МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ УКРАИНЫ
Государственный департамент по вопросам связи и информатизации

ОДЕССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ им. А.С. ПОПОВА

Кафедра высшей математики

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Одесса 2008

УДК **План НМИ 2007-2008 уч.г.**

Составители*: Паскаленко В.Н., Стрелковская И.В.*

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
высшей математики
и рекомендовано
к печати.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВЕКТОРЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

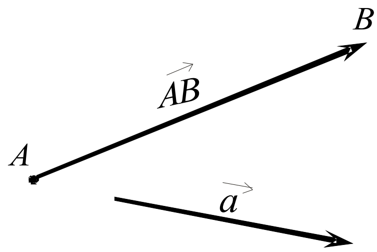


Рисунок 1.1

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок.

Векторы изображаются в виде отрезков со стрелками, указывающими направление вектора. Обозначаются векторы или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, … или $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,… .

Определение. Длина направленного отрезка называется **модулем** вектора.

Определение. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** вектором и обозначается $\vec{0}$.

Определение. Вектор, модуль которого равен единице длины, называется **единичным** вектором **или ортом** и обозначается $\vec{e}$, где $|\vec{e}| = 1$.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они имеют равные модули и при этом сонаправлены ($\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$).

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получаем вектор, равный данному.

Определение. Два вектора называются **противоположными**, если они имеют равные модули и противоположные направления.

Определение. Два вектора называются **коллинеарными**, если они находятся на параллельных прямых.

Определение. Три вектора называются **компланарными**, если они находятся на прямых, параллельных одной плоскости.

Будем считать, что:

1) нулевой вектор коллинеарен любому вектору;

2) нулевой вектор и любые два вектора компланарны;

3) нулевой вектор одновременно сонаправлен и противоположно направлен любому другому вектору.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1. Сложение векторов

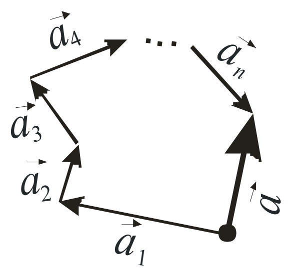


Рисунок 2.1

Определение. **Суммой** векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_n}$ называется такой вектор $\vec{a}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a_1}$, а конец – с концом вектора $\vec{a_n}$, при условии, что векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ образуют ломаную, в которой конец предыдущего вектора совпадает с началом следующего вектора (рис. 2.1).

Для сложения двух векторов используют так называемые правило треугольника и правило параллелограмма.

Правило треугольника

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является такой вектор $\vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2,а).

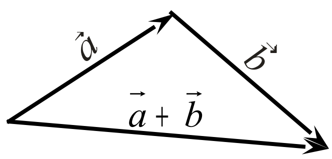


Рисунок 2.2,а

Правило параллелограмма

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, является вектор, лежащий на той из диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, как на сторонах, которая имеет с ними общее начало (рис. 2.2,б).

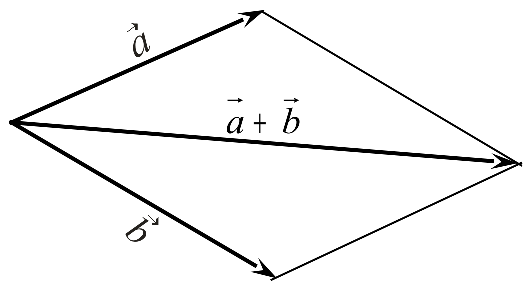


Рисунок 2.2,б

2.2. Вычитание векторов

Определение. **Разностью** $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ равен вектору $\vec{a}$.

Вычитание векторов можно выполнять по так называемым правилу треугольника или правилу параллелограмма.

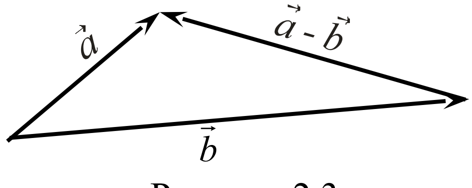


Рисунок 2.3

Правило треугольника

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, который соединяет конец вычитаемого с концом уменьшаемого и направлен в сторону уменьшаемого, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало (рис. 2.3).

Правило параллелограмма

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, является вектор, лежащий на той из диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

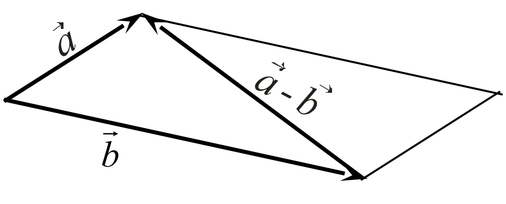


Рисунок 2.4

как на сторонах, которая соединяет их концы и направлена в сторону уменьшаемого (рис. 2.4).

2.3. Умножение вектора на число

Определение. **Произведением** вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется такой вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно направлен по отношению к вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$, при этом

$$\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|.$$

Такие операции над векторами, как сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число называются линейными операциями над векторами.

2.4. Свойства линейных операций над векторами

1. Сложение векторов коммутативно, то есть для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо следующее равенство

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

2. Сложение векторов ассоциативно, то есть для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо следующее равенство

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

3. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Это так называемое свойство поглощения нулевого вектора.

4. Для любого числа λ справедливо следующее равенство

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

5. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$0\vec{a} = \vec{0}.$$

6. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a},$$

то есть для любого вектора существует противоположный вектор.

7. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

8. Сложение векторов дистрибутивно относительно умножения на число, то есть для любого числа λ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо следующее равенство

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

9. Сложение векторов дистрибутивно относительно умножения на вектор, то есть для любых чисел λ и μ и любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

10. Умножение вектора на число ассоциативно относительно числового множителя, то есть для любых чисел λ и μ и любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

1. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов

Для того, чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало действительное число λ, удовлетворяющее условию $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Замечание. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq 0$, то число λ, удовлетворяющее условию $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, называется отношением векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$. При этом λ является числом положительным, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и отрицательныем, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Для не коллинеарных векторов понятие отношения не существует.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость свойств 1-11.

Пример 1. Задан параллелограмм $A_1A_2A_3A_4$. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O. Точки M_1 и M_2 являются соответственно серединами сторон A_2A_3 и A_1A_4. Построить следующие векторы: 1) $\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{OA_2}$;
2) $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_1} - \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{A_3A_4}$.

Решение

1) По правилу треугольника суммой векторов $\overrightarrow{OA_3}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$ является вектор $\overrightarrow{OA_4}$. Векторы $\overrightarrow{OA_4}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ имеют одинаковые модули, то есть $|\overrightarrow{OA_4}| = |\overrightarrow{OA_2}|$ и противоположно направлены; значит, $\overline{OA_4} = -\overline{OA_2}$. Тогда $\overline{OA_4} + \overline{OA_2} = -\overline{OA_2} + \overline{OA_2} = \vec{0}$. Таким образом, $\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{OA_2} =$
$= (\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4}) + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ (рис. 2.5).

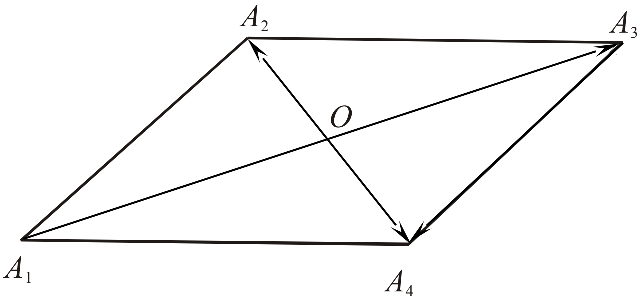


Рисунок 2.5

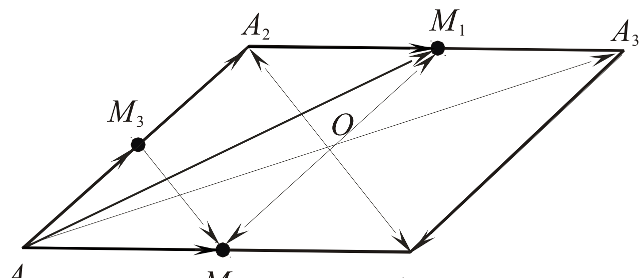


Рисунок 2.6

2) По правилу треугольника суммой векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2M_1}$ является вектор $\overrightarrow{A_1M_1}$. Дальше найдем сумму векторов $\overrightarrow{A_1M_1}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$.

$\overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1M_2}$.

Теперь отстроим вектор $\overrightarrow{OM_1}$ от точки A_1. Значит, $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{A_1M_3}$, где M_3 – середина отрезка A_1A_2. Тогда

$\overrightarrow{A_1M_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{A_1M_2} - \overrightarrow{A_1M_3} = \overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{OA_4}$ (рис. 2.6).

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{b}$

Пример 2. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на сторонах, построен параллелепипед. Выразить через векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ диагонали параллелепипеда, боковых граней и основания, имеющие общее начало с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение

Рассмотрим параллелограмм *OBMA,* лежащий в основании параллелепипеда (рис. 2.7). Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Боковые грани представлены параллелограммами *OADC* и *OBEC.* Значит, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{c}$.

Рассмотрим параллелограмм *OMFC*:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

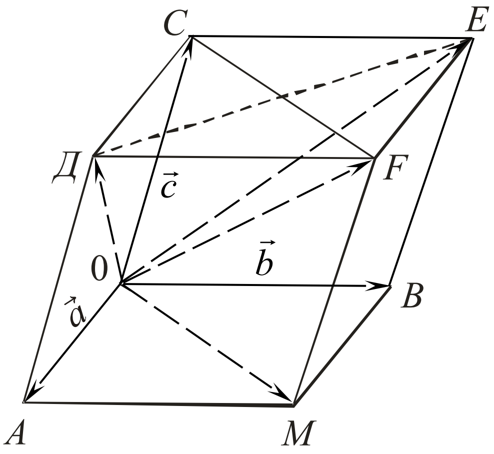


Рисунок 2.7

Пример 3. На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, построен параллелограмм. Проверить справедливость следующего равенства

$$(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}.$$

Решение

На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, построим параллелограмм *OACB*.

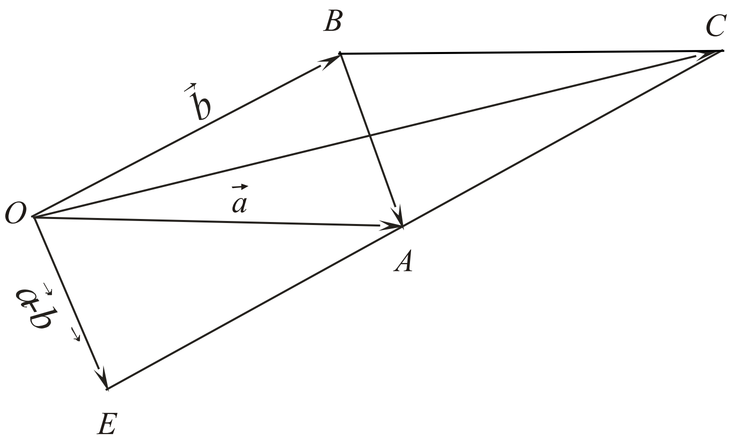


Рисунок 2.8

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

По правилу параллелограмма имеем $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$;

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$. От точки *O* отстроим вектор $\overrightarrow{OE} = \vec{a} - \vec{b}$. Вследствие такого построения получили треугольник *OEC*.

По правилу треугольника имеем $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EC}$, то есть

$(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}-\vec{b}) = \overrightarrow{EC}$.

Так как четырехугольник *OEAB* – параллелограмм по построению, то $|AE| = |BO| = |CA|$, значит, вектор $\overrightarrow{EC} = 2\vec{b}$. Таким образом, $(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}-\vec{b}) = = 2\vec{b}$.

Пример 4. На прямой L расположены точки M_1, M_2, M_3, ..., M_{10} таким образом, что $|M_1M_2| = |M_2M_3| = \ldots = |M_9M_{10}|$. Найти отношение векторов:
1) $\overrightarrow{M_8M_4} : \overrightarrow{M_{10}M_3}$; 2) $\overrightarrow{M_1M_5} : \overrightarrow{M_5M_3}$.

Решение

Примем в качестве масштабной единицы отрезок $|M_1M_2|$. Тогда
$|M_8M_4| = 4|M_1M_2|$; $|M_{10}M_3| = 7|M_1M_2|$; $|M_1M_5| = 4|M_1M_2|$; $|M_5M_3| = 2|M_1M_2|$.
Векторы $\overrightarrow{M_8M_4}$ и $\overrightarrow{M_{10}M_3}$ сонаправлены, значит, их отношение будет таким

$$\frac{\overrightarrow{M_8M_4}}{\overrightarrow{M_{10}M_3}} = \frac{4\,|M_1M_2|}{7\,|M_1M_2|} = \frac{4}{7}.$$

Векторы $\overrightarrow{M_1M_5}$ и $\overrightarrow{M_5M_3}$ противоположно направлены. Значит, их отношение будет таким

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_5}}{\overrightarrow{M_5M_3}} = -\frac{4\,|M_1M_2|}{2\,|M_1M_2|} = -2.$$

Пример 5. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{m_1} = \vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}$ и $\overrightarrow{m_2} = \sqrt{2}\vec{p} - 4\vec{q} + 2\sqrt{3}\vec{r}$

Решение

Проверим, существует ли отношение векторов $\overrightarrow{m_1}$ и $\overrightarrow{m_2}$.

$$\frac{\overrightarrow{m_1}}{\overrightarrow{m_2}} = \frac{\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}}{\sqrt{2}\vec{p} - 4\vec{q} + 2\sqrt{3}\vec{r}} = \frac{\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}}{\sqrt{2}(\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, векторы $\overrightarrow{m_1}$ и $\overrightarrow{m_2}$ коллинеарны и, к тому же, сонаправлены.

3. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

***Определение*. Осью** называется прямая, на которой задан единичный вектор и точка, определяющая начало отсчета.

Единичный вектор $\vec{e}$ и точка O однозначно определяют ось ℓ.

***Определение*. Алгебраической прямоугольной**

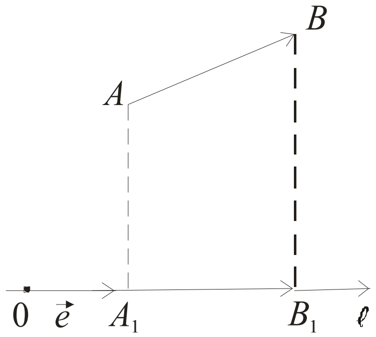


Рисунок 3.1

проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ называется число, которое равно модулю вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на оси ℓ, расположенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось ℓ;

это число берется со знаком плюс, если направлением вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направление оси ℓ и со знаком минус в противном случае (рис. 3.1).

Обозначение проекции:

$$\text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|.$$

***Определение*. Углом между осью и вектором** называется угол между двумя лучами, исходящими из одной точки, если направление одного луча совпадает с направлением оси, а направление другого луча совпадает с направлением вектора.

Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось ℓ равна произведению вектора $\vec{a}$ на косинус угла наклона вектора $\vec{a}$ к оси ℓ.

Доказательство

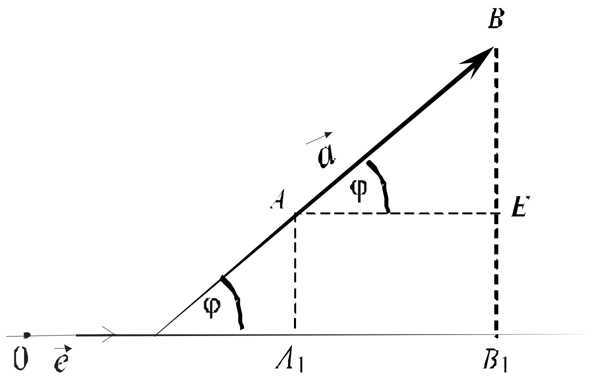


Рисунок 3.2

По условию, $\text{їð}_\ell \vec{a} = \text{їð}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}|$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 3.2). Построим прямую $AE \parallel \ell$. Из прямоугольного треугольника ABE имеем: $|AE| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$. Фигура A_1AEB_1 представляет собой прямоугольник, поэтому $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$. Выходит, что

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot \tag{3.1}$$

При этом,

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \text{ , если } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};$$

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = -|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \text{ , если } \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$$

Теорема 2. Если векторы равны, то их проекции на одну и ту же ось равны между собой.

Доказательство

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, равные между собой (рис. 3.3). Из равенства векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ выходит, что

$$\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}, \ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|.$$

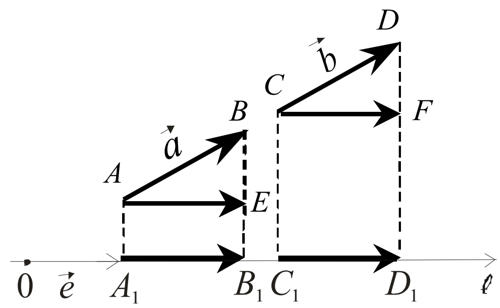


Рисунок 3.3

Построим вспомогательные прямые AE и CF, параллельные оси ℓ. Прямоугольные треугольники ΔABE и ΔCDF равны между собой по гипотенузе и острому углу. Тогда $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{CF}|$.

Фигуры A_1AEB_1 и C_1CFD_1 являются прямоугольниками, значит, $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{CF}\right| = \left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|$, откуда $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|$ или $\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_\ell \vec{b}$.

Примечание. $\vec{a} = \vec{b}$, значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и их проекции на ось имеют одинаковые знаки.

Теорема 3. Проекция суммы векторов на ось ℓ равна сумме проекций векторов на ось ℓ.

Доказательство

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. По условию, $\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_\ell \vec{b} = \text{пр}_\ell \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{B_1C_1}|$ (рис. 3.4). Построим вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Тогда

$\text{пр}_\ell(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \pm |\overrightarrow{A_1C_1}|$ и

$\text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{пр}_\ell \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}| + \left(\pm |\overrightarrow{B_1C_1}|\right)$.

В зависимости от взаимного расположения точек A_1, B_1, C_1 возможны случаи, изображенные на рис. 3.4.

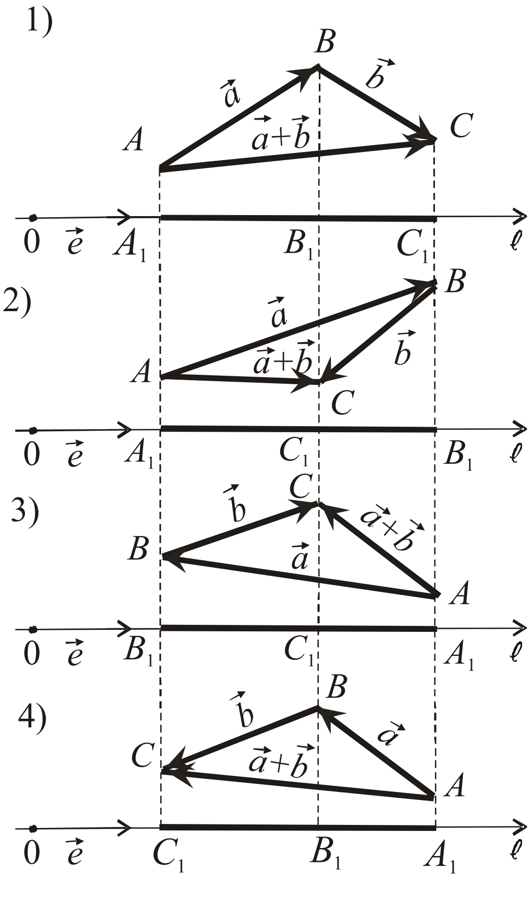


Рисунок 3.4

В случае 1) (рис. 3.4,1) имеем

$$\text{ïð}_{\ell}\vec{a}+\text{ïð}_{\ell}\vec{b}=\text{ïð}_{\ell}\overrightarrow{AB}+\text{ïð}_{\ell}\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{A_1B_1}|+|\overrightarrow{B_1C_1}|=$$
$$=|\overrightarrow{A_1C_1}|=\text{ïð}_{\ell}\overrightarrow{AC}=\text{ïð}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}).$$

В случае 2) (рис. 3.4,2) имеем

$$\text{ïð}_{\ell}\vec{a}+\text{ïð}_{\ell}\vec{b}=|\overrightarrow{A_1B_1}|-|\overrightarrow{B_1C_1}|=|\overrightarrow{A_1C_1}|=\text{ïð}_{\ell}\overrightarrow{AC}=$$
$$=\text{ïð}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}).$$

В случаем 3) (рис. 3.4,3) имеем

$$\text{ïð}_{\ell}\vec{a}+\text{ïð}_{\ell}\vec{b}=-|\overrightarrow{A_1B_1}|+|\overrightarrow{B_1C_1}|=-|\overrightarrow{A_1C_1}|=\text{ïð}_{\ell}\overrightarrow{AC}=\text{ïð}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}).$$

В случаем 4) (рис. 3.4,4) имеем

$$\text{пр}_{\ell}\vec{a}+\text{пр}_{\ell}\vec{b}=-|\overrightarrow{A_1B_1}|-|\overrightarrow{B_1C_1}|=-|\overrightarrow{A_1C_1}|=\text{пр}_{\ell}\overrightarrow{AC}=\text{пр}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Таким образом, доказано, что

$$\text{пр}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_{\ell}\vec{a}+\text{пр}_{\ell}\vec{b}. \tag{3.2}$$

Теорема 4. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось ℓ тоже умножается на число λ.

Доказательство

Построим векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\lambda\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 3.5).

Тогда $\text{пр}_{\ell}\vec{a}=\pm|\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_{\ell}(\lambda\vec{a})=\pm|\overrightarrow{A_1C_1}|$.

По условию

$$\frac{\pm|\overrightarrow{AC}|}{\pm|AB|}=\lambda.$$

Тогда по теореме Фалеса

$$\frac{\pm|\overrightarrow{A_1C_1}|}{\pm|A_1B_1|}=\lambda.$$

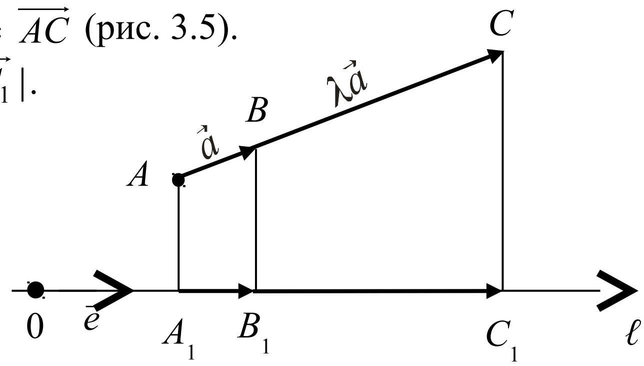


Рисунок 3.5

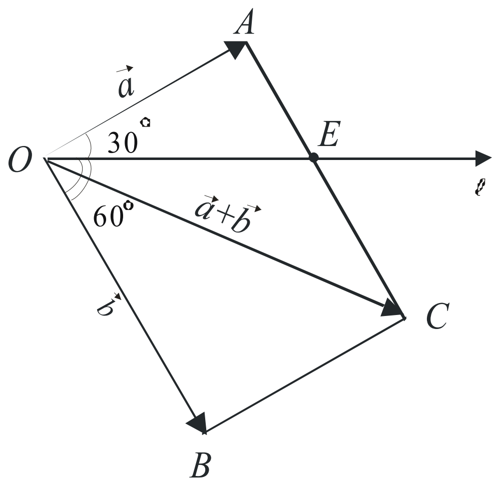
Отсюда,

$$\pm|\overrightarrow{A_1C_1}|=\pm\lambda|A_1B_1|$$

или

$$\text{пр}_{\ell}(\lambda\vec{a})=\lambda\,\text{пр}_{\ell}\vec{a}.$$

Пример 6. Заданы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и ось l. Известно, что $|a|=5$; $|b|=5\sqrt{3}$; $(\widehat{l;\vec{a}})=30^\circ$; $(\widehat{l;\vec{b}})=60^\circ$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположены по разные стороны от оси ℓ. Найти величину угла между вектором $(\vec{a}+\vec{b})$ и осью ℓ.



Решение

Рисунок 3.6.

Используя правило параллелограмма для сложения векторов, построим вектор $(\vec{a}+\vec{b})$ (рис. 3.6).

$$\text{пр}_\ell(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_\ell\vec{a} + \text{пр}_\ell\vec{b} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\ell;\vec{a}}) +$$

$$+ |\vec{b}|\cos(\widehat{\ell;\vec{b}}) = 5\cos 30^\circ + 5\sqrt{3}\cos 60^\circ =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

В то же время, $\text{пр}_\ell(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}|\cos\angle EOC$.

Найдем $|\vec{a}+\vec{b}|$ как длину диагонали параллелограмма *OACB*.

$$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Значит, параллелограмм *OACB* является прямоугольником. По теореме Пифагора из треугольника ΔOBC имеем

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Тогда

$$\cos\angle EOC = \frac{\text{пр}_\ell(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а сам угол между вектором $\vec{a}+\vec{b}$ и осью ℓ равен 30°.

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Определение. **Линейной комбинацией векторов** $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ называется вектор $\lambda_1\vec{\ell}_1 + \lambda_2\vec{\ell}_2 + ... + \lambda_n\vec{\ell}_n$, где $\lambda_k (k = 1,2,...,n)$ – какие-либо действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Определение. Векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая совокупность коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых хотя бы один отличается от нуля, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{\ell}_k = \vec{0}, \text{ где } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0.$$

Определение. Векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно только в том случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то есть,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{\ell}_k = \vec{0}, \text{ где } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 0.$$

Замечание. Равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 0$ эквивалентно равенству $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Теорема 1. Если среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то такие векторы линейно зависимы.

Доказательство

Пусть $\overrightarrow{\ell_1} = \vec{0}$. Составим нулевую линейную комбинацию заданных векторов с коэффициентами $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_n = 0$: $\lambda_1\overrightarrow{\ell_1} + 0\overrightarrow{\ell_2} + \ldots + 0\overrightarrow{\ell_n}$. Тогда очевидно, что $\lambda_1\vec{0} + 0\overrightarrow{\ell_2} + 0\overrightarrow{\ell_3} + \ldots + 0\overrightarrow{\ell_n} = \vec{0}$. В связи с тем, что $\lambda_1 \neq 0$, векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ – линейно зависимые векторы.

Теорема 2. Если среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ имеется p ($p \leq n$) линейно-зависимых векторов, то и векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$ также линейно-зависимы.

Доказательство

Пусть векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_p$ линейно-зависимы, то есть $\lambda_1\vec{\ell}_1 + \lambda_2\vec{\ell}_2 + ... + \lambda_p\vec{\ell}_p = \vec{0}$, и при этом $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0$. Составим следующую нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, ..., \vec{\ell}_n$: $\lambda_1\overrightarrow{\ell_1} + \lambda_2\overrightarrow{\ell_2} + \ldots + \lambda_p\overrightarrow{\ell_p} + 0\overrightarrow{\ell_{p+1}} + 0\overrightarrow{\ell_{p+2}} + \ldots + 0\overrightarrow{\ell_n}$.

Отсюда выходит, что

$$(\lambda_1\overrightarrow{\ell_1} + \lambda_2\overrightarrow{\ell_2} + \ldots + \lambda_p\overrightarrow{\ell_p}) + 0\overrightarrow{\ell_{p+1}} + 0\overrightarrow{\ell_{p+2}} + \ldots + 0\overrightarrow{\ell_n} = \vec{0}.$$

В этой нулевой линейной комбинации есть хотя бы один коэффициент, отличный от нуля, что следует из линейной зависимости первых p векторов. Значит, все векторы $\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}, \ldots, \overrightarrow{\ell_n}$ линейно-зависимы.

Теорема 3. Если среди векторов $\overrightarrow{\ell_1}$, $\overrightarrow{\ell_2}$, …, $\overrightarrow{\ell_n}$ один из векторов является линейной комбинацией остальных векторов, то векторы $\overrightarrow{\ell_1}$, $\overrightarrow{\ell_2}$, …, $\overrightarrow{\ell_n}$ линейно зависимы.

Доказательство

Пусть $\overrightarrow{\ell_n} = \lambda_1\overrightarrow{\ell_1} + \lambda_2\overrightarrow{\ell_2} + \ldots, \lambda_{n-1}\overrightarrow{\ell_{n-1}}$. Тогда имеем

$\overrightarrow{\ell_n} = \lambda_1\overrightarrow{\ell_1} + \lambda_2\overrightarrow{\ell_2} + \ldots, \lambda_{n-1}\overrightarrow{\ell_{n-1}} + (-1)\ \overrightarrow{\ell_n} = \vec{0}$.

Так как в этой нулевой линейной комбинации есть коэффициент $\lambda_n = -1 \neq 0$, то это означает, что векторы $\overrightarrow{\ell_1}$, $\overrightarrow{\ell_2}$, …, $\overrightarrow{\ell_n}$ – линейно зависимы.

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости двух векторов

Теорема 4. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Доказательство

I. Необходимость. Пусть векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ – линейно зависимые векторы. Докажем, что они коллинеарны. В соответствии с предположением о линейной зависимости векторов $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ имеем $\lambda_1\vec{\ell}_1 + \lambda_2\vec{\ell}_2 = \vec{0}$, где хотя бы один из коэффициентов отличается от нуля. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда, $\vec{\ell}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{\ell}_2$. Обозначим $\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = k$. Отсюда $\vec{\ell}_1 = k\vec{\ell}_2$, что говорит о коллинеарности векторов $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$.

II. Достаточность. Пусть $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ коллинеарные векторы. Докажем, что они линейно зависимы. Из предположения о коллинеарности векторов $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ следует, что существует такое число $k \neq 0$, что $\vec{\ell}_1 = k\vec{\ell}_2$ или $1\cdot\vec{\ell}_1 + (-k)\vec{\ell}_2 = \vec{0}$. Выходит, что векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ линейно зависимы.

Следствие 1. Для того, чтобы два вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Следствие 2. Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости трех векторов

Теорема 5. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Доказательство

I. Необходимость. Пусть векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ линейно зависимы. Докажем, что они компланарны. В соответствии с условием $\lambda_1\vec{\ell}_1 + \lambda_2\vec{\ell}_2 + \lambda_3\vec{\ell}_3 = \vec{0}$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \neq 0$.

Предположим, что $\lambda_3 \neq 0$, тогда $\vec{\ell}_3 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{\ell}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{\ell}_2$. Введем обозначения $k_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$, $k_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Тогда $\vec{\ell}_3 = k_1\vec{\ell}_1 + k_2\vec{\ell}_2$. Последнее равенство говорит о том, что вектор $\vec{\ell}_3$, как сумма векторов $k_1\vec{\ell}_1$ и $k_2\vec{\ell}_2$, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $k_1\vec{\ell}_1$ и $k_2\vec{\ell}_2$, как на сторонах. В связи с тем, что векторы $k_1\vec{\ell}_1$ и $k_2\vec{\ell}_2$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$, векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ лежат в одной плоскости, а значит, компланарны.

II. Достаточность. Пусть векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ компланарны. Докажем, что они линейно зависимы. Если среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ есть коллинеарные векторы, то по теореме 2 векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ линейно зависимы. Будем теперь считать, что среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ нет коллинеарных векторов. Отстроим эти векторы от одного начала (рис. 4.1). С конца вектора $\vec{\ell}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$. Вследствие такого построения получим параллелограмм OA_1EB_1. Вектор $\overline{OA_1}$ коллинеарен вектору $\vec{\ell}_1$, а вектор $\overline{OB_1}$ коллинеарен вектору $\vec{\ell}_2$. Тогда существуют такие числа k_1, k_2, что $\overline{OA_1} = k_1\vec{\ell}_1$, $\overline{OB_1} = k_2\vec{\ell}_2$. Отсюда $\vec{\ell}_3 = k_1\vec{\ell}_1 + k_2\vec{\ell}_2$ или $k_1\vec{\ell}_1 + k_2\vec{\ell}_2 + (-1)\vec{\ell}_3 = \vec{0}$, что и подтверждает линейную зависимость векторов.

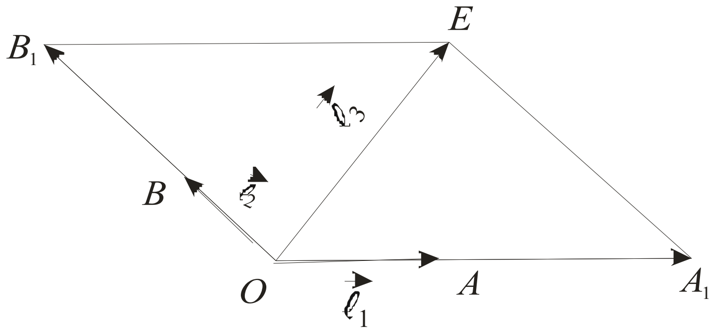


Рисунок 4.1

Следствие 1. Для того, чтобы три вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Следствие 2. Среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов.

Следствие 3. Для того, чтобы векторы были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Теорема 6. Любые четыре векторы линейно зависимы.

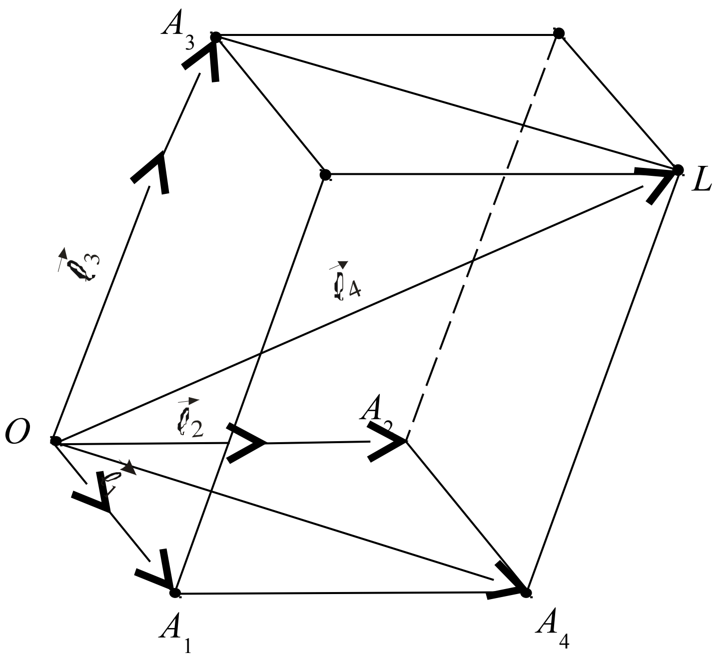


Рисунок 4.2

Доказательство

Пусть среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ есть три компланарных вектора. Тогда, по теореме 2, векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ линейно зависимы. Теперь будем считать, что среди векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ нет компланарных.

Пусть векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ приведены к общему началу O (рис. 4.2).

Построим такой параллелепипед, для которого точка O является одной из вершин, а отрезок $|OL|$ является одной из диагоналей и при этом $\overrightarrow{OL} = \vec{\ell}_4$. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $OA_1A_4A_2$ такой, что на отрезке $|OA_1|$ лежит вектор $\vec{\ell}_1$. На отрезке $|OA_2|$ лежит вектор $\vec{\ell}_2$, а на отрезке $|OA_3|$ лежит вектор $\vec{\ell}_3$. Значит, векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ параллельны соответственно сторонам $|OA_1|$, $|OA_2|$, $|OA_3|$ параллелепипеда. Из условия коллинеарности векторов $\vec{\ell}_1 \parallel \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{\ell}_2 \parallel \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{\ell}_3 \parallel \overrightarrow{OA_3}$ выходит, что существуют такие числа λ_1, λ_2, λ_3, которые удовлетворяют следующим равенствам $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\vec{\ell}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \lambda_2\vec{\ell}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \lambda_3\vec{\ell}_3$.

Рассмотрим параллелограмм $OA_1A_4A_2$. Очевидно, что $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Рассмотрим теперь параллелограмм OA_4LA_3. Очевидно, что $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_3}$. Принимая во внимание предыдущее равенство, приходим к выводу, что

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

или

$$\overrightarrow{\ell_4} = \lambda_1\vec{\ell}_1 + \lambda_2\vec{\ell}_2 + \lambda_3\vec{\ell}_3.$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{\ell_4}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$, что в соответствии с теоремой 3 свидетельствует о линейной зависимости векторов $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$.

Пример 7. На ребрах треугольной пирамиды $ABCS$ расположены векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Найти линейно зависимые и линейно независимые векторы.

Решение

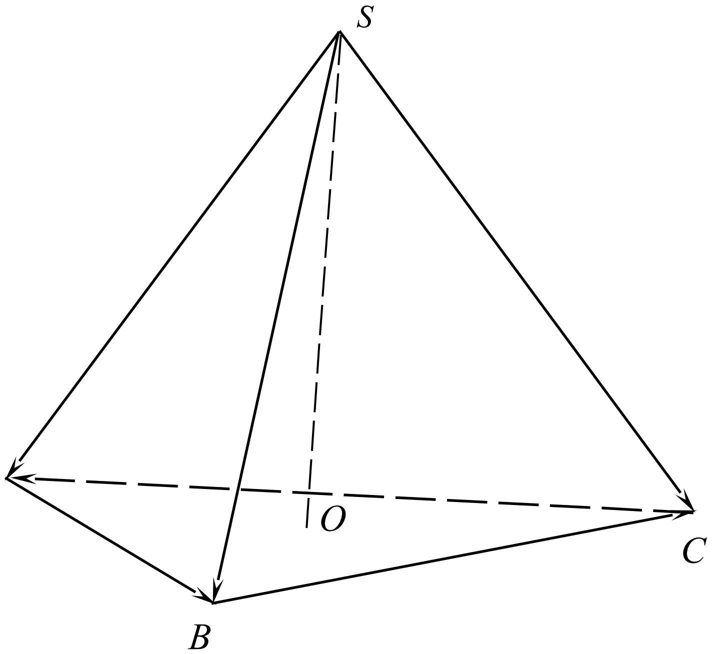


Рисунок 4.3

Рассмотрим следующие пары векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

Указанные пары векторов – это не коллинеарные векторы. Значит, в соответствии со следствием из теоремы 4, имеем пары линейно независимых векторов.

Среди ребер пирамиды имеются следующие тройки компланарных векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$. В соответствии с теоремой 5 указанные тройки векторов линейно зависимы. Векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ не компланарны. В соответствии со следствием 1 из теоремы 5 векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ линейно независимы.

Теперь рассмотрим следующие четверки векторов: $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

В соответствии с теоремой 6 все указанные четверки векторов линейно зависимы.

5. БАЗИС НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. **Базисом на плоскости** называются любые два линейно не зависимых вектора, выбранные в определенном порядке.

Определение. **Базисом в пространстве** называются любые три линейно независимые вектора, выбранные в определенном порядке.

Теорема 1. Если на плоскости векторы $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ образуют базис, то любой компланарный с ними вектор $\vec{a}$, можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство

В соответствии с условием векторы $\vec{a}$, $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ компланарны, а значит, они линейно зависимы. Тогда один из векторов можно представить в виде линейной комбинации двух других неколлинеарных векторов

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 . \tag{5.1}$$

Докажем теперь, что разложение (5.1) единственно. Для этого предположим, что имеет место равенство

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{\ell}_1 + \mu_2 \vec{\ell}_2 . \tag{5.2}$$

Почленно вычитая из равенства (5.1) равенство (5.2), получим нулевую линейную комбинацию

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{\ell}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{\ell}_2 . \tag{5.3}$$

По условию векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ линейно независимы, поэтому равенство (5.3) возможно лишь в том случае, когда

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 - \mu_2 = 0,$$

а это равносильно условиям $\lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 = \mu_2$, из чего следует единственность разложения.

Теорема 2. Если в пространстве векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ образуют базис, то любой вектор $\vec{a}$ пространства можно единственным образом представить в виде их линейной комбинации.

Доказательство

Из теоремы 6 (п. 4) следует, что если $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ – некомпланарные векторы, то любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде их линейной комбинации

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3 . \tag{5.4}$$

Докажем теперь, что это разложение единственное. С этой целью предположим, что имеет место равенство

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{\ell}_1 + \mu_2 \vec{\ell}_2 + \mu_3 \vec{\ell}_3 . \tag{5.5}$$

Вычитая почленно равенство (5.5) из равенства (5.4), получим нулевую линейную комбинацию

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{\ell}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{\ell}_2 + (\lambda_3 - \mu_3)\vec{\ell}_3 . \tag{5.6}$$

По условию векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ линейно независимы, поэтому равенство (5.6) возможно лишь в том случае, когда $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0$, $\lambda_3 - \mu_3 = 0$ или $\lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$. Тем самым доказана единственность разложения (5.4).

Определение. Если векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ образуют базис на плоскости, а вектор $\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2$, то числа λ_1 и λ_2 называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$, при этом используются обозначения

$$\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\} \text{ или } \vec{a} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} .$$

Определение. Если векторы $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ образуют базис в пространстве, а вектор $\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3$, то числа λ_1, λ_2, λ_3 называются **координата-**

ми вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$, при этом используются обозначения:

$$\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\} \text{ или } \vec{a} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}.$$

Базисов на плоскости и в пространстве существует бесчисленное множество. Один и тот же вектор в разных базисах имеет разные координаты.

Определение. Два вектора в одном базисе называются **равными**, если равны их соответствующие координаты.

Для удобства условимся использовать так называемый ортонормированный базис.

Определение. Базис, образованный единичными, взаимно перпендикулярными векторами, называется **ортонормированным базисом**.

Ортонормированные базисы в пространстве бывают левоориентированными и правоориентированными. Если при наблюдении с конца вектора $\vec{k}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{j}$ происходит в направлении против часовой стрелки, то базис, образованный векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, называется правоориентированным, а если по часовой стрелке – то левоориентированным (рис. 5.1).

Координаты вектора в ортонормированном базисе равны прямоугольным проекциям вектора на направление соответствующих базисных векторов.

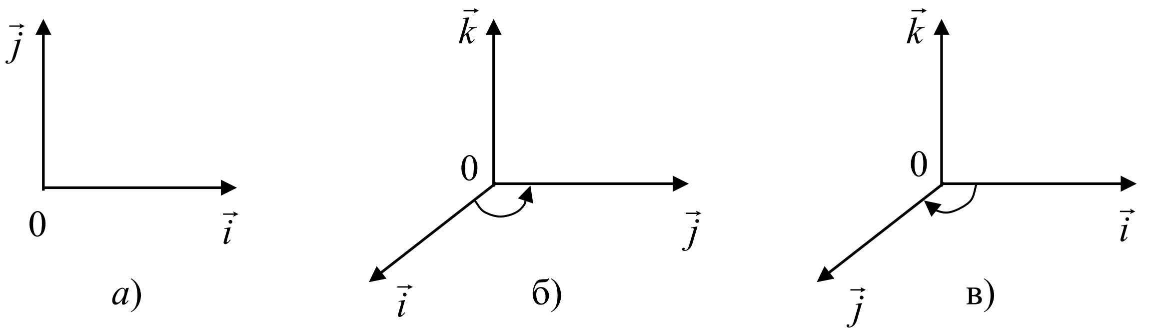


Рисунок 5.1

Пример 8. Задана равнобедренная трапеция $M_1M_2M_3M_4$. На большем основании M_1M_2 расположен вектор $\vec{\ell}_1$, а на боковой стороне M_1M_4 расположен вектор $\vec{\ell}_2$ так, что $|\vec{\ell}_1| = |M_1M_2| = \mu$, $|\vec{\ell}_2| = |M_1M_4| = \nu$. Углы при большем основании равны $\frac{\pi}{3}$. Считая векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ базисными векторами, выразить векторы, расположенные на других сторонах и диагоналях трапеции через базисные векторы.

Решение

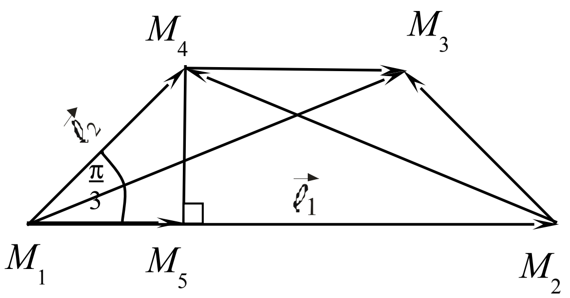


Рисунок 5.2

По условию $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\ell}_1$; $\overrightarrow{M_1M_4} = \vec{\ell}_2$; $|\vec{\ell}_1| = \mu$, $|\vec{\ell}_2| = \nu$.

Рассмотрим треугольник $M_1M_2M_4$. По правилу треугольника имеем:
$\overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1 = -\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$.

Рассмотрим треугольник $M_1M_4M_5$. Это прямоугольный треугольник, в котором $\angle M_5M_1M_4 = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $|M_1M_5| = = |M_1M_4| \cos\dfrac{\pi}{3}$ или $|M_1M_5| = \dfrac{1}{2}\nu$. Отсюда $|M_3M_4| = \mu - \nu$.

Рассмотрим отношение векторов $\overrightarrow{M_4M_3}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$. Так как эти векторы сонаправлены, имеем

$$\frac{\overrightarrow{M_4M_3}}{\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{\mu - \nu}{\mu}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu}\overrightarrow{M_1M_2}$$

или

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu}\vec{\ell}_1.$$

Рассмотрим треугольник $M_1M_3M_4$. По правилу треугольника получаем

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1M_4} + \overrightarrow{M_4M_3}$$

или

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{\ell}_2 + \frac{\mu - \nu}{\mu}\vec{\ell}_1 = \frac{\mu - \nu}{\mu}\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$

Наконец, рассмотрим треугольник $M_1M_2M_3$. По правилу треугольника выходит, что

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_3} - \overrightarrow{M_1M_2}$$

или

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu}\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1.$$

Окончательно имеем

$$\overrightarrow{M_2M_3} = -\frac{\nu}{\mu}\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$