Згідно з пунктом 1.6 складаємо таблицю розрахунків.

Таблиця 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	m_i	u_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i(u_i+1)^2$	$m_i u_i^3$	$m_i u_i^4$	$m_i(u_i+1)^4$
10	6	–2	–12	24	6	–48	96	6
15	16	–1	–16	16		–16	16	
20	50	0	–28		50	–64		50
25	24	1	24	24	96	24	24	384
30	4	2	8	16	36	32	64	324
			32			56		
	100		4	80	188	–8	200	764

ЗАУВАЖЕННЯ. Для зручності у 3 та 7 стовпчиках окремо знаходять суму від’ємних та додатних чисел. Суму від’ємних чисел розміщують у рядку, який утримує хибний нуль, а суму додатних чисел розміщують у додатковому нижньому рядку.

Зробимо перевірку розрахунків за формулами (1.72) та (1.76).

Маємо:

$100 + 2 \cdot 4 + 80 = 188,$

$188 = 188$

та

$100 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 80 + 4 \cdot (-8) + 200 = 764,$

$764 = 764.$

Отже, розрахунки зроблені правильно.

ЗАУВАЖЕННЯ. У випадку, коли достатньо знайти $\overline{x_в}$, $D_в$, $\sigma_в$ стовпчики 7, 8, 9 таблиці є зайвими, а перевірка розрахунків проводиться за формулою (1.72).

Користуючись формулами (1.61), (1.62) знаходимо умовні моменти 1 – 4 порядків

$$\mu_1^* = \frac{4}{100} = 0{,}04\,;\ \mu_2^* = \frac{8}{100} = 0{,}8\,;\ \mu_3^* = -\frac{8}{100} = -0{,}08\,;\ \mu_4^* = \frac{200}{100} = 2\,.$$

За формулами (1.63), (1.74), (1.49) маємо

1) $\overline{x_в} = 0{,}04 \cdot 5 + 20 = 20{,}2;$

2) $D_в = (0{,}8 - 0{,}04^2)25 = 19{,}96;$

3) $\sigma_в = \sqrt{19{,}96} \approx 4{,}4677\,.$

4) За формулами (1.64) – (1.71) знаходимо емпіричні початкові та центральні моменти 1– 4 порядків.

$\nu_1^* = \overline{x_в} = 20{,}2\,;\ \ \mu_1^* = 0\,;$

$\nu_2^* = 25 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}04 \cdot 5 \cdot 20 + 20^2 = 428;$

$\mu_2^* = D_в = (0{,}8 - 0{,}0016)25 = 19{,}96\,;$

$\nu_3^* = -0{,}08 \cdot 125 + 3 \cdot 0{,}8 \cdot 25 \cdot 20 + 3 \cdot 0{,}04 \cdot 5 \cdot 400 + 8000 = 9430;$

$\mu_3^* = (-0{,}08 - 3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}04^3)\ 125 = -21{,}984.$

$\nu_4^* = 2 \cdot 625 - 4 \cdot 0{,}08 \cdot 125 \cdot 20 + 6 \cdot 0{,}8 \cdot 25 \cdot 400 + 4 \cdot 0{,}04 \cdot 5 \cdot 8000 +$

$+ 160000 = 214850;$

$\mu_4^* = (2 - 4 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}08 + 6 \cdot 0{,}0016 \cdot 08 - 3 \cdot 0{,}00000256)\, 625 = 1262{,}7952.$

В і д п о в і д ь :

1) $\overline{x_в} = 20{,}2$; 2) $D_в = 19{,}96$; 3) $\sigma_в = 4{,}47$.

4) $\nu_1^* = 20{,}2$; $\nu_2^* = 428$; $\nu_3^* = 9430$; $\nu_4^* = 214850$; $\mu_1^* = 0$; $\mu_2^* = 19{,}96$;

$\mu_3^* = -21{,}984$; $\mu_4^* = 1262{,}7952$.

ЗАУВАЖЕННЯ: Порівнюючи розв'язання прикладів 1.8 та 1.9 неважко помітити, що метод добутків дозволяє спростити розрахунки.

1.7.4 Метод сум для спрощеного знаходження числових характеристик вибіркової сукупності

Як і метод добутків метод сум застосовується лише для дискретних статистичних рядів з рівновіддаленими варіантами.

Основою методу сум є розрахункова таблиця.

В перший стовпчик записують варіанти x_i.

В другий стовпчик записують частоти m_i.

Серед варіант x_i обираємо хибний нуль. Це може бути варіанта з найбільшою частотою або будь-яка інша варіанта, якщо вона розміщена у центральній частині таблиці. Така варіанта позначається через c і називається «хибний нуль».

Будемо вважати, що хибний нуль знаходиться у r-му рядку.

В третьому стовпчику навпроти варіанти $x_i = c$, тобто у клітинці $r3$ записуємо нуль.

Зверху і до нуля записуємо на основі частот відповідні накопичені частоти $m_i^{\text{нак}}$. Суму цих частот позначаємо через b_1. Значення b_1 заносимо у верхній рядок таблиці. У цьому ж стовпчику знизу вгору до нуля також

утворюємо накопичені частоти $m_i^{\text{нак}}$. Суму цих частот позначаємо через a_1. Значення a_1 заносимо у нижній рядок таблиці.

У четвертому стовпчику напроти варіанти $x_i = c$ також записуємо нуль, а над ним і під ним, тобто у клітинах $(r-1)4$ та $(r+1)4$ записуємо ще по одному нулю.

У вільних верхніх клітинах четвертого стовпчика на основі частот третього стовпчика утворюємо нові накопичені частоти $m_{1i}^{\text{нак}}$, починаючи з верху і до нуля. Їхню суму позначаємо через b_2 і записуємо у верхній рядок.

У вільних клітинах, які знаходяться під нулем також утворюємо накопичені частоти $m_{1i}^{\text{нак}}$ на онові накопичених частот третього стовпчика знизу вгору до нуля. Їхню суму позначаємо через a_2 та записуємо у нижній рядок таблиці.

В п'ятому стовпчику записуємо нуль, у $r-1$, r, $r+1$ рядках, а також ще по одному нулю у клітинах $(r-2)5$ та $(r+2)5$, а вільні клітини заповнюємо накопиченими частотами $m_{2i}^{\text{нак}}$ на основі частот четвертого стовпчика. Суми знайдених накопичених частот дають b_3 та a_2, які записують відповідно у верхній та нижній рядок таблиці.

У шостому стовпчику записують нуль у рядках $r-3$, $r-2$, $r-1$, r, $r+1$, $r+2$, $r+3$.

За такою ж схемою знаходять накопичені частоти $m_{si}^{\text{нак}}$ та суми накопичених частот b_4 і a_4, які записують відповідно у верхній та нижній рядок таблиці.

Розрахункова таблиця має наступний вигляд.

1	2	3	4	5	6
x_i	m_i	b_1	b_2	b_3	b_4
x_1	m_1	$m_1^{\text{нак}}$	$m_{11}^{\text{нак}}$	$m_{21}^{\text{нак}}$	$m_{31}^{\text{нак}}$
x_2	m_2	$m_2^{\text{нак}}$	$m_{12}^{\text{нак}}$	$m_{22}^{\text{нак}}$	$m_{32}^{\text{нак}}$
x_3	m_3	$m_3^{\text{нак}}$	$m_{13}^{\text{нак}}$	$m_{23}^{\text{нак}}$	$m_{33}^{\text{нак}}$
……	……	……	……	……	……
x_{r-3}					0
x_{r-2}				0	0
x_{r-1}			0	0	0
$x_r = c$	m_r	0	0	0	0
x_{r+1}			0	0	0
x_{r+2}				0	0
x_{r+3}					0
		$m_{k-1}^{\text{нак}}$	$m_{1,k-1}^{\text{нак}}$	$m_{2,k-1}^{\text{нак}}$	$m_{3,k-1}^{\text{нак}}$
x_k	m_k	$m_k^{\text{нак}}$	$m_{1k}^{\text{нак}}$	$m_{2k}^{\text{нак}}$	$m_{3k}^{\text{нак}}$
	$\sum m_i$	a_1	a_2	a_3	a_4

Якщо метод сум використовують лише для того, щоб знайти $\overline{x_в}$, $D_в$ та $\sigma_в$, то достатньо обмежиитсь першими чотирма стовпчиками таблиці.

Перевірка розрахунків у цьому разі виконується таким чином: сума частоти m_i, яка стоїть у r-му рядку, що утримує нуль у третьому стовпчику накопиченої частоти $m_i^{\text{нак}}$, яка знаходиться над нулем у клітині $(r - 1)3$ та

накопиченої частоти $m_i^{\text{нак}}$, яка знаходиться під нулем третього стовпчика у клітині (r + 1)3 має дорівнювати об'єму вибіркової сукупності.

Робочі формули:

Різниця d_1:

$$d_1 = a_1 - b_1. \tag{1.77}$$

Суми:

$$s_1 = a_1 + b_1; \tag{1.78}$$

$$s_2 = a_2 + b_2. \tag{1.79}$$

Умовні моменти:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}; \tag{1.80}$$

$$M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n}. \tag{1.81}$$

Середня вибіркова визначається формулою (1.63):

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c.$$

Вибіркова дисперсія визначається формулою (1.74):

$$D_в = \left(M_2^* - (M_1^*)\right)^2 h^2.$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення визначається формулою (1.49):

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Якщо окрім $\overline{x_в}$, $D_в$ та $\sigma_в$ необхідно знайти ще початкові, центральні емпіричні моменти ν_3^*, μ_3^*, ν_4^*, μ_4^* або асиметрію a_s^* та ексцес e_k^*, то використовують усі шість стовпчиків таблиці.

Перевірка розрахунків при цьому виконується у такий спосіб:

1) сума трьох чисел, а саме, частоти яка стоїть у r-му рядку, що утримує нуль у третьому стовпчику, тобто у клітині r3, накопиченої частоти $m_i^{\text{нак}}$ з клітини (r + 1)3 має дорівнювати об'єму вибіркової сукупності;

2) сума накопичених частот, що розміщені у клітинах (r – 2)4 та (r – 3)5 має дорівнювати b_2;

3) сума накопичених частот, що розміщені у клітинах (r – 3)5 та (r – 4)6 має дорівнювати b_3;

4) сума накопичених частот, які розміщені у клітинах (r + 1)3 та (r + 2)4 має дорівнювати a_1;

5) сума накопичених частот, які розміщені у клітинах (r + 2)4 та(r + 3)5 має дорівнювати a_2;

6) сума накопичених частот, які розміщені у клітинах (r + 3)5 та(r + 4)6 має дорівнювати a_3.

Додаткові робочі формули:

Різниця:

$$d_3 = a_3 - b_3 . \tag{1.82}$$

Суми:

$$s_3 = a_3 + b_3 ; \tag{1.83}$$

$$s_4 = a_4 + b_4 . \tag{1.84}$$

Умовні моменти:

$$M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n} ; \tag{1.85}$$

$$M_4^* = \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n} . \tag{1.86}$$

Початкові та центральні емпіричні моменти знаходяться за формулами (1.64) – (1.71).

Середня вибіркова $\overline{x_в}$, вибіркова дисперсія $D_в$, вибіркове середньоквадратичне відхилення, емпірична асиметрія, емпіричний ексцес знаходяться відповідно за формулами: (1.63), (1.74), (1.49), (1.58), (1.59).

Приклад 1.10. По заданому статистичному ряду розподілу вибіркової сукупності знайти числові характеристики:

1) вибіркову середню арифметичну $\overline{x_в}$;

2) вибіркову дисперсію $D_в$;

3) вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$;

4) емпіричні початкові та центральні моменти 1-4 порядків.

Розрахунки виконати з точністю до 0,0001.

Таблиця 1

x_i	–4	–2	0	2	4	*6*	8	10	12	14	16	18
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	4	3	3	2

Р о з в ’ я з а н н я

1) Вибіркову середню $\overline{x_в}$ знаходимо за формулою (1.9):

$$\overline{x_в} = \frac{1}{100}(-4\cdot 2 - 2\cdot 4 + 0\cdot 6 + 2\cdot 8 + 4\cdot 12 + 6\cdot 30 + 8\cdot 18 + 10\cdot 8 +$$

$$+ 12\cdot 4 + (4\cdot 3 + 16\cdot 3 + 18\cdot 2) = 6{,}26.$$

2) Вибіркову дисперсію $D_в$ знаходимо за формулою (1.34):

$$D_в = \frac{1}{100}\Big((-10{,}26)^2 2 + (8{,}26)^2 4 + (-6{,}26)^2 6 + (-4{,}26)^2 8 + (-2{,}26)^2 12 +$$

$$+ (-0{,}26)^2 30 + +(-1{,}74)^2 18 + (3{,}74)^2 8 + (5{,}74)^2 4 + (7{,}74)^2 3 + (9{,}74)^2 3 + (11{,}74)^2 2\Big) =$$

$$= \frac{1}{100}\big(105{,}2676\cdot 2 + 68{,}2276\cdot 4 + 39{,}1876\cdot 6 + 18{,}1476\cdot 8 + 5{,}1076\cdot 12 +$$

$$+ 0{,}0676\cdot 30 + 3{,}0276\cdot 10 + 13{,}9870\cdot 8 + 32{,}9476\cdot 4 + 59{,}9076\cdot 3 +$$

$$94{,}8676\cdot 3 + 137{,}8276\cdot 2\big) = 19{,}6524.$$

3) Вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$ знаходимо за формулою (1.49):

$$\sigma_в = \sqrt{19{,}6524} = 4{,}4331.$$

4) Емпіричні початкові та центральні моменти знаходимо за формулами (1.64) – (1.71):

$$\nu_1^* = \frac{1}{100}(-4\cdot 2 - 2\cdot 4 + 0\cdot 6 + 2\cdot 8 + 4\cdot 12 + 6\cdot 30 + 8\cdot 18 + 10\cdot 8 + 12\cdot 4 + 14\cdot 3 +$$

$$+ 16\cdot 3 + 18{,}2) = 6{,}26;$$

$$\mu_1^* = 0;$$

$$\nu_2^* = \frac{1}{100}(16\cdot 2 + 4\cdot 4 + 0\cdot 6 + 4\cdot 8 + 16\cdot 12 + 36\cdot 30 + 64\cdot 18 + 100\cdot 8 +$$
$$+ 144\cdot 4 + 196\cdot 3 + 256\cdot 3 + 324\cdot 2) = 58{,}84;$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{100}(105{,}2676\cdot 2 + 68{,}2276\cdot 4 + 39{,}1876\cdot 6 + 18{,}1476\cdot 8 + 5{,}1076\cdot 12 +$$
$$+ 0{,}0676\cdot 30 + 3{,}0276\cdot 18 + 13{,}9870\cdot 8 + 32{,}9476\cdot 4 + 59{,}9076\cdot 3 + 94{,}8676\cdot 3 +$$
$$+ 137{,}8276\cdot 2) = 19{,}6524;$$

$$\nu_3^* = \frac{1}{100}(-64\cdot 2 - 8\cdot 4 + 0\cdot 6 + 8\cdot 8 + 64\cdot 12 + 216\cdot 30 + 512\cdot 18 + 1000\cdot 8 +$$
$$+ 1728\cdot 4 + 2744\cdot 3 + 4096\cdot 3 + 5832\cdot 2) = 634{,}64;$$

$$\mu_3^* = \frac{1}{100}(-1080{,}045576\cdot 2 - 563{,}559976\cdot 4 - 245{,}314376\cdot 6 - 77{,}308776\cdot 8 -$$
$$- 11{,}543176\cdot 12 - 0{,}017576\cdot 30 + 5{,}268024\cdot 18 + 52{,}313624\cdot 8 + 189{,}119224\cdot 4 +$$
$$+ 463{,}684824\cdot 3 + 924{,}010424\cdot 3 + 1618{,}096024\cdot 2) = 20{,}253552 \approx 20{,}2536;$$

$$\nu_4^* = \frac{1}{100}(256\cdot 2 + 16\cdot 4 + 0\cdot 6 + 16\cdot 8 + 256\cdot 12 + 1296\cdot 30 + 4096\cdot 18 + 10000\cdot 8 +$$
$$+ 20736\cdot 4 + 38416\cdot 3 + 65{,}536\cdot 3 + 104{,}976\cdot 2) = 8011{,}36;$$

$$\mu_4^* = \frac{1}{100}(11081{,}2676\cdot 2 + 4655{,}005402\cdot 4 + 1535{,}667994\cdot 6 + 329{,}3353858\cdot 8 +$$
$$+ 26{,}08757776\cdot 12 + 0{,}0456976\cdot 30 + 9{,}16636176\cdot 18 + 195{,}636169\cdot 8 +$$
$$+ 1085{,}54435\cdot 4 + 3588{,}92054\cdot 3 + 8999{,}86153\cdot 3 + 18996{,}4473\cdot 2) = 1347{,}7594.$$

В і д п о в і д ь :

1) $\overline{x_в} = 6{,}26$; 2) $D_в = 19{,}6524$; 3) $\sigma_в = 4{,}4331$; 4) $\nu_1^* = 6{,}26$; $\mu_1^* = 0$; $\nu_2^* = 52{,}84$; $\mu_2^* = 19{,}6524$; $\nu_3^* = 634{,}64$; $\mu_3^* = 20{,}2536$; $\nu_4^* = 8011{,}36$; $\mu_4^* = 1347{,}7594$.

Приклад 1.11. По заданому статистичному ряду розподілу вибіркової сукупності методом сум знайти числові характеристики:

1) вибіркову середню арифметичну $\overline{x_в}$;

2) вибіркову дисперсію $D_в$;

3) вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$;

4) емпіричні початкові та центральні моменти 1-4 порядків.

Розрахунки виконати з точністю до 0,0001.

Таблиця 1

x_i	–4	–2	0	2	4	*6*	8	10	12	14	16	18
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	4	3	3	2

$$\sum m_i = 100$$

Р о з в ’ я з а н н я

Згідно з п. 1.6 складаємо таблицю для методу сум.

Таблиця 2

1	2	3	4	5	6
x_i	m_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$	$b_3 = 42$	$b_4 = 14$
–4	2	2	2	2	2
–2	4	6	8	10	12
0	6	12	20	30	0
2	8	20	40	0	0
4	12	32	0	0	0
6	30	0	0	0	0
8	18	38	0	0	0
10	8	20	47	0	0
12	4	12	27	51	0
14	3	8	15	24	35
16	3	5	7	9	11
18	2	2	2	2	2
	100	$a_1 = 85$	$a_2 = 98$	$a_3 = 86$	$a_4 = 48$

Зробимо перевірку розрахунків:

1) 30 + 32 + 38 = 100;

$$100 = 100.$$

2) 40 + 30 = 70;

$$70 = 70.$$

3) 30 + 12 = 42;

$$42 = 42.$$

4) 38 + 47 = 85;

$$85 = 85.$$

5) 47 + 51 = 98;

$$98 = 98.$$

6) 51 + 35 = 86;

$$86 = 86.$$

Перевірка показує що розрахунки є правильними.

За формулами (1.77) – (1.79), (1.85) – (1.87) знаходимо різниці d_1, d_2, d_3 та суми s_1, s_2, s_3, s_4.

$d_1 = 85 - 72 = 13;$ $\quad s_1 = 85 + 72 = 157;$

$d_2 = 98 - 70 = 28;$ $\quad s_2 = 98 + 70 = 168;$

$d_3 = 96 - 42 = 44;$ $\quad s_3 = 96 + 42 = 128;$

$s_4 = 48 + 14 = 62.$

За формулами (1.80), (1.81), (1.88), (1.89) знаходимо умовні моменти.

$$M_1^* = \frac{13}{100} = 0{,}13; \qquad M_2^* = \frac{157 + 2 \cdot 168}{100} = 4{,}93;$$

$$M_3^* = \frac{13 + 6 \cdot 28 + 6 \cdot 44}{100} = 4{,}45; \qquad M_4^* = \frac{157 + 4 \cdot 168 + 36 \cdot 128 + 24 \cdot 62}{100} = 86{,}05.$$

1) За формулою (1.82) знаходимо середню вибіркову $\overline{x_в}$:

$$\overline{x_в} = 0{,}13 \cdot 2 + 6 = 6{,}26.$$

2) За формулою (1.83) знаходимо вибіркову дисперсію $D_в$:

$$D_в = (,93 - 0{,}13^2) \cdot 2^2 = 19{,}6524.$$

3) За формулою (1.84) знаходимо вибіркове середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_в = 4{,}4331.$$

4) Початкові та центральні емпіричні моменти знаходимо за формулами (1.64) – (1.71).

$$\nu_1^* = 0{,}13 \cdot 2 + 6 = 6{,}26;$$

$\mu_1^* = 0$;

$\nu_2^* = 4{,}93 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0{,}13 \cdot 2 \cdot 6 + 6^2 = 58{,}84$;

$\mu_2^* = (4{,}93 - 0{,}13^2) \cdot 2^2 = 19{,}6524$;

$\nu_3^* = 4{,}45 \cdot 2^3 + 3 \cdot 4{,}93 \cdot 2^2 \cdot 6 + 3 \cdot 0{,}13 \cdot 2 \cdot 6^2 + 6^3 = 634{,}64$;

$\mu_3^* = (4{,}45 - 3 \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}93 + 2 \cdot 0{,}13^3) \cdot 2^3 = 20{,}2536$;

$\nu_4^* = 86{,}05 \cdot 2^4 + 4 \cdot 4{,}45 \cdot 2^3 \cdot 6 + 6 \cdot 4{,}93 \cdot 2^2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 0{,}13 \cdot 2 \cdot 6^3 + 6^4 = 8011{,}36$;

$\mu_4^* = (86{,}05 - 4 \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}45 + 6 \cdot 0{,}13^2 \cdot 4{,}93 - 3 \cdot 0{,}13^4) \cdot 2^4 = 1347{,}7594$.

В і д п о в і д ь :

1) $\overline{x_в} = 6{,}26$; 2) $D_в = 19{,}6524$; 3) $\sigma_в = 4{,}4331$; 4) $\nu_1^* = 6{,}26$; $\mu_1^* = 0$; $\nu_2^* = 52{,}84$; $\mu_2^* = 19{,}6524$; $\nu_3^* = 634{,}64$; $\mu_3^* = 20{,}2536$; $\nu_4^* = 8011{,}36$; $\mu_4^* = 1347{,}7594$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівнюючи розв’язання прикладів 1.10 та 1.1 неважко помітити, що метод сум дозволяє простити розрахунки.

Глава 2
СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ
2.1 Незсунені, ефективні та обґрунтовані оцінки параметрів статистичного розподілу

У п. 1.5 розглянуті найважливіші числові характеристики статистичного ряду розподілу, який характеризує вибіркову сукупність.

Розглянемо за яких умов вибіркова сукупність буде репрезентативною.

Нехай θ^* – це статистичний параметр, знайдений внаслідок дослідження вибіркової сукупності.

Вважаємо, що статистичний параметр θ^* має бути аналогом відповідного теоретичного параметра θ^*.

Припустимо, що для забезпечення об'єктивності дослідження було створено не одну, а l вибіркових сукупностей.

По результатам дослідження першої вибіркової сукупності дістали статистичний параметр θ_1^*, другої – θ_2^*, …, l_{-i} – θ_e^*.

Будемо вважати, що значення статистичного параметра θ^* є випадковою величиною, а θ_1^*, θ_2^*, …, θ_e^* – можливі значення випадкової величини θ^*.

Статистична оцінка параметра θ^* називається незсуненою, якщо математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює теоретичному параметру θ, тобто

$$M(\theta^*) = 0. \qquad (2.1)$$

Якщо статистична оцінка параметра θ^* є незсувною, то це означає, що у процесі дослідження не було систематичних помилок.

Для об'єктивності вибіркової сукупності виконання умови незсуненості замало. Необхідно також, щоб можливі значення параметра θ^* мали невелике розсіювання навколо свого середнього значення.

Статистична оцінка параметра θ^* називається ефективною, якщо вона має найменшу дисперсію у порівнянні з іншими статистичними оцінками цього параметра.

Якщо статистична оцінка параметра θ^* є ефективною, то це означає, що не було великих помилок.

Статистична оцінка параметра θ^* є обґрунтована, якщо вона задовольняє закон великих чисел, тобто якщо ця оцінка збігається по ймовірності до оцінюваного параметра θ:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (2.2)$$

Умова обґрунтованості є оправданням великого об'єму вибіркової сукупності. Обґрунтованість статистичної оцінки параметра θ^* майже виключає суттєві помилки.

2.2 Оцінка генеральної середньої та генеральної дисперсії

Нехай маємо деяку генеральну сукупність об'єму N з якої складена вибіркова сукупність об'єму n.

Генеральна 1 вибіркова сукупність досліджується за ознакою X.

Досліджуючи вибіркову сукупність дістали параметри $\overline{x_в}$, $D_в$, $\sigma_в$, на основі яких має бути досліджена генеральна сукупність.

Вибіркова середня $\overline{x_в}$ складається з варіант $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які є можливими значеннями однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Зрозуміло, що числові характеристики однаково розподілених випадкових величин є однаковими, зокрема, всі вони мають однакові математичні сподівання. Позначимо їхні математичні сподівання через a.

Тоді

$$M(\overline{x_в}) = M\left[\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}\right] = M\left[\frac{na}{n}\right] = a.$$

Отже, вибіркова сукупність є незсуненою оцінкою. Оскільки вибіркова сукупність утворена на основі генеральної сукупності, то генеральна сукупність має той же закон розподілу, що і вибіркова сукупність.

Тоді

$$x_{\Gamma} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

або

$$x_{\Gamma} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_r N_r}{N}, \tag{2.3}$$

де $N_1 + N_2 + ... + N_r = N$.

Звідси

$$M(x_{\Gamma}) = M\left[\frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_r N_r}{N}\right] = M\left[\frac{Na}{N}\right] = a.$$

Можна показати що $\overline{x_в}$ є не лише ефективною, а і обґрунтованою оцінкою.

Таким чином середня вибіркова $\overline{x_в}$ є оцінкою генеральної середньою $\overline{x_{\Gamma}}$, тобто

$$\overline{x_{\Gamma}} = \overline{x_в}. \tag{2.4}$$

Розглянемо, як можна оцінити генеральну дисперсію:

$$D_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_i - \overline{x_{\Gamma}})^2 N_i}{N}. \tag{2.5}$$

Неважко показати, що між вибірковою та генеральною дисперсією існує такий зв'язок:

$$M[D_в] = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}. \tag{2.6}$$

Отже, вибіркова дисперсія не є незсуненою оцінкою. У зв'язку з цим доцільно ввести так звану виправлену дисперсію s^2, яка визначається формулою

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в \tag{2.7}$$

або

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 m_i}{n-1}. \qquad (2.8)$$

Виправлена вибіркова дисперсія s^2 є незсуненою оцінкою генеральної дисперсії $D_Г$.

Величина s, яка визначається формулою

$$s^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 m_i}{n-1}} \qquad (2.9)$$

називається виправленим середнім квадратичним відхиленням. Величина s не є незсуненою оцінкою.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо об'єм n вибіркової сукупності є достатньо великим ($n > 35$), то різниця між вибірковою дисперсією $D_в$ та генеральною дисперсією $D_в$ є несуттєвою.

2.3 Довірчий інтервал. Довірча ймовірність

Як відмічалось у п. 2.2 за допомогою параметрів вибіркової сукупності можуть бути оцінені параметри генеральної сукупності. Такі оцінки називаються точковими оцінками і являють собою наближені значення шуканих параметрів. Більш доцільним є так звані інтервальні оцінки шуканих параметрів генеральної сукупності.

Маються на увазі такі інтервали, які з обумовленою точністю визначають ймовірність того, що шуканий параметр знаходиться в межах інтервала, який називається довірчим інтервалом, а ймовірність знаходження шуканого параметра у довірчому інтервалі називається довірчою ймовірністю.

Розглянемо процедуру побудування довірчих інтервалів.

Коефіцієнтом довіри або рівнем значимості називається таке число α, яке належить проміжку (0; 1), тобто $0 < \alpha < 1$. Практично за α обирають такі числа як $\alpha = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}001$.

Довірчою ймовірністю або надійністю називається число $\beta = 1 - \alpha$. Як правило β – це число, близьке до одиниці, приміром, $\beta = 0{,}9$; $\beta = 0{,}99$; $\beta = 0{,}999$.

Якщо θ – істинне значення параметра, а θ^* – його наближене значення, то можна поставити умову

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = \beta, \tag{2.10}$$

де ε – деяке додатне мале число.

Рівність (2.10) еквівалента рівності

$$P\left(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon\right) = \beta. \tag{2.11}$$

Це означає, що з ймовірністю β значення параметра θ належить інтервалу $(\theta^* - \varepsilon;\ \theta^* + \varepsilon)$.

Такий інтервал називається довірчим інтервалом. Наведемо деякі формули для знаходження довірчих інтервалів.

1. Довірчий інтервал для знаходження математичного сподівання.

За допомогою вибіркової сукупності об'єму n досліджується точність оцінки кількісної ознаки X генеральної сукупності.

Точне значення математичного сподівання m генеральної сукупності є невідомим, а за його наближене значення приймаємо середньовибіркове значення $\overline{x_в}$. Припустимо, що генеральна сукупність має нормальний закон розподілу.

Довірчий інтервал $I_\beta^{(m)}$ знаходиться за формулою

$$I_\beta^{(m)} = \left(\overline{x_в} - t_\beta \sigma_{\overline{x_в}};\quad \overline{x_в} + t_\beta \sigma_{\overline{x_в}}\right). \tag{2.12}$$

Величина t_β знаходиться з рівності

$$\Phi(t_\beta) = \frac{1}{2}(\beta + 1), \tag{2.13}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Значення t_β може бути знайдене за допомогою таблиці значень нормальної функції розподілу

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{(Додаток 1)}$$

або за допомогою таблиці значень t_β (Додаток 2).

Величина $\sigma_{\overline{x_в}}$ знаходиться за формулою

$$\sigma_{\overline{x_в}} \approx \sqrt{\frac{D_в}{n}}, \tag{2.14}$$

де $D_в$ – вибіркова дисперсія; n – об'єм вибіркової сукупності.

2. Довірчий інтервал для знаходження дисперсії. Довірчий інтервал $I_\beta^{(D)}$ для дисперсії визначається формулою

$$I_\beta^{(D)} = (D_в - t_\beta \sigma_{D_в};\quad D_в + t_\beta \sigma_{D_в}). \tag{2.15}$$

Величина t_β визначається формулою (2.13), а величина $\sigma_{D_в}$ визначається формулами:

а) для нормального закону

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_в; \tag{2.16}$$

б) для рівномірного закону

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{0{,}8N + 1{,}2}{n(n-1)}} D_в; \tag{2.17}$$

в) для показникового закону

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{8n-6}{n(n-1)}} D_в. \tag{2.18}$$

Звідси виходить, що довірчий інтервал для $I_\beta^{(\sigma)}$ середньоквадратичного σ визначається формулою

$$I_\beta^{(\sigma)} = \left(\sqrt{D_в - t_\beta \sigma_{D_в}};\quad \sqrt{D_в + t_\beta \sigma_{D_в}}\right). \tag{2.20}$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Довірчі інтервали дають наближене значення для оцінки шуканого параметра, оскільки вони опираються на наближені оцінки $\overline{x_в}$, $D_в$.

При цьому, чим більше β тим точнішу оцінку дає довірчий інтервал.

Приклад 2.1. Вибіркова сукупність об'єму $n = 100$ має такі параметри: $\overline{x_в} = 2{,}5,\ D_в = 35{,}1$.

Побудувати довірчі інтервали для математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення, які відповідають довірчій ймовірності $\beta = 0{,}95$.

Р о з в ' я з а н н я

За формулою (2.14) знаходимо $\sigma_{\overline{x_в}}$:

$$\sigma_{\overline{x_в}} \approx \sqrt{\frac{35{,}1}{100}} \approx 0{,}59.$$

За додатком 2 знаходимо

$$t_\beta = 1{,}96.$$

За формулою (2.16) знаходимо $\sigma_{D_в}$:

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 100 + 1{,}2}{100 \cdot 99}} \approx 0{,}0966.$$

За формулами (2.12), (2.15), (2.17), (1.116), (1.119), (1.120), (1.121) знаходимо відповідні довірчі інтервали $I_\beta^{(m)}$, $I_\beta^{(D)}$, $I_\beta^{(\sigma)}$.

$I_\beta^{(m)} = (2{,}5 - 1{,}96 \cdot 0{,}59;\ 15 + 1{,}96 \cdot 0{,}69);$

$I_\beta^{(m)} = (1{,}3436;\ 3{,}6564);$

$I_\beta^{(D)} = (35{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}0966;\ 35{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}0966);$

$I_\beta^{(m)} = (34{,}9107;\ 35{,}2893);$

$I_\beta^{(\sigma)} = (5{,}9085;\ 5{,}9485).$

В і д п о в і д ь : $I_\beta^{(m)} = (1{,}3436;\ 3{,}6564);\ I_\beta^{(m)} = (34{,}9107;\ 35{,}2893);$

$I_\beta^{(\sigma)} = (5{,}9085;\ 5{,}9485).$

Глава 3
ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ
3.1 Вимірювання статистичних параметрів

Для дослідження генеральної сукупності складається вибіркова сукупність. По результатам дослідження вибіркової сукупності належить зробити висновки про те чи існує теоретичний закон розподілу з яким з певною мірою збігається статистичний розподіл.

Підібрати відповідний статистичний закон можна аналізуючи характер ознаки, за якою відбувалось дослідження. Приміром, якщо X – це час безвідмовної роботи деякого елемента системи або тривалість телефонної розмови, то є підстави. Якщо ж X – це помилки, які виникли при вимірюваннях приладом зі шкалою, то є підстави припустити, що відповідним теоретичним законом є рівномірний закон.

Форма полігона та гістограми нагадують графік диференціальної функції відповідного теоретичного розподілу.

Певну інформацію дають і числові характеристики вибіркової сукупності. Так, якщо більшість варіант статистичного розподілу розміщена у інтервалі $\left(\overline{x_в} - 3\sigma_в; \overline{x_в} + 3\sigma_в\right)$, то можна припустити, що відповідним теоретичним законом може бути нормальний закон розподілу.

Підбираючи теоретичний закон розподілу доцільно припустити, що математичне сподівання та дисперсія теоретичного закону збігаються із середньою вибірковою та вибірковою дисперсією, тобто

$$M[X] = \overline{x_в},\ D[X] = D_в.$$

При цьому, якщо зроблено припущення про нормальний закон розподілу, то тоді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_в}\varphi\left(\frac{x - \overline{x_в}}{\sigma_в}\right), \qquad (3.1)$$

де $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ (додаток 4).

Для рівномірного закону маємо

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b^* - a^*}, \text{ якщо } a^* \le x \le b^* \\ 0, \quad \text{якщо } -\infty < x < a^* \text{ та } b^* < x < +\infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

де $a^* = x_{\min}$, $b^* = x_{\max}$ у статистичному розподілі

$$\overline{x_в} = \frac{a^* + b^*}{2}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_в = \frac{b^* - a^*}{2\sqrt{3}}, \tag{3.4}$$

та

$$\begin{aligned} a^* &= \overline{x_в} - \sqrt{3}\sigma_в, \\ b^* &= \overline{x_в} + \sqrt{3}\sigma_в. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для показникового закону маємо

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{якщо } 0 \le x < +\infty; \\ 0, \quad \text{якщо } -\infty < x < +0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\overline{x_в} = \frac{1}{\lambda}, \text{ а } \lambda = \frac{1}{\overline{x_в}}. \tag{3.7}$$

Процес підбирання відповідного теоретичного закону для вибіркової сукупності називається вирівнюванням статистичного розподілу.

3.2 Перевірка гіпотези про закон розподілу статистичної випадкової величини

Припущення, зроблені на основі аналізу проведених досліджень вибіркової сукупності, про те, що можливо, вибірковій сукупності, тобто статистичній вибірковій величині певною мірою відповідає деякий теоретичний закон розподілу називається статистичною гіпотезою. Така гіпотеза називається нульовою або основною та позначається через H_0.

Перевірка нульової гіпотези полягає у тому, щоб з'ясувати у якій мірі збігаються статистичний та відповідний теоретичний закони розподілу статистичної випадкової величини.

Для цього існують так звані критерії згоди. Критерієм згоди називається така випадкова величина U, яка показує міру розбіжності між статистичним та теоретичним розподілами.

Припустимо, що в результаті даної серії дослідів величина U набуває значення u. Розбіжність між U та u може виникнути внаслідок тих чи інших випадкових причин або ж внаслідок істотної неузгодженості статистичного та теоретичного розподілів.

У першому випадку з гіпотезою H_0 можна згодитись, а у другому випадку цю гіпотезу слід вважати безпідставною.

Отже, якщо ймовірність $P_{H_0}(U \geq u)$ є занадто малою, то гіпотезу H_0 як неправдоподібну слід відкинути, а якщо ймовірність $P_{H_0}(U \geq u)$ є достатньо близькою до одиниці, то є підстави прийняти гіпотезу H_0.

Величина U називається критерієм згоди. Існує декілька критеріїв згоди. Розглянемо критерій Пірсона, який іще називають критерієм χ^2 (хи квадрат).

Для критерія Пірсона величина U знаходиться за формулою

$$U = n\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(P_i^* - P_i\right)^2}{P_i}, \tag{3.8}$$

де n – об'єм вибіркової сукупності; r – число інтервалів інтервального ряду розподілу; P_i^* – відносна частота влучення величини χ в i-й інтервал, а p_i – ймовірність влучення величини χ в i-й інтервал у відповідності з припущенням про певний теоретичний розподіл величини χ.

Так,

$$P_i = F(x_{i+1}) - F(x_i), \tag{3.9}$$

де $F(x)$ – інтегральна функція розподілу відповідного теоретичного закону розподілу.

Якщо перевіряється збіжність статистичного розподілу з нормальним законом розподілу, то

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \overline{x_в}}{\sigma_в}\right), \tag{3.10}$$

а

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i), \tag{3.11}$$

де

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}. \tag{3.12}$$

Якщо перевіряється збіжність статистичного розподілу з показниковим законом розподілу, то

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^* e^{-\lambda^* x}, & \text{якщо } 0 \le x < +\infty; \\ 0, & \text{якщо } -\infty < x < +0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda^* x}, & \text{якщо } 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{якщо } -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

а

$$p_i = e^{-\lambda^* x_i} - e^{-\lambda^* x_{i+1}}, \tag{3.14}$$

де $\lambda^* = \frac{1}{x_в}$.

Якщо перевіряється збіжність статистичного розподілу з рівномірним, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x < a^*; \\ \dfrac{x - a^*}{b^* - a^*}, & \text{якщо } a^* \le x \le b^*; \\ 1, & \text{якщо } b^* < x < +\infty, \end{cases} \tag{3.15}$$

а $p_i = \frac{x_2 - a^*}{b^* - a^*}$, $p_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{b^* - a^*}$ $(i = 2; 3; \ldots; u - 1)$.

$$p_n = \frac{b^* - x_n}{b^* - a^*}, \tag{3.16}$$

де $a^* = x_{\min}$, $b^* = x_{\max}$ у статистичному розподілі.

Випадкова величина U характеризується тим, що при достатньо великому об'ємі n вибіркової сукупності її закон розподілу не залежить від інтегральної

функції розподілу $F(x)$ а залежить від кількості ступенів вільності q, що визначається формулою

$$q = n - s - 1, \tag{3.17}$$

де n – об'єм вибіркової сукупності; s – кількість параметрів відповідного теоретичного розподілу.

Зі збільшенням об'єму n вибіркової сукупності X розподіл випадкової величини U наближається до χ^2-розподілу і тоді міру розбіжності U статистичного і теоретичного розподілів позначають через χ^2. Отже, маємо формулу

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(p_i^* - p_i)}{p_i}, \tag{3.18}$$

яку можна подати у вигляді

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{3.19}$$

оскільки $p_i^* = \frac{m_i}{n}$.

Для розподілу χ^2 є спеціальні таблиці «Критичні точки $U = u(\alpha; q)$ розподілу χ^2» (див. додаток 3).

Для користування цією таблицею необхідно знати кількість q ступенів вільності та задане число α, яке називається рівнем значимості, оскільки означена таблиця є таблицею з подвійним входом.

Таблиця дозволяє знайти таку критичну точку u розподілу χ^2 для якої виконується умова:

$$P(X^2 \geq u) = \alpha. \tag{3.20}$$

Число α вибирають відповідно до суті досліджуваного процесу.

Якщо критична точка u є такою, що $\chi^2 < u$, то це означає, що міра розбіжності статистичного та теоретичного розподілів є несуттєвою, а значить, на рівні значимості α можна вважати, що гіпотеза про певний теоретичний закон розподілу узгоджується зі статистичним розподілом.

Якщо ж критична точка u є такою, що $\chi^2 > u$, то таку міру розбіжності слід вважати значною і на рівні значимості α гіпотезу про певний теоретичний закон розподілу слід вважати хибною.

Приклад 3.1. Вибіркова сукупність X об'ємом $n = 200$ подана інтервальним рядом розподілу.

Таблиця 3.1

Номер інтервалу i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Межі інтервалу $(x_i; x_{i+1})$	(–50; –40)	(–40; –30)	(–30; –20)	(–20; –10)	(–10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)
Чисельність інтервалу m_i	6	13	24	30	41	36	22	14	9	5

1. Знайти відносні частоти p_i^* для кожного часткового інтервалу.

2. Побудувати гістограму.

3. Знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ та побудувати її графік.

4. Сформулювати первинне припущення про відповідний теоретичний закон розподілу.

5. Знайти числові характеристики вибіркової сукупності $\overline{x_в}$, $D_в$, $\sigma_в$.

6. Знайти довірчі інтервали, які відповідають довірчій ймовірності $\beta = 0{,}95$: $I_\beta^{(m)}; I_\beta^{(D)}; I_\beta^{(\sigma)}$.

7. Вирівняти статистичний розподіл величини X. Перевірити за допомогою критерія Пірсона узгодженість вирівняного (теоретичного) і статистичного розподілів на рівні значимості $\alpha = 0{,}3$.

Визначити ймовірність, з якою за рахунок чисто випадкових причин могла з'явитись розбіжність між гіпотетичним та статистичним розподілами більша, ніж отримана розбіжність χ^2.

Р о з в ’ я з а н н я

1. Знаходимо відносні частоти $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, де i = 1; 2; ….; 10. Результати заносимо у табл. 3.3.

2. Побудуємо гістограму (рис. 3.1), де $h_i = \frac{P_i^*}{x_{i+1} - x_i}$ (i = 1; 2; 3; … ; 10).

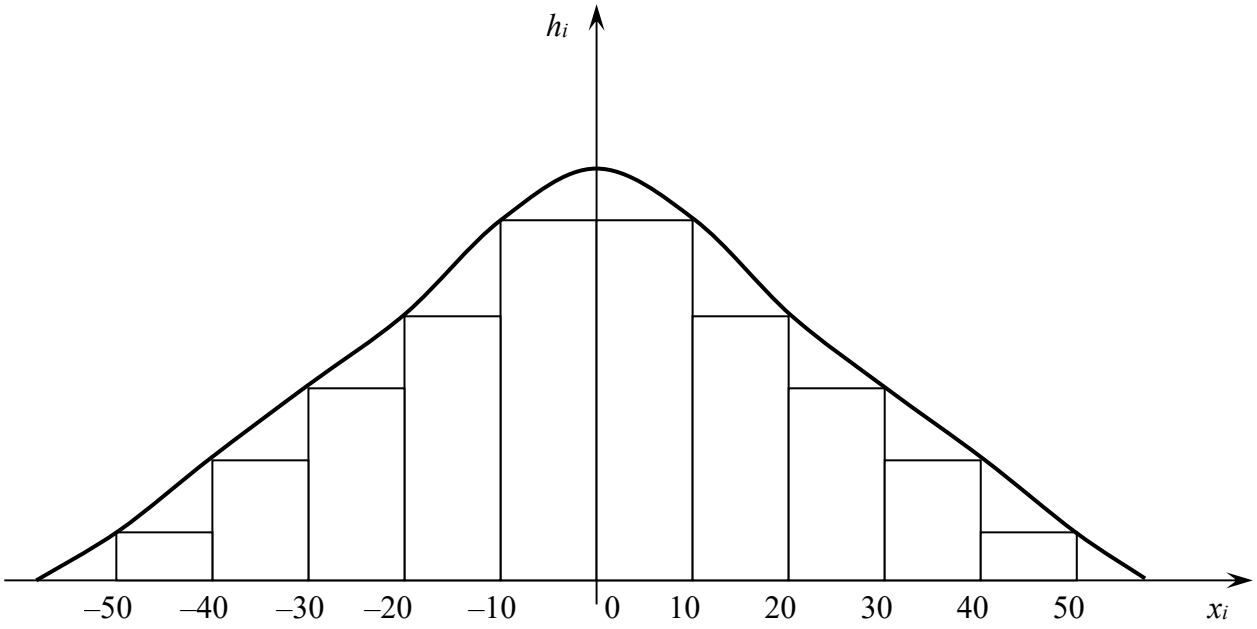


Рисунок 3.1

3. Користуючись дискретним рядом розподілу, варіантами якого є середини інтервалів, знаходимо емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ за формулою

$$F^*(x) = \frac{\sum m_i}{n},$$

де $\sum m_i$ – кількість варіант $x_i < x$.

Отже маємо

$F^*(x) = 0$, де $-\infty < x \le -45$;

$F^*(x) = 0{,}030$, де $-45 < x \le -35$;

$F^*(x) = 0{,}035$, де $-35 < x \le -25$;

$F^*(x) = 0{,}215$, де $-25 < x \le -15$;

$F^*(x) = 0{,}365$, де $-15 < x \le -5$;

$F^*(x) = 0{,}570$, де $-5 < x \le 5$;

$F^*(x) = 0{,}750$, де $5 < x \le 15$;

$F^*(x) = 0{,}860$, де $15 < x \le 25$;

$F^*(x) = 0{,}930$, де $25 < x \le 35$;

$F^*(x) = 0{,}975$, де $35 < x \le 45$;

$F^*(x) = 1$, де $45 < x < +\infty$.

Результати заносимо до табл. 3.3.

Побудуємо графік функції $F^*(x)$.

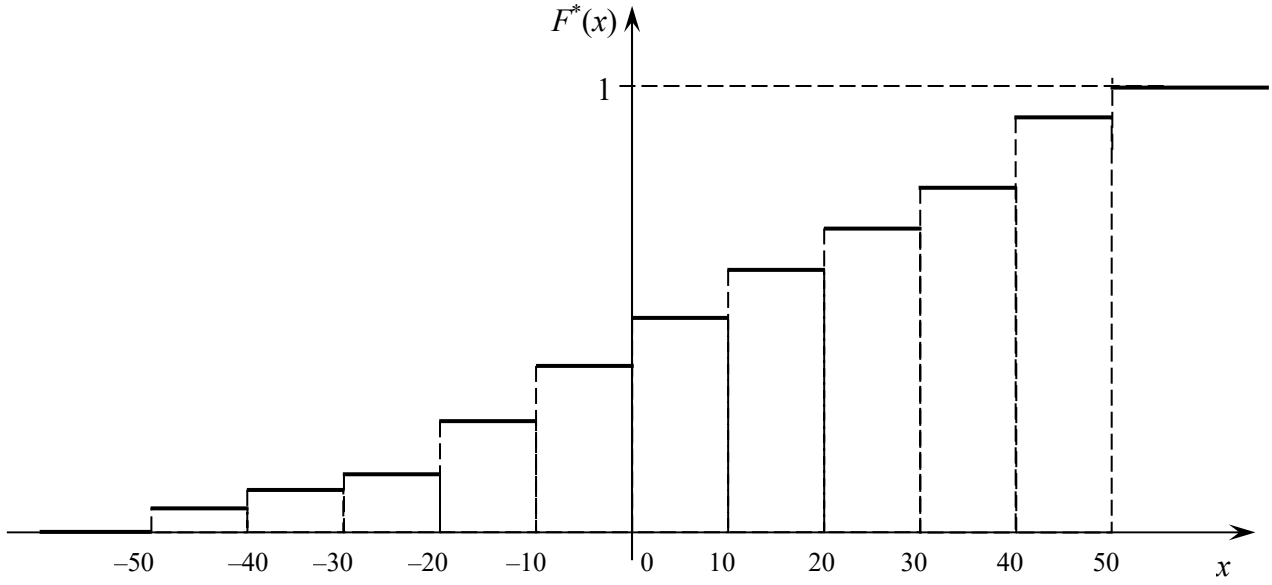


Рисунок до прикладу 3.1

4. По формі гістограми припускаємо, що статистичному розподілу відповідає теоретичний закон розподілу, а саме, нормальний закон.

5. Знаходимо середню вибіркову $\overline{x_в}$, вибіркову дисперсію $D_в$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$. Для цього від інтервального ряду маємо перейти до дискретного ряду, замінюючи кожний інтервал на його середину x_i (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

x_i	–45	–35	–25	–15	–5	5	15	25	35	45
x^2_i	2025	1225	625	225	25	25	225	625	1225	2025
m_i	6	13	24	30	41	36	22	14	9	5

За формулою

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i \cdot m_i}{n}$$

знаходимо середню вибіркову $\overline{x_в}$.

$$\overline{x_в} = \frac{1}{200}(-45 \cdot 6 - 35 \cdot 13 - 25 \cdot 24 - 15 \cdot 30 - 5 \cdot 41 + 5 \cdot 36 + 15 \cdot 22 +$$
$$+ 25 \cdot 14 + 35 \cdot 9 + 45 \cdot 5) = -1{,}8.$$

Отже, $\overline{x_в} = -1{,}8$.

За формулою

$$D_в = \overline{x_в^2} - (\overline{x_в})^2$$

знаходимо вибіркову депресію $D_в$.

$$\overline{x_в^2} = \frac{1}{200}(2025 \cdot 6 + 1225 \cdot 13 + 625 \cdot 24 + 225 \cdot 30 + 25 \cdot 41 + 25 \cdot 36 + 225 \cdot 22 +$$
$$+ 625 \cdot 19 + 1225 \cdot 9 + 2025 \cdot 5) = 433.$$

$D_в = 433 - 3{,}24 = 429{,}76.$

Отже, $D_в = 429{,}76$.

За формулою

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}$$

знаходимо вибіркове середньоквадратичне відхилення $\sigma_в$.

$$\sigma_в = \sqrt{429{,}76} \approx 20{,}73.$$

Отже, $\sigma_в \approx 20{,}73$.

Таблиця 3.3

Номер інтервалу i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Межі інтервалу $(x_i; x_{i+1})$	(–50; –40)	(–40; –30)	(–30; –20)	(–20; –10)	(–10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)	–
Середина інт.	–45	–35	–25	–15	–5	5	15	25	35	45	–
Чисельність інтервалу m_i	6	13	24	30	41	36	22	14	9	5	–
Відносні частоти P^*_i	0,030	0,065	0,120	0,150	0,205	0,180	0,110	0,070	0,045	0,025	–
Висота h_i гістограми	0,0030	0,0065	0,0120	0,0150	0,0205	0,0180	0,0110	0,0070	0,0045	0,0025	–
$F^*_{(x)}$	0	0,030	0,095	0,215	0,365	0,570	0,750	0,260	0,930	0,975	1

6. Вважаючи, що довірча ймовірність β = 0,95, знаходимо довірчі інтервали для математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

Довірчий інтервал для математичного сподівання знаходимо за формулою (2.12):

$$I_{\beta}^{(m)} = \left(\overline{x_в} - t_{\beta}\sigma_{\overline{x_в}}; \overline{x_в} + t_{\beta}\sigma_{\overline{x_в}}\right).$$

Значення t_{β} знаходимо у додатку 2 з таблиці значень t_{β}:

$$t_{\beta} = 1{,}96.$$

Значення $\sigma_{\overline{x_в}}$ знаходимо за формулою (2.14):

$$\sigma_{\overline{x_в}} = \sqrt{\frac{D_в}{n}}.$$

$$\sigma_{\overline{x_в}} = \sqrt{\frac{429{,}76}{200}} \approx 1{,}47.$$

Тоді маємо

$$I_\beta^{(m)} = \left(-1{,}9 - 1{,}96 \cdot 1{,}47; -1{,}8 + 1{,}96 \cdot 1{,}47\right),$$

$$I_\beta^{(m)} = \left(-4{,}68; 1{,}08\right).$$

Довірчий інтервал для дисперсії знаходимо за формулою (2.15):

$$I_\beta^{(D)} = \left(D_в - t_\beta \sigma_{D_в}; D_в + t_\beta \sigma_{D_в}\right),$$

а $\sigma_{D_в}$ знаходимо за формулою (2.16):

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_в.$$

Тоді

$$\sigma_{D_в} = \sqrt{\frac{2}{199}} \cdot 429{,}76 \approx 43{,}08,$$

а

$$I_\beta^{(D)} = \left(429{,}76 - 1{,}96 \cdot 43{,}08; 429{,}76 + 1{,}96 \cdot 43{,}08\right),$$

$$I_\beta^{(D)} = \left(345{,}32; 514{,}20\right).$$

Довірчий інтервал для середньоквадратичного відхилення знаходимо за формулою

$$I_\beta^{(\sigma_в)} = \left(\sqrt{D_в - t_\beta \sigma_{D_в}}; \sqrt{D_в + t_\beta \sigma_{D_в}}\right).$$

Тоді

$$I_\beta^{(\sigma_в)} = \left(\sqrt{345{,}32}; \sqrt{514{,}20}\right)$$

$$I_\beta^{(\sigma_в)} = \left(18{,}58; 22{,}67\right).$$

7. На рівні значимості α = 0,3 вирівнюємо статистичний розподіл випадкової величини X та за допомогою критерію Пірсона з'ясовуємо узгодженість статистичного розподілу з теоретичним законом розподілу, а саме, з нормальним законом розподілу.

Виходимо з найдених числових характеристик випадкової величини X:

$$\overline{x_в} = -1{,}8;\ \sigma_в = 20{,}73.$$

Тоді за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{x_d})^2}{2\sigma_в^2}}$$

в усіх точках, що є кінцями інтервалів знаходимо $f(x)$.

Значення функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}$ знаходимо у додатку 4: «Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$».

У даному випадку

$$f(x) = \frac{1}{20{,}73\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1{,}8)^2}{2\cdot(20{,}73)^2}}$$

або

$$f(z) = \frac{1}{20{,}73\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\cdot}}$$

чи

$$f(z) = \frac{1}{20{,}73} \varphi(z),$$

де $z = \frac{x+1{,}8}{20{,}73}$.

Знаходимо z_i:

$z_1 = -2{,}33$; $z_2 = -1{,}84$; $z_3 = -1{,}36$; $z_4 = -0{,}88$; $z_5 = -0{,}30$; $z_6 = 0{,}09$;

$z_7 = 0{,}57$; $z_8 = 1{,}05$; $z_9 = 1{,}53$; $z_{10} = 2{,}02$; $z_{11} = 2{,}5$.

Знайдені z_i заносимо у табл. 3.4.

Отже маємо

$f(-50) = 0{,}0013$; $f(10) = 0{,}0169$;

$f(-40) = 0{,}0036$; $f(20) = 0{,}0110$;

$f(-30) = 0{,}0079$; $f(30) = 0{,}0064$;

$f(-20) = 0{,}0134$; $f(40) = 0{,}0025$;

$f(-10) = 0{,}0184$; $f(50) = 0{,}0008$;

$f(0) = 0{,}0198$.

Результати розрахунків заносимо у табл. 3.4. Через розрахункові точки $(x_i; f(x_i)$ проводимо плавну криву, яка у певній мірі має збігатись з графіком інтегральної кривої $y = f(x)$ для нормального закону розподілу.

Далі на кінцях інтервалів знаходимо значення інтегральної функції розподілу $F(x)$, яка у відповідності з нормальним законом знаходиться за формулою:

$$F(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}\right) \text{ або } F(x_i) = \Phi(z_i),$$

($i = 1; 2; \ldots; 11$).

Користуючись додатком 1 дістанемо значення $F(x_i)$ ($i = 1; 2; \ldots; 11$).

Отже маємо

$F(-50) = 0{,}0102$; $F(10) = 0{,}7157$;

$F(-40) = 0{,}0329$; $F(20) = 0{,}8531$;

$F(-30) = 0{,}0869$; $F(30) = 0{,}9370$;

$F(-20) = 0{,}1894$; $F(40) = 0{,}9782$;

$F(-10) = 0{,}3483$; $F(50) = 0{,}9938$;

$F(0) = 0{,}5359$.

Знайдені значення $F(x)$ заносимо у табл. 3.4.

За формулою (3.11) знаходимо теоретичні частоти:

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де ($i = 1; 2; \ldots; 11$).

$p_1 = 0{,}0227$; $p_6 = 0{,}1798$;

$p_2 = 0{,}0540$; $p_7 = 0{,}1374$;

$p_3 = 0{,}1025$; $p_8 = 0{,}0839$;

$p_4 = 0{,}1589$; $p_9 = 0{,}0512$;

$p_5 = 0{,}1876$; $p_{10} = 0{,}0156$.

Знайдені значення p_i (i = 1; 2; …; 10) заносимо у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

x_i	–50	–40	–30	–20	–10	0	10	20	30	40	50
z_i	–2,33	–1,84	–1,36	–0,88	–0,39	0,09	0,57	1,05	1,53	2,02	2,5
$f(x) = \frac{1}{20,73}\varphi(z_i)$	0,0013	0,0036	0,0079	0,0134	0,0184	0,0198	0,0169	0,0110	0,0064	0,0025	0,0008
$F(x_i) = \Phi(z_i)$	0,0102	0,0329	0,0869	0,1894	0,3483	0,5359	0,7157	0,8631	0,9370	0,9782	0,9938
p_i	0,0227	0,0540	0,1025	0,1590	0,1876	0,1798	0,1374	0,0839	0,0512	0,0156	

Далі переходимо до знаходження величини χ^2 за формулою (3.19):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Розрахунки заносимо у табл. 3.5.

Таблиця 3.5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	8	13	24	30	41	36	22	14	9	5
np_i	4,54	10,8	20,5	31,78	37,52	35,96	27,18	16,78	10,24	3,12
$m_i - np_i$	–1,46	2,20	3,50	–1,78	3,48	0,04	–5,18	–2,78	–0,76	1,88
$(m_i - np_i)^2$	2,13	4,84	12,25	3,17	12,11	0	26,83	7,73	0,60	3,53
$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$	0,77	0,45	0,60	0,10	0,32	0	0,95	0,46	0,06	1,13

На основі цієї таблиці маємо

$$\chi^2 = 4{,}54 .$$

Для того, щоб з'ясувати чи є суттєвою розбіжність між статистичним та теоретичним розподілами, маємо знайти критичну точу розподілу χ^2.

Число степенів вільності

$$q = 10 - 2 - 1 = 7 .$$

Рівень значимості згідно з умовою $\alpha = 0{,}3$.

Звертаємось до таблиці «Критичні точки $U = u(\alpha; q)$ розподілу χ^2 (додаток 4).

Ця таблиця є таблицею з подвійним входом. На перетині значень q = 7 та $\alpha = 0{,}3$ знаходимо критичну точку u.

$$u(0{,}3;\ 7) = 8{,}38 .$$

Оскільки $\chi^2 < u$, то доходимо висновку, що на рівні значимості $\alpha = 0{,}3$ припущення про те, що випадкова величина X має нормальний розподіл, який описується функцією $f(x)$ (табл. 3.4) не суперечить дослідним даним.

За тією ж таблицею, знаючи, що $\chi^2 = 4{,}54$, а $q = 7$ знаходимо таке $\alpha = 0{,}7$, яке являє собою ймовірність того, що розбіжність між статистичним і нормальним розподілом за рахунок чисто випадкових причин буде більше за $\chi^2 = 8{,}38$.

Результати остаточних розрахунків оформлюємо у вигляді зведених табл. 3.6 та 3.7.

Таблиця 3.6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Інтервали $(x_i; x_{i+1})$	(–50; 40)	(–40; 30)	(–30; 20)	(–20; 10)	(–10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)	–
Чисельність інтервалу m_i	6	13	24	30	41	36	22	14	9	5	–
Відносна частота p^*_i	0,030	0,065	0,120	0,150	0,205	0,1809	0,110	0,070	0,045	0,025	–
$F^*(x)$	0	0,030	0095	0215	0365	0570	0750	0860	0930	0975	1
$f(x_i)$	0,0013	0,0036	0,0079	0,0134	0,0184	0,0198	0,0169	0,0110	0,0064	0,0025	0,0008
$F(x_i)$	0,0102	0,0329	0,0869	0,1894	0,3483	0,5359	0,7157	0,8631	0,9370	0,9782	0,9938
p_i	0,0227	0,0540	0,1025	0,1590	0,1876	0,1798	0,1374	0,0839	0,0512	0,00156	–

Таблиця 3.7

$x_в$	$D_в$	$\sigma_в$	$\sigma_{\overline{x_в}}$	$\sigma_{D_в}$	t_χ	$I_\beta^{(m)}$	$I_\beta^{(D)}$	$I_\beta^{(\sigma)}$	χ^2	q	$u(\alpha, q)$	$\tilde{\alpha}$
–1,80	429,76	20,73	1,47	43,08	1,96	(–4,68; 1,08)	(345,32; 514,20)	(18,58; 22,67)	4,54	7	8,38	0,7

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які методи утворення вибіркової сукупності існують?
2. Що називається полігоном частот вибіркової сукупності?
3. Що називається гістограмою частот вибіркової сукупності?
4. Означення та властивості емпіричної функції розподілу $F^*(x)$.
5. Визначення та властивості вибіркової середньої арифметичної $\overline{x_в}$.
6. Вибіркова дисперсія $D_в$ та її властивості.
7. Початкові та центральні емпіричні моменти та їхні властивості.
8. Асиметрія та ексцес статистичного ряду розподілу.
9. Довірчий інтервал для математичного сподівання.
10. Довірчий інтервал для дисперсії.
11. Перевірка гіпотези про закон розподілу статистичної випадкової величини.
12. У чому полягає критерій Пірсона?
13. Мода статистичного ряду розподілу.
14. Медіана статистичного ряду розподілу.
15. У яких випадках доцільно користуватись механічним способом утворення вибіркової сукупності?
16. У яких випадках доцільно користуватись серійним способом утворення вибіркової сукупності?
17. У яких випадках доцільно користуватись типічним методом утворення вибіркової сукупності?
18. Що називається статистичною гіпотезою?
19. Записати та пояснити формулу фактичного значення критерія χ^2 для перевірки гіпотези про узгодження розподілів.
20. За якою формулою визначається кількість q степенів вільності розподілу χ^2 у разі перевірки гіпотези про узгодження розподілів?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

№ 1. На підприємстві для виготовлення продукції використовується 50 однакових автоматів. Для перевірки якості їх роботи відібрали продукцію, яка виготовлена на десятьох автоматах.

Яке з тверджень є справедливим:

1) Утворена вибіркова сукупність є простою випадковою безповторною вибірковою сукупністю.

2) Утворена вибіркова сукупність є серійною вибірковою сукупністю.

3) Утворена вибіркова сукупність є механічною вибірковою сукупністю.

4) Інша відповідь?

№ 2. Вибіркова сукупність задана рядом розподілу:

X	–3	5	6	12	14	15
m	25	5	10	18	12	30

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\overline{x_в} = 11{,}2$; 2) $\overline{x_в} = 8{,}44$;

3) $\overline{x_в} = 12{,}1$; 4) Інша відповідь?

№ 3. Вибіркова сукупність задана рядом розподілу:

X	–1	0	3	5	8	10
m	10	20	15	15	21	1

Яке з тверджень є справедливим:

1) $D_в = 72052{,}0976$; 2) $D_в = 12113{,}1745$

3) $D_в = 1634{,}0212$ 4) Інша відповідь?

№ 4. Вибіркова сукупність задана рядом розподілу:

X	–8	–3	5	6	9	10	12
m	2	4	1	3	5	25	10

Яке з тверджень є справедливим:

Накопична частота $m_i^{нак}$ для ознаки $x = 9$ дорівнює

1) $m_i^{нак} = 25$; 2) $m_i^{нак} = 15$;

3) $m_i^{нак} = 10$; 4) Інша відповідь?

№5. Для заданої вибіркової сукупності X величина $\overline{x_в} = 16$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $(X + 14)$

1) $\overline{x_в} = 16$; 2) $\overline{x_в} = 30$;

3) $\overline{x_в} = 23$; 4) Інша відповідь?

№6. Для заданої вибіркової сукупності X та Y знайдені їх середні вибіркові $\overline{x_в} = 10$; $\overline{y_в} = -4$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Z = 2X - 3Y$

1) $\overline{z_в} = 32$; 2) $\overline{z_в} = -6$;

3); $\overline{z_в} = -40$ 4) Інша відповідь?

№7. Для вибіркової сукупності X знайдено величину $\overline{x_в} = 20$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Y = 7X$

1) $\overline{y_в} = 20$; 2) $\overline{y_в} = 27$;

3) $\overline{y_в} = 140$; 4) Інша відповідь?

№8. Для вибіркових сукупностей X та Y знайдені їх середні вибіркові $\overline{x_в} = 6$; $\overline{y_в} = 8$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Z = XY$

1) $\overline{z_в} = 48$; 2) $\overline{z_в} = 14$;

3); $\overline{z_в} = 2$ 4) Інша відповідь?

№9. Для вибіркової сукупності X знайдено її вибіркову дисперсію $D_в = 6$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Z = X + 50$

1) $D_в(Z) = 6$; 2) $D_в(Z) = 56$;

3) $D_в(Z) = 44$; 4) Інша відповідь?

№10. Для вибіркових сукупностей X та Y знайдені її вибіркові дисперсії $D_в(X) = 14$, $D_в(Y) = 6$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Z = X - Y$

1) $D_в(Z) = 8$; 2) $D_в(Z) = 20$;

3) $D_в(Z) = 84$; 4) Інша відповідь?

№11. Для вибіркової сукупності X знайдено вибіркову дисперсію $D_в(X) = 7$. Яке з тверджень є справедливим:

Для вибіркової сукупності $Z = 5X$

1) $D_в(Z) = 175$; 2) $D_в(Z) = 35$;

3) $D_в(Z) = 12$; 4) Інша відповідь?

№ 12. Для дослідження генеральної сукупності утворена вибіркова сукупність, при цьому її середня вибіркова $\overline{x_в}$ співпала з середньоквадратичним відхиленням $\sigma_в$.

Яке з тверджень є справедливим:

Відповідний теоретичний розподіл, можливо, є

1) нормальним;

2) пуассонівським;

3) показниковим;

4) інша відповідь?

№ 13. Для заданого статистичного розподілу з 10 інтервалами розглядається гіпотеза про узгодження з нормальним законом.

Яке з тверджень є справедливим:

Число степенів вільності

1) $q = 7$; 2) $q = 8$;

3) $q = 9$; 4) інша відповідь?

№ 14. Статистичний розподіл величини X має 12 інтервалів, у кожному з яких частоти $m_i \geq 5$.

При перевірці гіпотези про нормальний закон розподілу знайдена величина $\chi^2 = 18$.

Яке з тверджень є справедливим:

Гіпотезу про нормальний закон розподілу немає підстав відхилити, якщо рівень значимості

1) $\alpha = 0{,}05$; 2); $\alpha = 0{,}01$

3) $\alpha = 0{,}005$; 4) інша відповідь?

№ 15. Статистичний ряд розподілу має вигляд

X	25,16	28,16	31,46	34,16	37,126	40,16
m	5	20	50	45	20	17

Яке з тверджень є справедливим:

Для знаходження числових характеристик вибіркової сукупності методом добутків необхідно перейти до умовних варіант u_i

1) $u_i = \frac{x_i - 5}{3}$; 2) $u_i = \frac{x_i - 50}{3}$

3) $u_i = \frac{x_i - 50}{50}$ 4) Інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

Варіанти 1-25

Зроблено $n = 200$ незалежних дослідів, у яких за допомогою еталонної напруги v_0 калібрувалась шкала вольтметра. Результати дослідів (показання на шкалі вольтметра), подані в табл. 1, є спостереженими значеннями випадкової величини V. Помилка вимірів $X = V - v_0$ також випадкова величина. Її математичне сподівання m називається систематичною помилкою приладу.

Скласти таблицю спостережених значень помилки вимірів X і зробити наступну обробку цих дослідних даних.

1. Результат первинної обробки дослідних даних подати у вигляді розподілу вибірки.

2. Виконати розрахунок і графіки гістограми та емпіричної функції розподілу.

3. Знайти оцінки для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

4. Зробити розрахунок довірчих інтервалів для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для довірчої ймовірності β .

5. Виписати формули для функції і щільності передбачуваного закону розподілу випадкової величини X, отримані в результаті вирівнювання статистичного розподілу.

6. Перевірити гіпотези про теоретичний розподіл випадкової величини X за допомогою критерію Пірсона на рівні значимості α.

7. Скласти зведену таблицю результатів основних розрахунків. Значення параметрів $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$, що фігурують у табл. 1, як і інших вихідних величин еталонної напруги v_0, довірчої ймовірності β і рівня значимості α, подані для відповідних варіантів у табл. 2. Число часткових інтервалів n вибрати рівним 10.

Варіанти 26-50

Зроблено $n = 200$ вимірів часу роботи одного з радіотехнічних елементів. Результати вимірів представлені в табл. 3.

Зробити наступну обробку цих дослідних даних.

1. Результат первинної обробки дослідних даних подати у вигляді розподілу вибірки.

2. Виконати розрахунок і графіки гістограми та емпіричної функції розподілу.

3. Знайти оцінки для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

4. Зробити розрахунок довірчих інтервалів для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для довірчої ймовірності β .

5. Виписати формули для функції і щільності передбачуваного закону розподілу випадкової величини X, отримані в результаті вирівнювання статистичного розподілу.

6. Перевірити гіпотези про теоретичний розподіл випадкової величини X за допомогою критерію Пірсона на рівні значимості α.

7. Скласти зведену таблицю результатів основних розрахунків. Значення параметрів γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6, γ_7, що фігурують у табл. 3, як і інших вихідних величин – довірчої ймовірності β і рівня значимості α, подані для відповідних варіантів у табл. 4.

Число часткових інтервалів вибрати рівним 10.

Варіанти 51-75

Зроблено $n = 200$ вимірів різниці фаз випадкового й опорного сигналу в різні моменти часу. Результати вимірів представлені в табл. 5.

Зробити наступну обробку цих дослідних даних.

1. Результат первинної обробки дослідних даних подати у вигляді розподілу вибірки.

2. Виконати розрахунок і графіки гістограми та емпіричної функції розподілу.

3. Знайти оцінки для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

4. Зробити розрахунок довірчих інтервалів для математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для довірчої ймовірності β .

5. Виписати формули для функції і щільності передбачуваного закону розподілу випадкової величини X, отримані в результаті вирівнювання статистичного розподілу.

6. Перевірити гіпотези про теоретичний розподіл випадкової величини X за допомогою критерію Пірсона на рівні значимості α.

7. Скласти зведену таблицю результатів основних розрахунків.

Значення параметрів γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6, γ_7, що фігурують у табл. 6, як інших вихідних величин – довірчої ймовірності β і рівня значимості α, подані для відповідних варіантів у табл. 6. Число часткових інтервалів вибрати рівним 10.

Вказівки до виконання комплексного завдання

1. Скласти таблицю спостережених значень величини X.

2. Визначити найменше $x_{\min}$ і найбільше $x_{\max}$ спостережені значення величини X. Проміжок $(x_{\min}, x_{\max})$ розбити на $r = 10$ часткових інтервалів (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, 10$, $x_1 = x_{\min}$, $x_{11} = x_{\max}$.

3. Визначити число спостережень m_i величини X у кожному з часткових інтервалів і обчислити відносні частоти p_i^*. Скласти таблицю розподілу вибірки.

4. Розрахувати гістограму та обчислити значення емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ на кінцях часткових інтервалів x_i за формулою (1.5). Результати звести в таблицю (див. табл. 3.3), побудувати відповідні графіки.

5. За формулами (1.9), (1.36), (1.49) обчислити оцінки математичного сподівання $\overline{x_в}$, дисперсії $D_в$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma_в$. Проміжні обчислення занести в таблицю (див. табл. 3.2).

6. За формулами (2.14) і (2.17) обчислити $\sigma_{\overline{x_в}}$ і $\sigma_{D_в}$. З табл. значень t_β (Додаток 2) для даної довірчої ймовірності визначити значення параметра t_β. За формулами (2.12), (2.15) і (2.19) побудувати довірчі інтервали $I_\beta^{(m)}$, $I_\beta^{(D)}$, $I_\beta^{(\sigma)}$.

7. Виписати формули для щільності $f(x)$ і функції $F(x)$ передбачуваного розподілу величини X, обчисливши попередньо оцінки параметрів цього розподілу. Зокрема, якщо передбачуваний закон – нормальний, то

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_в}\varphi\left(\frac{x-\overline{x_в}}{\sigma_в}\right), \quad F(x)=\Phi\left(\frac{x-\overline{x_в}}{\sigma_в}\right).$$

Якщо ж мова йде про рівномірний розподіл, то

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b^*-a^*}, & \text{якщо } a^*\le x\le b^*;\\ 0, & \text{якщо } -\infty<x<a^* \text{ та } b^*<x<+\infty;\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } -\infty<x<a^*;\\ \dfrac{x-a^*}{b^*-a^*}, & \text{якщо } a^*<x<b^*;\\ 1, & \text{якщо } b^*<x<+\infty.\end{cases}$$

де параметри a^* і b^* визначаються через знайдені раніше оцінки $\overline{x_в}$ і $\sigma_в$ за формулами (3.5).

Для показникового розподілу маємо:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^* e^{-\lambda^* x}, & \text{якщо } 0\le x<+\infty;\\ 0, & \text{якщо } -\infty<x<0;\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda^* x}, & \text{якщо } 0\le x<+\infty;\\ 0, & \text{якщо } -\infty<x<0.\end{cases}$$

де параметр λ^* визначається за формулою $\lambda^*=\dfrac{1}{\overline{x_в}}$.

Розрахувати значення $f(x)$ і $F(x)$ на кінцях часткових інтервалів. Графік $f(x)$ будується на рисунку, де подана гістограма, а графік $F(x)$ – на рисунку, де подана емпірична функція розподілу $F^*(x)$.

8. За формулою (3.4) обчислити теоретичні ймовірності p_i попадання величини X у часткові інтервали.

Результати розрахунків за пп. 7 і 8 зводяться в одну таблицю (див. табл. 3.4).

9. За знайденими $\overline{x_в}$, p_i та n обчислити значення χ^2 (див. табл. 3.5).

Визначити число ступенів вільності q за формулою (3.15) і знайти критичну точку $u = u(\alpha; q)$ розподілу χ^2 за табл. додатку 3.

10. Обчислити ймовірність $\hat{\alpha}$, з якою за рахунок чисто випадкових причин могла б з'явитися розбіжність $u(\hat{\alpha}, q)$ між гіпотетичним і статистичним розподілами більша, ніж обчислене значення χ^2. З цією метою з табл. додатку 3 за відомими q і $u = \chi^2$ ($u = u(\alpha\hat{};q)$) знайти відповідні значення ймовірності $\hat{\alpha}$.

11. Оформити остаточні результати розрахунків у вигляді зведеної таблиці (див. табл. 3.6 та 3.7).

Примітка. Проміжні розрахунки виконуються з точністю, необхідною для отримання остаточних результатів, – до третьої значущої цифри.

Таблиця 1

Результати вимірювань напруги в мкВ

(Значення величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ варіантів 1 – 25 подані в табл.2)

1,01	1,58	1,30	1,40	1,68	1,41	1,16	1,59	1,17	1,62
1,31	1,82	1,13	1,68	1,31	1,25	1,77	1,42 + γ_5	1,81	1,70
1,59	1,19	1,73	1,27	1,54	1,26	1,58	1,11	1,53	1,81
1,91	1,57	1,32 + γ_4	1,67	1,24	1,69	1,41	1,18	1,35	1,60
1,75	1,80	1,41+75	1,10 + γ_2	1,51	1,02	1,35	1,67 + γ_1	1,31	1,78
1,27	1,58	1,41	1,71	1,29	1,52	1,53	1,25	1,56	1,64
1,80	1,89	1,24	1,42	1,33	1,22 + γ_3	1,88	1,63 + γ_1	1,09	1,74
1,29	1,72	1,59	1,68	1,43	1,34	1,09	1,43	1,42 + γ_5	1,65
1,50	1,51	1,29	1,33	1,18	1,44	1,79	1,42 + γ_5	1,28	1,02
1,95	1,25	1,40 + γ_6	1,90 + γ_6	1,33 + γ_4	1,48	1,32	1,34	1,82	1,70
1,66	1,52 і	1,45	1,43	1,23+7з	1,71	1,26	1,54	1,28	1,61
1,36	1,44	1,60	1,33 + γ_4	1,64	1,39	1,52	1,39	1,43	1,73
1,90	1,92	1,11	1,53	1,24	1,55	1,46	1,35	1,23	1,60
1,76	1,34	1,54	1,45	1,72	1,39	1,75	1,19	1,83	1,65
1,08	1,86	1,84	1,27	1,49	1,49	1,28	1,74	1,47	1,96+7$_6$
1,85	1,35	1,56	1,24	1,51	1,46	1,12	1,44	1,13	1,62
1,44	1,93	1,35	1,37	1,48	1,34	1,55	1,37	1,97	1,73
1,67	ІДО	1,49	1,56	1,87	1,14	1,48	1,31 + γ_4	1,50	1,76
1,57	1,94 + γ_6	1,46	1,45	1,36	1,57	1,38	1,37	1,38	1,63
1,35	1,47	1,36	1,69 + γ_1	1,84	1,39	1,46	1,47	1,10 + γ_2	1,83

Таблиця 2

Числові значення величин, які входять в умову завдання для варіантів 1–25

№ варіанта	υ_0	β	α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
1	0	0,80	0,5	0	0	0,4	0,1	0	0
2	0	0,90	0,1	0	0	-0,1	-0,3	-0,4	0
3	0	0,85	0,5	0	0	0,4	0,2	0,6	0
4	0	0,90	0,2	0	0	0	0	-0,3	-0,9
5	0	0,80	0,1	-0,6	0	0	0,1	0	-0,4
6	0	0,85	0,2	0	0,4	0	0	0,2	-0,1
7	0	0,95	0,7	0	-0,1	0	0,2	0,2	0
8	0	0,88	0,3	0	0	0,3	0	0	-0,6
9	0	0,83	0,8	-0,1	-0,1	0	0	-0,2	0
10	0	0,97	0,5	0	0	0,3	0,2	0,2	0
11	0	0,86	0,3	0	0	0,5	0,3	0	-0,1
12	0	0,84	0,1	-0,6	0	0	-0,2	0	-0,5
13	0	0,94	0,2	0	0	0	0,2	0,2	-0,2
14	0	0,92	0,7	0	0,6	0,4	0	0	0
15	0	0,82	0,2	0	0	0	0	-0,2	-0,4
16	0	0,98	0,1	0	0,3	0,3	-0,2	0	0
17	0	0,93	0,3	0	0	0	0,4	0,4	-0,8
18	0	0,95	0,5	0	0	0	-0,3	0,5	0
19	0	0,87	0,2	0	0	0,3	0,4	0,4	-0,9
20	0	0,91	0,2	0	0	0	-0,3	0,1	-0,8
21	0	0,89	0,5	0	0	0	0	-0,3	-0,7
22	0	0,96	0,5	0	0	0	0	0,1	0
23	0	0,86	0,3	-0,6	0	0	0	0	-0,9
24	0	0,99	0,1	0	0	0	0,2	0	0
25	0	0,87	0,7	0	0	0	0,2	0,2	0

Таблиця 3

Результати вимірювань безвідмовної роботи радіотехнічного елемента

1,0	53	64	10	71	34	40	65	41	2,0
91	84	$1+\gamma_1$	33	50	4,0	51	20	77	32
54	60	92	61	12	31	1,0	51	20	49
78	25	9,0	21	95	52	$11+\gamma_2$	3,0	31	66
29	40	4,0	$52+\gamma_6$	41	8,0	42	2,0	$28+\gamma_3$	27
55	53	30	61	8,0	41	14	10	48	55
7,0	24	$9+\gamma_1$	11	21	4,0	12	39	9,0	3,0
54	$62+\gamma_7$	27	15	$38+\gamma_4$	14	$21+\gamma_3$	30	50	2,0
5,0	63	23	6,0	94	22	2,0	26	22	3,0
51	23	5,0	43	$11+\gamma_2$	13	4,0	12	11	$36+\gamma_4$
28	12	68	13	1,0	19	13	72	5,0	15
74	47	7,0	12	42	73	3,0	32	$6,0+\gamma_1$	56
38	6,0	17	$44+\gamma_5$	25	18	29	3,0	76	47
85	29	43	24	4,0	57	9,0	83	35	16
14	39	16	$2+\gamma_1$	22	17	24	7,0	86	3,0
37	$93+\gamma_7$	$15+\gamma_2$	45	8,0	44	14	49	1,0	35
16	23	4,0	25	6,0	1,0	48	32	2,0	26
15	$69+\gamma_6$	19	60	6,0	45	18	5,0	16	82
$75+\gamma_7$	7,0	24	19	33	81	22	26	$46+\gamma_5$	59
$22+\gamma_3$	45	18	27	$58+\gamma_7$	17	47	23	4,0	8,0

Таблиця 4

Числові значення, які входять в умову завдання для варіантів 26–50

№ варіанта	β	α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
26	0,80	0,05	10	20	10	0	0	0	0
27	0,82	0,10	0	0	0	0	-40	-20	-40
28	0,83	0,20	60	40	0	0	0	0	0
29	0,84	0,30	зо	70	10	-30	0	0	0
30	0,85	0,10	0	0	0	60	20	0	0
31	0,86	0,30	0	0	0	0	-40	-30	-40
32	0,87	0,50	0	0	0	0	-10	-30	0
33	0,88	0,05	10	20	0	0	0	10	0
34	0,90	0,10	зо	20	20	0	0	0	0
35	0,91	0,20	0	0	0	30	-40	-10	-10
36	0,92	0,30	90	70	40	0	-10	0	0
37	0,93	0,01	0	0	0	0	-40	-20	-50
38	0,94	0,05	30	0	0	0	-40	-50	0
39	0,95	0,10	0	0	30	60	-10	0	0
40	0,96	0,50	0	0	0	0	0	0	0
41	0,80	0,30	0	0	-20	0	-30	0	0
42	0,81	0,30	0	0	0	0	-10	-40	-50
43	0,82	0,50	10	-10	10	-10	10	-10	0
44	0,83	0,10	20	20	-20	0	-30	-10	0
45	0,84	0,30	0	0	10	-10	0	-50	-40
46	0,85	0,05	0	0	40	40	40	30	0
47	0,86	0,20	0	0	0	-30	-30	20	-20
48	0,87	0,10	0	10	0	20	-20	-10	10
49	0,88	0,30	50	0	30	0	0	10	0
50	0,89	0,20	0	0	-20	10	-30	0	-10

Таблиця 5

Результати вимірювань різниці фаз випадкового і опорного сигналів

0,11	0,46	1,81	$1,51+\gamma_3$	2,91	1,21	2,62	1,23	2,90	0,61
0,35	0,12	0,47	$1,71+\gamma_3$	1,52	2,42	1,91	2,91	0,62	2,73
2,83	$0,36+\gamma_1$	0,13	0,48	2,11	1,22	1,41	0,63	$1,56+\gamma_4$	2,44
2,64	2,65	$0,37+\gamma_1$	0,14	0,44	2,31	0,64	0,85	0,66	1,57
2,94	$2,32+\gamma_5$	$1,55+\gamma_4$	$0,38+\gamma_1$	0,15	$0,33+\gamma_1$	1,83	0,65	2,14	0,67
2,46	1,54	2,15+75	1,72	0,39	0,16	0,42	2,22	1,46	1,92
1,53	0,81	1,32	2,48	0,84	$0,40+\gamma_1$	0,17	$0,41+\gamma_2$	2,24	1,24
2,50	1,59	0,82	$1,60+\gamma_4$	1,25	1,58	$0,41+\gamma_2$	0,20	1,69	2,38
2,76	1,34	1,98	0,83	1,84	1,20	$2,13+\gamma_6$	$0,42+\gamma_1$	0,21	1,95
0,44	$0,45+\gamma_2$	0,51	0,58	0,46	$0,55+\gamma_2$	0,59	0,57	0,43	0,00
2,33	2,61	$0,93+\gamma_7$	1,85	0,98	1,36	1,10	1,67	0,23	1,68
2,78	0,92	2,35	$0,97+\gamma_7$	2,18	1,08	1,93	0,24	2,51	1,26
0,91	2,34	0,96	$2,26+\gamma_6$	1,06	2,19	0,25	2,00	1,38	2,77
2,84	0,95	1,94	1,04	1,66	0,26	2,16	1,27	2,01	2,37
0,94	2,28	1,02	2,53	0,28	1,86	1,61	2,02	2,85	1,16
2,96	1,00	$1,65+\gamma_4$	0,31	1,29	0,68	1,87	1,62	1,15	2,20
$0,99+\gamma_7$	2,30	0,32	1,28	2,03	0,74	0,66	1,14	1,64	2,84
2,85	0,33	2,36	$2,17+\gamma_6$	0,73	2,79	1,13	0,70	1,73	2,57
0,34	2,55	$1,76+\gamma_4$	0,72	2,82	1,12	1,62	1,88	1,75	2,12
1,77	2,81	0,71	1,90	1,11	2,97	1,74	2,59	2,81	1,20

Таблиця 6

Числові значення величин, які входять в умову завдання для варіантів 51–75

№ варіанта	β	α	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
51	0,80	0,20	0	-0,3	0	0	0	0,3	0
52	0,82	0,30	0,6	0	-0,3	0,3	0	0	1,8
53	0,83	0,50	0	0	-0,6	0	0,3	0	0
54	0,84	0,10	0,3	-0,3	0,9	-0,9	0	0	0
55	0,85	0,05	0	0	0	-0,6	0	-0,3	0,6
56	0,86	0,20	0	0	0	0	0,3	0,3	0,9
57	0,87	0,10	1,8	0	0	0	-0,9	0	1,5
58	0,88	0,05	0	0	0	1,2	0,3	0	-0,9
59	0,89	0,20	0,3	0,3	0,9	0	0	0	0,3
60	0,91	0,05	0	0	0	0	0	0	0
61	0,92	0,10	0	0	0	-0,3	0,6	0,6	0
62	0,93	0,50	1,5	1,5	0	0	0	0	-0,9
63	0,94	0,30	-0,3	0,3	-0,3	0,3	0	0	0
64	0,95	0,20	0	0	0	0,9	-0,3	0,3	0
65	0,96	0,10	0,9	1,5	0	0	0	-0,9	0
66	o, 8 o	0,05	0	0	0	-0,3	0	-2,1	1,8
67	0,81	0,10	0	0	-1,5	-1,5	-0,3	-0,3	0
68	0,82	0,20	0,6	0	0	0,3	0	0,3	0
69	0,83	0,30	0	2,1	0,9	0	0	0	1,2
70	0,84	0,05	0	2,4	0	0,3	0	-0,9	0
71	0,85	0,05	1,5	0,9	0	0,9	0	0	0
72	0,86	0,10	0	0	-0,9	-0,3	-0,9	0	0
73	0,87	0,20	1,5	1,5	-1,2	0,9	0	0	0
74	0,88	0,30	0	-0,3	1,2	0	0	0,3	0
75	0,89	0,50	0,9	0	0	-0,3	0	-2,1	1,8

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	-0,20	0,4207	-0,40	0,3446	-0,60	0,2743	-0,80	0,2119	-1,00	0,1587	-1,20	0,1151	-1,40	0,0808	-1,60	0,0548
-0,01	4960	-0,21	4168	-0,41	3409	-0,61	2709	-0,81	2090	-1,01	1563	-1,21	1131	-1,41	0793	-1,61	0537
-0,02	4920	-0,22	4129	-0,42	3372	-0,62	2676	-0,82	2061	-1,02	1539	-1,22	1112	-1,42	0778	-1,62	0526
-0,03	4880	-0,23	4090	-0,43	3336	-0,63	2643	-0,83	2033	-1,03	1515	-1,23	1093	-1,43	0764	-1,63	0516
-0,04	4840	-0,24	4052	-0,44	3300	-0,64	2611	-0,84	2005	-1,04	1492	-1,24	1075	-1,44	0749	-1,64	0505
-0,05	4801	-0,25	4013	-0,45	3264	-0,65	2578	-0,85	1977	-1,05	1469	-1,25	1056	-1,45	0735	-1,65	0495
-0,06	4761	-0,26	3974	-0,46	3228	-0,66	2546	-0,86	1949	-1,06	1446	-1,26	1038	-1,46	0721	-1,66	0485
-0,07	4721	-0,27	3936	-0,47	3192	-0,67	2514	-0,87	1922	-1,07	1423	-1,27	1020	-1,47	0708	-1,67	0475
-0,08	4681	-0,28	3897	-0,48	3156	-0,68	2483	-0,88	1844	-1,08	1401	-1,28	1003	-1,48	0694	-1,68	0465
-0,09	4641	-0,29	3859	-0,49	3121	-0,69	2451	-0,89	1867	-1,09	1379	-1,29	0985	-1,49	0681	-1,69	0455
-0,10	0,4602	-0,30	0,3821	-0,50	0,3085	-0,70	0,2420	-0,90	0,1841	-1,10	0,1357	-1,30	0,0968	-1,50	0,0668	-1,70	0,0446
-0,11	4562	-0,31	3783	-0,51	3050	-0,71	2389	-0,91	1814	-ЇДІ	1335	-1,31	0951	-1,51	0655	-1,71	0436
-0,12	4522	-0,32	3745	-0,52	3015	-0,72	2358	-0,92	1788	-1,12	1314	-1,32	0934	-1,52	0643	-1,72	0427
-0,13	4483	-0,33	3707	-0,53	2981	-0,73	2327	-0,93	1762	-1,13	1292	-1,33	0918	-1,53	0630	-1,73	0418
-0,14	4443	-0,34	3669	-0,54	2946	-0,74	2297	-0,94	1336	-1,14	1271	-1,34	0901	-1,54	0618	-1,74	0409
-0,15	4404	-0,35	3632	-0,55	2912	-0,75	2266	-0,95	1711	-1,15	1251	-1,35	0885	-1,55	0606	-1,75	0401
-0,16	4364	-0,36	3594	-0,56	2877	-0,76	2236	-0,96	1685	-1,16	1230	-1,36	0869	-1,56	0594	-1,76	0392
-0,17	4325	-0,37	3557	-0,57	2843	-0,77	2206	-0,97	1660	-1Д7	1210	-1,37	0853	-1,57	0582	-1,77	0384
-0,18	4286	-0,38	3520	-0,58	2810	-0,78	2177	-0,98	0,1635	-1,18	1190	-1,38	0838	-1,58	0571	-1,78	0375
-0,19	4247	-0,39	3483	-0,59	2776	-0,79	2148	-0,99	0,1611	-1,19	1170	-1,39	0823	-1,59	0559	-1,79	0367

Додаток 1 (продовження)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
-1,80	0,0359	-3,00	0,0014	0,20	0,5793	0,50	0,6915	0,80	0,7881	1,10	0,8643	1,40	0,9192	1,70	0,9554	2,00	0,9772
-1,81	0351	-3,10	0010	0,21	5832	0,51	6950	0,81	7910	1,11	8665	1,41	9207	1,71	9564	2,10	9821
-1,82	0344	-3,20	0007	0,22	5871	0,52	6985	0,82	7939	1,12	8686	1,42	9222	1,72	9573	2,20	9861
-1,83	0336	-3,30	0005	0,23	5910	0,53	7019	0,83	7967	1,13	8708	1,43	9236	1,73	9582	2,30	9893
-1,84	0329	-3,40	0003	0,24	5948	0,54	7054	0,84	7995	1,14	8729	1,44	9251	1,74	9591	2,40	9918
-1,85	0322	-3,50	0002	0,25	5987	0,55	7088	0,85	8023	1,15	8749	1,45	9265	1,75	9599	2,50	9938
-1,86	0314	-3,60	0002	0,26	6026	0,56	7123	0,86	8051	1,16	8770	1,46	9279	1,76	9608	2,60	9953
-1,87	0307	-3,70	0001	0,27	6064	0,57	7157	0,87	8078	1,17	8790	1,47	9292	1,77	9616	2,70	9965
-1,88	0301	-3,80	0001	0,28	6103	0,58	7190	0,88	8100	1,18	8810	1,48	9306	1,78	9625	2,80	9974
-1,89	0294	-3,90	0000	0,29	6141	0,59	7224	0,89	8133	1,19	8830	1,49	9319	1,79	9633	2,90	9981
-1,90	0,0288	0,00	0,5000	0,30	0,6179	0,60	0,7257	0,90	0,8159	1,20	0,8849	1,50	0,9332	1,80	0,9641	3,00	0,9986
-1,91	0281	0,01	5040	0,31	6217	0,61	7291	0,91	8186	1,24	8869	1,51	9345	1,81	9649	3,10	9990
-1,92	0274	0,02	5080	0,32	6255	0,62	7324	0,92	8212	1,22	8888	1,52	9357	1,82	9556	3,20	9993
-1,93	0268	0,03	5120	0,33	6293	0,63	7357	0,93	8238	1,23	8907	1,53	9370	1,83	9664	3,30	9995
-1,94	0262	0,04	5160	0,34	6331	0,64	7389	0,94	8264	1,24	8525	1,54	9382	1,84	9671	3,40	9997
-1,95	0256	0,05	5190	0,35	6368	0,65	7422	0,95	8289	1,25	8944	1,55	9394	1,85	9678	3,50	9998
-1,96	0250	0,06	5239	0,36	6406	0,66	7454	0,96	8315	1,26	8962	1,56	9406	1,86	9686	3,60	9998
-1,97	0244	0,07	5279	0,37	6443	0,67	7486	0,97	8340	1,27	8980	1,57	9418	1,87	9693	3,70	9999
-1,98	0239	0,08	5319	0,38	6480	0,68	7517	0,98	8365	1,28	8997	1,58	9429	1,88	9699	3,80	9999
-1,99	0233	0,09	5359	0,39	6517	0,69	7549	0,99	8389	1,29	9015	1,59	9441	1,89	9706	3,90	1,0000
-2,00	0,0228	0,10	0,5398	0,40	0,6554	0,70	0,7580	1,00	0,8413	1,30	0,9032	1,60	0,9452	1,90	0,9713		
-2,10	0179	0,11	5438	0,41	6591	0,71	7611	1,01	8437	1,31	9049	1,61	9463	1,91	9719		
-2,20	0139	0,12	5478	0,42	6628	0,72	7642	1,02	8461	1,32	9066	1,62	9474	1,92	9726		
-2,30	0107	0,13	5517	0,43	6664	0,73	7673	1,03	8465	1,33	9082	1,63	9484	1,93	9732		
-2,40	0082	0,14	5557	0,44	6700	0,74	7703	1,04	8508	1,34	9099	1,64	9495	1,94	9738		
-2,50	0062	0,15	5596	0,45	6736	0,75	7734	1,05	8531	1,35	9115	1,65	9505	1,95	9744		
-2,60	0047	0,16	5636	0,46	6772	0,76	7764	1,06	8554	1,36	9131	1,66	9515	1,96	9750		
-2,70	0035	0,17	5975	0,47	6808	0,77	7794	1,07	8577	1,37	9147	1,67	9525	1,97	9756		
-2,80	0026	0,18	5714	0,48	6844	0,78	7823	1,08	8599	1,38	9162	1,68	9535	1,98	9761		
-2,90	0019	0,19	5753	0,49	6879	0,79	7852	1,09	8621	1,39	9177	1,69	9545	1,99	9767		

Додаток 2. Таблиця значень t_β

β	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85
t_β	1,282	1,310	1,340	1,371	1,404	1,439
β	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	
t_β	1,475	1,513	1,554	1,597	1,643	
β	0,91	1,92	0,93	0,94	0,95	0,96
t_β	1,694	1,750	1,810	1,880	1,960	2,053
β	0,97	0,98	0,99	0,9973	0,999	
t_β	2,169	2,325	2,576	3,000	3,290	

Додаток 3

Критичні точки $u = u(\alpha, q)$ розподілу χ^2

q	α						
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,34	3,00	4,35
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,239	1,564	2,17	3,83	3,82	4,67	6,35
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34
20	8,26	9,24	10,58	12,44	14,58	16,27	19,34
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3

Додаток 3 (продовження)

q	α						
	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,9	48,3
23	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Додаток 4

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3387	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2757	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1876	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0983	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,054	0519	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0264	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*x*
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	OHO	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0015	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*x*

Навчальне видання

Стрелковська Ірина Вікторівна

Паскаленко Вікторія Миколаївна

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник для фахівців у галузі ІТ, які навчаються

за спеціальностями галузі 12 - Інформаційні технології

Українською мовою