

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська юридична академія»

Кафедра кібербезпеки

Баландіна Н. М.

ЛИНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології», за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення»
F3 «Комп'ютерні науки»
F5 «Кібербезпека та захист інформації»

Одеса 2025

*Рекомендовано навчально-методичною радою Національного університету
«Одеська юридична академія» (протокол № 8 від «29» серпня 2025 р.)*

Укладач:

Баландіна Н. М. – старший викладач кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3121-4517>.

Рецензенти:

Сисоєнко С.В. – кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник Державного науково-дослідного інституту випробувань і сертифікації озброєння та військової техніки;

Щербина Ю.В. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія».

Лінійна алгебра та аналітична геометрія: методичні рекомендації для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої освіти у галузі знань F «Інформаційні технології», за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F5 «Кібербезпека та захист інформації» [Електронне видання] / уклад.: Н.М. Баландіна; Нац. ун-т «Одеська юрид. академія». – Одеса, 2025. - 80 с. - Режим доступу: <https://hdl.handle.net/11300/30815>

Методичні рекомендації містять стислий теоретичний матеріал, приклади розв'язання завдань, вправи для самостійної роботи, та рекомендовані джерела до практичних занять та самостійної роботи, а також питання для підсумкового контролю знань і вмінь здобувачів вищої освіти.

Призначені для здобувачів вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології», які навчаються за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F5 «Кібербезпека та захист інформації» з метою закріплення лекційного матеріалу і підготовки до практичних занять з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія».

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є невід'ємною частиною базової математичної підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня і належить до фундаментальних дисциплін, на яких ґрунтуються методи побудови різноманітних математичних моделей процесів, пов'язаних з професійною діяльністю фахівця в галузі інформаційних технологій.

Предметом вивчення дисципліни є класичні розділи вищої математики, які націлені на формування сукупності методів і засобів реалізації операцій пошуку, накопичення та обробки інформації, її математичної формалізації, пошуку та використання алгоритмів розв'язування формалізованих задач.

Метою викладання навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними поняттями лінійної алгебри та аналітичної геометрії, розвиток логічного і алгоритмічного мислення, оволодіння основними методами дослідження та розв'язання математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та вирішення практичних задач.

Завдання навчальної дисципліни полягає в ознайомленні здобувачів вищої освіти з сучасними теоретичними знаннями в області лінійної алгебри та аналітичної геометрії та набуттям практичних навичок застосування алгебраїчних та геометричних методів розв'язування оптимізаційних задач в області комп'ютерних наук.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми після вивчення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» здобувачі вищої освіти повинні:

- **володіти** методами розв'язання систем лінійних рівнянь (метод Гауса, правило Крамера, матричний метод), досліджувати системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з m невідомими на сумісність, знаходити загальний та частковий розв'язки системи лінійних рівнянь;
- **вміти** виконувати дії над матрицями, обчислювати визначники, знаходити ранг матриці, обернену матрицю тощо;
- **знати** поняття комплексного числа, форми комплексного числа, дії над комплексними числами;
- **досліджувати** системи векторів на лінійну залежність та незалежність, виконувати лінійні операції над векторами, знаходити базис векторного лінійного простору та розкласти вектор за базисом;

- **обчислювати** скалярний, векторний та мішаний добуток векторів та застосовувати їх до розв'язання геометричних задач;

- **оперувати** різними формами рівнянь прямих і площин, кривих та поверхонь другого порядку, розв'язувати задачі відповідних типів.

Наведені методичні вказівки містять стислий виклад лекційного матеріалу. Кожна із запропонованих 5 тем має переліки питань для опрацювання під час практичних занять, приклади вирішення задач, а також завдання для самостійної роботи для закріплення відповідного тематичного матеріалу.

Велике значення в процесі вивчення та закріплення знань має саме самостійна робота здобувачів вищої освіти, на яку відводиться значна частина кількості годин, які приділяються на вивчення дисципліни.

Програма навчальної дисципліни розрахована на один семестр і передбачає читання лекцій, проведення практичних занять, консультацій, самостійної роботи та іспиту.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

№ теми	Назва теми	Лекційні заняття (год.)		Практичні заняття (год.)		Самостійна робота (год.)	
		очна	заоч-на	очна	заоч-на	очна	заоч-на
1	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	2	2	4	2	10	14
2	Матриці та визначники	2	2	6	2	16	20
3	Комплексні числа	2	0	4	2	10	14
4	Лінійні простори	2	0	4	0	10	14
5	Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії	2	2	12	0	34	46
	Всього	10	6	30	6	80	108

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь та їх елементарні перетворення. Сумісні та несумісні системи лінійних рівнянь. Визначені та невизначені системи лінійних рівнянь. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок однорідної та неоднорідної системи. Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 2. Матриці та визначники

Матриці, дії над матрицями. Елементарні матриці. Визначники малих порядків. Підстановки n -го степеня, інверсії, транспозиції. Парність і непарність підстановок. Визначники n -го порядку, їх властивості. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за елементами рядка. Теорема про «чужі» доповнення. Теорема Лапласа. Визначник матриці трикутного виду. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Критерій оберненості матриць. Методи знаходження оберненої матриці. Матричні рівняння. Запис і розв'язування систем лінійних рівнянь в матричній формі. Правило Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.

Тема 3. Комплексні числа

Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжені комплексні числа, їх властивості. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа. Корені з одиниці, їх властивості. Первісні корені. Критерій первісності. Показникова форма комплексного числа.

Тема 4. Лінійні простори

Арифметичний векторний простір. Лінійна комбінація системи векторів. Лінійна оболонка. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів. Критерій лінійної залежності. Ранг системи векторів. Еквівалентні системи векторів. База системи векторів. Основна властивість бази. Критерій бази. Вимір і базис лінійного простору. Елементарні перетворення систем векторів. Ранг матриці, його різні означення та їх еквівалентність. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Фундаментальна система розв'язків. Зв'язок між розв'язками неоднорідних і однорідних систем лінійних рівнянь. Розкладання вектора за базисом. Перетворення координат вектора при переході до нової бази. Підпростір. Критерій підпростору. Ізоморфізм векторних просторів однакової вимірності. Сума та перетин лінійних підпросторів. Пряма сума. Критерій прямої суми. Формула Грассмана. Лінійні перетворення векторного простору. Власні вектори та власні значення лінійного перетворення. Характеристична матриця, характеристичний многочлен і характеристичні числа матриці і лінійного перетворення.

Тема 5. Аналітична геометрія

Декартова система координат. Відстань між двома точками. Поділ напрямленого відрізка у заданому співвідношенні. Вектори на площині та у просторі. Скалярний добуток векторів: означення, властивості. Кут між векторами. Векторний добуток: означення, властивості, геометричний сенс. Мішаний добуток векторів; означення, властивості, геометричний сенс. Подвійний векторний добуток векторів: означення, властивості. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Задачі на пряму на площині. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих на площині. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині. Відстань від точки до прямої. Рівняння прямої та площини в просторі. Взаємне розміщення прямої та площини, двох площин. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини. Кут між двома площинами. Поняття гіперплощини. Лінії другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола та парабола, їх канонічні рівняння та основні характеристики. Поверхні другого порядку. Сфера, циліндричні і конічні поверхні, їх канонічні рівняння та властивості. Поверхні обертання, еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд. Геометричні властивості цих поверхонь.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1. Алгебраїчні рівняння та їх системи. Загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Сумісні та несумісні системи лінійних рівнянь. Визначені та невизначені системи лінійних рівнянь.
3. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь.
4. Елементарні перетворення систем лінійних рівнянь.
5. Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Серед багатьох методів розв’язку лінійних алгебраїчних систем одним найбільш універсальним і найефективнішим обчислювальним методом є метод послідовного виключення невідомих, або **метод Гауса** (Карл Фрідріх Гаус (1777-1855) - німецький математик).

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається сукупність рівнянь виду

[illegible]

Набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ називається **частковим розв'язком системи рівнянь** (1), якщо при підстановці цих чисел у систему замість відповідних змінних кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Система (1), що має хоча б один розв'язок, називається **сумісною** (в іншому випадку система називається **несумісною**). СЛАР, яка має **єдиний** розв'язок, називається **визначеною**, а СЛАР, що має більше ніж один розв'язок - **невизначеною**. Множину всіх без винятку розв'язків системи

називають **загальним розв'язком** системи. Дві системи **еквівалентні (рівносильні)**, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків (їх загальні розв'язки співпадають).

Рішення системи методом Гауса засновано на застосуванні наступних перетворень системи (елементарних перетворень):

- якщо обидві частини деякого рівняння СЛАР помножити на довільне число, яке не дорівнює нулю, то отримаємо систему, рівносильну вихідній;
- якщо в СЛАР поміняти місцями два довільні рівняння, то отримаємо систему, рівносильну вихідній;
- якщо до будь-якого рівняння СЛАР додати довільне інше рівняння цієї СЛАР помножене на деяке число, то отримаємо систему, рівносильну вихідній.

Після виконання кінцевого числа елементарних перетворень, можливі три випадки:

- 1) отримаємо рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих рівні нулю, а права частина рівняння відмінна від нуля;
- 2) останнє рівняння системи містить лише одне невідоме (система наводиться до трикутного вигляду);
- 3) останнє рівняння системи містить більше одного невідомого (система наводиться до трапецієвидного вигляду).

В першому випадку система несумісна, у другому-визначена, у третьому-невизначена.

Методичні рекомендації до вивчення теми

При вивченні теми необхідно добре усвідомити, що суть методу Гауса полягає в тому, що за допомогою послідовних вилучень невідомих вихідна система перетворюється на ступінчасту (зокрема в трикутну) систему, рівносильну даній.

Корисно помітити, що оскільки виконання алгоритму Гауса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь зводиться до певних дій над коефіцієнтами системи, то виконання цього алгоритму зручно проводити, оперуючи розширеною матрицею системи, відокремивши стовпець вільних членів вертикальною рисою, та всі перетворення виконувати над рядками цієї системи.

Треба зауважити, що для обчислень за методом Гауса зручно мати «ведучий» елемент, за допомогою якого в результаті послідовних віднімань з'являються нульові коефіцієнти, рівним одиниці.

Важливо звернути увагу на те, що не завжди матриця містить «зручні» елементи. В такому випадку їх завжди можна отримати, оперуючи

рядками вихідної матриці.

Слід врахувати, що якщо після виконання перетворень з'ясується, що система є сумісною, але невизначеною, то головними невідомими слід вибрати ті невідомі, з яких починається рівняння системи трапецієвидного вигляду. Всі інші невідомі вважатимемо вільними.

Приклад. За методом Гауса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворення рядків матриці (відповідних рівнянь системи) будемо позначати стрілками. Користуючись першим рівнянням системи (першим рядком матриці) та підбираючи відповідні коефіцієнти, вилучимо першу змінну системи (тобто x_1) з інших рівнянь системи (зробимо всі елементи першого стовпчика матриці нульовими, за виключенням першого діагонального елементу).

Маємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

Другий та третій рядки матриці можна поділити на (-3) , а четвертий – на (-6) . Потім, використовуючи другий рядок матриці, зробимо нульовими елементи третього стовпчика в третьому та четвертому рядках матриці (вилучимо змінну x_3 з третього та четвертого рівнянь системи). Маємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Остання матриця відповідає ступінчастій системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

а тому є невизначеною. При розв'язанні системи ступінчатого виду зручно спочатку звести її до трикутного виду, переносячи відповідні невідомі (змінні) в праву частину системи (в нашому випадку такими невідомими є x_2 та x_4 , або x_2 та x_3). Маємо (якщо вільні змінні - x_2 та x_4) трикутний вигляд системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$$

Тепер, рухаючись від останнього рівняння системи до першого (знизу догори по системі), знаходимо загальний розв'язок системи:

Відповідь:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Така форма подання загального розв'язку є **стандартною формою** подання **загального розв'язку** системи. При цьому змінні правої частини загального розв'язку системи в стандартній формі називаються **вільними** (або **незалежними**) змінними системи, а змінні лівої частини – **залежними** змінними системи. Користуючись стандартною формою подання загального розв'язку системи, надаючи вільним змінним системи довільних значень та підраховуючи значення залежних змінних, отримуємо конкретні часткові розв'язки системи. Наприклад, якщо $x_2=1$ та $x_4=1$, то $x_1=2$ та $x_3=1$. Таким чином, $(2, 1, 1, 1)$ – частковий розв'язок системи.

Питання для обговорення

1. Який загальний вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
2. Що називається матрицею системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
3. Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
4. Яка система системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається сумісною?
5. Яка система системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається несумісною?
6. Яка система системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається визначеною?

7. Яка система системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається невизначеною?
8. Яка система системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною?
9. Чи може бути несумісною однорідна система рівнянь?
10. Який розв'язок завжди має однорідна система рівнянь?
11. Які дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними?
12. Чи можуть рівносильні системи рівнянь мати різну кількість невідомих?
13. Які існують елементарні перетворення систем лінійних рівнянь?
14. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається загальним?
15. Як знайти загальний розв'язок системи рівнянь?
16. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається частковим?
17. Як з загального розв'язка системи лінійних рівнянь отримати частковий?
18. До яких систем можна застосовувати метод Гауса?
19. Який елемент зручно мати у якості «ведучого»?
20. Чи можна викреслити нульові рядки в трапецієвидній матриці, яка отримана з розширеної матриці системи лінійних рівнянь?
Відповідь поясніть.
21. Який рядок обов'язково має відповідна трапецієвидна матриця несумісної системи лінійних рівнянь?
22. Скільки розв'язків має сумісна система лінійних рівнянь, матрицю якої приведено до трикутного виду?

Завдання для самостійної роботи

1. Запишіть загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Яка з систем може бути розв'язана за методом Гауса?
3. Що таке розширена матриця та у чому полягає ідея методу Гаусса?
4. Опишіть метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Які переваги та недоліки цього методу?
5. Дайте означення розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
6. Які види розв'язків може мати система лінійних рівнянь?
7. Яка система називається сумісною? Не сумісною? Визначеною? Не визначеною?
8. Як за допомогою методу Гаусса дослідити сумісність системи лінійних рівнянь?
9. Чи може бути несумісною однорідна система рівнянь?
10. Вкажіть елементарні перетворення систем лінійних рівнянь.

11. Що означає, якщо після застосування методу Гауса отримали рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих рівні нулю, а права частина рівняння відмінна від нуля?
12. Чи можна викреслити нульові рядки в трапецієвидній матриці, яка отримана з розширеної матриці системи лінійних рівнянь? Відповідь поясніть.
13. Доведіть, що елементарні перетворення переводять дану систему лінійних рівнянь в еквівалентну.
14. Користуючись методом виключення невідомих знайдіть загальний розв'язок системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

15. Знайдіть загальний розв'язок та один частковий розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 = 2. \end{cases}$$

16. Розв'яжіть системи методом Гауса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 9x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 14x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

ТЕМА 2

МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

Питання до практичного заняття

1. Поняття матриці. Лінійні операції над матрицями.
2. Визначники малих порядків.
3. Підстановки n -го степеня, інверсії, транспозиції. Парність підстановок.
4. Визначники n -го порядку, їх властивості.
5. Мінори та їх алгебраїчні доповнення.
6. Розклад визначника за елементами рядка. Теорема про «чужі» доповнення.
7. Теорема Лапласа. Визначник матриці трикутного виду. Визначник добутку матриць.
8. Обернена матриця. Критерій оберненості матриць. Методи знаходження оберненої матриці.
9. Матричні рівняння.
10. Запис і розв'язування систем лінійних рівнянь в матричній формі.
11. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Історично першим розділом лінійної алгебри була теорія лінійних алгебраїчних рівнянь. В зв'язку з необхідністю розв'язання систем лінійних рівнянь (СЛАР) виникли поняття визначника та матриці. Надалі теорія матриць набула самостійного значення.

МАТРИЦІ

Матрицею розмірності $m \times n$ називається таблиця елементів, розташованих у **m** рядках та **n** стовпчиках

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Число рядків і стовпців задають **розмірність** матриці.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається **прямокутною**.

Якщо $m = n$, то матриця називається **квадратною**.

Число рядків або стовпчиків квадратної матриці називається її **порядком**.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці n -го порядку утворюють **головну діагональ** цієї матриці.

Квадратну матрицю називають **трикутною**, якщо всі її елементи, які розташовані нижче (верхня трикутна) або вище (нижня трикутна) головної діагоналі дорівнюють нулю. Таким чином, матриці

$$A = A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A = A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

є відповідно верхньою та нижньою трикутними матрицями.

Дві матриці однієї й тієї ж розмірності вважаються **рівними**, якщо в них елементи, які розташовані на однакових місцях в матрицях, рівні між собою.

Додавання матриць

Сумою $A+B$ двох прямокутних матриць A та B однакових розмірностей $m \times n$ називають матрицю C ($C = A+B$) тієї ж розмірності, всі елементи якої знаходять за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Властивості. Якщо A, B, C - будь-які матриці однієї розмірності, то:

- 1) $A + B = B + A$ (комутативність додавання матриць),
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність додавання матриць).

Множення матриці на число

Добутком матриці A розмірності $m \times n$ на число λ називають матрицю D ($D = \lambda A$) тієї ж розмірності, всі елементи якої знаходять за формулою

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \text{де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Властивості. Якщо A, B - будь-які матриці однієї розмірності та $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то:

- 1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (асоціативність відносно добутку чисел),
- 2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивність відносно суми матриць),
- 3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивність відносно суми чисел).

Множення матриць

Добутком матриці A розмірності $m \times k$ на матрицю B розмірності $k \times n$ називають матрицю C ($C = AB$) розмірності $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) дорівнює сумі добутків елементів i -того рядка матриці A на відповідні (з тими ж номерами) елементи j -того стовпчика матриці B , тобто $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip}b_{pj}$, ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Транспонування матриці

Матриця A^T називається **транспонованою** відносно матриці A , якщо A^T отримується з матриці A заміною всіх рядків матриці A на відповідні (з тими ж номерами) стовпчики цієї ж матриці. Таким чином, якщо

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості операцій

Якщо нижчеподані добутки матриць існують, то мають місце наступні властивості:

- 1) В загальному випадку $AB \neq BA$;
- 2) $A0 = 0A = 0$;
- 3) $A(BC) = (AB)C = ABC$;
- 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, α — константа;
- 5) $A(B+C) = AB+AC$.

Приклади розв'язування завдань

1. Знайти суму матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти добуток матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти матрицю A^T .

$$\text{Якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВИЗНАЧНИКИ

Розглянемо квадратну матрицю n -го порядку

$$A = A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначником матриці A n -го порядку називається алгебраїчна сума $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів матриці, взятих по одному з кожного її рядка та кожного стовпця. Причому добуток входить в суму зі своїм знаком, якщо підстановка, складена з індексів елементів добутку – парна, і з протилежним знаком, якщо підстановка індексів – непарна.

Тоді

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} (-1)^{v(\sigma)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Основні властивості визначників

1. При транспонуванні матриці n -го порядку її визначник не змінюється.
2. Якщо визначник має рядок (стовпчик), всі елементи якого дорівнюють нулю, то він (визначник) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпчика), то він дорівнює нулю.

4. Визначник, у якого відповідні елементи двох рядків (стовпчиків) пропорційні, дорівнює нулю.
5. Знак визначника зміниться на протилежний, якщо поміняти місцями два його довільні рядки (стовпчика).
6. Спільний множник всіх елементів будь якого рядка (стовпчика) визначника можна винести за знак визначника.
7. Якщо елементи деякого i -го рядка (стовпчика) визначника є сумами двох доданків, то цей визначник можна подати як суму двох визначників, що утворені з вихідного визначника заміною елементів i -го рядка (стовпчика) відповідно першими або другими доданками цих елементів.
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь якого його рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на одне і те ж саме довільне число (до будь якого рядка (стовпчика) додати довільний інший рядок (стовпчик) з довільним коефіцієнтом).

Теорема. Визначник трикутного виду дорівнює добутку елементів головної діагоналі матриці.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Теорема Лапласа. Якщо у визначнику n -го порядку ($n \geq 2$) зафіксувати довільні k ($1 \leq k \leq n-1$) рядків (або стовпчиків), то цей визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків **всіх** мінорів k -го порядку, які містяться у виділених рядках (або стовпчиках), на їх алгебраїчні доповнення.

Приклади розв'язування завдань

1. Знайти визначник:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 20 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Підрахуємо визначник зведенням його до трикутного виду. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці визначника. Тоді на місце елемента a_{11} вийде одиниця («зручний» елемент для перетворення всіх інших елементів першого стовпчика в нулі). Така дія над рядками матриці

визначника змінить знак вихідного визначника на протилежний (див. властивості визначників). Маємо:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 20 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 27 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix}.$$

Далі скористаємося тим, що визначник не змінюється, якщо до будь-якого рядка додати довільний інший рядок, помножений на деяке число. Зафіксуємо перший рядок останнього визначника з «зручним» діагональним елементом, додамо його послідовно до інших рядків визначника, попередньо помноживши його на числа (-7) (при додаванні до другого рядка визначника), (-5) (при додаванні до третього рядка визначника) та (-3) (при додаванні до четвертого рядка визначника). В подальшому про такі перетворення визначника будемо говорити «перетворимо рядки визначника з допомогою першого рядка». Отримаємо:

$$\begin{matrix} & & -7 & -5 & -3 \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 27 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} & = & - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}. \end{matrix}$$

В останньому визначнику поміняємо місцями другий та четвертий рядки визначника (знак визначника знову зміниться на протилежний).

Отримаємо:

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Далі перетворимо останній рядок визначника з допомогою третього.

Отримаємо трикутний визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Тепер до останнього визначника застосуємо теорему про визначник трикутного виду. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-2) = 2.$$

Відповідь: 2.

2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{vmatrix}$$

Розв’язання. Переглядаючи стовпчики (або рядки) матриці бачимо, що матриця не містить «зручних» елементів (в матриці немає таких стовпчиків (або рядків), в яких можна було б зафіксувати такий елемент, на який ділилися б всі інші елементи цього стовпчика (або рядка)). Аналогічно попередньому прикладу, перетворення будемо позначати стрілочками. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 0 & -10 & 0 & -18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -2 \\ \leftarrow \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 0 & -18 \end{vmatrix} =$$

Для зручності з другого, третього, та четвертого рядків винесемо за знак визначника множники (-1) (або помножимо ці рядки на (-1)).

Маємо далі:

$$- \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} - 3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$$

Тепер з другого, третього та четвертого рядків винесемо множники (2).

Маємо:

$$8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} - 2 = 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} =$$

$$8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} - 3 = 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 16.$$

Відповідь: 16.

Формули Крамера (швейцарський математик, 1704 – 1752).

Формули Крамера мають загальний характер і застосовуються до довільних систем лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих. Ними користуються, коли головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю. В цьому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n - \text{кількість невідомих системи.}$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи, користуючись правилом трикутника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + 12 - 18 - 4 - 3 = -2 \neq 0.$$

Тому розв'язок системи можна знайти за формулами Крамера.

Маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 9 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

Тоді

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -2, \end{cases}$ або $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, -2).$

Обернена матриця

Квадратна матриця називається **неособливою**, якщо її визначник не дорівнює нулю. В іншому разі матриця називається **особливою**.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** для матриці A , якщо

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Теорема (критерій існування оберненої матриці).

Матриця A має обернену тоді та тільки тоді, коли ця матриця A є неособливою.

Для знаходження матриці, оберненої до даної матриці зручно застосувати такий алгоритм:

- Знайти визначник матриці $\Delta = |A|$. Якщо $|A| \neq 0$, продовжити кроки алгоритму;
- Для кожного елемента матриці знайти його алгебраїчне доповнення та замістити всі елементи вихідної матриці на їх алгебраїчні доповнення;

- в) Транспонувати матрицю, отриману на кроці б) алгоритму;
- г) Поділити всі елементи матриці, отриманої на кроці в) алгоритму, на визначник вихідної матриці.

Таким чином, якщо $|A| \neq 0$, то

$$\text{при } A = A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ маємо } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження оберненої матриці

Знайти A^{-1} , якщо вона існує, для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будемо керуватись вищенаведеним алгоритмом. Знайдемо визначник матриці. Маємо $|A| = -18$ (перевірити!). Значить, матриця A^{-1} існує. Знайдемо для кожного елемента матриці його алгебраїчне доповнення. Маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

Тепер побудуємо матрицю, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів вихідної матриці:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -18 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \\ -3 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо отриману матрицю. Маємо:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \\ -18 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Розділимо всі елементи останньої матриці на визначник вихідної матриці (на -18) та отримаємо матрицю, обернену для вихідної.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Побудувавши добутки $A^{-1}A$ та AA^{-1} переконаємося, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, тобто матриця A^{-1} знайдена правильно (переконатися в цьому самостійно).

Методичні рекомендації до вивчення теми.

Вивчення теми рекомендується розпочати з розгляду операцій над матрицями. Важливо, щоб матриці мали сумісні розміри для відповідних операцій.

При множенні матриць слід уважно слідкувати за їх розмірностями та узгодженістю. Здобувачам потрібно звернути увагу на те, що добуток матриць існує тільки в тому випадку, коли кількість елементів в будь-якому рядку першої матриці збігається з кількістю елементів в будь-якому стовпчику другої матриці, тобто тільки тоді, коли кількість стовпчиків першої матриці збігається з кількістю рядків другої матриці.

Важливо пам'ятати, що множення матриць, в загальному випадку, не є комутативним, тобто AB не завжди дорівнює BA .

Для опанування теми, здобувачам рекомендується ретельно розібрати різні методи обчислення визначників.

Корисно помітити, що обчислення визначників, особливо вищих порядків, часто спрощується, якщо скористатися їх властивостями.

Варто звернути увагу на те, що перша властивість визначників підкреслює, що при використанні властивостей визначників його рядки та стовпчики абсолютно рівноправні – всі властивості, які сформульовані в термінах рядків визначника, мають місце і для стовпчиків.

Слід зазначити, що шоста властивість визначників можна подати і так: - якщо довільний рядок (стовпчик) визначника помножити на деяке число, то весь визначник помножиться на це число.

Здобувачам необхідно добре усвідомити, що практичне застосування теореми Лапласа ефективне тільки в тому випадку, коли більшість мінорів, які містяться у виділених рядках (або стовпчиках), дорівнюють нулю. В загальному випадку застосування теореми Лапласа теж має сенс, бо зводить підрахунок визначників великих порядків до підрахунку визначників

значно менших порядків.

Продовжуючи вивчення теми, необхідно розглянути різні методи знаходження оберненої матриці

Треба зауважити, що якщо для обернена матриця знаходиться за допомогою елементарних перетворень, то потрібно врахувати, що об'єм обчислень різко зростає зі зростанням розмірності матриці.

Процес знаходження оберненої матриці будь-яким способом слід закінчувати перевіркою. Найпростішою перевіркою правильності знаходження оберненої матриці є множення заданої і знайденої матриць: якщо добуток їх дорівнює одиничній матриці, то обернену матрицю знайдено правильно.

Після вивчення певної теми та вирішення достатньої кількості завдань здобувачам рекомендується відтворити по пам'яті визначення, формули, формулювання, перевіряючи себе щоразу за конспектом лекцій. Питання для самоперевірки, наведені тут, мають на меті допомогти здобувачам в такому повторенні, закріпленні та перевірці міцності засвоєння вивченого матеріалу.

Питання для обговорення

1. Які матриці називають рівними?
2. Як визначить розмірність матриці?
3. Які види матриць вам відомі?
4. Які існують дії над матрицями?
5. Як скласти дві матриці? Яким умовам повинні відповідати при цьому матриці?
6. Як помножити матрицю на число? Сформулюйте властивості цієї операції.
7. Як перемножити дві матриці, яку розмірність має матриця, яка є результатом цієї дії?
8. Які властивості має дія множення матриць?
9. Чи комутативна операція множення матриць?
10. Які матриці називаються переставними?
11. Яка матриця виконує роль одиниці в дії множення матриць?
12. Як обчислити визначник другого порядку? Наведіть приклади.
13. Як обчислити визначник третього порядку? Наведіть приклади.
14. Що називається інверсією? Скільки чисел утворює інверсію?
15. Яка підстановка називається транспозицією? Транспозицією сусідніх?
16. Що таке визначник?
17. Які ви знаєте методи обчислення визначників?

18. Чи можна сказати, що визначник n -го порядку є число?
19. Якими властивостями володіють визначники n -го порядку?
20. В якому сенсі стовпці і рядки визначника рівноправні?
21. Як зміниться визначник n -го порядку, якщо всі його стовпці записати в зворотньому порядку?
22. Чому дорівнює визначник матриці трикутного виду?
23. Як пов'язані між собою мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника?
24. Як розкласти визначник за елементами рядка (стовпця)?
25. Чи пов'язані між собою теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця та теорема Лапласа?
26. Чому дорівнює визначник добутку матриць?
27. Чому для обчислення визначника n -го порядку використовують не означення, а інші методи?
28. Яка матриця називається оберненою по відношенню до матриці A ?
29. Яка матриця має обернену?
30. Які способи знаходження оберненої матриці вам відомі?
31. Які існують види матричних рівнянь?
32. Сформулюйте теорему Крамера.
33. До яких систем лінійних рівнянь можна застосувати метод Крамера?

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення матриці. Наведіть приклади об'єктів, що допускають матричний опис.
2. Сформулюйте властивості додавання двох матриць.
3. Опишіть операцію множення матриць. Обґрунтуйте причини введення саме такої операції множення.
4. Яку розмірність має матриця A , якщо відомо, що $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$?
5. Що розуміють під операцією транспонування матриці? Наведіть приклади.
6. Дайте означення елементарних перетворень матриці. Наведіть приклади елементарних перетворень рядків (стовпців) матриці.
7. Дайте означення підстановки n -го степеня, наведіть приклади.
8. Запишіть формулу для обчислення визначника третього порядку.
9. Дайте означення визначника n -го порядку.
10. Перелічіть властивості визначників.
11. Дайте означення мінору елемента визначника, наведіть приклади.
12. Дайте означення алгебраїчного доповнення, наведіть приклади.
13. Сформулюйте теорему Лапласа для обчислення визначників.

14. Опишіть алгоритм обчислення оберненої матриці.
 15. Обґрунтуйте матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.
 16. Запишіть правило Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь.
 17. Обчисліть $AB-BA$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

18. Знайдіть $A \cdot B^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. Обчисліть визначник другого порядку:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

20. Обчисліть визначники третього порядку:

$$\text{а) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

21. Обчисліть визначники методом зведення до трикутного вигляду:

$$\text{а) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{в) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

22. Розв'яжіть системи за методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

23. Розв'яжіть матричні рівняння:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. Розв'яжіть систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

ТЕМА 3

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Питання до практичного заняття

1. Поняття комплексного числа.
2. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
3. Спряжені комплексні числа, їх властивості.
4. Добування квадратного кореня з комплексного числа, заданого в алгебраїчній формі.
5. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
6. Модуль та аргумент комплексного числа.
7. Тригонометрична і показникова форми запису комплексного числа.
8. Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формі.
9. Формула Муавра.
10. Добування кореня n -го степеня з комплексного числа.
11. Корені з одиниці.
12. Первісні корені з одиниці. Критерій первісності.

Теоретичні відомості

Як відомо, комплексні числа виникли в зв'язку з завданням рішення квадратних рівнянь. Залишаючись в множині дійсних чисел, неможливо вирішити квадратне рівняння, дискримінант якого менше нуля. Те ж саме спостерігалось і при розв'язуванні рівнянь третього і вищих степенів, тому постала необхідність у розширенні поняття числа.

Ідеї, що передували комплексним числам, можна знайти в роботах італійських математиків 16 століття, таких як Кардано, при вивченні кубічних рівнянь. Тоді виникали вирази, які містили корінь з від'ємного числа. Значний внесок у розвиток комплексних чисел зробив Гаусс. Він дав строге доведення основної теореми алгебри, яка стверджує, що будь-який многочлен з комплексними коефіцієнтами має корінь, що також є комплексним числом. Ейлер, Коші та інші математики розробили операції над комплексними числами, довели їх властивості та застосували в різних областях математики, таких як теорія функцій, геометрія та інші.

Комплексні числа, спочатку виникнувши як математична абстракція, виявилися потужним інструментом для розв'язання різноманітних задач у математиці та інших науках.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Комплексне число можна записати у вигляді: $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, i - уявна одиниця ($i^2 = -1$).

Цей запис називається алгебраїчною формою комплексного числа.

$Re\ z = a$ - дійсна частина комплексного числа.

$Im\ z = bi$ - уявна частина комплексного числа, b - коефіцієнт при уявній частині комплексного числа.

Два комплексних числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти уявних частин, тобто

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d.$$

Додавання, множення і ділення комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі проводиться таким чином:

1). $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

2) $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

3) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Спряженим комплексному числу $z = a + bi$ називається комплексне число $\bar{z} = a - bi$.

Властивості спряжених комплексних чисел

1. Спряжене спряженому комплексного числа z є число z , тобто

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

2. Спряжене суми двох комплексних чисел дорівнює сумі спряжених доданком, тобто

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

3. Спряжене добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові спряжених співмножникам, тобто

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

4. Добуток комплексного числа і його спряженого - число дійсне. Тобто $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.

5. $z + \bar{z} = 2Re\ z$

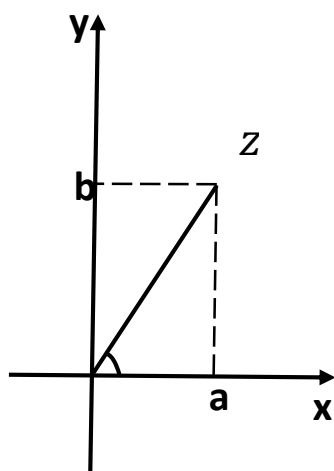
Сума комплексного числа z і спряженого йому $\bar{z}$ дорівнює подвійній дійсній частині z .

6. $\bar{z} - z = 2Im\ z$

Різниця комплексного числа z і спряженого йому $\bar{z}$ дорівнює подвійній уявній частині z .

Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Тригонометрична форма комплексного числа

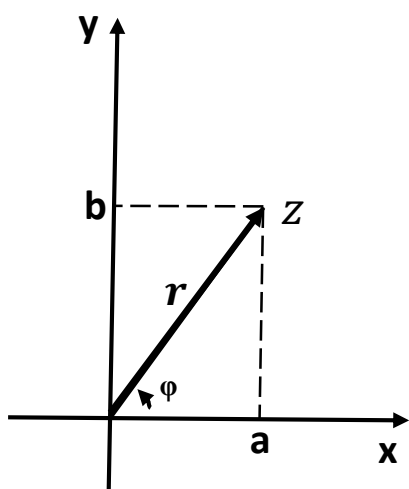


Комплексному числу $z = a + bi$ поставимо у відповідність точку площини з координатами $(a; b)$. За таким правилом кожному комплексному числу однозначно ставиться у відповідність точка площині і навпаки.

Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається комплексною площиною.

Вісь абсцис називається дійсною, а вісь ординат - уявною віссю.

Ця геометрична інтерпретація називається точковою.



Оскільки кожна точка площини однозначно визначає вектор, що виходить із початку координат і з кінцем в даній точці, то між такими векторами і комплексними числами встановлено взаємно однозначна відповідність.

Це друга геометрична інтерпретація комплексних чисел.

З малюнка видно, що $a = r \cdot \cos \varphi$, $b = r \cdot \sin \varphi$.

Маємо ще одну форму запису комплексного числа: $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Ця форма запису називається **тригонометричною** формою комплексного числа.

Модулем комплексного числа називається відстань від початку координат до точки, яка зображує комплексне число.

Позначається $|z| = r$

Обчислюється $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ назвається кут φ між додатнім напрямком вісі ОХ з радіус-вектором, проведеним з початку координат в точку, яка зображує комплексне число. Позначається $\arg z = \varphi$.

Отже, щоб перейти від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної, використовують формули

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Теорема (про модуль і аргумент добутку двох комплексних чисел).

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів. Аргумент добутку дорівнює сумі аргументів співмножників.

Формула Муавра

Для піднесення комплексного числа до цілого степеня користуються **формулою Муавра**

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Теорема (про модуль і аргументи частки)

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

Добування кореня з комплексного числа

Для кожного натурального n і будь-якого комплексного z завжди знайдеться комплексне число β , що задовольняє $\beta^n = z$, тобто з будь-якого комплексного z завжди можна добути корінь n -го степеня.

Якщо $z=0$, то єдиним значенням $\sqrt[n]{0}$ є число 0.

Теорема. Корені n -го степеня з комплексного числа $z \neq 0$ існують і знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \beta_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Корені з одиниці

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

Оскільки $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Множину значень $\sqrt[n]{1}$ позначають C_n .

$$C_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}.$$

Первісні корені

Ті значення кореня n -го степеня з одиниці, які не є значеннями кореня з одиниці меншого степеня ніж n , називаються **первісними коренями** n -го степеня з одиниці.

Теорема (критерій первісності кореня)

Якщо ε — первісний корінь n -го степеня з одиниці, то ε_k первісний корінь n -го степеня з одиниці тоді і тільки тоді, коли числа n і k взаємно прості ($(k,n)=1$).

Приклади розв'язування завдань

1. Обчислити $(8 + 9i) + (7 - 2i)$.

Розв'язання. Маємо

$$(8 + 9i) + (7 - 2i) = (8+7) + (9 - 2)i = 15 + 7i.$$

2. Обчислити $(3 + 5i)(4 - i)$.

Розв'язання. Маємо

$$(3 + 5i)(4 - i) = 12 - 3i + 20i - 5i^2 = 17 + 17i.$$

3. Обчислити $\frac{(3-i)^2}{1-i}$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{(3-i)^2}{1-i} &= \frac{9-6i-1}{1-i} = \frac{(8-6i)(1+i)}{2} = \frac{8+8i-6i+6}{2} = \frac{14+2i}{2} = \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

4. Обчислити $\frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned}\frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2} &= \frac{1+4i+4i^2-8+12i-6i+i^3}{1-3i+3i^2-i^3+4+4i+i^2} = \\ &= \frac{1+4i-4-8+12i+6-i}{1-3i-3+i+4+4i-1} = \frac{-5+15i}{1+2i} = \frac{(-5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \\ &= \frac{-5+10i+15i+30}{5} = \frac{25+25i}{5} = 5+5i.\end{aligned}$$

5. Користуючись формулою бінома Ньютона знайти $(1+i)^5$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i + 10 \cdot 1^3 \cdot i^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 + 5 \cdot 1 \cdot i^4 + 1 \cdot i^5 = \\ &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.\end{aligned}$$

6. Надати числа $1, -2, i, -i$ в тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання. $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i}$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

7. Користуючись формулою Муавра знайти $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

Розв'язання. Запишемо число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі

$$-1+i\sqrt{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

За формулою Муавра отримаємо

$$\begin{aligned}(-1+i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60}(\cos(60 \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \sin(60 \cdot \frac{2\pi}{3})) = 2^{60}(\cos 40\pi + i \sin 40\pi) \\ &= 2^{60}.\end{aligned}$$

8. Знайти

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10}$$

Розв'язання. Запишемо у тригонометричній формі чисельник і знаменник дробу, що у дужках:

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right),$$

тоді згідно з формулою ділення комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2}{\sqrt{2}} 2^{60} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

І згідно з формулою Муавра:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos\left(10 \cdot \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{7\pi}{12}\right) \right) = \\ &= 2^5 \left(\cos \frac{70\pi}{12} + i \sin \frac{70\pi}{12} \right) = \\ &= 32 \left(\cos \left(4\pi + \frac{22\pi}{12}\right) + i \sin \left(4\pi + \frac{22\pi}{12}\right) \right) = \\ &= 32 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = 16(\sqrt{3} - i) = 16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

9. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{(1 + i)^8}$.

Розв'язання. Запишемо число $1 + i$ в тригонометричній формі

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^4 (\cos 0 + i \sin 0).$$

За формулою добування кореня з комплексного числа маємо

$$\sqrt[4]{(1+i)^8} = \sqrt[4]{2^4} \left(\cos \frac{0+2\pi k}{4} + i \sin \frac{0+2\pi k}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Звідси отримуємо

$$\beta_0 = 2$$

$$\beta_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$\beta_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$\beta_3 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

10. Знайти всі значення
$$\sqrt[6]{\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6}}.$$

Розв'язання. Знайдемо тригонометричну форму підкореневого виразу:

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$(1 - i)^2 = (\sqrt{2})^2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \left(2 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(2 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} = 2^{-5} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \right) =$$

$$= 2^{-5} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

Отже,

$$\sqrt[6]{\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^6}} = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Маємо

$$\beta_0 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\beta_1 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\beta_3 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$\beta_4 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

$$\beta_5 = \sqrt[6]{2^{-5}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

11. Знайти всі первісні корені 8-го степеня з 1.

Розв'язання. Користуючись критерієм первісності кореня маємо:

$\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7$ – первісні корені 8-го степеня з 1:

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\varepsilon_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$$

$$\varepsilon_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$$

.

Методичні рекомендації до вивчення теми:

Для успішного опанування теми рекомендується розпочати з ознайомлення із сутністю поняття комплексного числа.

Необхідно звернути увагу на те, що з означень операцій над комплексними числами випливає справедливості для комплексних чисел тих основних властивостей операцій додавання і множення, які виконувалися для дійсних чисел, а саме: комутативність, асоціативність операцій додавання, множення та дистрибутивність множення відносно додавання.

В той же час, важливо усвідомити, що поняття “більше”, “менше” в тому розумінні, в якому їх застосовували до дійсних чисел, до комплексних чисел застосовувати не можна.

Здобувачам знань рекомендується ретельно розібрати теорію та відпрацювати правила виконання операцій над комплексними числами в алгебраїчній формі.

У процесі вивчення теми варто звернути увагу на поняття спряженого до даного комплексного числа. Обов'язковими для вивчення є властивості спряжених комплексних чисел.

Продовжуючи вивчення теми, необхідно розглянути тригонометричну форму запису комплексних чисел.

Слід зазначити, що нераціонально використовувати тригонометричну форму при додаванні комплексних чисел, а множення і ділення комплексних чисел в тригонометричній формі виконувати дуже зручно.

При підготовці до практичного заняття, варто уважно вивчити означення модуля та аргумента комплексного числа.

Слід врахувати, що аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, а з точністю до доданка 2π .

Важливо звернути увагу на те, що додавання, віднімання, ділення і піднесення в цілу степінь – дії однозначні, добування же кореня n -го степеня дає завжди n різних значень.

Треба зауважити, що всі корені n -го степеня з комплексного числа z розташовані на колі радіусом $|z|^{\frac{1}{n}}$ з центром на початку координат і поділяють це коло на n рівних частин.

Корисно помітити, що усі значення кореня n -го степеня з комплексного числа можна одержати множенням одного з цих значень на всі корені n -го степеня з одиниці.

Під час вивчення цієї теми окрему увагу слід приділити вивченню критерія первісності кореня n -го степеня з одиниці.

Питання для обговорення:

1. Що таке уявна одиниця?
2. Які числа називають комплексними?
3. Чи існують для комплексних чисел поняття "більше", "менше"?
4. Яка форма запису комплексного числа називається алгебраїчною формою?
5. Які дії над комплексними числами в алгебраїчній формі вам відомі?
6. В якому разі два комплексних числа називаються рівними?
7. Яке комплексне число називається спряженим до даного комплексного числа?
8. Які властивості спряжених комплексних чисел вам відомі?
9. Що уявляє собою комплексне число з геометричної точки зору?
10. Які геометричні інтерпретації комплексних чисел вам відомі?
11. Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
12. Чи однозначно визначається модуль комплексного числа? Аргумент?
13. Яка форма запису комплексного числа називається тригонометричною формою?
14. Які дії над комплексними числами в тригонометричній формі вам відомі?
15. Чи впливає з рівності двох комплексних чисел рівність їх модулів?
16. Чи впливає з рівності двох комплексних чисел рівність їх аргументів?
17. Як піднести до степеня комплексне число, записане в тригонометричній формі?
18. Як добувається корінь натурального степеня з комплексного числа?
19. Як розташовуються на комплексній площині точки, що відповідають значенням кореня n -го степеня з комплексного числа?
20. Що таке показникова форма запису комплексного числа?
21. Що таке первісні корені з одиниці?

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Сформулюйте правило ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
3. Дайте означення спряженого комплексного числа. Наведіть приклади.
4. Сформулюйте правило множення комплексних чисел в тригонометричній формі.
5. Напишіть формулу Муавра.
6. Напишіть формулу кореня n -го степеня з комплексного числа.
7. Дайте означення кореня з одиниці.
8. Сформулюйте критерій первісності.

9. Виконайте дії:

а) $(4 - 3i)^2 + (2 + i)^2$;

б) $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$;

в) $\frac{3-i}{4+5i}$;

г) $\frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}$;

д) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$;

е) $\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1 - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$

10. Обчисліть: i^5 , i^6 , i^8 , i^{111} .

11. Користуючись формулою бінома Ньютона знайдіть: $(2 + i)^7$.

12. Запишіть комплексні числа в тригонометричній формі:

а) $1 + i$; б) $1 - i$; в) $-1 + i$; г) $-1 - i$.

13. Користуючись формулою Муавра, знайдіть: $(1 + i)^{12}$.

14. Обчисліть:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right)^{18}$$

15. Знайдіть всі значення коренів:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-4}$; в) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

16. Знайдіть всі значення кореня з одиниці $\sqrt[3]{1}$.

17. Знайдіть всі первісні корені 24-го степеня з одиниці.

ТЕМА 4

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

Питання до практичного заняття

1. Арифметичний векторний простір.
2. Лінійна комбінація системи векторів. Лінійна оболонка.
3. Еквівалентні системи векторів.
4. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів. Критерій лінійної залежності векторів.
5. Ранг системи векторів, його різні означення та їх еквівалентність.
6. База системи векторів. Основна властивість бази. Критерій бази.
7. Елементарні перетворення систем векторів.
8. Перетворення координат вектору при переході до нової бази.
9. Обчислення рангу матриці. Теорема про ранг матриці.
10. Розв'язування та дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність.
11. Вимір, базис простору.
12. Підпростір. Критерій підпростору.
13. Ізоморфізм векторних просторів однакової вимірності.
14. Сума та перетин лінійних підпросторів.
15. Пряма сума. Критерій прямої суми.
16. Формула Грассмана.
17. Власні числа та власні вектори лінійного перетворення.

Теоретичні відомості

Ідея лінійного простору сформувалась поступово протягом XIX століття. Витоки цього поняття пов'язані з роботами Жозефа Луї Лагранжа у контексті аналітичної механіки. Важливий внесок зробив Герман Грассман у 1844 році у своїй праці "Die Lineale Ausdehnungslehre", де він ввів абстрактне поняття багатовимірного простору. Подальший розвиток концепції здійснили Карл Вейерштрасс, Джузеппе Пеано та інші. Остаточне формулювання поняття лінійного простору відбулося на початку XX століття.

Лінійні простори є фундаментальною частиною сучасної математики, особливо лінійної алгебри. Вони широко застосовуються у фізиці, інженерії, програмуванні, економіці та інших науках. Поняття n -мірного векторного простору дозволяє описувати багатовимірні об'єкти та процеси в наукових дослідженнях і практиці.

У машинному навчанні та штучному інтелекті концепції лінійних просторів використовуються повсюдно. Наприклад, у нейронних мережах кожен шар виконує лінійне перетворення вхідних даних, перш ніж застосувати нелінійність. Також метод головних компонент (РСА) базується на ідеї проєкції даних на нову базисну систему.

Множину L всіх n -мірних векторів з дійсними компонентами називають векторним, або **лінійним простором**, якщо для будь-яких двох його елементів $\bar{a}, \bar{b}$ визначена сума $(\bar{a} + \bar{b}) \in L$ і для кожного елемента $\bar{a} \in L$ і кожного числа α ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$) визначен добуток $\alpha\bar{a} \in L$, причому виконані такі умови:

$$1). \forall \bar{a}, \bar{b} \in L \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \text{ (перестановний закон) (комутативний)}$$

$$2). \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L \quad (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \text{ (асоціативний закон)}$$

$$3). \exists \text{ такий (нульовий) елемент } \bar{0} \in L, \text{ що } \forall \bar{a} \in L \quad \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$$

$$4). \forall \bar{a} \in L \exists -\bar{a} \in L \text{ такий, що } \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

$$5). \forall \bar{a} \in L \quad 1 \in \mathbb{R} \quad 1\bar{a} = \bar{a}$$

$$6). \forall \bar{a}, \bar{b} \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$$

$$7). \forall \bar{a} \in L \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$$

$$8). \forall \bar{a} \in L \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a}) = \beta(\alpha\bar{a}).$$

Вектор $\bar{b}$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n$.

Лінійною оболонкою системи S називається множина всіх лінійних комбінацій векторів системи (позначається $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$).

Однією з ключових концепцій, пов'язаних із лінійними просторами, є лінійна залежність і незалежність.

Нехай $S = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \}$ – система векторів.

Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називається **лінійно залежною** (ЛЗ), якщо існує ненульовий набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, таких, що лінійна комбінація $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$.

Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називається **лінійно незалежною** (ЛНЗ), якщо з рівності нулю лінійної комбінації випливає рівність нулю всіх коефіцієнтів $\alpha_i, i=1, 2, \dots, n$.

Рангом системи векторів називається максимальне число ЛНЗ векторів цієї системи (позначається ρ).

Базою системи векторів називається будь-яка її підсистема ЛНЗ.

Теорема (основна властивість бази)

Будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори бази і таке уявлення єдине.

Теорема (критерій бази)

Підсистема $S_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ системи S є базою системи S тоді і лише тоді, коли виконуються такі дві умови:

- 1) система S_1 ЛНЗ
- 2) будь-який вектор системи S лінійно виражається через вектори підсистеми S_1 .

Вимір та базис лінійного простору

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів лінійного простору називається **розмірністю** (позначається $\dim L$).

Будь-яка ЛНЗ система векторів лінійного простору, яка містить стільки векторів, яка розмірність простору називається **базисом** простору.

У n -мірному просторі базис складається з n векторів.

Наприклад, базис для $\mathbb{R}^3$: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

Лінійні простори можуть бути скінченновимірними або нескінченновимірними. У нескінченновимірних просторах базис містить нескінченну кількість векторів, і їх часто використовують в аналізі - наприклад, у функціональному аналізі при вивченні простору функцій.

Підпростір

Непорожня підмножина L_1 простору L називається підпростором простору L (позначається $L_1 \subseteq L$) якщо L_1 саме є лінійним простором щодо операцій, визначених у L .

Теорема (критерій підпростору)

Непорожня множина L_1 лінійного простору L тоді і тільки тоді є підпростором L_1 , якщо $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in L_1 \quad (\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \in L_1$.

Теорема (про розмірність суми)

Розмірність суми двох ЛПП L_1 та L_2 дорівнює сумі розмірностей L_1 та L_2 без розмірності їх перетину

$$\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1 \cap L_2)$$

Ця формула називається **формулою Грассмана**.

Ще однією важливою конструкцією в лінійних просторах є лінійне перетворення (лінійний оператор). Це функція, яка перетворює один вектор з простору у інший, зберігаючи операції додавання та множення на скаляр. Наприклад, обертання вектора у площині або розтягування/стиснення векторів уздовж певного напрямку є прикладами лінійних відображень.

Нехай X і Y - два довільні лінійні простори.

Перетворенням, що діє з X в Y називається відображення простору X у простір Y . Якщо відображення позначити символом A , то це записують:

$$A: X \rightarrow Y.$$

Перетворення $A: X \rightarrow Y$ називають **лінійним перетворенням**, якщо X і Y простори над тим самим полем P і при цьому

1. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in P$

Перетворення $A: X \rightarrow X$ ($X = Y$) називають **оператором** простору X . Лінійний оператор – це частковий випадок лінійного перетворення, коли вхідний та вихідний простір збігаються.

Ненульовий вектор x називається **власним вектором** лінійного перетворення A , якщо існує таке число λ , що $Ax = \lambda x$. Число λ називається **власним значенням** перетворення A , яке відповідає власному вектору x .

Знаходження власних векторів лінійного перетворення зручно поводити за таким алгоритмом:

1. Скласти матрицю A лінійного перетворення на деякому базисі.
2. Скласти характеристичну матрицю матриці A .
3. Обчислити визначник матриці $Ax - \lambda x$.
4. Розв'язати рівняння $|A - \lambda E| = 0$.
5. Для кожного кореня λ_i характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ знайти відповідний власний вектор $x \neq 0$, який є нетривіальним розв'язком однорідної СЛАР, причому не єдиний. Будь-який вектор, колінеарний власному – власний. Власним вектором також є лінійна комбінація власних векторів даного власного значення.

Множина всіх власних векторів, що відповідають певному власному значенню λ , утворює лінійний підпростір в заданому просторі L .

Розмірність власного підпростору, що відповідає певному власному значенню λ , не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена.

Приклади розв'язування завдань

1. Знайти лінійну комбінацію $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$, якщо

$$\vec{a}_1 = (4, 1, 3, -2),$$

$$\vec{a}_2 = (1, 2, -3, 2),$$

$$\vec{a}_3 = (16, 9, 1, -3).$$

Розв'язання.

Помножимо вектор $\vec{a}_1$ на число 3, вектор $\vec{a}_2$ на 5, вектор $\vec{a}_3$ на -1:

$$3\vec{a}_1 = (12, 3, 9, -6); \quad 5\vec{a}_2 = (5, 10, -15, 10); \quad -\vec{a}_3 = (-16, -9, -1, 3).$$

Знайдемо суму отриманих векторів, тобто шукану лінійну комбінацію

$$3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = (1, 4, -7, -7).$$

2. З'ясувати, чи є дана система векторів лінійно залежною чи лінійно незалежною

$$\vec{a}_1 = (2, -3, 1), \quad \vec{a}_2 = (3, -1, 5), \quad \vec{a}_3 = (1, -4, 3).$$

Розв'язання.

Складемо лінійну комбінацію векторів

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3).$$

Прирівняємо до нуля лінійну комбінацію

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Вирішимо систему

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3+3c_1]{c_2-2c_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3+2c_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Маємо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Тобто, з рівності нулю лінійної комбінації $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3$ випливає рівність нулю всіх її коефіцієнтів.

Отже, система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно незалежна.

3. Перевірити, чи є множина многочленів ступеня 3 з дійсними коефіцієнтами підпростором простору многочленів степеня ≤ 3 .

Розв'язання. Скористаємося критерієм підпростору. Перевіримо умову

$$\forall f(t), g(t) \in L \quad f(t) + g(t) \in L.$$

Нехай $f(t) = t^3 + t, g(t) = -t^3 + 1 \in L$, тоді

$$f(t) + g(t) = t + 1 \notin L,$$

оскільки степінь суми цих двох многочленів дорівнює двом.

Отже, множина L не є підпростором.

4. Знайти власні значення і відповідні їм власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею в деякому базисі, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичну матрицю $A - \lambda E$, обчислюємо її визначник та знаходимо коріння характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7 - \lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Обчисливши визначник, наприклад, за правилом трикутників, отримаємо

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0,$$

звідки знаходимо $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Обидва корені належать полю $\mathbb{R}$ та є власними значеннями оператора; $\lambda_1 = 3$ кратності 1; $\lambda_2 = -1$ - кратності 2.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda = 3$. Для цього складаємо систему лінійних однорідних рівнянь із матрицею $A - 3E$ та знаходимо її фундаментальну систему рішень:

$$\begin{cases} -2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ 4\xi_1 - 10\xi_2 + 8\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 7\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює двом. Множина її рішень – одновимірний простір лінійно незалежних рішень. Знаходимо її фундаментальну систему рішень - $x_1 = (1, 2, 2)$. Таким чином, власному значенню відповідають власні вектори $c(1, 2, 2)$, $c \in \mathbb{R}$.

Складаємо систему лінійних однорідних рівнянь із матрицею $A + IE$ та знаходимо її фундаментальну систему рішень:

$$\begin{cases} 2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ 4\xi_1 - 6\xi_2 + 8\xi_3 = 0 \\ 6\xi_1 - 7\xi_2 + 8\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Система рангу 2. Множина її рішень також є одновимірним простором. Знаходимо ФСР - $x_2 = (1, 2, 1)$. Таким чином, власному значенню $\lambda_2 = -1$ відповідають власні вектори $c(1, 2, 1)$, $c \in \mathbb{R}$.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Вивчення теми рекомендується розпочати з розгляду аксіоматичного означення скінченно-вимірного векторного простору над полем.

Для того щоб з'ясувати, чи є деяка множина лінійним простором щодо запроваджених на ній дій додавання і множення елемента на число, треба спочатку перевірити замкненість лінійних операцій, а потім, якщо це має місце, то виконання аксіом 1—8 лінійного простору.

Під час вивчення цієї теми здобувачам необхідно чітко розрізняти число нуль і нуль-вектор. треба враховувати, що у кожному лінійному просторі нуль-вектор тільки один і для будь-якого вектора існує тільки один протилежний вектор.

Однією з ключових концепцій, пов'язаних із лінійними просторами, є лінійна залежність і незалежність. Ці поняття є критично важливими при виборі базису та визначенні розмірності простору.

Слід звернути увагу на, що для системи, що складається з одного вектора, лінійна залежність означає, що цей вектор є нуль-вектор, а лінійна незалежність-що він не дорівнює нулю.

Якщо система містить не менше двох векторів, то лінійна залежність системи означає, що принаймні один з векторів системи може бути представлений у вигляді лінійної комбінації інших векторів системи.

Обов'язковими для вивчення є властивості лінійно залежних та незалежних систем векторів.

Слід враховувати, що долучення до системи лінійно залежних векторів нового будь-якого вектору залишає її лінійно залежною. І навпаки, вилучення з системи лінійно незалежних векторів будь-якого з них залишає систему векторів лінійно незалежною.

Продовжуючи вивчення теми, варто уважно дослідити поняття рангу системи векторів, його різні означення та їх еквівалентність.

При знаходженні рангу системи векторів, заданих координатами в деякому базисі, корисно пам'ятати, що лінійний простір розмірності n і простір стовпців (рядків) довжини n ізоморфні, тому ранг системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ дорівнює рангу матриці, складеної з координатних стовпців (рядків) цих векторів в деякому базисі.

Під час вивчення цієї теми треба приділити увагу вивченню поняття бази системи векторів, слід звернути увагу на основну властивість бази та навчитися застосовувати критерій бази.

Здобувачам також пропонується детально ознайомитися з означенням підпростору та критерієм підпростору, навчитися користуватися як означенням, так і критерієм.

Необхідно звернути увагу на те, що побудову базису підпростору часом зручно виконати, виходячи зі стандартного базису самого простору, змінюючи його вектори те щоб вони «потрапили» в підпростір.

На завершення здобувачам рекомендується ретельно розібрати основні визначення і поняття теорії лінійних перетворень: означення лінійного оператора, матриці лінійного перетворення у заданих базисах, власних векторів та власних значень, характеристичного рівняння, характеристичного многочлена та його використання для знаходження власних значень. власних підпросторів.

Важливо звернути увагу на те, що власні вектори лінійного перетворення, які відносяться до різних власних значень, незалежні.

Здобувачам необхідно добре усвідомити, що існування власних векторів, а значить, і власних підпросторів у лінійного перетворення, залежить від наявності у нього характеристичного коріння, що належить полю, над яким розглядається лінійний простір.

Треба враховувати, що розмірність власного підпростору, що відноситься до власного значення у будь-якого лінійного перетворення не перевищує (менше або дорівнює) кратності цього значення, як кореня характеристичного многочлена.

Важливим критерієм засвоєння теорії є вміння вирішувати завдання на пройдений матеріал.

Іноді недостатність засвоєння того чи іншого питання з'ясовується лише щодо подальшого матеріалу. І тут треба повернутися і повторити погано засвоєний розділ. Рішення завдань потрібно продовжувати до набуття твердих навичок у їх вирішенні.

Питання для обговорення

1. Як ви розумієте поняття вектора?
2. Які операції над векторами називаються лінійними і якими властивостями вони володіють?
3. Як сформулювати означення арифметичного векторного простору?
4. Що називають лінійною комбінацією системи векторів?
5. Яка система векторів називається лінійно залежною?
6. Яка система векторів називається лінійно незалежною?
7. Які властивості лінійно залежних та незалежних систем векторів вам відомі?
8. Що можна сказати про систему векторів, у якій один з векторів є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи?
9. Що називається рангом системи векторів?
10. Що називається базою системи векторів?
11. Що розуміють під еквівалентними системами векторів?
12. Яка основна властивість бази системами векторів?
13. Як сформулювати критерій бази?
14. Які елементарні перетворення систем векторів вам відомі?
15. Що називається рангом матриці?
16. Які способи знаходження рангу матриці вам відомі?
17. Що називається базисом лінійного простору?
18. Як відшукати базис серед заданої системи векторів?
19. Як здійснити перехід від одного базису до іншого?
20. Що називається підпростором?
21. Як сформулювати критерій підпростору?
22. Чим зручніше користуватися на практиці: означенням чи критерієм підпростору? Відповідь поясніть.
23. Що називають сумою, перетином лінійних підпросторів?
24. Що називається прямою сумою підпросторів?
25. Що розуміють під лінійним перетворенням?
26. Які властивості лінійних перетворень ви знаєте?
27. Чим відрізняється лінійне перетворення від лінійного оператора?
28. Що називається матрицею лінійного перетворення?
29. Що таке власне значення та власні вектори лінійного перетворення?
30. Як знайти власні значення?
31. Що таке характеристичне рівняння?
32. Яку зручну схему для обчислення власних векторів ви знаєте?
33. Що таке кратність власного значення?

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення лінійного простору і наведіть приклади нетривіальних лінійних підпросторів. Що називається вектором?
2. Наведіть означення лінійної комбінації системи векторів.
3. Дайте означення лінійної залежності та лінійної незалежності системи векторів.
4. Сформулюйте критерій лінійної залежності векторів.
5. Дайте означення базису лінійного простору. Для чого вводять поняття базису?
6. Дайте означення виміру лінійного простору.
7. Наведіть приклади нескінченновимірних просторів.
8. Дайте означення рангу матриці. Для чого вводять поняття рангу?
9. Опишіть знаходження рангу матриці методом окантування мінорів.
10. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
11. Дайте означення підпростору. Сформулюйте критерій підпростору.
12. Запишіть формулу Грассмана.
13. Сформулюйте поняття лінійного оператора. Чому на відображення лінійних просторів накладається умова лінійності?
14. Опишіть властивості лінійних операторів.
15. Дайте означення характеристичного многочлена.
16. Опишіть спосіб знаходження власних векторів лінійного перетворення.
17. Сформулюйте достатню умову задання лінійного перетворення діагональною матрицею.
18. З'ясуйте, чи є дана система векторів лінійно залежною чи лінійно незалежною

а). $\bar{a}_1 = (2, -3, 1),$

$$\bar{a}_2 = (3, -1, 5),$$

$$\bar{a}_3 = (1, -4, 3).$$

б). $\bar{a}_1 = (5, 4, 3),$

$$\bar{a}_2 = (3, 3, 2),$$

$$\bar{a}_3 = (8, 1, 3).$$

16. Знайдіть ранг системи векторів

$$\bar{a}_1 = (2, -3, 4, 1),$$

$$\bar{a}_2 = (4, -2, 3, 2),$$

$$\bar{a}_3 = (-8, 5, 0, 6),$$

$$\bar{a}_4 = (3, -1, 4, 3).$$

17. Визначте ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

18. Обчисліть ранг матриці за допомогою елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

19. Доведіть, що система векторів

$$\vec{a}_1 = (2, 4, 3), \vec{a}_2 = (-3, 0, 1), \vec{a}_3 = (1, -1, 10)$$

утворює базис і знайдіть координати вектора

$$\vec{x} = (2, 7, 17) \text{ у цьому базисі.}$$

20. Доведіть, що множина L n -мірних векторів, у яких перша та остання координати рівні між собою, утворює лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

21. Знайдіть базис суми та перетину підпросторів, натягнутих на системи векторів

$$a_1 = (2, 1, 0), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (-5, -2, 1) \text{ і } b_1 = (1, 1, 2), b_2 = (-1, 3, 0), b_3 = (2, 0, 3).$$

22. Знайдіть власні значення та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Знайдіть власні значення та власні підпростори оператора

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2 + 4\xi_3 \end{pmatrix}.$$

.

ТЕМА 5

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Питання до практичного заняття

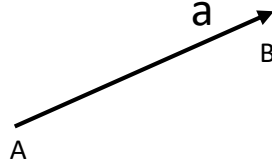
1. Декартова система координат.
2. Відстань між двома точками. Ділення заданого відрізка в заданому співвідношенні.
3. Вектори на площині та в просторі.
4. Скалярний добуток векторів, його властивості. Кут між векторами.
5. Векторний добуток: властивості, геометричний сенс.
6. Мішаний добуток векторів: означення, властивості, геометричний сенс.
7. Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Задачі на пряму на площині. Кут між двома прямими.
8. Взаємне розташування двох прямих на площині.
9. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині. Відстань від точки до прямої.
10. Рівняння прямої та площини в просторі.
11. Взаємне розміщення прямої та площини, двох площин. Кут між прямою та площиною.
12. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини. Кут між двома площинами. Поняття гіперплощини.
13. Лінії другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола та парабола, їх канонічні рівняння та основні характеристики.
14. Поверхні другого порядку. Сфера, циліндричні і конічні поверхні, їх канонічні рівняння та властивості.
15. Поверхні обертання, еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд. Геометричні властивості цих поверхонь.

Теоретичні відомості

Історія векторної алгебри та аналітичної геометрії тісно пов'язана з розвитком математики та фізики, з виникненням уявлень про вектори та аналітичні методи для опису просторових відношень у XVII–XIX століттях. Ключовими фігурами були Рене Декарт, що заклав основи аналітичної геометрії, та Готфрід Лейбніц, Ісаак Ньютон, які розвинули поняття векторів і координатного методу. Систематизація векторної алгебри відбулася в XIX столітті завдяки роботам Вільяма Роуена Гамільтона, який ввів кватерніони, та Джозаї Вілларда Гіббса, який розвинув векторний аналіз.

Відрізок вісі, обмежений якимись точками A та B , називається **спрямованим**, якщо вказано, яка з цих точок вважається початком відрізка, а яка - кінцем.

Вектором називають спрямований відрізок з початком A і кінцем B , позначають символом $\overline{AB}$. Довжина відрізка позначається символом $|AB|$. Поряд з цим будемо також позначати вектор однією малою латинською літерою.



Вектори називаються **рівними**, якщо вони мають однакові довжини, лежать на паралельних прямих або на одній прямій та спрямовані в один бік.

Число, рівне довжині вектора називається його **модулем**. Модуль вектора a позначається $|a|$.

Якщо $|a| = 1$, то вектор a називається **одиничним**.

Одиничний вектор, який має однаковий напрямок з цим вектором a , називається **ортом** вектора a .

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь u називається число, рівне величині відрізка $\overline{A_1B_1}$ вісі u , де точка A_1 є проекцією точки A на вісь u , а B_1 – проекцією точки B на цю вісь.

Проекція вектора a на вісь u виражається через його модуль і угол φ нахилу до вісі u формулою

$$\text{пр}_u a = |a| \cos \varphi.$$

Проекції вектора на координатні вісі називають також його **координатами**. Якщо дано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які є відповідно початком і кінцем вектора a , то його координати X, Y, Z визначаються за формулами:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Формула $|a| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

дозволяє за координатами вектора визначити його модуль.

Лінійні операції над векторами

Сумою $a + b$ двох векторів a та b називається вектор, який йде з початку вектора a в кінець вектора b за умовою, що вектор b прикладений до кінця вектора a (**правило трикутника**)



Поряд з правилом трикутника часто користуються **правилом паралелограма**: якщо вектори a та b приведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $a + b$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, який йде із загального початку a і b . Звідси відразу випливає, що $a + b = b + a$.

Різницею $a - b$ двох векторів a та b називається вектор, який в сумі з вектором b складає вектор a . Якщо два вектори a і b приведені до спільного початку, то різниця їх $a - b$ є вектор, що йде з кінця b до кінця a .

Добутком αa вектора a на число α називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора a на модуль числа α ; він паралельний вектору a або лежить з ним на одній прямій та спрямований так само, як вектор a , якщо α – число додатне, і протилежний вектору a , якщо α – число, що є від'ємним.

Сумування векторів та множення вектора на число називаються **лінійними операціями над векторами**.

Зокрема, якщо

$$a = (X_1, Y_1, Z_1), \quad b = (X_2, Y_2, Z_2)$$

$$a + b = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2)$$

$$a - b = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2)$$

$$\alpha a = (\alpha X_1, \alpha Y_1, \alpha Z_1).$$

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$(a, b) = |a||b| \cos \varphi.$$

Якщо вектори a і b задані своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad b = (X_2, Y_2, Z_2)$$

то їх скалярний добуток може бути обчислений за формулою:

$$(a, b) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Звідси випливає необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Кут φ між векторами $a = (X_1, Y_1, Z_1)$ і $b = (X_2, Y_2, Z_2)$

задається формулою

$$\cos \varphi = \frac{(a,b)}{|a||b|},$$

чи в координатах

$$\cos \varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора a на вектор b називається вектор, що позначається символом $[a, b]$ і визначається наступними трьома умовами:

1. Модуль вектора $[a, b]$ дорівнює $|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами a та b ;
2. Вектор $[a, b]$ перпендикулярний до кожного з векторів a та b ;
3. Напрямок вектора $[a, b]$ відповідає «правилу правої руки». Це означає, що якщо вектори a і b і $[a, b]$ приведені до спільного початку, то вектор $[a, b]$ повинен бути спрямований так, як спрямований середній палець правої руки, великий палець якої спрямований по першому співмножнику (тобто по вектору a), а вказівний – за другим (тобто по вектору b).

Векторний добуток залежить від порядку співмножників, саме:

$$[a, b] = -[b, a]$$

Модуль векторного добутку $[a, b]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах a і b :

$$|[a, b]| = S$$

Векторний добуток $[a, b]$ перетворюється на нуль тоді та тільки тоді, коли вектори a і b колінеарні.

Якщо система координатних осей права та вектори a і b задані в цій системі своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1) \quad \text{і} \quad b = (X_2, Y_2, Z_2),$$

то векторний добуток вектора a на вектор b визначається формулою

$$[a, b] = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right)$$

чи

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів

Трійкою векторів називаються три вектори, якщо вказано, який з них вважається першим, який другим і який третім.

Трійка колінеарних векторів a, b, c називається **правою**, якщо складаючі її вектори, будучи приведені до загального початку, розташовуються в порядку нумерації аналогічно тому, як розташовані великий, вказівний та середній пальці правої руки. Якщо вектори a, b, c розташовані аналогічно тому, як розташовані великий, вказівний і середній пальці лівої руки, то трійка цих векторів називається **лівою**.

Мішаний добуток (a, b, c) дорівнює обсягу паралелепіпеда, побудованого на векторах a, b, c , взятому зі знаком плюс, якщо трійка a, b, c права, і зі знаком мінус, якщо ця трійка ліва. Якщо вектори a, b, c колінеарні, то мішаний добуток (a, b, c) дорівнює нулю.

Якщо вектори a, b, c задано своїми координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1), \quad b = (X_2, Y_2, Z_2), \quad c = (X_3, Y_3, Z_3),$$

то мішаний добуток (a, b, c) визначається формулою

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Рівняння площини

В декартових координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня і кожне рівняння першого степеня визначає площину.

Всякий вектор, який не дорівнює нулю, перпендикулярний до даної площини, називається її **нормальним вектором**.

Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (*)$$

визначає площину, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $n = (A, B, C)$.

Розкриваючи в рівнянні (*) дужки і позначаючи число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ буквою D , представивши його у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Це рівняння називається **загальним** рівнянням площини.

Рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{де } a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

називається рівнянням площини «у відрізках».

Рівняння прямої

Пряма, як перетин двох площин, визначена спільним завданням двох рівнянь першого степеня

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кожен вектор, який не дорівнює нулю та лежить на даній прямій або паралельної їй, називається **напрямним вектором** цієї прямої.

Якщо відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої та напрямний вектор $q = (l, m, n)$, то пряма може бути визначена рівняннями виду

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

в такому вигляді рівняння прямої називаються **канонічним**.

Канонічні рівняння прямої, що **проходить через дані точки**

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, мають вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ в напрямку вектора $q = (l, m, n)$, мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Линії другого порядку

Коло

Колом називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від деякої фіксованої точки, яку називають центром кола. Відстань від центра кола до будь-якої його точки називають **радіусом кола** і позначають R .

Рівняння

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

визначає коло радіусом R з центром $C(\alpha, \beta)$.

Якщо центр кола співпадає з початком координат, то рівняння (1) приймає вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є постійна величина, більша, ніж відстань між фокусами.

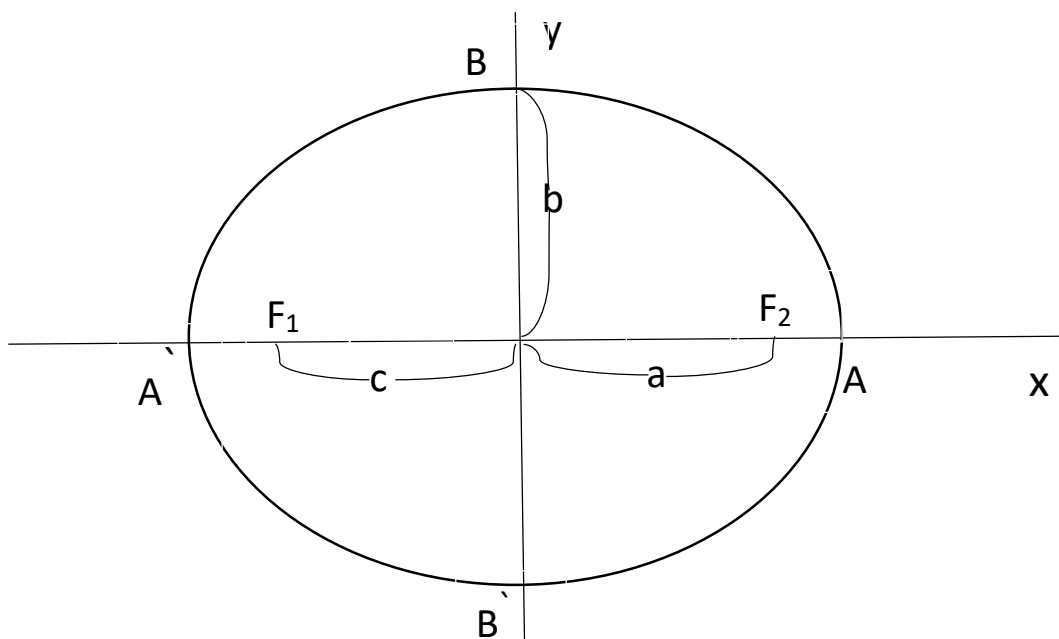
Постіну суму відстаней довільної точки еліпса до фокусів прийнято позначати через $2a$. Фокуси еліпсу позначають літерами F_1 та F_2 , відстань між ними – через $2c$.

За визначенням еліпсу $2a > 2c$ або $a > c$.

Рівняння еліпсу має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

де $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > b$. Рівняння виду (2) називається **канонічним рівнянням еліпсу**.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, де a – велика піввісь, називається *ексцентриситетом* еліпсу.

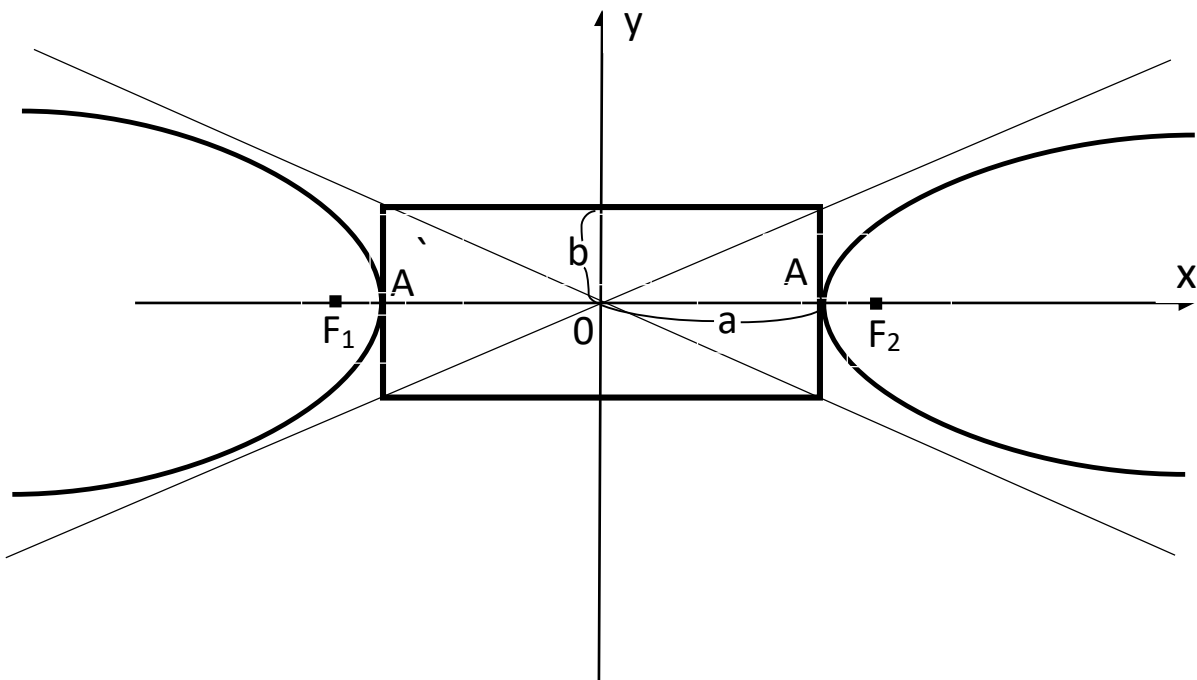
Якщо еліпс визначен рівнянням (2) та $a > b$, то прямі $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпсу.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, називаємих фокусами, є постійна величина; вказана різниця береться за абсолютним значенням та позначається через $2a$. Фокуси гіперболи позначаються літерами F_1 та F_2 , відстань між ними – через $2c$. За визначенням гіперболи $2a < 2c$ або $a < c$.

Рівняння гіперболи має вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3)

де $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Рівняння виду (3) називається *канонічним рівнянням гіперболи*.



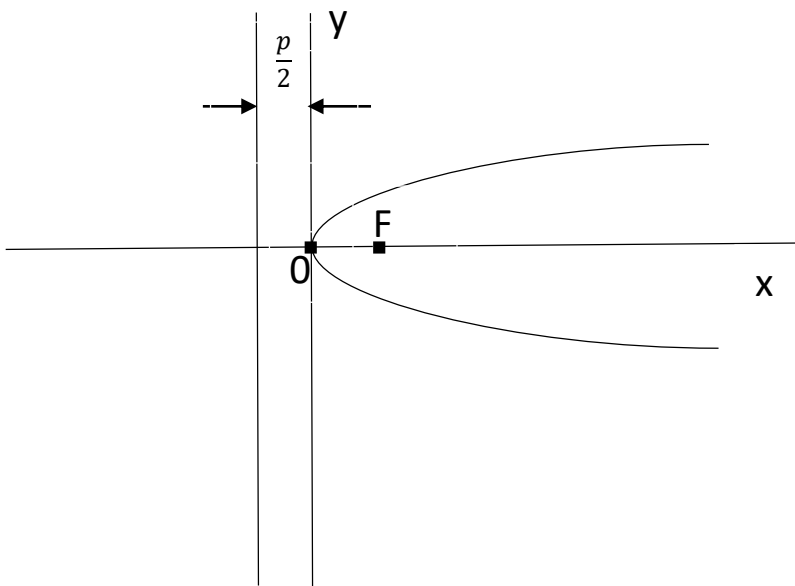
Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, де a – відстань від центру гіперболи до її вершин, називається *ексцентриситетом* гіперболи. Якщо гіпербола задана рівнянням (3), то прямі, що визначаються рівняннями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються її *директрисами*.

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з якої відстань до деякої фіксованої точки площини, яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою. Фокус параболи позначається літерою F , відстань від фокуса до директриси – літерою p . Число p називається параметром параболи. Парабола визначається рівнянням

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

Рівняння (4) називається *канонічним рівнянням параболи*.



Директриса даної параболи має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Вивчення теми рекомендується розпочати з теоретичних основ векторів, їх властивостей, правил дій над векторами: додавання (правило трикутника, паралелограма), віднімання, множення вектора на число (скаляр) та векторних операцій в координатах.

При підготовці до практичного заняття, варто уважно вивчити означення скалярного добутку та його властивості, Обов'язковими для вивчення є властивості скалярного добутку. Окремо варто дослідити питання геометричного зміста скалярного добутку (проекція вектора, кут між векторами). Також слід звернути увагу на використання скалярного добутку для перевірки ортогональності векторів.

Треба зауважити, що можна запровадити лише «скалярний квадрат» вектора. Не існує скалярного добутку трьох і більше векторів.

Продовжуючи вивчення теми, необхідно ознайомитися із сутністю поняття векторного добутку та його властивостями. Окрему увагу слід приділити геометричному змісту векторного добутку (площа паралелограма, напрямок вектора) та використанню векторного добутку для перевірки колінеарності векторів.

У процесі вивчення теми здобувачам потрібно розглянути означення та властивості мішаного добутку. Окремо варто дослідити питання геометричного змісту мішаного добутку (об'єм паралелепіпеда, компланарність векторів).

Варто звернути увагу на те, що апарат векторної алгебри застосовується при вирішенні низки геометричних завдань: поділу відрізка в цьому відношенні, визначенні площі паралелограма та трикутника, об'єму паралелепіпеда та тетраєдра. Програмісти використовують її для реалізації реалістичного руху об'єктів в іграх та інших програмних додатках. За допомогою векторної алгебри можна вивчати лінійні геометричні образи (пряма, площина).

Вивчаючи основи аналітичної геометрії, потрібно добре знати поняття рівняння прямої та площини. Для опанування теми, здобувачам рекомендується ретельно розібрати різні форми рівняння прямої та площини, взаємне розміщення прямої та площини у просторі, знаходження кутів між прямими і площинами, відстані від точки до площини, умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини, поняття гіперплощини.

На завершення здобувачам необхідно розглянути основні визначення і поняття теорії кривих та поверхонь другого порядку: еліпаса, гіперболи, параболі, сфери, циліндра, конуса, а також їхні рівняння та властивості.

Слід зазначити, що аналітична геометрія є основою для створення двовимірних і тривимірних об'єктів, їхнього трансформування, а також для моделювання реальних сцен у комп'ютерних іграх та програмах.

Приклади розв'язування завдань

1. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (3, -5, 1) \text{ та } \vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$$

Розв'язання. Згідно з означенням суми та різниці векторів довжина однієї діагоналі паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює модулю суми цих векторів, а другої – модулю їх різниці.

Знайдемо координати суми та різниці цих векторів:

$$\bar{a} + \bar{b} = (3, -5, 1) + (0, 2, -1) = (3, -3, 0),$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (3, -5, 1) - (0, 2, -1) = (3, -7, 2).$$

Знайдемо

$$\alpha_1 = |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\alpha_2 = |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + 2^2} = \sqrt{62}$$

2. Відомі координати двох суміжних вершин паралелограма $A(2, 3, 0)$, $B(-1, 0, 4)$ та точка перетину діагоналей $O(1, -1, 1)$. Знайти координати двох інших вершин.

Розв'язання. Відомо, що діагоналі паралелограма в точці перетину діляться навпіл, тому, якщо $C(x_1, y_1, z_1)$ и $D(x_2, y_2, z_2)$, маємо

$$\frac{2 + x_1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\frac{3 + y_1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -5$$

$$\frac{0 + z_1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2$$

Отже, $C(0, -5, 2)$.

Так само знаходимо координати точки D :

$$\frac{-1 + x_2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

$$\frac{0 + y_2}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -2$$

$$\frac{4 + z_2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = -2$$

Отже, $D(3, -2, -2)$.

3. Задані вершини трикутника $A(2, 2)$, $B(-2, -8)$, $C(-6, -2)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з точки C .

Розв'язання. Щоб знайти рівняння медіани CF , знайдемо координати точки F – середини відрізка AB :

$$x_F = \frac{x_A + x_B}{2} = 0, \quad y_F = \frac{y_A + y_B}{2} = -3, \quad F(0, -3).$$

Знайдемо рівняння прямої CF :

$$\frac{x - x_C}{x_F - x_C} = \frac{y - y_C}{y_F - y_C} \Rightarrow \frac{x + 6}{0 + 6} = \frac{y + 2}{-3 + 2}$$

або

$$\frac{x+6}{6} = \frac{y+2}{-1}.$$

В загальному вигляді $x + 6y + 18 = 0$, а через кутовий коефіцієнт

$$y = -\frac{1}{6}x - 3.$$

4. Задані послідовні вершини паралелограма ABCD A(3,0,-1), B(1,2,4), C(0,7,-2). Знайти рівняння його сторони AD.

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої (AD), що проходить через точку A паралельно вектору $\overline{BC} = (1,5,2)$.

Для цього скористуємось канонічними рівняннями прямої у просторі

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-0}{5} = \frac{z-(-1)}{2}, \text{ або } \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$$

5. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-2,3,1)$ паралельно площині $4x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуємо рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x, y, z)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

Нормальний вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ визначимо з умови паралельності площин

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{3} = \frac{C}{-2}$$

Оберемо числа A, B, C, що задовільняють цій умові. Наприклад, A=4, B=3, C=-2.

Тоді шукане рівняння має вигляд:

$$4(x - (-2)) + 3(y - 3) - 2(z - 1) = 0$$

$$4x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

Питання для обговорення

1. Які основні координатні системи використовують в аналітичній геометрії?
2. Як обчислити відстань між двома точками?
3. Як поділити відрізок в заданому відношенні?
4. Як знайти координати середини відрізка?

5. Що таке проекція точки на площину?
6. Як обчислити відстань між двома точками?
7. Що називається вектором, нульовим вектором, модулем вектора?
8. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
9. Які найпростіші числові характеристики вектору вам відомі?
10. Які операції над векторами ви знаєте?
11. Що таке скалярний добуток?
12. Як обчислити скалярний добуток двох векторів?
13. У якому випадку скалярний добуток дорівнює нулю?
14. Які властивості скалярного добутку вам відомі?
15. Як обчислити кут між векторами?
16. Що таке векторний добуток?
17. Як обчислити векторний добуток двох векторів, що задані координатами в прямокутній системі координат?
18. Які властивості векторного добутку векторів вам відомі?
19. В чому полягає геометричний сенс векторного добутку векторів?
20. Що таке мішаний добуток?
21. Як обчислити мішаний добуток векторів трьох векторів, що задані координатами в прямокутній системі координат?
22. Які властивості мішаного добутку векторів вам відомі?
23. В чому полягає геометричний сенс мішаного добутку векторів?
24. Які форми рівняння прямої вам відомі?
25. Який вигляд має канонічне і параметричне рівняння прямої?
26. Як сформулювати означення напрямного та нормального вектору?
27. Що таке площина в аналітичній геометрії?
28. Як знайти нормальний вектор до площини?
29. Як знайти кут між двома прямими на площині?
30. Як знайти перетин двох прямих?
31. Чому дорівнює відстань від точки до площини?
32. Які рівняння площини в просторі вам відомі?
33. Як знайти найкоротшу відстань між двома прямими у просторі?
34. Як знайти кут між прямою та площиною, між двома площинами?
35. Що називають кривою другого порядку і якій вигляд має її загальні рівняння?
36. Що називається поверхнею другого порядку?
37. Канонічні рівняння яких поверхонь другого порядку вам відомі?
38. Які існують різновиди канонічних рівнянь параболі залежно від розміщення на площині фокуса і директриси?

Завдання для самостійної роботи

1. Опишіть декартову систему координат.
2. Поясніть, яким чином обчислюють координати та модуль вектора.
3. Дайте означення колінеарних, компланарних векторів.
4. Дайте означення орта даного вектора. Поясніть яким чином пов'язані даний вектор та його орт.
5. Дайте означення проекції вектора на вісь. Запишіть та поясните формули для обчислення проекцій.
6. Поясніть, як додають вектори за правилами трикутника та паралелограма.
7. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів.
8. Наведіть приклади використання скалярного добутку.
9. Сформулюйте означення векторного добутку векторів.
10. Наведіть приклади використання векторного добутку.
11. Сформулюйте означення мішаного добутку векторів.
12. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів
13. Запишіть загальне рівняння прямої на площині.
14. Які ви знаєте інші форми рівняння прямої? Покажіть їх еквівалентність.
15. Сформулюйте означення напрямного та нормального векторів до прямої.
16. Запишіть загальне рівняння площини в просторі.
17. Опишіть форми рівняння прямої в просторі.
18. Сформулюйте означення кута між двома площинами. Наведіть умови ортогональності двох площин.
19. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.
20. Наведіть класифікацію ліній (поверхонь) 2-го порядку.
21. Дайте означення еліпсу. Запишіть його канонічне рівняння.
22. Дайте означення ексцентриситету еліпса.
23. Дайте означення гіперболи. Запишіть її канонічне рівняння.
24. Дайте означення асимптот і ексцентриситету гіперболи.
25. Дайте означення параболи. Запишіть її канонічне рівняння.
26. Дайте означення фокусу і директриси параболи.
27. Дайте означення ексцентриситету параболи.
28. Дано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайдіть $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ і $pr_{\vec{a}}\vec{b}$.
29. Обчисліть довжину діагоналей паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
30. У трикутнику з вершинами A(5,4), B(-1,2), C(5,1) проведена медіана AD. Знайдіть її довжину.

31. Вершини трикутника містяться в точках $A(2,-1,3)$, $B(4,0,1)$, $C(-10,5,3)$.
Знайдіть косинус кута ABC .
32. Задані вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Обчисліть довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .
33. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$, $C(7,3,4)$.
34. Дано трикутник ABC , де $A(3,0,-1)$, $B(-1,1,0)$, $C(1,2,1)$. Знайдіть площу трикутника і нормальне рівняння площини трикутника.
35. Знайдіть об'єм тетраедра, вершини якого містяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.
36. Задані вершини тетраедра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Знайдіть довжину його висоти опущеної з вершини D .
37. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ паралельно прямій $5x + 8y = 0$.
38. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,-1,3)$ й має нормальний вектор $\vec{n} = (5,0,4)$.
39. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника ABC до площини $3x-9y+3z=0$, якщо $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,4,-2)$.
40. Задані точки $A(3;-1;2)$ і $B(4;-2;-1)$. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно вектору $\vec{AB}$.
41. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,-3,7)$ паралельно площині $2x - 6y - 3z + 5 = 0$.
42. Знайдіть точку перетину прямої та площини:
- $$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x + y - z + 1 = 0.$$
32. Знайдіть проекцію точки $(2,1,1)$ на площину $x + y + 3z + 5 = 0$.
33. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A\left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$.
34. Знайдіть параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,7,-2)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3, -2, 4)$.
35. Знайдіть геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох точок $F_1(-3,0)$ та $F_2(3,0)$ є величина стала, яка дорівнює 10.
36. Знайдіть геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох точок $F_1(-5,0)$ та $F_2(5,0)$ є величина стала, яка дорівнює 6.
37. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3,0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$.
38. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$ взято точку M з ординатою, що дорівнює 1. знайдіть відстань від неї до фокусів гіперболи.

ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Штифеля.
2. Розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.
3. Розв'язання двочленних рівнянь, рівнянь третього та четвертого степенів.
4. Нерозв'язність в радикалах рівнянь степеня вище четвертого.
5. Розширений алгоритм Евкліда. Алгоритм знаходження чисел, обернених за модулем.
6. Розв'язання геометричних задач алгебраїчними методами.
7. Значення лінійної алгебри в економічних процесах.
8. Роль векторів у визначенні руху об'єктів, фізики та анімації у комп'ютерних іграх.
9. Застосування базових знань з векторної алгебри при моделюванні процесів управління інформаційними системами.
10. Використання аналітичної геометрії в моделюванні об'єктів у тривимірному просторі.
11. Застосування матричного числення при розробці математичних моделей.
12. Застосування засобів векторної алгебри при розв'язанні задач кодування інформації.
13. Використання засобів лінійної та векторної алгебри у проектуванні та розробці систем автоматичного керування та робототехніки
14. Основні принципи побудови математичних моделей з використанням методів матричного і векторного аналізу.
15. Проведення необхідних розрахунків у рамках побудованих моделей з метою встановлення кількісних і якісних характеристик об'єктів для прогнозування та прийняття оптимальних рішень.
16. Використання визначників у комп'ютерній графіці.
17. Застосування обернених матриць для шифрування та дешифрування інформації у криптографічних алгоритмах.
18. Використання комплексних чисел при розв'язанні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом.
19. Застосування комплексних чисел у цифровій обробці сигналів та даних.
20. Роль комплексних чисел у математичному моделюванні.
21. Різновиди рівнянь прямої на площині та їх використання як математичної моделі прикладних задач.

ПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Загальний вигляд.
2. Сумісні, несумісні, визначені та невизначені, однорідні та неоднорідні СЛАР.
3. Еквівалентні системи лінійних рівнянь. Елементарні перетворення СЛАР.
4. Метод Гауса розв'язування СЛАР.
5. Матриці та дії над ними. Рівність матриць.
6. Додавання матриць, властивості операції.
7. Множення матриці на число, властивості операції.
8. Добуток матриць, властивості операції.
9. Транспонування матриці.
10. Визначники 2-го і 3-го порядку та їх властивості.
11. Підстановки n -го степеня. Інверсії, транспозиції.
12. Мінори та їх алгебраїчні доповнення.
13. Поняття про визначники вищих порядків.
14. Обчислення визначника розкладанням його за елементами рядка (стовпця).
15. Теорема Лапласа.
16. Визначник матриці трикутного виду.
17. Визначник добутку матриць.
18. Обернена матриця, умова її існування.
19. Способи знаходження оберненої матриці.
20. Матричні рівняння.
21. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
22. Матричний розв'язок системи лінійних рівнянь.
23. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
24. Спряжені комплексні числа, їх властивості.
25. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
26. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
27. Формула Муавра.
28. Добування кореня з комплексного числа.
29. Корені з одиниці.
30. Первісні корені. Критерій первісності кореня.
31. Показникова форма комплексного числа.

- 32.Лінійні простори. Арифметичний векторний простір.
- 33.Лінійна комбінація (ЛК) системи векторів. Лінійна оболонка.
- 34.Лінійно залежні (ЛЗ) та лінійно незалежні (ЛНЗ) системи векторів.
Критерій ЛЗ.
- 35.Ранг системи векторів, обчислення рангу.
- 36.База системи векторів, знаходження бази даної системи векторів.
- 37.Основна властивість бази. Критерій бази.
- 38.Елементарні перетворення систем векторів.
- 39.Ранг матриці. обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.
- 40.Знаходження рангу матриці методом окантування мінорів.
- 41.Вимір, базис простору.
- 42.Підпростір. Критерій підпростору.
- 43.Сума та перетин лінійних підпросторів.
- 44.Пряма сума. Критерій прямої суми.
- 45.Формула Грассмана.
- 46.Лінійне перетворення, означення, приклади.
- 47.Матриця лінійного перетворення.
- 48.Власні значення та власні вектори лінійного перетворення, означення, знаходження.
- 49.Декартова система координат.
- 50.Відстань між двома точками на площині та в просторі.
- 51.Поділ напрямленого відрізка у даному відношенні.
- 52.Скалярні і векторні величини.
- 53.Лінійні операції над векторами.
- 54.Проекція вектора на вісь.
- 55.Розклад вектора за базисом.
- 56.Умова колінеарності та компланарності векторів.
- 57.Скалярний добуток векторів та його властивості.
- 58.Вираз скалярного добутку через координати векторів.
- 59.Кут між двома векторами.
- 60.Векторний добуток векторів та його властивості.
- 61.Вираз векторного добутку через координати векторів.
- 62.Мішаний добуток векторів та його властивості.
- 63.Вираз мішаного добутку через координати векторів. Геометричний зміст мішаного добутку.
- 64.Умова компланарності трьох векторів.
- 65.Пряма лінія на площині.

- 66.Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно заданому вектору.
- 67.Загальне рівняння прямої та його дослідження.
- 68.Напрямний вектор прямої.
69. Канонічне рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
- 70.Параметричне рівняння прямої.
- 71.Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
- 72.Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
- 73.Нормальне рівняння прямої.
- 74.Обчислення кута між двома прямими.
- 75.Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
- 76.Відстань від точки до прямої.
- 77.Нормальний вектор площини.
- 78.Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.
- 79.Загальне рівняння площини.
- 80.Рівняння площини, що проходить через три точки.
- 81.Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.
- 82.Відстань від точки до площини.
- 83.Загальне рівняння прямої в просторі.
- 84.Векторне рівняння прямої.
- 85.Параметричне рівняння прямої.
- 86.Канонічне рівняння прямої.
- 87.Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
- 88.Кут між двома прямими.
- 89.Умови паралельності і перпендикулярності прямих.
- 90.Кут між прямою і площиною.
- 91.Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
- 92.Поняття лінії другого порядку.
- 93.Коло, його властивості і канонічне рівняння.
- 94.Еліпс, його властивості і канонічне рівняння.
- 95.Гіпербола, її властивості і канонічне рівняння.
- 96.Парабола, її властивості і канонічне рівняння.
- 97.Поверхні другого порядку. Сфера, циліндричні і конічні поверхні.
- 98.Поверхні обертання, еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд. Геометричні властивості цих поверхонь.

ФОРМИ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ

Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних занять і має на меті перевірку рівня засвоєння здобувачем вивченої теми.

При поточному контролі оцінці підлягають: рівень теоретичних знань та вміння працювати з науковою літературою, знання матеріалу, продемонстрованого у виконаних завданнях самостійної роботи; активність та систематичність роботи на заняттях; результати виконання домашніх завдань, тестів, експрес-опитувань, доповідей, рефератів тощо.

Форми проведення поточного контролю: усне опитування здобувачів, розв'язування практичних завдань, тестові завдання, доповіді, реферати.

Проміжний контроль проводиться після вивчення відповідних тем або блоку тем з метою з'ясування ступеню засвоєності здобувачами відповідного об'єму опрацьованого та вивченого матеріалу та подальшої оцінки рівня отриманих знань. Форми проведення проміжного контролю: контрольна робота, тестове опитування, співбесіда (усне спілкування).

Підсумковий контроль здійснюється у формі іспиту.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

При використанні форми контролю у вигляді заліку враховується поточна, зокрема самостійна робота, наукова діяльність здобувача. Крім того, здобувач має надати відповідь на залікове запитання. Оцінка рівня знань виконується за принципом "відповідь вірна" або "відповідь невірна". При вірній відповіді виставляється оцінка "зараховано", при невірній, неповній відповіді виставляється оцінка "не зараховано".

Оцінка з національної шкали переводиться у 100-бальну та шкалу ECTS у відповідності до результатів навчальної успішності здобувача протягом семестру.

СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ (СКЛАДОВІ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ)

Пункт оцінки	% підсумкової оцінки або максимальна оцінка в балах	Групове чи індивідуальне оцінювання
Поточний контроль, разом, у т.ч.:	50	
доповіді та повідомлення на семінарах	25	Групове та індивідуальне
виконання письмових індивідуальних завдань, рефератів, контрольних робіт	15	Індивідуальне
опитування на практичних заняттях	10	Групове та індивідуальне
Підсумковий контроль, разом, у т.ч.:	50	
письмова компонента	25	Індивідуальне
усна компонента	25	Індивідуальне

ШКАЛА ЗА ECTS

Сума балів	Оцінка за 7-бальною шкалою	Оцінка за 4-бальною шкалою	
		екзамен	залік
A	90-100	Відмінно	зараховано
B	82-89	Добре	
C	74-81		
D	64-73	Задовільно (достатньо)	
E	60-63		
Fx	35-59	Незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано

РЕКОМЕНДОВАНИЙ ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ

ОСНОВНІ ДЖЕРЕЛА

1. Булдигін В.В., Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. К.: ТВіМС, 2011. 224 с.
2. Олійник А.С., Суцанський В.І. Лекції з алгебри. Навчальний посібник, К: ВПЦ. Київський університет, 2019. 308 с.
3. Алгебра та аналітична геометрія: Лінійна алгебра. Уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. 273 с.
4. Руднева Г.В. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посібник. 2 вид. Харків: ФОП Панов А.М., 2020. 236 с.
5. Конет І.М. Лекції з лінійної алгебри / І.М.Конет, В.А.Сорич. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. 216 с.
6. Конет І.М. Лекції з аналітичної геометрії / І.М.Конет, В.А.Сорич. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. – 200 с.
7. Петренко М. П. Курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. / М. П. Петренко, О. П. Бойчук, Л. Г. Авраменко, В. В. Ясінський. – Київ : ІЗМН, 2000. 224 с.
8. Завало С.Т. Курс алгебри / С.Т. Завало. – К.: Вища школа, 1985. – 504 с.
9. Слесарев В.В. Елементи лінійної алгебри: навч. посібн. / В. В. Слесарев, С. О. Сушко, Л. Я. Фомичова; М-во освіти і науки, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2005. 285 с.
10. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник – Чернівці, 2018. 336с.
11. Безущак О.О. Навчальний посібник з лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету / О.О. Безущак, О.Г. Ганюшкін, Є.А. Кочубінська – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. 224 с.

12. Годич В.І. Лінійна алгебра. Частина І. / В.І. Годич, Ю.В.Гнатюк. – Кам'янець-Подільський: ПП «Медобори - 2006», 2011. 161 с.
13. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел, ч.1.- К.: Вища школа, 1983. 232 с.
14. Заїка О. В., Сухойваненко Л.Ф. , Прокопець Т.О. Алгебра і теорія чисел : навчальний посібник / О. В. Заїка, Л.Ф. Сухойваненко, Т.О. Прокопець. Глухів: ФОП Цьома С.П., 2023. 264 с.
15. Sokolov A.V., Ihnatenko O.O., Balandina N.M. Increasing the Efficiency of Blind Decoding of the Steganographic Method with Code Control of Additional Information Embedding. Problems of regional energetics. 2024. Vol. 62, No. 2. P. 121-137. doi: 10.52254/1857-0070.2024.2-62.11 (Scopus, Web of Science)
16. Kazakova N.F., Sokolov A.V., Balandina N.M. Dependence of the Algebraic Nonlinearity of 4-Functions of Two Variables from the Cryptographic Properties of Their Component Boolean Functions. Proceedings of the Workshop Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems. 2024. Kyiv, Ukraine, February 28, 2024. P. 479–484. (Scopus)
17. Bakunina O. V., Balandina N. M., Sokolov A. V. Synthesis method for S-boxes based on Galois field transform matrices. Ukrainian Journal of Information Technology. 2023. Vol. 5, No. 2. P. 41-48. DOI: 10.23939/ujit2023.02.041. URL: <https://doi.org/10.23939/ujit2023.02.041>
18. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2020. 205 с.
19. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Алгебра і теорія чисел. Львів. Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка 2005. 238 с.
20. Зеліско В. Р., Зеліско Г. В. Основи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2011. – 326 с
21. Завало С.Т., Левіщенко С.С. Алгебра і теорія чисел, практикум.-К.: Вища школа, 1986. 264 с.
22. Діскант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. К.: Вища школа, 2001. 303 с.

- 23.Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії// За ред. Рудаковського Ю.К.-Львів: Бескид-Біт, 2002. 256 с.
- 24.Годич Н.Т. Лінійна алгебра. Практикум. Частина I. / Н.Т. Годич, У.В.Гудима. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. . 60 с.
- 25.Зеліско В. Р., Зеліско Г. В. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Практикум. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2014. – 374 с.
- 26.Кучма М. І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник. Київ, 2018. 380 с.

ДОПОМІЖНІ ДЖЕРЕЛА

1. Бalandіна Н.М. Елементи алгебри та аналітичної геометрії: методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології». Одеса: НУ “ОЮА”, 2020. 39 с. URL: <https://hdl.handle.net/11300/14507>
2. Бalandіна Н.М., Федоровський С.В. Матричне числення: методичні вказівки до самостійної роботи. 2-ге вид., випр. Одеса: НУ “ОЮА”, 2020. 43 с. URL: <https://hdl.handle.net/11300/14513>
3. Конет І.М. Алгебра та геометрія. / І.М Конет, В.В. Мойко, В.А. Сорич. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2011. 452 с
4. Збірник задач з аналітичної геометрії / За редакцією В.В. Кириченка. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005. 228 с.
5. Трофименко О.Г., Прокоп Ю.В., Чепурна О.Є., Бalandіна Н.М. Роль математики у різних сферах розробки програмного забезпечення. Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія «Технічні науки». 2023. Том 34 (73) № 4. С. 117-123. DOI: 10.32782/2663-5941/2023.4/19. URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/34-73-4>
6. Трофименко О. Г., Задерейко О. В., Бalandіна Н. М., Толокнов А. А., Гусельніков І. М. Векторна алгебра для розробки ігор. Кібербезпека: освіта,

наука, техніка. 2024. № 2(26). С. 71-81. DOI: <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2024.26.626>

7. Лінійна алгебра. Контрольні питання та завдання для самостійної роботи. 1 семестр / Укл.: Р.С.Колісник, В.С.Сікора.— Чернівці: Книги –ХХІ, 2012. 58 с.

РЕСУРСИ ВІДКРИТОГО ДОСТУПУ

1. <http://cyber.onua.edu.ua> – сайт факультету кібербезпеки та інформаційних технологій, на якому розміщено робочі матеріали з курсу.
2. <https://www.youtube.com/watch?v=dVAo1Zwrcwo> – Determinants Application in Analytical Geometry Linear Algebra 3.2
3. Основи лінійної алгебри у графіці Computer Graphics — Linear Algebra, Geometry, and Computation GitHub - cszsch/awesome-linear-algebra
4. Геометричні перетворення в комп'ютерній графіці 2D Transformations in Computer Graphics - Online Tutorials Library Computer Graphics - 3D Translation Transformation - GeeksforGeeks
5. Використання матриць у 3D-графіці 3D Math Primer for Game Programmers (Matrices) Tutorial 3: Matrices - opengl-tutorial.org Matrices in Computer Graphics - University of Washington
6. Лінійна алгебра в растровій та векторній графіці Computer Graphics and Linear Algebra - rweber.net CSE 167 (WI25) Computer Graphics: Linear Algebra Part 1 15 Лінійна алгебра та графічні процесори CUTLASS: Fast Linear Algebra in CUDA C++ | NVIDIA Technical Blog C++ library for GPU accelerated linear algebra GitHub - SparseLinearAlgebra/spla
7. <http://dspace.onua.edu.ua> – eNUOLAIR – депозитарій (архів) НУ ОЮА.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН	5
ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ	6
НАВЧАЛЬНИЙ КОНТЕНТ	8
Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	8
Тема 2. Матриці та визначники	14
Тема 3. Комплексні числа	30
Тема 4. Лінійні простори	42
Тема 5. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії	53
ТЕМИ РЕФЕРАТІВ	68
ПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ	
ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ	69
ФОРМИ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ	
ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ	72
КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ	72
СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ	
(СКЛАДОВІ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ)	73
ІШКАЛА ЗА ECTS	74
РЕКОМЕНДОВАНИЙ ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ	75

Навчальне видання

Баландіна Наталія Миколаївна

ЛИНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації

для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів
вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань
F «Інформаційні технології», за спеціальностями
F2 «Інженерія програмного забезпечення»
F3 «Комп'ютерні науки»
F5 «Кібербезпека та захист інформації»

Електронне видання

В авторській редакції