МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Дослідження операцій

Операція – це дія або сукупність дій, підпорядкованих єдиному задуму та спрямованих на досягнення певної мети, яка має характер повторюваності, тобто багаторазовості.

Операція має дві особливості – цілеспрямованість і повторюваність. До того часу, доки мета не визначена, не існує й операції. Якщо ж мета визначена та існують різні шляхи, щоб її досягти, то бажано знайти найкращий із них. Повторюваність припускає встановлення закономірностей. Звідси виникає можливість проводити дослідження, які стосуються кількісних сторін операції. Операції можна вивчати в процесі дослідження як оригіналів, так і моделей операцій.

Дослідити операцію – означає знайти оптимальне рішення за наявності обмежень економічного, технічного характеру тощо. Оптимальними вважають ті рішення, які з тих чи інших міркувань кращі за інші. Отже, мета дослідження операцій – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Ефективність операції – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції. Для застосування кількісних методів дослідження потрібно побудувати математичну модель операції.

Математична модель – система математичних виразів, що описують характеристики об’єкта моделювання та взаємозв’язки між ними. За ступенем відповідності оригіналу моделі поділяють на ізоморфні та гомоморфні. Ізоморфні моделі строго відповідають оригіналу і подають про нього вичерпну інформацію. Для складних операцій модель можна побудувати лише після спрощених припущень. Моделі, які відбивають лише найсуттєві властивості оригіналу, називають гомоморфними.

Основні етапи, які є характерними для дослідження операцій, містять:

1. Визначення цілей.

2. Складання плану розроблення проекту, операції.

3. Формулювання проблем.

4. Побудову математичної моделі.

5. Розроблення обчислювального методу.

6. Розроблення технічного завдання на програмування, програмування та налагодження програми.

7. Збір даних.

8. Перевірку моделі.

9. Постоптимальний аналіз.

10. Реалізацію результатів.

Постановка задачі дослідження операцій

Обмеження математичної моделі задачі дослідження операцій відображають зв'язок керованих і некерованих змінних. Як правило, це система рівнянь і (або) нерівностей, які у сукупності визначають область припустимих рішень (область зміни керованих змінних). Іноді буває так, що область припустимих рішень нульова. Це означає, що досягнення поставленої мети при встановлених співвідношеннях керованих і некерованих змінних неможливе.

Критерій оптимальності – показник діяльності досліджуваного об'єкта, що має конкретний економічний (фізичний) зміст. За значенням цього критерію обирають таке рішення проблемної ситуації, що максимально задовольняє поставлену мету. Математична модель однієї задачі дослідження операцій може мати кілька критеріїв оптимальності.

Цільова функція – математична форма критерію оптимальності, вона пов'язує між собою мету розв'язування задачі дослідження операцій, керовані та умовно керовані змінні моделі.

Розглянемо загальну постановку задачі дослідження операцій у математичному вигляді. Деякі з таких кількісних характеристик бувають незмінними, сталими для певної операції чи певних умов. Позначимо їх c_k (k=1,…,l). Це і є параметри задачі. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні можна поділити на дві групи: керовані, значення яких можна змінювати (позначимо їх x_j (j=1,…,n); некеровані, значення яких визначаються комплексом зовнішніх умов (зовнішнім оточенням), або параметри системи y_r (r=1,…,s).

Розглянемо функціональну залежність між деякою величиною $f(X)$, якою вимірюють ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами операції:

$$f(X)=F(x_j, y_r, c_k).$$

Функція $f(X)$ є цільовою, або критерієм оптимальності, оскільки її значення є мірою ефективності проведення операції після досягнення певної мети. Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j, які б надавали цільовій функції екстремального значення, тобто

$$f^*(X) = \underset{x_j}{extrem}\, F(x_j, y_r, c_k).$$

Проте можливості вибору керованих змінних x_j, завжди обмежені зовнішніми щодо операції умовами (енергетичними, матеріальними, людськими, грошовими ресурсами тощо), а також параметрами самої операції. Запишемо обмеження за допомогою математичних рівнянь і нерівностей:

$$g_i(x_j, y_r, c_k)\{\leq = \geq\} b_i, i = \overline{1,m}.$$

Цільова функція разом із системою обмежень складають математичну модель операції.

Методи дослідження операцій

Під час розв’язування задач дослідження операцій використовують різноманітний математичний апарат (рис. 1.2).

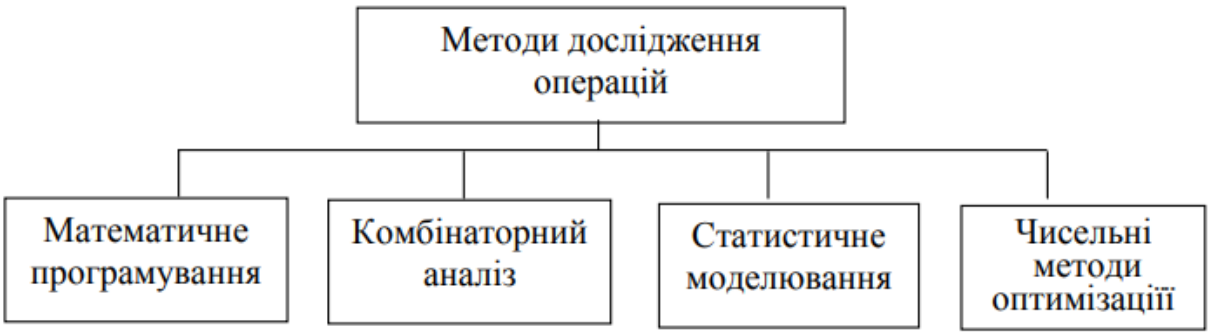


Рисунок 1.2 – Методи розв’язування задач дослідження операцій

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремальні задачі (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі ще називають оптимізаційними.

Математичне програмування відіграє дуже важливу роль, оскільки дозволяє вирішувати багато управлінських і організаційних задач оптимальним чином. Прикладом використання знань з математичного програмування може бути розв’язання таких виробничих задач: отримання максимального прибутку або випуску максимального об’єму продукції при заданих матеріальних, трудових, енергетичних або часових витратах; забезпечення планових показників підприємства при мінімальному розмірі фінансових вкладень; досягнення максимально короткого терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкту, товарообігу, виробничого циклу і тому подібного при існуючих або заданих виробничих ресурсах; вибір параметрів об’єкту або процесу, при яких забезпечується його максимальна корисність.

В наведених прикладах максимальний випуск продукції, максимальний прибуток, мінімальний розмір фінансових вкладень, максимально короткий термін, максимальна корисність − це є шукані оптимуми (максимуми або мінімуми), тобто результати, які при заданих умовах задачі неможливо перевершити.

Чисельні методи оптимізації в дослідженні операцій використовуються для розв'язування задачі оптимізації, що базується на точному або наближеному обчисленні значення функції мети. У результаті із заданою точністю знаходять наближення до розв'язання задачі – точки екстремуму функції, якщо така точка не єдина, то до множини точок екстремуму.

Статистичне моделювання досліджує процеси поведінки ймовірнісних систем за умов, коли внутрішні взаємодії у цих системах невідомі. Зміст задач статистичного моделювання полягає у відтворенні досліджуваного фізичного процесу за допомогою ймовірнісної математичної моделі і обчисленні характеристик цього процесу. У дослідженні операцій методи статистичного моделювання використовуються для розв'язування задач управління запасами, аналізу систем масового обслуговування.

Комбінаторний аналіз є інструментом розв'язання задач вибору і розміщенняя елементів деякої, як правило, скінченної, множини відповідно до заданих правил. В основу комбінаторних методів дослідження операцій покладено ідею перебору всіх допустимих рішень. Найбільш відомим комбінаторним методом є метод гілок і меж.

Математичне програмування

Класифікація задач математичного програмування

Основні поняття математичного програмування

Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Математичне програмування – один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов. **Математичне програмування** – це методи розв'язання задач оптимізації, де потрібно максимізувати або мінімізувати цільову функцію при дотриманні певних обмежень.

Цільова функція – це функція, значення якої необхідно оптимізувати (максимізувати або мінімізувати).

Обмеження – це рівняння або нерівності, що визначають допустимі значення змінних.

Кожна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично. Нехай z – обрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z=f(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l), \qquad (1)$$

де параметри c_k $(k=1,2,...,l)$ є кількісними характеристиками системи.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так: Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення). Отже, потрібно відшукати значення

$$max(min)z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_s;c_1,c_2,\ldots,c_1\ ). \quad (2)$$

Тут вхідні змінні економічної системи керовані x_j (j=1,2,...,n), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_r (r=1,2,...,s), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального – керована, а температура повітря – некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу – некерованою. Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Можливості вибору x_j, завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо. Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1,x_2,\ldots x_n;y_1,y_2,\ldots y_s;c_1,c_2,\ldots,c_l)\{\leq,=,\geq\}0, \quad (3)$$

де $i=1,2,\ldots,m$.

Система (3) називається системою обмежень, або системою умов задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n). \quad (4)$$

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають **допустимим планом**, або **планом**. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1). Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює область існування планів (область допустимих планів). План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається **оптимальним**. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування (2) – (4).

Види математичного програмування

1. **Лінійне програмування.** Моделі, де цільова функція та всі обмеження є лінійними функціями змінних.

Приклад: Розподіл ресурсів, де метою є максимізація прибутку або мінімізація витрат, при цьому обмеження можуть включати наявність матеріалів, робочої сили тощо.

Метод розв'язання: Графічний метод. Симплекс-метод.

2. **Нелінійне програмування.** Моделі, де цільова функція або обмеження є нелінійними.

Задачі квадратичного програмування – задачі, в яких необхідно знайти максимум чи мінімум квадратичної функції за умов, що її змінні задовольняють деяку систему лінійних обмежень (нерівностей чи рівнянь).

Задачі дробово-лінійного програмування – задачі, в яких цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій.

Задачі опуклого програмування – це задачі, розв'язком яких є максимум опуклої чи мінімум увігнутої функції.

Приклад: Оптимізація процесів у хімічній промисловості, де взаємодія між компонентами описується нелінійними рівняннями.

Метод розв'язання: Методи градієнтного спуску, методи Лагранжа, метод Ньютона та інші.

3. **Цілочисельне програмування.** Задачі, де деякі або всі змінні мають приймати цілочислові значення.

Приклад: Задача про рюкзак, де потрібно визначити, які предмети включити в рюкзак, щоб максимізувати загальну вартість, не перевищуючи заданої ваги.

Метод розв'язання: Метод гілок і меж, метод відсікання Гоморі.

4. **Задачі параметричного програмування** – задачі, в яких цільова функція або коефіцієнти системи обмежень залежать від деяких параметрів.
5. **Динамічне програмування**. Задачі динамічного програмування – задачі, процес розв'язання яких є багатоетапним. Рішення формується шляхом розбиття задачі на підзадачі і пошуку оптимальних рішень для підзадач.

Приклад: Оптимізація витрат на виробництво і постачання продукції, враховуючи попит на декілька періодів вперед.

Метод розв'язання: Рекурсивні формули для знаходження оптимальних рішень.

6. **Стохастичне програмування**. Моделі, де деякі параметри є випадковими величинами, і необхідно враховувати ймовірнісні фактори. Задачі стохастичного програмування – задачі, в яких цільова функція або система обмежень містять випадкові величини.

Приклад: Управління запасами, де майбутній попит є невизначеним, і потрібно мінімізувати витрати на зберігання та недостачу.

Метод розв'язання: Методи Монте-Карло, методи сценаріїв.

7. **Задачі масового обслуговування** розглядають питання утворення та функціонування черг, що виникають у повсякденному житті. Наприклад, черги літаків, що йдуть на посадку, покупці у супермаркеті тощо. Черги виникають унаслідок того, що потік вимог (клієнтів на обслуговування) є випадковим і ним не можна управляти. Якщо кількість пристроїв обслуговування досить велика, то черги виникають нечасто, однак при цьому неминучі довготривалі простої обладнання. З іншого боку, якщо недостатня кількість пристроїв обслуговування, створюються черги й можливі великі втрати майбутніх звернень унаслідок очікування. Одне із можливих формулювань задачі масового обслуговування: визначити, яка кількість пристроїв масового обслуговування необхідна, щоб мінімізувати сумарні втрати, що очікуються від несвоєчасного обслуговування та простою обладнання.
8. **Задачі теорії ігор** займаються дослідженням конфліктних ситуацій. Під конфліктною ситуацією розуміють ситуацію, у якій стикаються протилежні інтереси двох і більше сторін. У цих задачах необхідно визначити такі стратегії (оптимальні) поведінки кожної зі сторін, які б призвели якщо не до виграшу, то хоча б до мінімального програшу.
9. **Комбіновані задачі** містять декілька типових задач одночасно.

Класичні моделі теорії ігор

Розглянемо деякі найвідоміші моделі.

Дилема в'язня. Двоє підозрюваних у злочині мають вибір: зізнатися або мовчати. Якщо обидва мовчать, вони отримують мінімальне покарання. Якщо один зізнається, а інший мовчить, то той, хто зізнався, отримує полегшення, а інший – максимальне покарання. Якщо обидва зізнаються, вони отримують середній термін ув'язнення. Ця модель ілюструє конфлікт між індивідуальною вигодою та груповим благом.

Гра «Яструб і голуб». Модель, що описує конфлікт між агресивною (яструб) та мирною (голуб) стратегіями. Вона використовується для вивчення еволюційних стратегій у природі, де різні поведінкові типи можуть співіснувати в популяції.

Гра «Ультиматум». Один гравець пропонує поділити суму грошей, а інший або приймає пропозицію, або відмовляється. Якщо пропозицію відхилено, обидва гравці нічого не отримують. Ця гра демонструє, як емоційні фактори та почуття справедливості можуть впливати на раціональність рішень.

Моделі теорії ігор застосовуються для прогнозування результатів переговорів між країнами. Дослідники використовують ці моделі для вивчення динаміки конфлікту та співпраці, таких як ядерне роззброєння чи розподіл природних ресурсів. В економіці

теорія ігор допомагає моделювати конкуренцію між компаніями на ринку. Наприклад, гра з ціноутворенням між двома фірмами (гра Курно) дозволяє оцінити, як компанії встановлюють ціни, щоб максимізувати прибуток у залежності від рішень конкурента.

За різними ознаками виділяють такі класи задач теорії ігор:

– по можливості гравців об'єднуватись у групи з відповідною координацією власних дій щодо інтересів усієї групи: кооперативні, некооперативні, гібридні;

– за рівністю стратегій: симетричні (якщо гравці поміняються місцями, їх виграші за одні й ті самі ходи не зміняться) та асиметричні;

– за наявністю можливості змінювати ресурси або фонд гри: ігри з нульовою та ненульовою сумами; прикладом гри з нульовою сумою є гра у покер, де один виграє всі ставки інших;

– за наявністю інформації про ходи суперника: паралельні та послідовні ігри; у паралельних іграх гравці ходять одночасно або вони не мають інформації про вибір суперника, поки він його не зробить;

– за повнотою інформації: ігри з повною та ігри з неповною інформацією; у грі з повною інформацією для кожного гравця відомі всі ходи до поточного моменту і можливі стратегії супротивника;

– за терміном тривалості гри: ігри зі скінченною та ігри з нескінченною кількістю кроків; ігри реального світу, як правило, скінченні, дослідження ігор з нескінченною кількістю кроків – поки що «забавка» математиків;

– за типом компонентів гри: дискретні та неперервні; для дискретних ігор характерна скінченна кількість гравців, стратегій, результатів тощо; якщо значення хоча б одного з компонентів належить множині дійсних чисел, то це диференціальні числа.

Приклади застосування математичного програмування в різноманітних галузях

Методи математичного програмування дозволяють знаходити ефективні рішення складних проблем, які неможливо вирішити аналітично.

1. **Економіка та фінанси**. Оптимізація інвестиційного портфеля з урахуванням ризиків і очікуваної прибутковості (лінійне та нелінійне програмування). Управління ланцюгами поставок та логістикою.
2. **Інженерія та технології**. Оптимізація процесів виробництва для зниження витрат і підвищення ефективності (цілочисельне та нелінійне програмування). Проєктування систем управління з мінімізацією витрат енергії.

3. **Біологія та медицина**. Оптимізація дозування ліків з урахуванням індивідуальних характеристик пацієнтів (нелінійне програмування). Планування експериментів для отримання максимального обсягу інформації (динамічне програмування).
4. **Екологія**. Оптимізація використання природних ресурсів з метою забезпечення сталого розвитку. Управління екосистемами для мінімізації впливу людської діяльності на навколишнє середовище.
5. **Соціальні науки**. Оптимізація розподілу бюджетів для соціальних програм (лінійне та цілочисельне програмування). Планування міських інфраструктур з урахуванням демографічних змін.

Типові економічні задачі, що розв'язуються методами математичного програмування

Розглянемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування.

Задача визначення оптимального плану виробництва. Для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний певний набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш). Деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача. Розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких

були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей. Розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення. Нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера. Розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої – вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 і необхідна кількість поживних речовин позначена A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо α_{ij} — кількість поживних речовин вигляду Ai в продукті виду Bj, β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \quad (1)$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 (\min) \qquad (2)$$

Оскільки, від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум. Математично такі задачі формулюються так: серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1) знайти такий, який надає функції (2) найменшого значення.

Задача 2. Фермер відгодовує два види тварин А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведені в таблиці. У ній також зазначені запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Скласти математичну модель операції.

Вид корму	**Витрати кормів на відгодівлю**		**Запаси кормів**
	тварини виду А	**тварини виду В**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Розв'язання. Кількість тварин виду А позначимо через $x1$, кількість тварин виду В через $x2$. Отже, визначено вектор керованих змінних $X=(x1,x2)$. Запишемо функцію прибутку:

$$F=16x1+6x2 \rightarrow \max.$$

Функція F виражає критерій оптимальності задачі у математичній формі – цільову функцію.

Складемо вектор некерованих змінних $B=(b1,b2,b3)=(180;240;426)$. За умовою задачі корм 1-го виду витрачається в кількості $2x1+3x2$, що не повинно перевищувати запаси цього виду корму, тобто 180. Маємо нерівність $2x1+3x2 \leq 180$. Аналогічні нерівності складаємо щодо інших видів кормів: $4x1+x2 \leq 240$; $6x1+7x2 \leq 426$.

Маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426. \end{cases}$$

Враховуючи, що кількість тварин не може бути від'ємним числом, запишемо систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Цільова функція і система обмежень разом становлять **математичну модель**. Отже, математична модель наведеної задачі має вигляд

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача планування виробництва у загальному вигляді. Для виготовлення n видів продукції використовується m видів ресурсів. Запаси ресурсів, норми витрат ресурсів за видами на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в табл. 1.2. Необхідно

1. Знайти такий план випуску продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальним.
2. Побудувати математичну модель задачі у загальному вигляді за даними таблиці 1.2.
3. Побудувати математичну модель для випадку двох видів продукції і трьох видів ресурсів; вхідні дані за варіантами взяти з табл. 1.3.

Таблиця 1.2

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції				**Запас ресурсу**
	P_1	P_2	…	P_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток від одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_n	

Таблиця 1.3

Варіант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
2	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
3	14	12	8	8	4	2	624	541	372	7	3

Лінійне програмування

Постановка задачі лінійного програмування

Під *задачею лінійного програмування* в загальному вигляді розуміють задачу знаходження екстремуму (мінімуму, максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Математична модель загальної задачі лінійного програмування формулюється так: *знайти такі числові значення змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *що перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію*

$$\max(\min)F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.1}$$

і задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

за умови невід'ємності змінних

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

Цю функцію називають ***цільовою функцією***, вона моделює поставлену в задачі мету.

Математична модель загальної задачі лінійного програмування може бути записаною у векторній формі: знайти екстремум функції

$$F(X) = CX \tag{2.4}$$

за умов

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n \{\leq, \geq, =\} B, \tag{2.5}$$

$$X \geq 0. \tag{2.6}$$

Тут $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, CX – скалярний добуток зазначених векторів; $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – m-вимірні вектори-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$; B – стовпець вільних членів.

Будь-який вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3), називається ***допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

План $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ називається ***опорним***, якщо система векторів A_j, $j=\overline{1:n}$ лінійно незалежна.

Опорний план $X=(x_1.x_2,...,x_n)$, називається ***невиродженим***, якщо він містить рівно m додатних компонент, та ***виродженим*** – у протилежному разі.

Опорний план $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, за якого цільова функція (2.1) набуває максимального (мінімального) значення, називається ***оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.***

У задачах лінійного програмування можна виділити два типи однорідних обмежень на вибір змінних: у вигляді лінійних нерівностей або у вигляді лінійних рівнянь. Крім того, для спрощення можна формулювати задачу лише для мінімуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити максимум функції $Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$, то це те саме, що шукати мінімум функції $Z_1=-Z=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n$.

Із цього випливають три ***форми запису задач лінійного програмування***:

1) загальна;
2) стандартна (симетрична);
3) канонічна.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум або мінімум;
– система обмежень складається з нерівностей і (або) рівнянь;
– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування у математичному вигляді подана формулами (2.1) – (2.3).

Стандартна (симетрична) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум;
– система обмежень складається з нерівностей виду "≤";
– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Стандартна форма запису задачі лінійного програмування має вигляд

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max, \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \tag{2.9}$$

або

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \ge b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \ge b_m. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0. \tag{2.12}$$

Канонічна (основна) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє такі умови:

– цільова функція спрямована на максимум;
– система обмежень складається з рівнянь із невід'ємною правою частиною;
– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Канонічна форма запису задачі лінійного програмування має вигляд

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max, \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \tag{2.14}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \tag{2.15}$$

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на -1, одержимо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$

то останню завжди можна звести до рівності, увівши *додаткову змінну* x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Аналогічно обмеження вигляду

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$$

зводиться до рівності, віднімаючи від лівої частини *додаткову змінну* x_{n+2}:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$$

$$(x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0).$$

Така заміна нерівностей рівняннями за допомогою введення додаткових змінних не змінить розв'язку початкової задачі.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно вміти:

– зводити задачу мінімізації до задачі максимізації; при переході від знаходження мінімуму функції до знаходження максимуму цієї самої функції (і навпаки) необхідно цю функцію помножити на -1, оскільки $\min F = -\max(-F)$;

– переходити від обмежень-нерівностей до обмежень рівнянь і навпаки; при переході від нерівності до рівняння в ліву частину обмеження вводиться додатна величина, що називається додатковою змінною. Додаткова змінна має знак «+», якщо нерівність вигляду «≤» або має знак «–», якщо нерівність вигляду «≥»;

– замінювати змінні, для яких не виконується умова невід'ємності; деяка змінна x_k замінюється різницею двох невід'ємних змінних u_k і v_k: $x_k = u_k - v_k$.

Задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічно й аналітично.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування застосовують у тих випадках, коли система обмежень і цільова функція містять не більше двох змінних. Розглянемо алгоритм цього методу на конкретному прикладі.

Математична модель задачи, в якій потрібно визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Фермер відгодовує два види тварин А і В. Для цього використовує три види кормів. Відомо: витрати корму кожного виду на одну тварину за видами; запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини.

Вид корму	**Витрати кормів на відгодівлю**		**Запаси кормів**
	тварини виду А	**тварини виду В**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Алгоритм графічного методу

1. У прямокутній системі координат будують прямі, рівняння яких одержують шляхом заміни у початковій системі обмежень знаків нерівності на знаки «=». Отже, система обмежень набирає вигляду

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 180, \\ 4x_1 + x_2 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 = 426. \end{cases}$$

2. Знаходять півплощини, що визначаються кожним з обмежень задачі. Для цього вибирають будь-яку точку площини, наприклад точку (0; 0). Підставляють її

координати у початкову нерівність. Якщо нерівність виконується, то обирають ту частину півплощини, в якій знаходиться точка (0; 0). Якщо ж нерівність не виконується – обирають частину площини, протилежну тій, де знаходиться обрана точка.

3. Знаходять багатокутник розв'язків як спільну частину визначених півплощин.

4. Будують вектор, який є градієнтом цільової функції – вектор С із координатами, що дорівнюють коефіцієнтам цільової функції. У нашому прикладі вектор із координатами (16; 6).

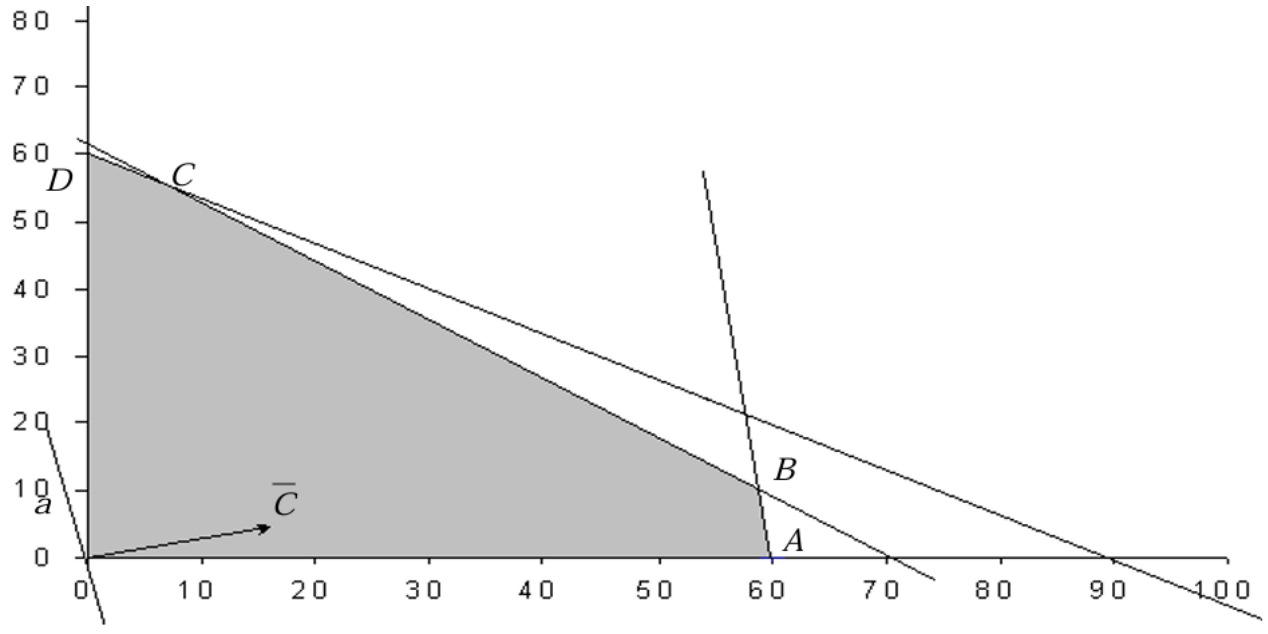
5. У будь-якому місці одержаного графіка проводять перпендикулярну до вектора С пряму a.

6. Уявно зміщуючи пряму а в напрямку вектора С , визначають першу та останню точки перетину цієї прямої з багатокутником розв'язків. Перша точка перетину є точкою мінімуму, остання – точкою максимуму.

7. Визначають координати точки максимуму (мінімуму) як точки перетину двох прямих, розв'язуючи систему відповідних лінійних рівнянь.

8. Визначають значення цільової функції в точці максимуму (мінімуму), підставляючи в цільову функцію координати точки максимуму (мінімуму). Виконуючи описані дії для наведеного прикладу, одержуємо OABCD – багатокутник розв'язків (рис. 2.1). Останньою точкою перетину прямої a з багатокутником розв'язків є точка В. Вона лежить на перетині прямих (1) і (2). Розв'язуючи систему з двох рівнянь, одержуємо координати точки $B\ (57;\ 12)$. Підставляючи координати цієї точки у цільову функцію, маємо $F = 57 \cdot 16 + 12 \cdot 6 = 984$.

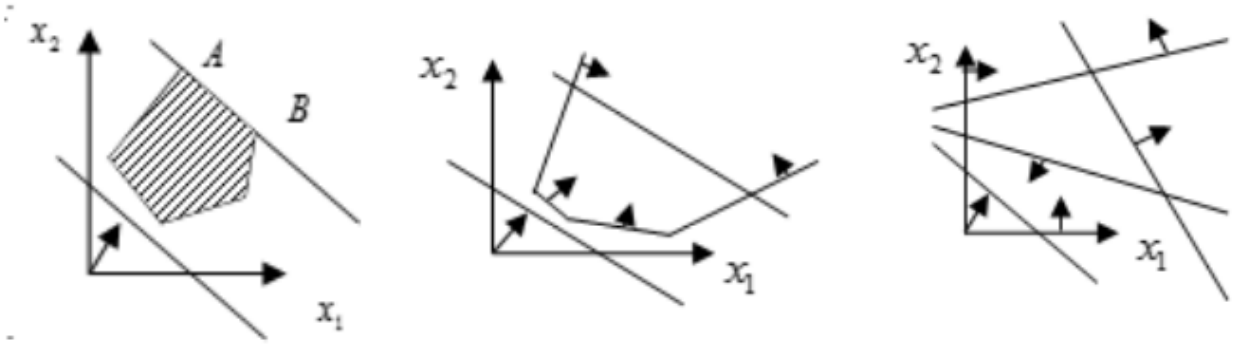
9. Отже, $F_{max} = 984 = \mathrm{F}(57\ ;\ 12)$. Фермер одержить максимальний прибуток у розмірі 984 грошових одиниць, якщо вирощуватиме 57 тварин виду А і 12 тварин виду В.



Окремі випадки графічного методу

Під час розв'язування задач лінійного програмування графічним методом може виникнути один із чотирьох наведених нижче випадків:

1) цільова функція набуває лише одного максимального (мінімального значення) в точці $B\,(57; 12)$ (рис. 2.1);



а) б) в)

Рисунок 2.2 – Окремі випадки багатокутника розв'язків

2) цільова функція набуває максимального (мінімального) значення на відрізку АВ (рис. 2.2 а). Це відбувається тоді, коли пряма a паралельна деякій зі сторін багатокутника розв'язку. У цьому разі всі точки даного відрізка будуть точками максимуму (мінімуму), причому цільова функція в усіх цих точках матиме однакове значення. Під час розв'язування задачі знаходять координати точок А і В та значення цільової функції у будь-якій із них;

3) цільова функція не обмежена зверху (знизу). У цьому разі вважають, що $F_{max} = \infty$ ($F_{min} = -\infty$) (рис. 2.2 б);

4) область обмежень несумісна, тобто немає жодної точки на площині, для якої виконувалися б одночасно всі нерівності системи обмежень (рис. 2.2 в). У цьому разі задача не має розв'язку.

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Алгоритм симплексного методу будемо розглядати на математичній моделі задачі про кількість тварин кожного виду, яких потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задачу лінійного програмування записують у канонічній формі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426, \end{cases}$$
$$xj \ge 0, \ldots (j = \overline{1,5}).$$

Алгоритм простого симплексного методу

I. Складають першу симплексну таблицю (знаходять допустимий план).

1. Визначають базисні змінні. Для цього:

а) виписують вектори з координатами, що відповідають коефіцієнтам системи обмежень при відповідних змінних:

$$P_1\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\quad P_2\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix},\quad P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad P_0\begin{pmatrix}180\\240\\426\end{pmatrix};$$

б) серед виписаних векторів знаходять ті, що становлять систему одиничних.

Нагадаємо, що одиничним називається вектор, в якого одна координата дорівнює одиниці, а всі інші – нулі. До *системи одиничних векторів* повинно входити стільки векторів, скільки координат має кожен із них, причому таких, що в першому одиниця знаходиться на першому місці, а всі інші координати – нулі; в другому одиниця знаходиться на другому місці, а всі інші – нулі й т. д. У цьому прикладі систему одиничних становлять вектори

$$P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Змінні, що відповідають одиничним векторам, називаються *базисними*. У даному разі це змінні x_3, x_4, x_5.

2. Заповнюють першу симплексну таблицю (табл. 2.1):

а) у стовпчик «Базис» записують базисні змінні;

б) стовпчик «$C_б$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) у стовпчик «План» записують координати вектора Р0;

г) над змінними $x_1, x_2, \ldots, x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

ґ) у стовпчики $X_1, X_2, \ldots, X_5$ заносять відповідно координати векторів $P_1, P_2, \ldots, P_5$;

д) заповнюють рядок (m + 1):

– на перетині (m+1)-го рядка і стовпчика «План» записують скалярний добуток векторів $\overline{План}$ і $\overline{C_б}$:

$$\overline{План} \cdot \overline{C_б} = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 426 = 0;$$

– на перетині (m + 1)-го рядка і стовпчиків $X_1, X_2, \ldots, X_5$ відповідно записують значення виразу: $\overline{C_б} \cdot \overline{P}_j - c_j$, де $j = \overline{1:5}$, а c_j – коефіцієнти цільової функції, записані у таблиці над змінними $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Так, наприклад, на перетині (m + 1)-го рядка і стовпчика X_1 записують число $\overline{C_б} \cdot \overline{P}_1 - c_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 - 16 = -16$

Таблиця 2.1

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0	Оцінне відношення
				X1	X2	X3	X4	X5	
1	x3	0	180	**2**	3	1	0	0	90
2	**x4**	**0**	**240**	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	60
3	x5	0	426	**6**	7	0	0	1	71
m + 1			0	**–16**	–6	0	0	0	

II. Оцінюють складений план на оптимальність. Можливі три випадки:

1) (m + 1)-й рядок не містить від'ємних елементів, отже, план вважається *оптимальним*, переходять до пункту V;

2) серед чисел (m + 1)-го рядка знаходяться від'ємні та у відповідному до деякого числа стовпчику немає жодного додатного; задача розв'язків не має;

3) серед чисел (m + 1)-го рядка знаходяться від'ємні, та в кожному відповідному до них стовпчику є хоча б одне додатне число. Це означає, що опорний план можна покращити, в цьому разі переходять до нової симплексної таблиці (пункт III).

III. Перехід до нової симплексної таблиці здійснюється заміною існуючого базису, що повинно привести до збільшення значення цільової функції. При цьому деяка змінна вилучається з базису, а замість неї вводиться інша.

1. Знаходження нового базису:

а) визначення змінної, що вводиться у новий базис: серед чисел (m + 1)-го рядка, що знаходяться у стовпчиках $X_1, X_2, ..., X_5$, розраховують найменше від'ємне. Стовпчик, в якому це число знаходиться, називається *ведучим*, а відповідна змінна вводиться у новий базис;

б) визначення змінної, що вилучається з базису: ділять почленно елементи стовпчика «План» на додатні елементи ведучого стовпчика. Одержані частки записують в стовпчик «Оцінні відношення» симплексної таблиці. Серед них знаходять найменшу. Рядок, якому вона відповідає, називається *ведучим*, а відповідна змінна вилучається з базису.

У нашому прикладі ведучим стовпчиком є стовпчик X_1, а ведучим рядком – рядок із номером 2. Отже, у новий базис замість змінної x_4 уводиться змінна x_1.

На перетині ведучого рядка і ведучого стовпчика знаходиться *ведучий елемент*, відносно якого виконують перерахунок елементів нової симплексної таблиці.

2. Заповнення нової симплексної таблиці (табл. 2.2):

а) у стовпчик «Базис» записують базисні змінні;

б) стовпчик «$C_б$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) над змінними $x_1, x_2, ..., x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

г) елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент і заносять до нової таблиці;

ґ) на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставлять одиниці, всі інші елементи базисних стовпчиків – нулі;

д) клітинки таблиці, що залишилися, заповнюють за правилом чотирикутника:

$$\textit{новий елемент} = \textit{попередній елемент} - \frac{\textit{відп. ел.} - \textit{т по рядку} \cdot \textit{відп. ел.} - \textit{т по стовпчику}}{\textit{ведучий елемент}}.$$

Для спрощеного знаходження відповідних елементів у рядку і відповідних елементів у стовпчику заштриховують ведучий рядок і ведучий стовпчик.

Проілюструємо обчислення на прикладі елемента (x_3, План):

$$(x_3, План)' = 180 - \frac{2 \cdot 240}{4} = 60,$$

де *180* – елемент табл. 2.1, що знаходився у клітинці (x_3, План);

2 – відповідний елемент у рядку; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з ведучим стовпчиком;

240 – відповідний елемент у стовпчику; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з ведучим рядком;

4 – ведучий елемент.

Таблиця 2.2

№ пор.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	**16**	**6**	**0**	**0**	**0**	**Оцінне відно-шення**
				X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	
1	x3	0	60	0	5/2	1	–1/2	0	24
2	x1	16	60	1	**j**	0	j	0	240
3	**x5**	**0**	**66**	**0**	11/2	**0**	–3/2	**1**	12
m + 1			960	0	**–2**	0	4	0	

IV. Оцінюють складений план на оптимальність, тобто переходять до п. II. Як бачимо з табл. 2.2, одержаний план нової симплексної таблиці не є оптимальним. Отже, знову знаходимо новий базис і переходимо до ще однієї симплексної таблиці (табл. 2.3).

Як бачимо, останній рядок не містить від'ємних елементів, отже, одержаний план є оптимальним.

Таблиця 2.3

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0	Оцінні відно-шення
				X1	X2	X3	X4	X5	
1	x3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11	
2	x1	16	57	1	0	0	7/22	–1/22	
3	x2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11	
m + 1			984	0	0	0	38/11	4/11	

V. Виписують одержану відповідь із стовпчика «План». На перетині (m + 1)-го рядка і стовпчика «План» знаходиться значення цільової функції. Інші елементи стовпчика «План» показують значення базисних змінних. Якщо змінна не ввійшла до базису, її значення дорівнює нулю.

У нашому прикладі $F_{max} = 984$ при таких значеннях базисних змінних: $x_1 = 57$, $x_2 = 12$, $x_3 = 30$. Фермер одержить максимальний прибуток розміром 984 гр. од., якщо буде відгодовувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. При цьому корм 1-го виду залишається у кількості 30 одиниць, а корми 2-го і 3-го видів використовуються повністю.

Зауваження.

1) при переході до нової симплексної таблиці елементи (m+1)-го рядка можна обчислювати не лише за правилом чотирикутника, а й за правилом їх знаходження під час складання першої симплексної таблиці;

2) якщо за умовою задачі цільова функція була спрямована на мінімум, то одержане кінцеве значення цільової функції із стовпчика «План» потрібно помножити на –1;

3) якщо не переходити від пошуку мінімуму до пошуку максимуму функції, то при застосуванні симплексного методу в (m+1)-му рядку вилучають додатні елементи; ведучий стовпчик визначається за найбільшим додатним числом (m+1)-го рядка; всі інші етапи симплексного методу аналогічні описаним вище.

Задача для самостійного розв'язання. Підприємець придбав приміщення у бізнес-центрі загальною площею 80 м^2. На ній обов'язково необхідно розмістити планово-економічний відділ, якому потрібно 20 м^2. Залишок площі підприємець може здати в оренду рекламній агенції, майстерні з ремонту одягу і/або кадровій агенції. На утримання зазначеної площі з урахуванням майбутніх надходжень від оренди підприємство може витратити не більше ніж 25 000 грн. У табл. 2.5 наведено дані щодо реальних витрат на утримання орендаторів, а також дані стосовно прибутку від здачі площі в оренду (з розрахунку на 1 м^2).

Відомий середній дохід з 1 м^2 площі для кожного орендатора. Власники рекламної агенції відразу попередили, що можуть взяти в користування вільну площу лише за умови, що їх загальний дохід буде не меншим ніж 30 000 грн. (з урахуванням середнього доходу з 1 м^2 площі). Визначити, як потрібно розподілити площу між претендентами на оренду, щоб прибуток власника був максимальним. Побудувати математичну модель задачі.

Таблиця 2.5

Варіант	Претенденти на оренду	Дохід претенден-та з 1 м^2 площі	Реальні витрати на утримання орендаторів (із розрахунку на 1м^2)	Прибуток власника з 1 м^2, грн
1	Рекламна агенція	3 000	420	16 000
2	Кадрова агенція	2 000	350	14 000
3	Майстерня з ремонту	2 000	350	10 000

Для розв'язання задачі можна використати програмне забезпечення для симплексного методу (наприклад, Excel, MATLAB, Python).

Математична модель двоїстої задачі

У теорії лінійного програмування для кожної задачі можна побудувати іншу – так звану двоїсту, або спряжену.

Нехай задана задача

$$
\begin{cases}
F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \\
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\
a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n = b_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{array}\right. \\
x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l}, l \le n).
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

Задача знаходження мінімального значення функції F^* за умов

$$
\begin{cases}
F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min, \\
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\
a_{1\,l+1}y_1 + a_{2\,l+1}y_2 + \ldots + a_{m\,l+1}y_m = c_{l+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m,
\end{array}\right. \\
y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,k}, k \le m).
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

називається задачею, двоїстою до даної.

Вихідна задача	***Двоїста задача***
$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	$d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$
$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j, j = \overline{1,n}; \\ z_i \ge 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$

Несиметрична пара двоїстих задач має вигляд:

Вихідна задача	***Двоїста задача***
1. $y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	1. $d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$	2. $z_i \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \quad i = \overline{1,m};$
3. $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$	3. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n};$

Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач

Існують залежності між розв'язками прямої та двоїстої задач, що формулюються у вигляді теорем.

Теорема 3.1 (перша теорема двоїстості): якщо одна з пар двоїстих задач (3.1) або (3.2) має оптимальний план, то й інша має оптимальний план, причому значення їх цільових функцій рівні між собою, тобто $F\max = F^*\min$.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то інша задача взагалі не має розв'язків.

Теорема 3.2 (друга теорема двоїстості для симетричних задач): план $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ задачі (3.1) і план $Y^* = (y^*_1, y^*_2, ..., y^*_m)$ задачі (3.2) є оптимальними планами цих задач тоді й лише тоді, якщо для будь-яких *i* та *j* *(j=1, 2, ..., n; i=1, 2, ..., m)* виконуються рівності:

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0,$$

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) y_i^* = 0.$$

Математична модель двоїстої задачі має такі особливості побудови:

1) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;

2) кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі;

3) коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі є праві частини співвідношень системи обмежень (вільні члени системи обмежень) прямої задачі;

4) цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, а цільова функція двоїстої задачі – до мінімуму;

5) матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі складається шляхом транспонування матриці коефіцієнтів при невідомих прямої задачі (транспонування матриці – заміна рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками);

6) правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомих цільової функції прямої задачі;

7) якщо змінна x_j прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень, то відповідне j-те обмеження двоїстої задачі має знак «≥»; якщо ж змінна x_j може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то j-те співвідношення системи обмежень двоїстої задачі має знак «=»;

8) якщо i-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то i-та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$; у протилежному разі змінна y_i може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Приклад 3. Розглянемо побудову двоїстої задачі про використання ресурсів. Згадаємо задачу про відгодівлю фермером тварин (приклад 1.1).

Припустимо, що деяке господарство вирішило викупити корми (ресурси). Фермерові необхідно встановити оптимальні ціни на ці корми. Позначимо через y_1 – ціну корму першого виду, y_2 – ціну корму другого виду, y_3 – ціну корму третього виду.

Загалом поняття ціни корму в цьому разі не збігається зі звичним для нас економічним поняттям ціни. У теорії двоїстості змінні y_1, y_2, y_3 є так званими двоїстими оцінками ресурсів. Вони показують розмір прибутку, який може дати одиниця певного ресурсу.

Очевидно, що господарство, яке закуповує корми, зацікавлене в тому, щоб витрати на них були мінімальними. Отже, цільова функція матиме вигляд $F^* = 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \to \min$.

З іншого боку, фермер у разі продажу кормів прагне отримати не менше грошей, ніж він би отримав, використовуючи ці корми на годівлю тварин. Тобто система обмежень матиме вигляд

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16, \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Отже, ми одержали нову модель задачі лінійного програмування, що має назву двоїстої до вихідної:

$$F^* = 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16, \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти за останньою із симплексних таблиць розв'язку прямої задачі.

До останньої симплексної таблиці розв’язання задачі про відгодівлю тварин додамо ще один рядок (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0
				X1	X2	X3	X4	X5
1	X3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11
2	X1	16	57	1	0	0	7/22	–1/22
3	X2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11
m + 1			984	0	0	0	38/11	4/11
				y_4^*	y_5^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

У цей рядок під додатковими змінними прямої задачі (x_3, x_4, x_5) вписують основні змінні двоїстої задачі (y_1, y_2, y_3).

І навпаки, під основними змінними прямої задачі (x_1, x_2) вписують додаткові змінні двоїстої задачі (y_4, y_5).

Розв'язок двоїстої задачі виписують із *(m + 1)*-го рядка. Над відповідними змінними знаходяться їх значення. Отже, $F_{min}^* = F_{max} = 984$ в точці $Y^*(0;\ 38/11;\ 4/11;\ 0;\ 0)$.

Розглянемо на прикладі 3.1 економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток розміром 984 грош. од. фермер отримає, якщо буде відгодовувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. Однак такий самий прибуток він отримає, якщо реалізує корми за оптимальними цінами, тобто весь корм другого виду за ціною 38/11 грош. од. і весь корм третього виду за ціною 4/11 грош. од.

Економічна інтерпретація другої теореми двоїстості для прикладу 3.1 полягає у такому. Якщо для виготовлення продукції кількістю, заданою оптимальним планом X*, певний ресурс витрачено не в повному обсязі, то відповідна двоїста оцінка такого ресурсу буде дорівнювати нулю і він не вважатиметься «цінним» для фермера. У протилежному разі (ресурс витрачено в повному обсязі) двоїста оцінка ресурсу буде додатною і він відповідно буде «цінним».

Визначимо економічний зміст основних та додаткових змінних двоїстої задачі в досліджуваному прикладі про фермера. Як зазначалося раніше, основні змінні прямої задачі показують ціну (оцінку) корму (сировини) певного виду. Отже, змінні, y_1^*, y_2^* та y_3^* показують двоїсті оцінки корму (сировини) відповідно I, II та III видів. Двоїсті оцінки сировини другого та третього видів додатні, це означає, що ці види сировини повністю використовуються у виробництві. Двоїста оцінка сировини першого виду дорівнює нулю. Це свідчить про те, що сировина першого виду використовується не повністю. Отже, двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини. Крім того, величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться прибуток підприємства при збільшенні сировини відповідного виду на одиницю.

Розтлумачимо економічний зміст двоїстої оцінки $y_2^* = \frac{38}{11}$. Якщо збільшити кількість корму II виду на одиницю, тобто якщо його кількість становитиме 241, то загальний прибуток збільшиться на $\frac{38}{11}$ і дорівнюватиме $984 + \frac{38}{11} = 987\frac{5}{11}$ грош. од. При цьому числа, що знаходяться у відповідному до змінної y_2^* стовпчику (табл. 2.5), показують, як при цьому зміниться план випуску продукції: залишок сировини першого виду збільшиться на $\frac{2}{11}$ і становитиме $30\frac{2}{11}$, кількість продукції 1-го виду збільшиться на $\frac{7}{22}$ і становитиме $57\frac{7}{22}$, кількість продукції другого виду зменшиться на $\frac{3}{11}$ і становитиме $29\frac{8}{11}$.

Аналогічно збільшення сировини третього виду на одиницю дозволить знайти новий оптимальний план виробництва.

Визначимо економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі. Розглянемо першу нерівність двоїстої задачі $2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16$.

Ліва частина нерівності $2y_1 + 4y_2 + 6y_3$ показує витрати (у грош. од.) на відгодівлю однієї тварини виду А (витрати на виробництво одиниці продукції певного виду); 16 – ціна від реалізації однієї тварини виду А (ціна одиниці

продукції). Перетворимо цю нерівність на рівняння. Уведемо додаткову змінну y_4: $2y_1 + 4y_2 + 6y_3 - y_4 = 16$.

Величина y_4 показує, на скільки витрати на виробництво одиниці продукції більші за ціну цієї продукції. Виходячи з визначеного економічного змісту, можна зробити висновок про вигідність виробництва того чи іншого виду продукції: якщо додаткова змінна двоїстої задачі додатна, то це означає, що продукцію відповідного виду випускати економічно не вигідно, оскільки ціна сировини, що витрачається на виробництво одиниці продукції, більша за ціну цієї продукції.

Аналізуючи одержаний розв'язок, робимо висновки, що, оскільки $y_4 = y_5 = 0$, то вартість сировини на виробництво цих видів продукції не перевищує ціни одиниці продукції, а отже, випускати продукцію даних видів економічно вигідно.

Цілочислове програмування

Цілочислове програмування (або дискретне програмування) є розділом математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення всіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисловості. До нього можна віднести такі відомі задачі як: задачі розподілу ресурсів; задачі сіткового планування й керування; задачі календарного планування й ін.

Методи відтинання . Спочатку умова цілочисловості тимчасово відкидається, і задача вирішується традиційним методом. Якщо отримане рішення не задовольняє умові цілочисловості, то вводять правильне відтинання (додаткове обмеження, якому свідомо задовольняє будь-який цілочисловий план і не задовольняє знайдений оптимальний не цілочисловий план) і вирішують нову задачу. Процедура повторюється доти, поки не буде знайдені цілочислове рішення або не буде встановлена неспільність обмежень задачі. Найвідоміший метод відтинань - метод Гоморри.

Метод галузей і границь (спрямоване перебирання). Спочатку умова цілочисловості відкидається, і задача вирішується традиційними методами оптимізації. У результаті одержують нижню оцінку цільової функції . Потім вихідна множина планів ділять на кінцеве число підмножин. Для кожного з яких визначається оцінка. План, для якого оцінка виявиться найближчої до вихідної задачі , вважається оптимальним.

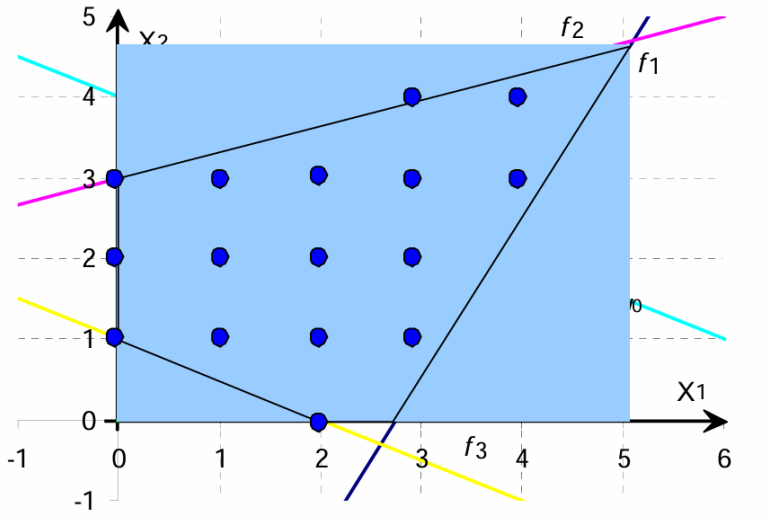
Як що в задачі цілочислового лінійного програмування дві змінні, її можна вирішити графічним методом.

Приклад. Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} f_1 = 4x_1 - 2x_2 \le 11 \\ f_2 = -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ f_3 = x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \\ x_j - цілі \end{cases}$$

Рішення. Спочатку вирішимо задачу без умови цілочисловості. Виконаємо необхідні побудови й одержимо.



Як видно з малюнка, нецілочислове рішення лежить на перетинанні прямих f_1 й f_2.

$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 11 \\ -x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$, звідки $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 5{,}1 \\ 4{,}7 \end{bmatrix}$, $y^* = 5{,}1 + 2 \cdot 4{,}7 = 14{,}5$

Умові цілочисловості змінних задовольняють координати 16 точок, виділених синіми колами.

Переміщаючи y_0 в напрямку вектора $\bar{c}$ знайдемо цілочисловий максимум – точку В с координатами (4, 4). Для порівняння оцінимо значення цільової функції в трьох точках А, У и С.

$y_A = 3 + 2 \cdot 4 = 11$

$y_B = 4 + 2 \cdot 4 = 12$

$y_C = 4 + 2 \cdot 3 = 10$

Відповідь: цілочисловий максимум досягається в крапці

В $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $y^* = 12$.

Динамічне програмування

Динамічне програмування дозволяє здійснювати оптимальне планування багатокрокових керованих процесів. До класу задач динамічного програмування можуть бути віднесені задачі, вирішені шляхом їх розкладання на частини, тобто невеликі за обсягом та менш складні завдання. У завданнях динамічного програмування залежності між змінними та цільовою функцією можуть мати і нелінійний характер. Найбільш доцільно динамічне програмування застосовувати для розв'язання таких практичних задач, в яких пошук оптимального рішення вимагає покрокового підходу. Планування кожного кроку повинне проводитися з урахуванням загальної вигоди, одержуваної на завершення всього процесу, що дозволяє оптимізувати кінцевий результат управління за обраним критерієм. Принцип динамічного програмування передбачає, що управління на кожному окремому кроці повинно обиратися з урахуванням наслідків від його впровадження в майбутньому, тобто виходячи з інтересів операції в цілому.

Постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана

Розглянемо операцію, складену з m кроків (етапів). Нехай ефективність операції на кожному кроці характеризується показником W, який будемо називати виграшем. Припустимо, що виграш W від реалізації усієї операції складається з виграшів на окремих кроках:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i$$

де w_i виграш на i-му кроці.

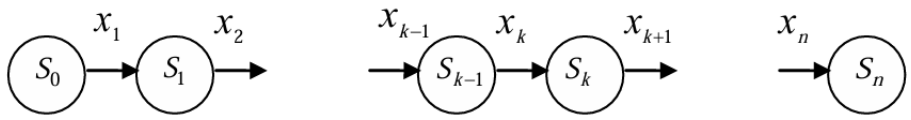
Операція являє собою керований процес, тобто ми можемо вибирати якісь параметри, що впливають на хід її виконання, причому на кожному кроці вибирається певне рішення, від якого залежить виграш на цьому кроці та виграш за операцію в цілому.

На кожному кроці управління системою S (операцією) необхідно визначити змінні двох типів – змінну станів системи S_k та змінну управління x_k. Змінна S_k визначає, в яких станах може опинитися система на k-му кроці. Залежно від стану системи S на цьому кроці можна застосовувати відповідні управління, що характеризуються змінною x_k, що задовольняють певні обмеження та є допустимими.

Сукупність усіх кроків x_k являє собою управління операцією в цілому. Позначимо його символом x, а крокові управління – літерами $x_1, x_2, \ldots, x_n$: Тоді управління, що переводить систему із стану S_0 у стан S_n:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Послідовність станів системи S можна подати у вигляді графу:



Необхідно знайти таке управління x, при якому виграш W від реалізації усієї операції обертається в максимум:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \to \max. \qquad (7.1)$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління x^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь:

$$x^* (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Максимальний виграш, якого можна досягти при цьому управлінні, W^*:

$$W^* = \max_{x \in X} \{W(x)\}.$$

Величина W^* є максимумом із усіх виграшів $W(x)$ за різних управлінь x, можливих за цих умов.

В основі розв'язування усіх задач динамічного програмування закладено принцип оптимальності, вперше сформульований у 1953 році Р. Е. Беллманом: оптимальне управління характеризується такими властивостями, що незалежно від початкового стану та управління на початковий момент подальші управління повинні обиратися оптимальними відносно стану, одержаного в результаті першого управління. Іншими словами, яким би не був стан системи S перед черговим кроком управління, потрібно обирати управління на цьому кроці так, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний виграш на усіх подальших кроках були максимальними.

Задача пошуку найкоротшого шляху на графі методом динамічного програмування. Алгоритм Флойда – Уоршелла

У рамках теорії дослідження операцій розглядається велика кількість практичних завдань, які можна сформулювати і вирішити як мережеві моделі. Прикладами таких задач є:

1. Проектування газопроводу, що з'єднує свердловини морського базування з розміщеною на березі приймальною станцією.

2. Знаходження найкоротшого маршруту між двома містами за існуючої мережі доріг.

3. Визначення максимальної пропускної здатності трубопроводу для транспортування вугільної пульпи від вугільних шахт до електростанцій.

4. Визначення схеми транспортування нафти від пунктів нафтовидобутку до нафтопереробних заводів із мінімальною вартістю транспортування.

5. Знаходження найкоротшого маршруту прокладання оптичного кабеля.

Розглянемо простий приклад задачі динамічного програмування для знаходження **найкоротшого шляху** в орієнтованому ациклічному графі з вершинами

A→B→C→D

ребра:

A→B вага 1

A→C вага 4

B→C вага 2

B→D вага 6

C→D вага 3

Знайти найкоротший шлях від вершини A до вершини D з найменшою вагою.

Відповідь. Найкоротша відстань від A до D:

d = 6

Шлях: A→B→C→D.

Транспортна мережа

Транспортна мережа – це орієнтований граф $G(X,U)$, в якому

1) кожній дузі поставлено у відповідність невід'ємне число $c(u)$.

2) $c(u)$ називається пропускною здатністю дуги.

3) Вершина *s* – джерело, вершина *t* – сток.

U_x^+ - множина всіх дуг, які входять в вершину *x*,

U_x^- - множина всіх дуг, які виходять із вершини *x*.

Для вершин *s* і *t*: $U_s^+ = U_t^- = 0$.

Потік дуги транспортної мережі

Функція $\varphi(u)$ називається потоком дуги $u \in U$, якщо

(1) $\varphi(u) \geq 0, \quad u \in U$;

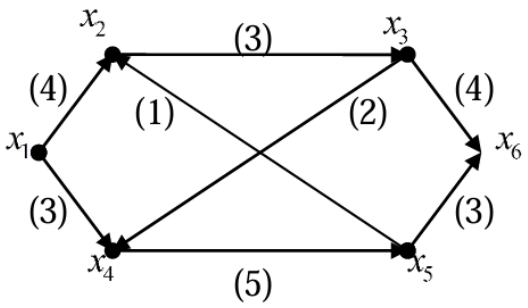
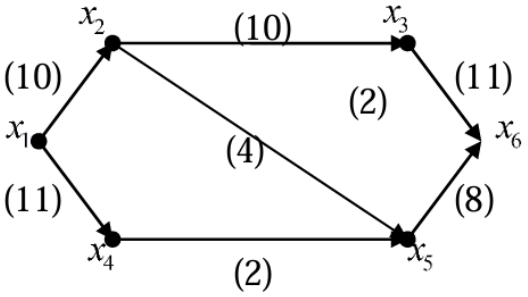
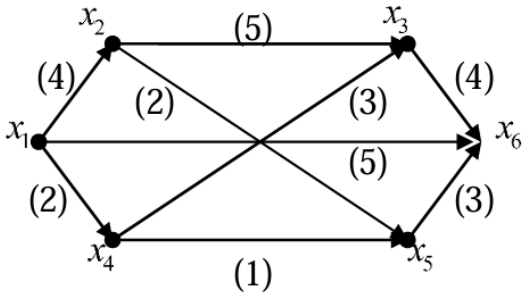
(2) $\sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = 0, \ x \in U, x \neq s, x \neq t;$

(3) $\varphi(u) \leq c(u)$

Величина потоку Φ транспортної мережі: $\Phi = \sum_{u \in U_t^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_s^-} \varphi(u).$

Φ дорівнює сумі потоків всіх дуг, які заходять в вершину *t* і дорівнює сумі потоків всіх дуг, що виходять із вершини *s*.

Завдання. Обчислити повний потік в транспортній мережі. (В дужках вказані допустимі пропускні спроможності дуг)

01	 x_2 (3) x_3 (4) (1) (2) (4) x_1 x_6 (3) (3) x_4 x_5 (5)
02	 x_2 (10) x_3 (10) (11) (2) x_1 x_6 (4) (11) (8) x_4 x_5 (2)
03	 x_2 (5) x_3 (4) (4) (2) (3) x_1 x_6 (5) (2) (3) x_4 x_5 (1)

Стохастичне програмування

Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, для компонент якого:

$$\max(\min)F=f(X),$$

$$q_i(X)\le 0\,(i=\overline{1,m}),$$

$$X\ge 0.$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів X залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$, то маємо ***задачу стохастичного програмування***:

$$\max(\min)F=f(X,\omega),$$

$$q_i(X,\omega)\le 0\,(i=\overline{1,m}),$$

$$X\ge 0,\ \omega\in\Omega,$$

де Ω — простір подій ω.

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X,\omega)$, $q_i(X,\omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор X. Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.

3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора X зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, приміром, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи — прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X,\omega)$ і $g_i(X,\omega) \le 0, i = \overline{1,m}$ на базі інформації щодо параметра ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування В задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач пов'язані з можливостями вибору виду функції мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізнятимуться, а отже, значні розбіжності матимуть і отримані за ними оптимальні плани.

Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування. Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

1) максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву M-моделей;
2) мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву V-моделей;
3) ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до P-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень ймовірності їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічних процесів), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попиту на вироблену продукцію, загальної суми податків тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X,\omega) \le 0\,. \qquad (1)$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю. Наприклад:

$$P\{g(X,\omega) > 0\} \le \gamma\,, \qquad (2)$$

або

$$P\{g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma\,. \qquad (3)$$

Обмеження (2) трактується так: ймовірність того, що $g(X,\omega)>0$, не перевищує величину γ. Відповідно вираз (3) гарантує, що з ймовірністю $1-\gamma$ буде виконуватися обмеження (1). Наприклад, якщо $\gamma=0{,}05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п'яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X,\omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

$$\text{а)}\ \max Mf(X,\omega), \tag{4}$$

за умов:

$$P\{g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma; \tag{5}$$

$$X\ge 0,\ \omega\in\Omega; \tag{6}$$

$$\text{б)}\ \max\ \xi \tag{7}$$

за умов:

$$P\{f(X,\omega)\ge\xi,\ g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma; \tag{8}$$

$$X\ge 0,\ \omega\in\Omega. \tag{9}$$

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1-\gamma$. За постановки задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення.

Оскільки у моделі (4) – (6) як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X,\omega)$, то маємо M-модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають M-планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей. Так, приміром, задача стохастичного програмування може мати такий вигляд:

$$P\{f(X,\omega) \geq \alpha\} \to \max ,$$

за умов:

$$M(g_i(X,\omega)) \leq 0 \ (i = \overline{1,k};\ k < m) ;$$

$$g_i(X,\omega) \leq 0 \ (i = \overline{k+1,m}) ;$$

$$X \geq 0 \ \ \omega \in \Omega .$$

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв'язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω, тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести

спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)),$$

за умов:

$$g_i(X(\omega)) \le 0; \quad i = \overline{1,m},$$

$$X(\omega) \ge 0.$$

У загальному випадку спостереження уможливлюють неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності: рішення — спостереження — рішення — спостереження... або спостереження — рішення — спостереження — рішення...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N раз, то модель називають N-етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двохетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двохетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи. На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум

середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двохетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Приклад. Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од. Прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції c_{kj} $(k, j = \overline{1,3})$ є випадковим, але відомі ймовірності одержання k-ої величини прибутку від реалізації одиниці j-го виду продукції p_{kj} $(k, j = \overline{1,3})$. Норми витрат i-го виду ресурсу на одиницю j-го виду продукції a_{ij} $(i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3})$ детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях:

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_{k_1})	Ймовірність (p_{k_1})
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_{k_2})	Ймовірність (p_{k_2})
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 3

Прибуток від одиниці третього виду продукції, ум. од. (c_{i_3})	Ймовірність (p_{i_3})
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язання. Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F = C(\omega)X,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1,3}).$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\overline{F},\sigma_F^2)$, де $\overline{F}$ — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання $\overline{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$, $j=\overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від j-го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\max \overline{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з M-моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей p_{kj} $(k=\overline{1,3}; j=\overline{1,3})$, то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ $\left(j=\overline{1,3}\right)$. Отже, в числовому вигляді маємо:

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^{3} c_{k1}p_{k1} = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} + c_{31}p_{31} = 10\cdot 0{,}3 + 13\cdot 0{,}4 + 15\cdot 0{,}3 = 12{,}7;$$

$$M(c_2) = \sum_{k=1}^{3} c_{k2}p_{k2} = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} + c_{32}p_{32} = 12\cdot 0{,}2 + 15\cdot 0{,}5 + 13\cdot 0{,}3 = 13{,}8;$$

$$M(c_3) = \sum_{k=1}^{3} c_{k3}p_{k3} = c_{13}p_{13} + c_{23}p_{23} + c_{33}p_{33} = 12\cdot 0{,}3 + 11\cdot 0{,}5 + 14\cdot 0{,}2 = 11{,}9.$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв'язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^* = (x_1^* \approx 46{,}67;\ x_2^* = 0;\ x_3^* \approx 105{,}56)$, причому прибуток становить $F_{\max} \approx 1848{,}78$.

Постановка задачі нелінійного програмування

Розглянемо задача нелінійного програмування у загальному вигляді.

Знайти

$$f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max\ (\min) \qquad (1)$$

за умов

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

де f та g_i – нелінійні функції від n змінних, а b_i – задані числа.

У випадку, коли обмеження (2) задані у вигляді рівностей, то задача (1)–(2) – це задача на умовний екстремум, яка розв'язується за допомогою методу множників Лагранжа. Універсальних методів розв'язання нелінійної задачі (1)–(2) немає, а тому розглядаються методи розв'язання спеціальних типів нелінійних задач (1)–(2).

Геометричний метод розв'язання задач нелінійного програмування

Цей метод застосовується при $n=2$ і включає такі основні етапи:

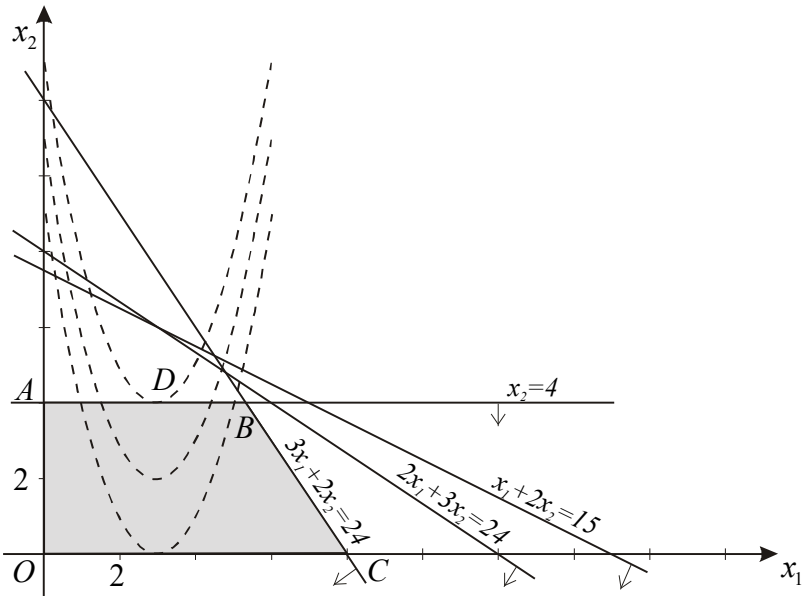
1. Знаходять область допустимих розв'язків $R(X)$ задачі, яка визначається співвідношеннями (2). Якщо вона пуста, то задача не має розв'язку.
2. Будують лінії рівня $f(x_1,x_2)=h$, де h – деякі числа.
3. Знаходять спільну точку $R(X)$ і лінії найвищого (найнижчого) рівня $f(x_1,x_2)=h$ і визначають у ній значення функції (1).

Приклад 1. Знайти $f(x_1,x_2)=x_2-x_1^2+6x_1 \to \max \qquad (3)$

за умов
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 24, \\ x_1+2x_2 \le 15, \\ 3x_1+2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (5)$$

Розв'язання. Задача (3)–(5) – це задача нелінійного програмування. Побудуємо область $R(X)$. Пряма $2x_1+3x_2=24$ проходить через точки (0; 8) та (12; 0), пряма $x_1+2x_2=15$ – через точки (0; 7,5) та (15; 0), пряма $3x_1+2x_2=24$ – через точки (0; 12) та (8; 0), а пряма $x_2=4$ паралельна осі Ox_1.



Таким чином, $R(X) = OABC$. Отже, треба знайти таку точку трапеції *OABC*, в якій функція $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ набуває максимального значення. Якщо h – деяка константа, то лінія $x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$ є параболою, причому чим більшою є константа h, тим більше ця парабола віддалена від осі Ox_1. Максимуму цільова функція (3), очевидно, досягає в точці *D* – точці дотику параболи та прямої *AB*. Визначимо константу h, яка відповідає такому положенню параболи.

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h, \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x_1^2 + 6x_1 = h \Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + (h-4) = 0.$$

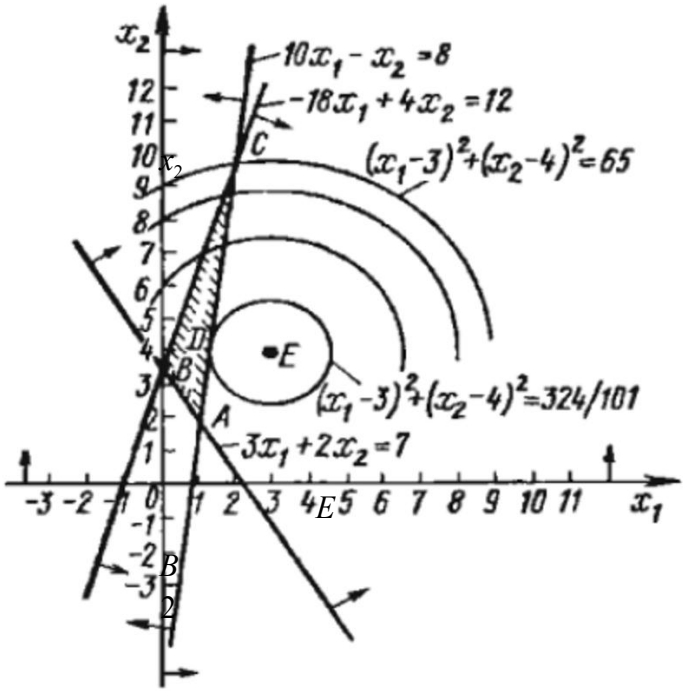
Із умови $\sqrt{36 - 4(h-4)} = 0$, маємо $h = 13$. Координати шуканої точки *D* визначаються як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 3, x_2^* = 4.$ Отже, $X^* = (3;4)$, а $f_{\max} = 4 - 9 + 18 = 13$. У даному випадку точка максимуму *D* не є вершиною багатокутника $R(X)$. Тому процедура перебору вершин багатокутника, яка застосовується при розв'язанні задач лінійного програмування, в даному випадку незастосовна.

Приклад 2. Знайти $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max, \min$ (6)

за умов
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \qquad (8)$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків $R(X)$.



Пряма $3x_1 + 2x_2 = 7$ проходить через точки (0; 3,5) та (2,3; 0), пряма $10x_1 - x_2 = 8$ – через точки (0; -8) та $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$, пряма $-18x_1 + 4x_2 = 12$ – через точки (0; 3) та $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

У даному випадку $R(X) = \Delta ABC$ з координатами вершин $A(1; 2)$, $B(0; 3{,}5)$, $C(2; 12)$. Якщо замість (6) записати лінію рівня

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h, \; h = const, \qquad (9)$$

то рівняння (9) – це рівняння кола із центром у точці $E(3; 4)$ і радіусами $\sqrt{h}$. Проводячи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що найменшого значення функція f приймає в точці D, де коло дотикається до $R(X)$. Для знаходження координат цієї точки скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1 - x_2 = 8$ та дотичної до кола в точці D. Оскільки $x_2 = 10x_1 - 8 \Rightarrow k_1 = 10$. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення похідної функції x_2 від змінної x_1 у цій точці. Диференціюючи рівняння (9), одержимо:

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4) \cdot x_2' = 0 \Rightarrow x_2' = -\frac{x_1 - 3}{x_2 - 4}.$$

З рівності $-\frac{x_1 - 3}{x_2 - 4} = 10 \Rightarrow \; \Rightarrow -x_1 + 3 = 10x_2 - 40 \Rightarrow x_1 + 10x_2 = 43$.

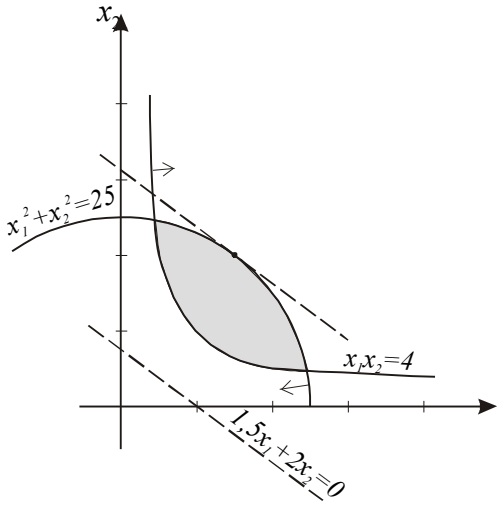
Таким чином, координати точки D знаходяться як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = \frac{123}{101}, \quad x_2^* = \frac{422}{101}, \quad f_{\min} = \frac{324}{101}$. З рисунка бачимо, що максимуму цільова функція досягає в точці $C(2; 12)$. Отже, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 12$, $f_{\max} = 65$.

Приклад 3. Знайти $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ (10)

за умов $\begin{cases} x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 25, \\ x_1 \cdot x_2 \ge 4, \end{cases}$ (11)

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$ (12)

Розв'язання. Рівняння $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 25$ — це рівняння кола з радіусом $R = 5$, а $x_1 \cdot x_2 = 4$ — це рівняння гіперболи. Область $R(X)$ зображено на рисунку.



Записавши $3x_1 + 4x_2 = h$, де h — довільна константа, одержуємо замість цільової функції (10) лінії рівня. При $h = 6$ пряма $3x_1 + 4x_2 = 6$ проходить через точки $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ та (2; 0). З рисунку видно, що свого максимуму цільова функція досягає в точці E, координати якої потрібно знайти.

Диференціюючи рівняння $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 25$, одержуємо: $2x_1 + 2x_2 x_2' = 0 \Rightarrow x_2' = -\frac{x_1}{x_2}$. З іншого боку, кутовий коефіцієнт прямої $3x_1 + 4x_2 = h$ буде дорівнювати $-\frac{3}{4}$. Прирівнюючи, одержуємо: $-\frac{x_1}{x_2} = -\frac{3}{4} = 3x_1 - 4x_2 = 0$.

Таким чином, координати точки E одержуються як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x_2 - 4x_1 = 0, \\ x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 25, \end{cases}$ звідки $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$, $f_{\max} = 25$.

Приклад 4. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

за умов

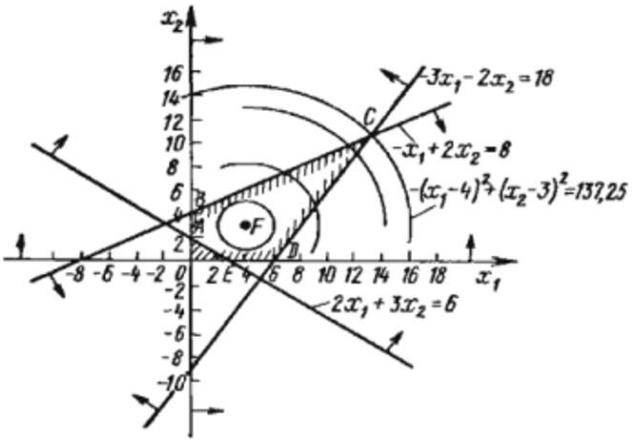
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Областю допустимих розв'язків задачі є трикутник, а лініями рівня – кола

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$$

із центром у точці $F(4;3)$ та радіусом $\sqrt{h}$.



З рисунка бачимо, що цільова функція набуває мінімального значення в точці F(4; 3), а максимального – в точці С (13; 10,5). Отже, $Fmin$=0 і $Fmax$=137,25.

Метод множників Лагранжа

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування, система обмежень якої складається лише з рівнянь, відсутні умови невід'ємності змінних і функцій f і g_i неперервні разом зі своїми частинними похідними:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min), \tag{5.13}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1,m}). \tag{5.14}$$

У курсі математичного аналізу задачу (5.13)–(5.14) називають класичною задачею оптимізації. Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називаються *множниками Лагранжа*, і складають *функцію Лагранжа:*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)]. \tag{5.15}$$

Далі знаходять частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_j}\ (j = \overline{1,n})$ та $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\ (i = \overline{1,m})$ і розглядають систему $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases} \tag{5.16}$$

з $n + m$ змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Будь-який розв'язок системи рівнянь (5.16) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, в якій функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може мати екстремум. Подальші дослідження знайдених точок проводять так, як і у випадку безумовного екстремуму.

Алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа:

1) складають функцію Лагранжа;
2) знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля;
3) розв'язують систему рівнянь (5.16), знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум;

4) серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (5.13) у цих точках.

Приклад 5.4. За планом виробництва продукції підприємству потрібно виготовити 180 штук виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами. При виробництві I способом затрати становлять $4x_1 + x_1^2$ грош. од., а при виготовленні виробів II способом вони становлять $8x_2 + x_2^2$ грош. од. Визначити, скільки виробів кожним із способів потрібно виготовити, так щоб загальні затрати підприємства на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язання

Математична постановка задачі складається із знаходження мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min \tag{5.17}$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{5.18}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{5.19}$$

Для розв'язання задачі використаємо метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (5.17) за умов (5.18), тобто без урахування умови невід'ємності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Обчислимо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенесемо у праву частину перших двох рівнянь λ і, прирівнявши їх ліві частини, одержимо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Приєднаємо до одержаного рівняння третє рівняння. Отримаємо систему двох рівнянь із двома змінними:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$. Точка $X^* = (91, 89)$ є точкою екстремуму. Другі частинні похідні функції F додатні, отже, у точці $X^* = (91, 89)$ функція f має умовний мінімум. Це означає, що якщо підприємство виготовляє 91 виріб першим технологічним способом і 89 виробів другим технологічним способом, то загальні затрати будуть мінімальними і становитимуть $4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17\,278$ грош. од.

Приклад 5.5. Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$.

Знайдемо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля. У результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із першого і другого рівнянь маємо $x_1 - x_2 = 0$. Додамо до отриманого рівняння третє і, розв'язавши утворену систему рівнянь, знаходимо $x_1^* = \frac{5}{2}$, $x_2^* = \frac{5}{2}$. Таким чином, у точці $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ дана функція може мати умовний екстремум. Знайшовши другі частинні похідні, можна показати, що у цій точці функція має умовний мінімум і $F_{\min} = \frac{25}{2}$.

Приклад 5.6. Знайти найменше значення функції $Z = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2$ за умови $x + y = 6$.

Розв'язання

$F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2 + \lambda(6 - x - y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4(x-1) - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 6(y-3) - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 6 - x - y = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 4(x-1)=\lambda, \\ 6(y-3)=\lambda, \\ 6=x+y. \end{cases}$$

Далі $x=(\lambda+4)/4$; $y=(\lambda+18)/6$. Підставивши ці значення у третє рівняння, отримаємо $6=(\lambda+4)/4)+(\lambda+18)/6=(3\lambda+12+2\lambda+36)/12$, звідки $\lambda=4,8$. Отже, $x=2,2$; $y=3,8$. Точка (2,2; 3,8) є точкою екстремуму. За допомогою других похідних встановлюємо, що знайдена точка є точкою мінімуму. Найменше значення функції z дорівнює $2\cdot(2,2-1)^2+3\cdot(3,8-3)^2=4,8$.

Задачі для самостійного розв'язання

Деяку продукцію на підприємстві можна виготовити двома технологічними способами. Перший спосіб потребує затрат, що дорівнюють $a_0+a_1x_1+a_2x_1^2$, а другий – $b_0+b_1x_2+b_2x_2^2$. Визначити, скільки виробів із їх загальної кількості d штук необхідно виготовити кожним із можливих способів.

Загальні затрати підприємства на виробництво продукції мають бути мінімальними.

Значення $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, d$ взяти із таблиці 5.1 згідно з варіантом.

Таблиця 5.1

Варіант	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	d
1	2	4	6	1	8	5	4
2	4	4	4	8	6	9	10
3	3	2	6	8	4	9	5

Безумовна оптимізація

Задача пошуку безумовного глобального оптимуму формулюється у такий спосіб: знайти оптимум функції $y(\bar{x})$, заданої в n-мірному евклідовому просторі R^n. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) \to \underset{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n}{opt} .$$

Необхідні умови точки локального оптимуму мають вигляд:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^* = 0$$

або, інакше кажучи, у точці локального оптимуму градієнт функції дорівнює нулю.

Геометрично ця умова означає, що гіперплощина, дотична до функції в точці оптимуму, паралельна гіперплощини визначення цієї функції. Так, для функції однієї змінної це – дотична лінія, що є паралельною до осі x (для функції двох змінних – площина, паралельна площини x0y).

Точка, для якої виконується рівність

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)\Bigg|_{\bar{x}^0} = 0,$$

називається стаціонарною точкою функції y(x).

На рис.1 наведені різні приклади стаціонарних точок для функції однієї змінної. Стаціонарна точка не обов'язково повинна бути екстремальною. Прикладом такої точки може служити точка перегину функції на рис. 2.1,б.

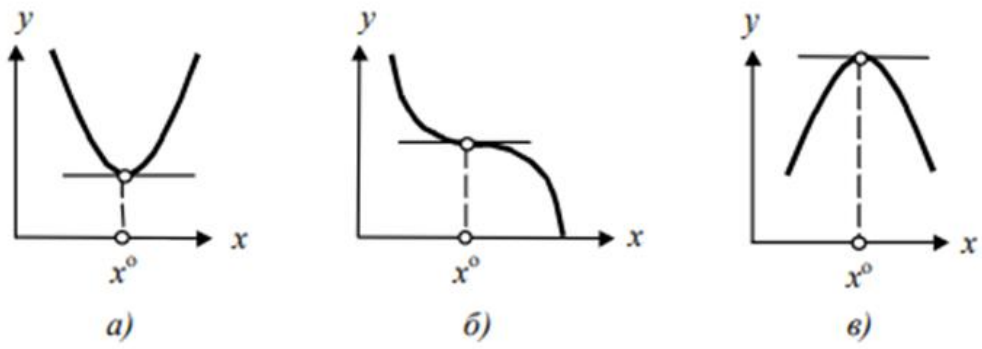


рис.1

Для того щоб визначити достатні умови точки локального оптимуму, розглянемо гессіан. Матриця, що складається із других частинних і змішаних похідних мінімізуемої функції, називають матрицею Гессе (гессіаном). Матриця Гессе є симетричною.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix};$$

Нехай H – матриця Гессе з елементами, обчисленими в стаціонарній точці, тоді

$\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T H \Delta\bar{x}$ – диференціальна квадратична форма в стаціонарній точці.

Диференціальна квадратична форма дозволяє зробити висновок про характер стаціонарної точки.

Якщо матриця H позитивно визначена, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T H \Delta\bar{x}$ так само позитивно визначена, а стаціонарна точка відповідає мінімуму.

Якщо матриця H негативно визначена, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T H \Delta\bar{x}$ так само негативно визначена, а стаціонарна точка відповідає максимуму.

Нарешті, функція не має екстремуму в стаціонарній точці, якщо матриця Гессе в цій точці є невизначеною. Це характерно для всіх сідлових точок функції.

Визначеність матриці можна встановити за **Критерієм Сильвестра**:

1. Для того, щоб симетрична матриця H була позитивно визначена, необхідно і достатньо, щоб всі її діагональні мінори були додатні:

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, тобто

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Якщо матриця H **позитивно** визначена, то стаціонарна точка відповідає **мінімуму**.

2. Для того, щоб симетрична матриця H була негативно визначена, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, починаючи з від'ємного

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, тобто

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Якщо матриця H **негативно** визначена, то стаціонарна точка відповідає **максимуму**.

3. У всіх інших випадках матриця вважається **невизначеною** або частково визначеною. Тоді стаціонарна точка вважається **сідловою**.

Всі методи рішення задачі безумовної оптимізації можна розділити на два класи: класичні й прямі.

Класичні методи дозволяю аналітично виразити оптимальну точку, через рішення системи рівнянь, і при цьому знаходять точні значення координат екстремальних точок.

Методи прямого пошуку, які також називають просто прямі, пошукові, покрокові, ітераційні, обчислювальні, наближені або некласичні, вирішують задачу безумовної оптимізації шляхом поступового поетапного наближення до точки екстремуму. Рішення одержують наближеним, але з наперед заданою точністю.

Класичний метод рішення задач безумовної мінімізації. Метод Ейлера

Метод Ейлера базується на необхідних і достатніх умовах існування екстремуму. Метод дозволяє виявити всі екстремальні точки цільової функції (як локальні мінімуми, так і локальні максимуми).

Алгоритм методу

1. Беруть частині похідні цільової функції y(x) по кожній змінній xi і відповідно до необхідних умов для точки локального екстремуму дорівнюють нулю

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n};$$

2. Розв’язують будь-яким відомим методом отриману систему, що у загальному випадку складається з n нелінійних рівнянь. Корінь системи, якщо вони існують, являють собою стаціонарні точки функції y(x), оскільки в них всі частинні похідні дорівнюють нулю.

3. Беруть всі другі частинні й змішані похідні від функції y(x) й обчислюють їх у кожній стаціонарній точці. По обчислених похідних формують матрицю Гессе для кожної стаціонарної точки. Досліджують характер отриманих гессианов. По характерові матриць Гессе встановлюють вид відповідних екстремальних точок.

4. Обчислюють значення функції y(x) в кожному локальному мінімумі, якщо вирішується задача мінімізації, або в кожному локальному максимумі, якщо – задача максимізації. Потім шляхом порівняння обчислених значень знаходять абсолютний екстремум.

Приклад. Дослідити на наявність глобальних екстремумів функцію двох змінних

$$y(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 15x_1.$$

Для знаходження стаціонарних точок функції $y(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 15x_1$, обчислимо частинні похідні першого порядку та прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 15$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 3x_1^2 + 6x_1x_2$$

Отримуємо чотири стаціонарні точки:

$$X_A = (-0,6285; 1,5175); \quad X_B = (0,6285; -1,5175);$$

$$X_C = (-1,9294; -0,7992); \quad X_D = (1,9294; 0,7992).$$

Для визначення виду стаціонарних точок сформуємо матриці Гесса в кожній стаціонарній точці**.**

$$H_A = \begin{bmatrix} -16,647 & 12,876 \\ 12,876 & 5,334 \end{bmatrix}; \quad H_B = \begin{bmatrix} -16,647 & -12,876 \\ -12,876 & 5,334 \end{bmatrix};$$

$$H_C = \begin{bmatrix} -18,3576 & 6,7812 \\ 6,7812 & -16,3716 \end{bmatrix}; \quad H_D = \begin{bmatrix} 18,3576 & -6,7812 \\ -6,7812 & 16,3716 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до критерію Сильвестра, стаціонарні точки X_A й X_B не є екстремальними, X_D – точка локального мінімуму, X_C – точка локального максимуму. А оскільки функція має один явний мінімум й один явний максимум, то вони одночасно є й глобальними екстремумами.

Отже, розв'язком є дві точки:

точка мінімуму X_D (1,9294; 0,7992), у якій y_{min} = -19,293

і точка максимуму X_C (-1,9294; -0,7992), у якій y_{max}= 19,293.

Чисельні методи оптимізації

Чисельні методи оптимізації становлять важливий розділ прикладної математики та обчислювальних наук і спрямовані на знаходження екстремумів (мінімумів або максимумів) функцій, коли аналітичні методи є непридатними або неможливими. Такі методи широко застосовуються в інженерії, економіці, машинному навчанні, аналізі даних, теорії керування та інших галузях, де оптимізаційні задачі часто мають складну структуру, високу розмірність або обмеження. Загальною ідеєю чисельної оптимізації є побудова ітераційного процесу, який на основі поточної інформації про значення функції та, за можливості, її похідних, поступово наближається до оптимального розв'язку.

Методи оптимізації для недиференційовних функцій

Окрему групу становлять методи оптимізації для недиференційовних функцій, які застосовуються у випадках, коли цільова функція не має похідних або є розривною, кусочно-заданою чи зашумленою. Такі ситуації характерні для задач оптимізації з абсолютними значеннями, мінімаксних критеріїв, задач із логічними умовами або експериментальних даних. Для цих задач використовуються методи, що не потребують обчислення градієнтів, а спираються лише на значення функції. До них належать методи прямого пошуку, субградієнтні підходи, а також методи виключення інтервалів, які ефективні для одномірних задач.

Методи оптимізації для недиференційовних функцій застосовуються у випадках, коли цільова функція

$$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

не має похідних або є розривною, кусочно-лінійною чи заданою таблично. Основна особливість таких методів полягає у використанні лише значень функції без обчислення градієнтів.

Загальна задача:

$$\min_{x \in D} f(x)$$

Одним із підходів є субградієнтний метод, де замість градієнта використовується субградієнт $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

де $\alpha_k > 0$ – крок ітерації.

Також широко застосовуються методи прямого пошуку, які виконують порівняння значень функції в наборі точок і не потребують жодної інформації про похідні.

Методи виключення інтервалів (одновимірна оптимізація)

Методи виключення інтервалів ґрунтуються на послідовному звуженні інтервалу, в якому гарантовано міститься точка екстремуму. Вони передбачають, що цільова функція є унімодальною на початковому відрізку, тобто має лише один мінімум або максимум. На кожній ітерації вибираються спеціальні точки всередині інтервалу, у яких обчислюються значення функції, після чого частина інтервалу, що не може містити оптимум, відкидається. Найвідомішими представниками цього класу є метод дихотомії, метод золотого перерізу та метод Фібоначчі. Їх основною перевагою є простота реалізації та надійність, а недоліком – порівняно повільна швидкість збіжності.

Методи виключення інтервалів застосовуються для знаходження мінімуму унімодальної функції $f(x)$, $x \in [a,b]$, де існує єдина точка мінімуму $x*$.

Метод дихотомії

На кожній ітерації обираються точки:

$$x_1 = \frac{a+b-\varepsilon}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b+\varepsilon}{2}$$

Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то:

$$b = x_2$$

інакше:

$$a = x_1$$

Метод золотого перерізу

Використовується співвідношення:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

Точки обчислюються як:

$$x_1 = b - \varphi(b-a), \quad x_2 = a + \varphi(b-a)$$

Інтервал звужується без повторних обчислень значень функції.

Більш ефективними з точки зору швидкості збіжності є методи поліноміальної інтерполяції, які полягають у побудові апроксимації цільової функції за допомогою полінома низького степеня на основі кількох обчислених значень. Найчастіше використовується квадратична інтерполяція, коли за трьома точками будується парабола, мінімум якої використовується як нове наближення до оптимуму. Такі методи забезпечують швидшу збіжність порівняно з методами виключення інтервалів, однак є більш чутливими до похибок обчислень і можуть втрачати стійкість у разі складної форми функції.

Квадратична інтерполяція

За трьома точками x_1, x_2, x_3 будується парабола:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Координата мінімуму параболи:

$$x^* = -\frac{b}{2a}$$

Отримане значення використовується як нове наближення до мінімуму функції.

Метод Ньютона належить до класу градієнтних методів і застосовується для оптимізації диференційовних функцій. Його основна ідея полягає у використанні другої похідної або матриці Гессе для побудови квадратичної апроксимації функції в околі поточної точки. Наступне наближення визначається як точка мінімуму цієї апроксимації. Метод Ньютона характеризується квадратичною швидкістю збіжності поблизу оптимуму, що робить його надзвичайно ефективним. Водночас він потребує обчислення і обернення матриці Гессе, що може бути обчислювально складним і нестійким для задач великої розмірності або погано обумовлених задач.

Метод Ньютона

Метод Ньютона застосовується для двічі диференційовних функцій: $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ітераційна формула:

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

де $\nabla f(x_k)$ – градієнт,
$H(x_k)$ – матриця Гессе:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Метод має квадратичну швидкість збіжності, але потребує значних обчислювальних ресурсів.

Метод найшвидшого спуску є одним із базових градієнтних методів оптимізації. Він ґрунтується на русі в напрямку антиградієнта цільової функції, який відповідає напрямку найшвидшого зменшення її значення. На кожній ітерації обирається оптимальний крок уздовж цього напрямку, що забезпечує зменшення функції. Метод є простим у реалізації та не потребує обчислення другої похідної, проте має лінійну швидкість збіжності та може працювати повільно в задачах із витягнутими рівнями функції.

Метод найшвидшого (градієнтного) спуску базується на русі в напрямку антиградієнта функції: $d_k = -\nabla f(x_k)$

Ітераційна формула:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

де α_k оптимальний крок, який визначається з задачі одномірної мінімізації:

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Метод є простим і надійним, але має лінійну швидкість збіжності і може повільно сходитися для погано обумовлених задач.

Задачі багатокритеріальної оптимізації виникають у ситуаціях, коли необхідно одночасно оптимізувати декілька, часто суперечливих, критеріїв. У таких задачах, як правило, не існує єдиного оптимального розв’язку, а формується множина компромісних рішень, відома як множина Парето. Основними підходами до розв’язання багатокритеріальних задач є згортка критеріїв у скалярну функцію за допомогою вагових коефіцієнтів, методи послідовних поступок, ε-обмежень, а також еволюційні та евристичні алгоритми. Такі методи дозволяють враховувати пріоритети критеріїв і знаходити збалансовані рішення, що є особливо важливим у складних інженерних та управлінських системах.

Різні методи оптимізації застосовуються залежно від властивостей цільової функції: наявності похідних, розмірності задачі та вимог до швидкості збіжності. У

практичних задачах часто використовуються гібридні підходи, які поєднують надійність методів без похідних із високою ефективністю градієнтних алгоритмів.

Застосування різних методів розв'язання задачі чисельної оптимізації

Розглянемо задачу мінімізації багатовимірної нелінійної функції без обмежень:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + xy.$$

Необхідно знайти точку локального мінімуму функції з використанням різних чисельних методів та порівняти ефективність їх застосування.
Градієнт цільової функції:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 1) + y \\ 4(y - 2) + x \end{pmatrix}$$

Матриця Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Оскільки матриця Гессе є додатно визначеною, функція має єдиний глобальний мінімум.

Спробуємо використати метод найшвидшого спуску:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$$

Початкова точка:

$$x^{(0)} = (0, 0)$$

Градієнт у початковій точці:

$$\nabla f(0, 0) = (-2, -8)$$

Оберемо крок:

$$\alpha_0 \approx 0.1$$

Перша ітерація:

$$x^{(1)} = (0, 0) - 0.1(-2, -8) = (0.2, 0.8)$$

Цей метод потребує значної кількості ітерацій для досягнення збіжності.

Розглянемо метод Ньютона.

Формула ітерації:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}\nabla f(x^{(k)})$$

Обернена матриця Гессе:

$$H^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перша ітерація:

$$\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}\nabla f = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2,0) - (2,-2) = (0,2)$$

Метод Ньютона збіжний за 1 ітерацію, оскільки функція квадратична.

Відповідь. Точка мінімуму: (x∗;y∗)=(0;2). Мінімальне значення функції: *f*(0;2) =1.

Усі коректно реалізовані чисельні методи (найшвидшого спуску, Ньютона, квазі-Ньютона) при збіжності дадуть саме цю точку: (0;2).

Задачі багатокритеріальної оптимізації

Задачі багатокритеріальної оптимізації – це клас задач, де потрібно знайти найкраще рішення (вектор змінних), яке одночасно оптимізує (мінімізує чи максимізує) кілька, часто конфліктуючих, цільових функцій (критеріїв), дотримуючись певних обмежень, що дозволяє знайти компромісні рішення, коли неможливо одночасно досягти ідеалу за всіма критеріями.

Головна проблема – покращення однієї цілі часто погіршує іншу (наприклад, мінімізація витрат проти максимізації якості). Замість одного числа, результатом є вектор значень цільових функцій. Не існує єдиного «найкращого» розв’язку. Існує множина Парето-оптимальних рішень (або ефективних розв'язків), таких, де покращення однієї цілі неможливе без погіршення іншої.

Приклад. Нехай задано багатокритеріальну задачу лінійного програмування з двома критеріями:

$$f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \;\to\; \max,$$
$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \;\to\; \max,$$

за умов обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 20x_1 - 5x_2 \leq 100, \\ 5x_1 + 20x_2 \geq 100, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пріоритети критеріїв задано: α_1=0,7, α_2=0,3 (критерії вважаються нормалізованими).

Метод згортки полягає у зведенні багатокритеріальної задачі до однокритеріальної шляхом побудови зваженої суми критеріїв. Оскільки критерії нормалізовані, цільова функція згортки має вигляд:

$$F(x_1, x_2) = \alpha_1 f_1(x_1, x_2) + \alpha_2 f_2(x_1, x_2).$$

Підставляючи значення критеріїв та їхніх ваг, отримуємо:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 0{,}7(3x_1 + 2x_2) + 0{,}3(-x_1 + 2x_2) \\ &= (2{,}1 - 0{,}3)x_1 + (1{,}4 + 0{,}6)x_2 \\ &= 1{,}8x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \ \max. \end{aligned}$$

Таким чином, багатокритеріальна задача зводиться до однокритеріальної задачі лінійного програмування з цільовою функцією

$$F(x_1, x_2) = 1{,}8x_1 + 2x_2.$$

Аналіз допустимої області. Допустима область визначається системою лінійних обмежень і є опуклим багатокутником у першому квадранті. Згідно з теоремою лінійного програмування, максимум лінійної цільової функції досягається в одній із вершин допустимої області.

Для знаходження розв’язку необхідно:

1. Побудувати допустиму область.
2. Знайти координати її вершин (точки перетину граничних прямих).
3. Обчислити значення функції *F* у кожній вершині.
4. Обрати вершину, в якій *F* набуває максимального значення.

Аналіз допустимої області (вершин багатокутника) показує, що максимальне значення зведеного критерію досягається в точці: x_1=6, x_2=4.

Значення критеріїв у цій точці: $f_1=3\cdot6+2\cdot4=26$, $f_2=-6+2\cdot4=2$, а зведений критерій: $F_{max}=1{,}8\cdot6+2\cdot4=18{,}8$.

Отримана точка максимуму є компромісним (Парето-оптимальним) розв'язком, що враховує задані пріоритети критеріїв: більша вага $\alpha_1=0{,}7$ означає домінування першого критерію, другий критерій з вагою $\alpha_2=0{,}3$ впливає на розв'язок у меншій мірі.

Таким чином, метод згортки дозволяє формально й ефективно врахувати пріоритети критеріїв та звести багатокритеріальну задачу до стандартної задачі оптимізації, розв'язуваної класичними методами лінійного програмування.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лавров Є.А. Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є.А. Лавров, Л.П. Перхун, В.В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
2. Кічмаренко О.Д. Дослідження операцій: навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спец. 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології / О.Д. Кічмаренко, А.О. Стехун, А.Т. Яровий. – Одеса : Одес. нац. ун-т. ім. І. І. Мечникова, 2023. – 156 с.
3. Стрелковська І.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси (для фахівців у галузі ІТ-технологій) / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2018. – 384 с.
4. Стрелковська І.В. Математична статистика / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2019. – 110 с.
5. Яровий, А.А. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування. Частина 1 : навчальний посібник / А.А. Яровий, Л.М. Ваховська, Л.В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 86 с.
6. Методи вирішення задач багатокритеріальної оптимізації [Електронний ресурс] : електрон. метод. рек. та завд. до самост. роб. за дисципліною «Системи і методи прийняття рішень» для здобув. першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 113 Прикл. матем., 122 Комп'ютерні науки, 111 Матем. / уклад.: О. Б. Васильєв, Н. С. Васильєва, О. Д. Кічмаренко. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 50 с. – 1,1 МБ.