

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний гуманітарний університет

Кафедра інформаційних технологій

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

*Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти,
які навчаються за спеціальностями
галузі 12 Інформаційні технології*

Одеса 2022

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Векторний аналіз. Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти, які навчаються за спеціальностями галузі 12 Інформаційні технології. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету. Одеса: МГУ, 2022. 120 с.

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник містить осучаснений виклад теми з курсу вищої математики, присвяченої векторному аналізу, що є необхідною для подальшого вивчення спеціальних дисциплін та її застосування у технічних і прикладних задачах. Для кращого засвоєння теоретичного матеріалу у посібнику наведено значну кількість прикладів та систематизовано основні методи їх розв'язування.

Для перевірки засвоєння матеріалу запропоновано перевірні тести, тренувальні вправи та задачі для самостійного розв'язування. Поданий матеріал є достатнім для засвоєння основних положень векторного аналізу. У посібнику враховано необхідність чіткого термінологічного визначення математичних понять; теоретичний матеріал супроводжується поясненнями, практичними прикладами, а також ілюстраціями, графіками та кресленнями. Добір прикладів і задач здійснено з урахуванням різного рівня складності та можливих підходів до їх розв'язування, що сприяє розвитку логічного мислення.

Підґрунтям для підготовки посібника став багаторічний досвід авторів у викладанні математичних дисциплін в університетах України.

Посібник адресовано викладачам і здобувачам технічних спеціальностей, а також усім, хто цікавиться застосуванням методів векторного аналізу при розв'язуванні прикладних задач.

Глава 1

СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ

1.1 Скалярне поле, основні поняття

В и з н а ч е н н я . *Скалярним полем* називається така область двовимірного чи тривимірного простору, у кожній точці якої задано скалярну функцію $U = U(M)$.

Приміром, скалярним полем є поле тиску та поле температур в атмосфері; поле густини маси пластини, яка виготовлена з неоднорідного матеріалу; поле густини заряду, який розподілений неперервно у деякій області.

Розглянемо характеристики скалярних полів.

1.2 Еквіпотенціальні лінії та поверхні

Нехай в області σ задане скалярне поле $U = U(M)$.

Множина тих точок області σ , в яких функція $U(M)$ набуває одне й те ж значення c , являє собою деяку лінію, якщо σ – область у двовимірному просторі або деяку поверхню, якщо σ – область у тривимірному просторі.

В и з н а ч е н н я . *Еквіпотенціальною лінією* або *лінією рівня скалярного поля* $U = U(x; y)$ називається множина точок, в яких функція $U(x; y)$ набуває одне і те ж значення.

Так, у скалярному полі $U = y - x^2$ лінії рівня описуються рівнянням

$$y - x^2 = c \quad \text{або} \quad y = x^2 + c, \quad (2.1)$$

де $c \in R$, яке визначає параболу (рис. 2.1).

Оскільки $c \in R$ (c – множина дійсних чисел), то рівняння (2.1) задають безліч парабол.

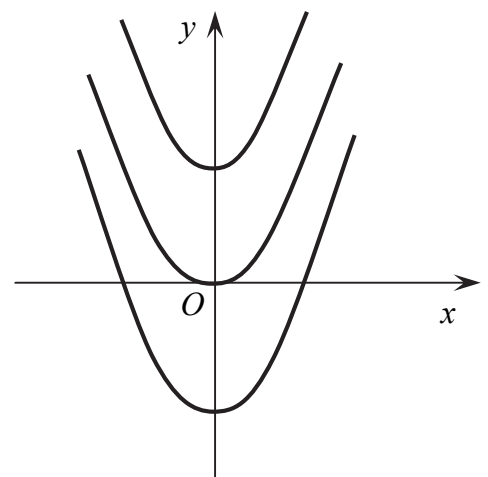


Рисунок 2.1

Визначення. Еквіпотенціальною поверхнею або поверхнею рівня скалярного поля $U(x; y; z)$ називається множина точок, в яких функція $U(x; y; z)$ набуває одне і те ж значення.

Так, у скалярному полі $U = x^2 + y^2 - z$ поверхні рівня описуються рівняннями

$$x^2 + y^2 - z = c \text{ або } x^2 + y^2 = z + c, \quad (2.2)$$

де $c \in R$, яке визначає параболоїди обертання (рис. 2.2).

Рівняння (2.1) визначають безліч ліній рівня, а рівняння (2.2) визначають безліч поверхонь рівня, оскільки $c \in R$. Якщо c надавати значення $c, c + h; c + 2h, \dots$;

$c + nh$, де h – будь-яке число, то сукупність рівнянь $c + kh = U(M)$, де $k = 1; 2; \dots; n, \dots$ називається сім'єю ліній чи поверхонь рівня, а їхні графіки є геометричним зображенням скалярного поля. Геометричне зображення скалярного поля дозволяє дістати уявлення про швидкість, з якою змінюється скалярне поле, а саме, швидкість змінення скалярного поля більше там, де лінії чи поверхні рівня розміщені ближче одна до одної.

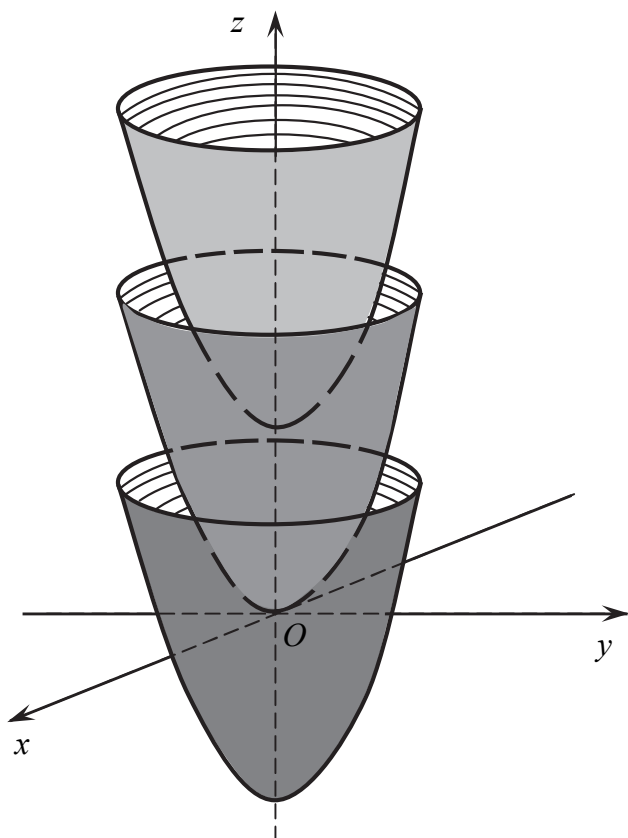


Рисунок 2.2

Приклади до пунктів 1.1 та 1.2

Приклад 2.1. Побудувати лінії рівня скалярного поля

$$U(x; y) = x^2 + y^2.$$

Розв'язання

Лінії рівня скалярного поля $U = x^2 + y^2$ визначаються рівнянням

$$x^2 + y^2 = c, \text{ де } c = \text{const.}$$

Якщо $c = 0$, то маємо рівняння

$$x^2 + y^2 = 0,$$

яке визначає точку $O(0; 0)$.

Якщо $c > 0$, то маємо сім'ю концентричних кіл з радіусом $\sqrt{c}$.

Якщо $c < 0$, то рівняння $x^2 + y^2 = c$ не має геометричної інтерпретації.

В і д п о в і д ь : рисунок до прикладу 2.1.

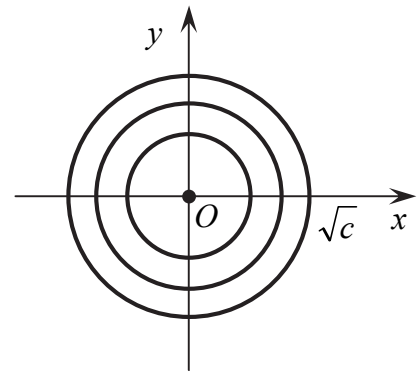


Рисунок до прикладу 2.1

Приклад 2.2. Побудувати лінії рівня скалярного поля

$$U(x; y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння ліній рівня:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c, \text{ де } c = \text{const.}$$

Якщо $c = 0$, то маємо точку $O(0; 0)$, якщо $c > 0$, то маємо сім'ю подібних еліпсів:

$$\frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{9c} = 1.$$

Якщо $c < 0$, то рівняння не має геометричної інтерпретації.

В і д п о в і д ь : рисунок до прикладу 2.2.

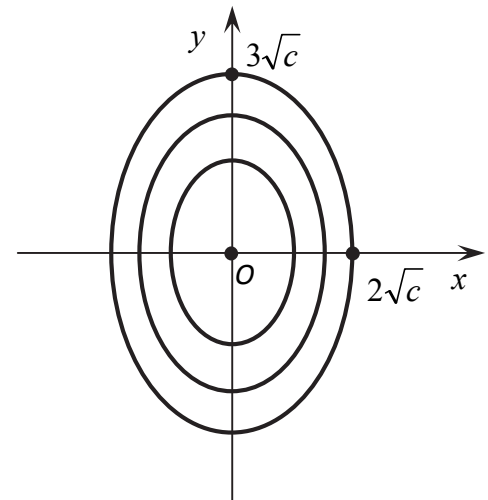


Рисунок до прикладу 2.2

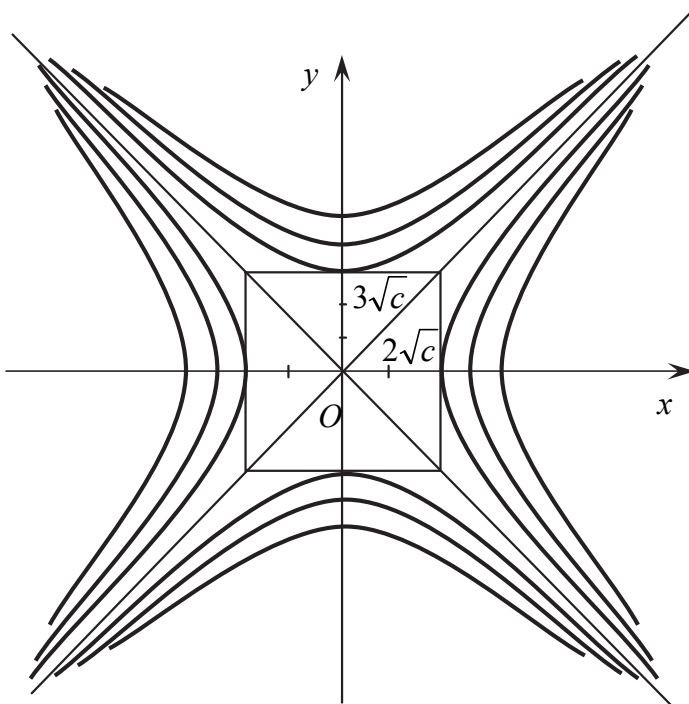


Рисунок до прикладу 2.3

Приклад 2.3. Побудувати лінії рівня скалярного поля

$$U(x; y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння ліній рівня:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = c, \text{ де } c = \text{const.}$$

Якщо $c = 0$, то маємо пару прямих

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \text{ та } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0,$$

або $y = \frac{3}{2}x$ та $y = -\frac{3}{2}x$.

Якщо $c > 0$, то маємо сім'ю гіпербол

$$\frac{x^2}{4c} - \frac{y^2}{9c} = 1,$$

для яких вісь Ox є дійсною віссю.

Якщо $c < 0$, то маємо сім'ю спряжених гіпербол, для яких вісь Oy є дійсною віссю.

В і д п о в і д ь : рисунок до прикладу 2.3.

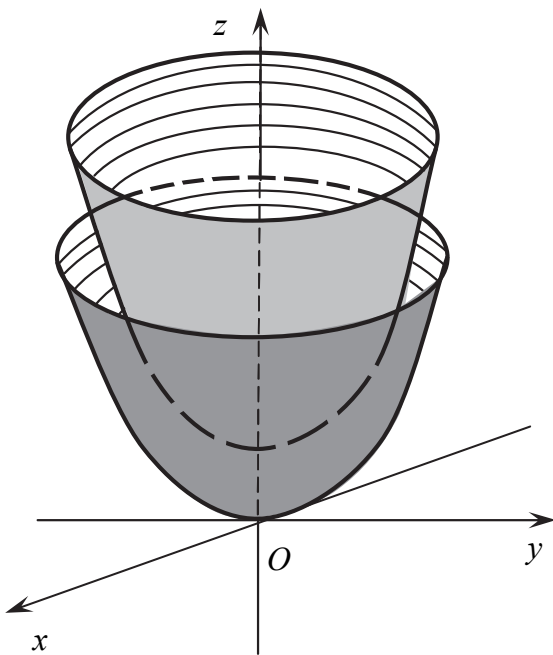


Рисунок до прикладу 2.4

Приклад 2.4. Побудувати поверхні рівня скалярного поля

$$U(x; y; z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - z.$$

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння поверхонь рівня:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - z = c,$$

де $c = \text{const.}$

За будь-яких значень c рівняння

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z + c$$

визначає сім'ю параболоїдів.

В і д п о в і д ь : рисунок до прикладу 2.4.

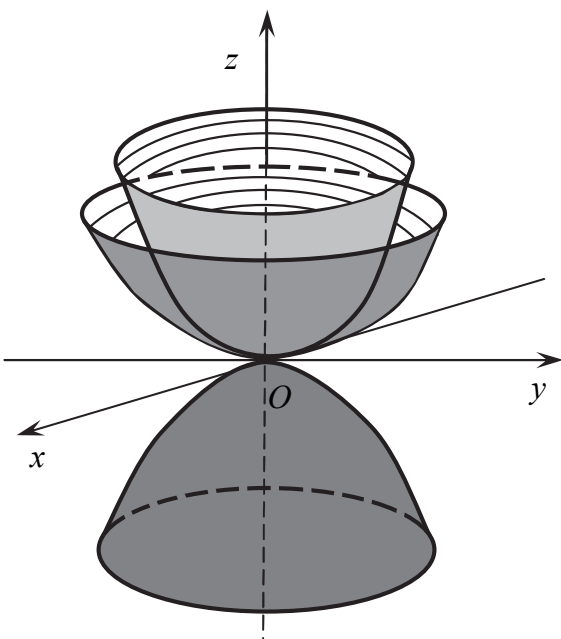


Рисунок до прикладу 2.5

Приклад 2.5. Побудувати поверхні рівня скалярного поля

$$U(x; y; z) = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння поверхонь рівня

$$x^2 + y^2 = cz,$$

де $c = \text{const.}$

За будь-якого значення $c \neq 0$ маємо сім'ю параболоїдів обертання з вершиною у точці $O(0; 0; 0)$.

Якщо $c = 0$, то маємо вісь Oz .

В і д п о в і д ь : рисунок до прикладу 2.5.

1.3 Похідна за напрямком

Звернемось до теми «Функції кількох змінних». Як відомо, диференційовна функція $U = U(x; y)$ має частинні похідні першого порядку $\frac{\partial U(x; y)}{\partial x}$ та $\frac{\partial U(x; y)}{\partial y}$, а диференційовна функція $U = U(x; y; z)$ має частинні похідні першого порядку $\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial x}$, $\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial y}$, $\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial z}$.

Значення частинних похідних у точці M визначає швидкість, з якою змінюється функція у напрямку тієї осі, що відповідає змінній, за якою знаходилась похідна.

При дослідженні функцій $U = U(M)$ буває доцільним визначити швидкість, з якою змінюється диференційовна функція $U = U(M)$ у напрямку заданого вектора.

Нехай в області σ диференційовною функцією $U = U(M)$ задано скалярне поле.

Візьмемо вектор $\bar{\ell}$ та точку M у області σ . З точки M проведемо промінь у напрямку, що заданий вектором $\bar{\ell}$ (рис. 2.3).

На цьому проміні відкладемо точки M та M_1 і побудуємо вектор $\overline{MM_1}$.

Позначимо через $\Delta\ell$ модуль вектора $\overline{MM_1}$, тобто $\Delta\ell = |\overline{MM_1}|$, а через ΔU приріст функції $f(M)$ у точці M за напрямком вектора $\bar{\ell}$, тобто $\Delta U(M) = U(M_1) - U(M)$.

Тоді відношення

$$\frac{\Delta U(M)}{\Delta\ell} = \frac{U(M_1) - U(M)}{\Delta\ell} \quad (2.3)$$

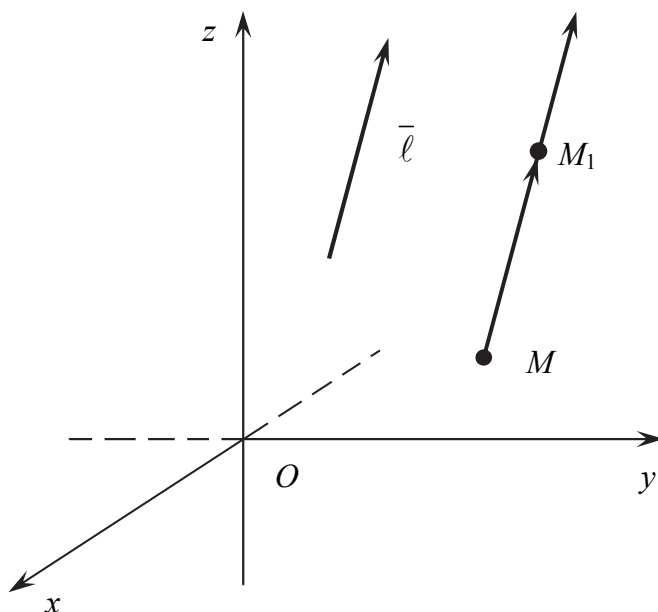


Рисунок 2.3

визначає середню швидкість, з якою змінюється скалярне поле на відріzk $\overline{MM_1}$ за напрямком вектора $\overline{\ell}$.

В и з н а ч е н н я . Якщо за умови, що $\Delta\ell \rightarrow 0$, існує скінченна границя відношення (2.3) приросту функції $U = U(M)$ у точці M за напрямком вектора $\overline{\ell}$ до приросту $\Delta\ell$ модуля вектора $\overline{\ell}$, то ця границя називається *похідною функції $U = U(M)$ у точці M за напрямком $\overline{\ell}$* .

При цьому використовується позначення

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \overline{\ell}} = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta U(M)}{\Delta\ell} \text{ або } \frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta U(M)}{\Delta\ell}. \quad (2.4)$$

Похідна $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell}$ визначає швидкість, з якою змінюється скалярне поле у точці M у напрямку вектора $\overline{\ell}$.

Модуль похідної $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell}$ визначає величину швидкості, з якою змінюється скалярне поле, а знак похідної визначає, як саме змінюється скалярне поле, тобто якщо $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} > 0$, то функція $U(M)$ зростає у точці M , а якщо $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} < 0$, то функція спадає у точці M .

Теорема. Якщо скалярне поле визначене диференційовною функцією $U = U(M)$, то яким би не був ненульовий вектор $\overline{\ell}$, існує похідна функції $U(M)$ за напрямком вектора $\overline{\ell}$, яка визначається за формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\overline{\ell}$.

Д о в е д е н н я

Нехай маємо точки $M(x; y; z)$, $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ та вектор $\overline{MM_1} = \overline{\Delta\ell} = \{\Delta x; \Delta y; \Delta z\}$.

Тоді

$$\Delta U(M) = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z), \quad \Delta\ell = |\overline{\Delta\ell}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Оскільки функція $U = U(M)$ є диференційовною, а $\Delta U(M)$ – повний приріст, то за визначенням повного приросту диференційовної функції маємо

$$\Delta U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \Delta z + \alpha(\Delta x; \Delta y; \Delta z), \quad (2.5)$$

де $\alpha(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$ – величина, яка є нескінченно малою більш високого порядку ніж $|\overline{\Delta \ell}|$, коли $|\overline{\Delta \ell}| \rightarrow 0$.

Звідси виходить, що

$$\frac{\Delta U(M)}{\Delta \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} \quad (2.6)$$

та

$$\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta U(M)}{\Delta \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta \ell}. \quad (2.7)$$

Оскільки $\overline{\Delta \ell} = \{\Delta x; \Delta y; \Delta z\}$, то напрямні косинуси вектора $\overline{\Delta \ell}$ є такими:

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta \ell}, \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta \ell}, \cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta \ell},$$

а оскільки вектори $\overline{\Delta \ell}$ та $\overline{\ell}$ співнаправлені, то їхні напрямні косинуси збігаються. Тоді, якщо $\Delta \ell \rightarrow 0$, то це означає, що точка M_1 по прямій MM_1 наближається до точки M ; $\Delta \ell$, як модуль вектора $\overline{\Delta \ell}$, зменшується, але напрямні косинуси вектора $\overline{\Delta \ell}$ залишаються незмінними, тобто

$$\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos \alpha, \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \cos \beta, \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \cos \gamma.$$

Зважаючи на це отримаємо таку формулу

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.8)$$

Якщо скалярне поле є плоским, тобто $U = U(x; y)$, то

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos \beta. \quad (2.9)$$

У формулі (2.9) α – це кут, який вектор $\overline{\ell}$ утворює з додатним напрямком осі Ox , а β – з віссю Oy . Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, або $\cos \beta = \sin \alpha$. Зважаючи на це, формулу (2.9) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \sin \alpha. \quad (2.10)$$

Якщо вектор $\overline{\ell}$ замінити на протилежний йому вектор, то знак похідної

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell}$$

зміниться на протилежний.

Дійсно, якщо $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\bar{\ell}$, то напрямні косинуси вектора $(-\bar{\ell})$ є такими: $\cos(\pi + \alpha); \cos(\pi + \beta); \cos(\pi + \gamma)$. Тоді $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \cos(\pi + \beta) = -\cos \beta; \cos(\pi + \gamma) = -\cos \gamma$, що і приводить до зміни знака похідної $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$.

При цьому швидкість, з якою змінюється скалярне поле у точці M , не змінюється, але зростання функції $U(M)$ у точці M переходить у спадання, а спадання переходить у зростання.

Приклади до пункту 1.3

Приклад 2.6. Знайти похідну скалярного поля

$$U(M) = 4x^2y - 3y^2z + 2z^2x$$

у напрямку вектора $\bar{\ell} = \{3; 0; -4\}$ та обчислити її значення у точці $M_0(-1; 2; 3)$.

Р о з в ' я з а н н я

Похідну скалярного поля у заданому напрямку знаходимо за формулою (2.8):

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\bar{\ell}$

$$\bar{\ell} = \{3; 0; -4\}, \quad |\bar{\ell}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}; \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = -\frac{4}{5}.$$

Знаходимо частинні похідні функції $U(x; y; z)$ та обчислюємо їхнє значення у точці M_0 :

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = (8xy + 2z^2) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2 \\ z=3}} = -16 + 18 = 2;$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = (4x^2 - 6yz) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2 \\ z=3}} = 4 - 36 = -32;$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = (-3y^2 + 4zx) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2 \\ z=3}} = -12 - 12 = -24.$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial U(M_0)}{\partial \ell} = 2 \cdot \frac{3}{5} - 32 \cdot 0 - 24 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 20,4.$$

В і д п о в і д ь : 20,4.

Приклад 2.7. Знайти похідну скалярного поля

$$U(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

у напрямку вектора $\overline{M_1M_2}$ та обчислити її значення у точці M_1 , якщо задані точки $M_1(3; 3; 3); M_2(-1; -1; -1)$.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо вектор $\overline{\ell} = \overline{M_1M_2}$:

$$\overline{\ell} = \overline{M_1M_2} = \{-4; -4; -4\}.$$

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{48},$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{48}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Знаходимо частинні похідні функції $U(M)$ та обчислюємо їхнє значення у точці M_1 :

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial U(M)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial U(M_1)}{\partial x} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\partial U(M_1)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\partial U(M_1)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

Тоді
$$\frac{\partial U(M_1)}{\partial \ell} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -1.$$

В і д п о в і д ь : -1 .

Приклад 2.8. Знайти похідну скалярного поля $U(M)$ у точці $M_0(2; 4)$, що належить параболі $y = x^2$, за напрямком цієї параболі.

Р о з в ' я з а н н я

Напрямком параболі $y = x^2$ у точці $M_0(2; 4)$ вважається напрямок дотичної до параболі у точці M_0 у сторону зростання абсциси.

Припустимо, що дотична до параболі у точці $M_0(2; 4)$ утворює з додатним напрямком осі Ox кут α . Маємо

$$y' = 2x; \operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Через $\operatorname{tg} \alpha$ можна знайти напрямні косинуси дотичної

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + 16}; \cos^2 \alpha = \frac{1}{17}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}};$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Знаходимо частинні похідні скалярного поля.

Так як
$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = 2y,$$

то

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 2 \cdot 2 = 4; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 2 \cdot 4 = 8.$$

Тоді

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \ell} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{36}{\sqrt{17}}.$$

В і д п о в і д ь : $\frac{36}{\sqrt{17}}.$

Приклад 2.9. Задані скалярне поле $U(M) = 4x^2y^3 - 2z + z^3$, точка $M_0(5; 1; -1)$ та вектор $\bar{\ell} = \{1; -1; 2\}$.

Знайти похідну скалярного поля $U(M)$ у напрямку вектора $\bar{\ell}$ та обчислити її у точці M_0 .

З'ясувати, з якою швидкістю змінюється скалярне поле $U(M)$ у точці M_0 у напрямку вектора $\bar{\ell}$.

Як саме змінюється функція $U(M)$ у точці M_0 : зростає чи спадає?

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\bar{\ell}$:

$$\bar{\ell} = \{1; -1; 2\}, \quad |\bar{\ell}| = \sqrt{6};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Знаходимо частинні похідні скалярного поля $U(M)$.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = 8xy^3; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = 12x^2y^2; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = 2z^2 - 2.$$

Обчислюємо знайдені частинні похідні у точці $M_0(5; 1; -1)$.

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 40; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 300; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = 0.$$

Тоді

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \ell} = 40 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 300 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{260}{\sqrt{6}}.$$

Отже, швидкість, з якою змінюється функція $U(M)$ у точці M_0 у напрямку вектора $\overline{\ell}$ дорівнює

$$V = \left| \frac{\partial U(M_0)}{\partial \ell} \right| = \frac{260}{\sqrt{6}}.$$

Оскільки $\frac{\partial U(M_0)}{\partial \ell} < 0$, то це означає, що функція $U(M)$ у точці M_0 спадає.

В і д п о в і д ь : $\frac{260}{\sqrt{6}}$; спадає.

1.4 Градієнт скалярного поля

Скалярне поле задане диференційовною функцією $U = U(M)$ в області σ .

В и з н а ч е н н я . *Градієнтом скалярного поля $U = U(M)$ у точці M називається вектор $\overline{\text{grad}} U(M)$, координатами якого є частинні похідні функції $U(M)$ у точці M , тобто*

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}, \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\}. \quad (2.11)$$

Теорема 1. Похідна функції $U(M)$ за напрямком вектора $\overline{\ell}$ у точці M дорівнює скалярному добутку градієнта функції $U(M)$ у точці M на орт $\overline{\ell}_0$ вектора $\overline{\ell}$.

Д о в е д е н н я

Будемо виходити з формули (2.8). Праву частину цієї формули можна розглядати як скалярний добуток векторів $\overline{\text{grad}} U(M)$ та $\overline{\ell}_0$, де

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}, \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\},$$

$\overline{\ell}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, звідки і виходить, що

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \overline{\text{grad}} U(M) \cdot \overline{\ell}_0. \quad (2.12)$$

Теорема 2. Похідна функції $U(M)$ за напрямком вектора $\overline{\ell}$ дорівнює проєкції градієнта функції $U(M)$ на напрямок вектора $\overline{\ell}$, тобто

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \text{pr}_{\overline{\ell}} \overline{\text{grad}} U(M).$$

Д о в е д е н н я

Будемо виходити з формули (2.12)

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \overline{\text{grad}U(M)} \cdot \overline{\ell_0} = |\overline{\text{grad}U(M)}| |\overline{\ell_0}| \cos \varphi,$$

де $\overline{\ell_0}$ – орт вектора $\overline{\ell}$, а φ – кут між векторами $\overline{\text{grad}U(M)}$ та $\overline{\ell_0}$.

Тоді

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = |\overline{\text{grad}U(M)}| \cos \varphi, \quad (2.13)$$

оскільки $|\overline{\ell_0}| = 1$.

Звідси

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \text{pr}_{\overline{\ell}} \overline{\text{grad}U(M)}. \quad (2.14)$$

Теорема 3. Градієнт скалярного поля $U = U(M)$ у точці M_0 та нормаль до поверхні рівня, яка проходить через точку M_0 є колінеарні.

Д о в е д е н н я

Розглянемо похідну функції $U(M)$ у точці M_0 за напрямком вектора $\overline{\ell}$, який колінеарний з нормаллю $\overline{n}$. Рівняння поверхні рівня має вигляд $U(x; y; z) = c$. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та є нормаллю, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial z}},$$

а вектор $\overline{n(M_0)} = \left\{ \frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial x}, \frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial y}, \frac{\partial U(x_0; y_0; z_0)}{\partial z} \right\}$ є напрямним вектором нормалі.

Виходить, що вектор $\overline{\text{grad}U(M_0)}$ та вектор нормалі $\overline{n(M_0)}$ є колінеарними.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо скалярне поле $U(M)$ є плоским, тобто $U = U(x; y)$, то градієнт цього скалярного поля є колінеарним з нормаллю до лінії рівня, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Н а с л і д о к . 1) Похідна функції $U(x; y; z)$ у точці M_0 за напрямком вектора $\overline{\ell}$, який є паралельним дотичній площині до поверхні рівня $U(x; y; z) = c$ з точкою дотику M_0 , дорівнює нулю.

2) Похідна функції $U(x; y)$ у точці M_0 за напрямком вектора $\overline{\ell}$, який є паралельним дотичній до лінії рівня $U(x; y) = c$ з точкою дотику M_0 , дорівнює нулю.

Теорема 4. Скалярне поле $U = U(M)$ у точці M з найбільшою швидкістю змінюється у напрямку градієнта функції у цій точці.

Д о в е д е н н я

Виходимо з формули (2.13)

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = |\overline{\text{grad}} U(M)| \cos \varphi.$$

Якщо $\varphi = 0$, то це означає, що вектор $\overline{\text{grad}} U(M)$ напрямлений по нормалі у сторону її зростання, а похідна $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell}$ при цьому набуває найбільшого значення.

Отже, якщо вектор $\overline{\ell}$ співнаправлений з вектором $\overline{\text{grad}} U(M)$, то скалярне поле $U = U(M)$ у напрямку градієнта $U(M)$ зростає з найбільшою швидкістю.

Якщо $\varphi = 180^\circ$, то це означає, що вектор $\overline{\text{grad}} U(M)$ напрямлений по нормалі у сторону її спадання, а похідна $\frac{\partial U(M)}{\partial \ell}$ при цьому набуває найменшого значення. Отже, якщо вектор $\overline{\ell}$ та вектор $\overline{\text{grad}} U(M)$ протилежно напрямлені, то скалярне поле $U = U(M)$ у напрямку градієнта $U(M)$ спадає з найбільшою швидкістю.

Аналізуючи розглянуті теореми, можна сформулювати ще одне визначення градієнта.

В и з н а ч е н н я . Градієнтом скалярного поля $U = U(M)$ у точці M називається вектор $\overline{\text{grad}} U(M)$, який напрямлений по нормалі до поверхні рівня у сторону зростання скалярного поля та такий, що його модуль дорівнює найбільшому значенню похідної за напрямком у точці M .

1.5 Властивості градієнта скалярного поля

1. Якщо задані скалярні поля $U_1 = U_1(M)$ та $U_2 = U_2(M)$, то справедливою є формула

$$\overline{\text{grad}}(U_1(M) \pm U_2(M)) = \overline{\text{grad}} U_1(M) \pm \overline{\text{grad}} U_2(M),$$

де $U_1(M)$ та $U_2(M)$ – диференційовні функції.

Д о в е д е н н я

$$\begin{aligned} & \overline{\text{grad}}[U_1(M) \pm U_2(M)] = \\ & = \left\{ \frac{\partial U_1(M) \pm U_2(M)}{\partial x}, \frac{\partial U_1(M) \pm U_2(M)}{\partial y}, \frac{\partial U_1(M) \pm U_2(M)}{\partial z} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{\partial U_1(M)}{\partial x} \pm \frac{\partial U_2(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial y} \pm \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} \pm \frac{\partial U_2(M)}{\partial z} \right\} = \\
&= \left\{ \frac{\partial U_1(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} \right\} \pm \left\{ \frac{\partial U_2(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial z} \right\} = \\
&= \overline{\text{grad}} U_1(M) \pm \overline{\text{grad}} U_2(M).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{grad}} (U_1(M) \pm U_2(M)) = \overline{\text{grad}} U_1(M) \pm \overline{\text{grad}} U_2(M). \quad (2.15)$$

2. Якщо диференційовною функцією визначено скалярне поле $U = U(M)$, а k – будь-яка стала, то справедливою є формула

$$\overline{\text{grad}} (kU(M)) = k \overline{\text{grad}} U(M).$$

Д о в е д е н н я

$$\begin{aligned}
&\overline{\text{grad}} (kU(M)) = \left\{ \frac{\partial(kU(M))}{\partial x}; \frac{\partial(kU(M))}{\partial y}; \frac{\partial(kU(M))}{\partial z} \right\} = \\
&= \left\{ \frac{k\partial U(M)}{\partial x}; \frac{k\partial U(M)}{\partial y}; \frac{k\partial U(M)}{\partial z} \right\} = k \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\} = k \overline{\text{grad}} U(M).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{grad}} (kU(M)) = k \overline{\text{grad}} U(M). \quad (2.16)$$

3. Якщо диференційними функціями задані скалярні поля $U_1 = U_1(M)$ та $U_2 = U_2(M)$, то справедливою є формула

$$\overline{\text{grad}} (U_1(M)U_2(M)) = U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) + U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M).$$

Д о в е д е н н я

$$\begin{aligned}
&\overline{\text{grad}} (U_1(M)U_2(M)) = \left\{ \frac{\partial(U_1(M)U_2(M))}{\partial x}; \frac{\partial(U_1(M)U_2(M))}{\partial y}; \frac{\partial(U_1(M)U_2(M))}{\partial z} \right\} = \\
&= \left\{ U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial x} + U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial x}; U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial y} + U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}; \right. \\
&\quad \left. U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} + U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial z} \right\} = \\
&= U_2(M) \left\{ \frac{\partial U_1(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} \right\} + U_1(M) \left\{ \frac{\partial U_2(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial z} \right\} = \\
&= U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) + U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{grad}} (U_1(M)U_2(M)) = U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) + U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M). \quad (2.17)$$

4. Якщо диференційними функціями задані скалярні поля $U_1 = U_1(M)$ та $U_2 = U_2(M)$, то справедливою є формула

$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)}\right) = \frac{1}{U_2^2(M)} \left(U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) - U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M) \right).$$

Д о в е д е н н я

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}\left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)}\right) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)} \right); \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)} \right); \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)} \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial x} - U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial x}}{U_2^2(M)}; \frac{U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial y} - U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}}{U_2^2(M)}; \right. \\ &\quad \left. \frac{U_2(M) \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} - U_1(M) \frac{\partial U_2(M)}{\partial z}}{U_2^2(M)} \right\} = \\ &= \frac{1}{U_2^2(M)} \left\{ U_2(M) \left(\frac{\partial U_1(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_1(M)}{\partial z} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{U_2^2(M)} \left\{ U_1(M) \left(\frac{\partial U_2(M)}{\partial x}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial y}; \frac{\partial U_2(M)}{\partial z} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{U_2^2(M)} \left(U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) - U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M) \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{U_1(M)}{U_2(M)}\right) = \frac{1}{U_2^2(M)} \left(U_2(M) \overline{\text{grad}} U_1(M) - U_1(M) \overline{\text{grad}} U_2(M) \right). \quad (2.18)$$

5. Якщо скалярне поле U задане складною функцією $f(\varphi(M))$, де $U = f(V)$ та $V = \varphi(M)$ – диференційовні функції, то справедливою є формула

$$\overline{\text{grad}} f(\varphi(M)) = f'(V) \overline{\text{grad}} \varphi(M).$$

Д о в е д е н н я

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}} f(\varphi(M)) &= \left\{ \frac{\partial f(\varphi(M))}{\partial x}; \frac{\partial f(\varphi(M))}{\partial y}; \frac{\partial f(\varphi(M))}{\partial z} \right\} = \\ &= \left\{ f'(V) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x}; f'(V) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y}; f'(V) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \right\} = \end{aligned}$$

$$= f'(V) \left\{ \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x}; \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y}; \frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \right\} = f'(V) \overline{\text{grad}} \varphi(M).$$

Отже,

$$\overline{\text{grad}} f(\varphi(M)) = f'(V) \overline{\text{grad}} \varphi(M). \quad (2.19)$$

Приклади до пунктів 1.4 та 1.5

Приклад 2.10. Знайти градієнт скалярного поля $U(M) = (x + y^2 + z^3)e^x$ та знайти $\overline{\text{grad}} U(M_0)$, якщо задано точку $M_0(0; 4; -1)$.

Р о з в ' я з а н н я

Для знаходження градієнта скалярного поля будемо користуватися формулою (2.11), а саме:

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\}.$$

Знаходимо частинні похідні скалярного поля $U(M)$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = e^x + e^x(x + y^2 + z^3); \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = 2ye^x; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = 3z^2e^x.$$

Обчислюємо значення частинних похідних у точці $M_0(0; 4; -1)$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 1 + 16 - 1 = 16; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 8; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = 3.$$

Отже, $\overline{\text{grad}} U(M) = \{e^x(1 + x + y^2 + z^3); 2ye^x; 3z^2e^x\}$; $\overline{\text{grad}} U(M_0) = \{16; 8; 3\}$.

В і д п о в і д ь : $\overline{\text{grad}} U(M) = \{e^x(1 + x + y^2 + z^3); 2ye^x; 3z^2e^x\}$,
 $\overline{\text{grad}} U(M_0) = \{16; 8; 3\}$.

Приклад 2.11. Задане скалярне поле

$$U(M) = x^2 + y^2 + z^2$$

та точки $M_1(-1; 0; 1)$, $M_2(1; 2; -1)$. Знайти кут між $\overline{\text{grad}} U(M_1)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_2)$.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо частинні похідні скалярного поля $U(M)$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = 2z.$$

Знаходимо $\overline{\text{grad}} U(M_1)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_2)$.

$$\frac{\partial U(M_1)}{\partial x} = -2; \quad \frac{\partial U(M_1)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial U(M_1)}{\partial z} = 2;$$

$$\frac{\partial U(M_2)}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial U(M_2)}{\partial y} = 4; \quad \frac{\partial U(M_2)}{\partial z} = -2;$$

Виходить

$$\overline{\text{grad}} U(M_1) = \{-2; 0; 2\}, \quad \overline{\text{grad}} U(M_2) = \{2; 4; -2\}.$$

Тоді косинус кута між градієнтами скалярного поля дорівнює

$$\cos \varphi = \frac{-2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{4 + 4} \sqrt{4 + 16 + 4}} = \frac{-8}{\sqrt{192}} \approx -0,577,$$

де $\varphi \approx 125^\circ$.

В і д п о в і д ь : 125° .

Приклад 2.12. Задані скалярні поля

$$U(M) = (x^2 - y^2)z^4 \quad \text{та} \quad V(M) = \frac{x + z}{y + z}$$

і точка $M_0(1; -1; 2)$. Знайти кут між $\overline{\text{grad}} U(M_0)$ та $\overline{\text{grad}} V(M_0)$.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо $\overline{\text{grad}} U(M)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_0)$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = 2xz^4; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = -2yz^4; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = 4(x^2 - y^2)z^3;$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 32; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 32; \quad \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = 0;$$

$$\overline{\text{grad}} U(M_0) = \{32; 32; 0\};$$

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x} = \frac{1}{y + z}; \quad \frac{\partial V(M)}{\partial y} = -\frac{x + z}{(y + z)^2}; \quad \frac{\partial V(M)}{\partial z} = \frac{y - x}{y + z};$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial V(M_0)}{\partial y} = -3; \quad \frac{\partial V(M_0)}{\partial z} = -2;$$

$$\overline{\text{grad}} V(M_0) = \{1; -3; -2\}.$$

Знаходимо косинус кута між градієнтами скалярних полів:

$$\cos \varphi = \frac{32 \cdot 1 + 32 \cdot (-3) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{32^2 + 32^2} \sqrt{1 + 9 + 4}} = -\frac{64}{\sqrt{28672}} \approx -0,378,$$

де $\varphi \approx -112^\circ$.

В і д п о в і д ь : -112° .

Приклад 2.13. Задане скалярне поле

$$U(M) = \sqrt{x+y} + z^3 - \frac{z}{y}.$$

Знайти напрямок, в якому функція змінюється з найбільшою швидкістю.

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки скалярне поле змінюється з найбільшою швидкістю у напрямку градієнта скалярного поля, то знаходимо $\overline{\text{grad}} U(M)$.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{z}{y^2}; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = 3z^2 - \frac{1}{y};$$

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}; \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{z}{y^2}; 3z^2 - \frac{1}{y} \right\}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь : } \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}; \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{z}{y^2}; 3z^2 - \frac{1}{y} \right\}.$$

Приклад 2.14. Задане скалярне поле

$$U(M) = 5x^2 - 4zy^3 + xyz$$

та точка $M_0(1; 3; -1)$. Знайти максимальну швидкість, з якою може змінюватись функція $U(M)$ у точці M_0 .

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки максимальна швидкість, з якою змінюється функція $U(M)$ у точці M_0 , дорівнює модулю градієнта, то знаходимо $\overline{\text{grad}} U(M)$, $\overline{\text{grad}} U(M_0)$, $|\overline{\text{grad}} U(M_0)|$.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = 10x + yz; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = -12zy^2 + xz; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = -4y^3 + xy,$$

$$\text{Тоді} \quad \overline{\text{grad}} U(M) = \{10x + yz; -12zy^2 + xz; -4y^3 + xy\};$$

$$\overline{\text{grad}} U(M_0) = \{7; 10; -105\}; \quad |\overline{\text{grad}} U(M_0)| = \sqrt{7^2 + 10^2 + (-105)^2} = \sqrt{11174} \approx 105,7.$$

Отже, максимальна швидкість $V \approx 105,7$.

В і д п о в і д ь : 105,7.

Г л а в а 2

ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

2.1 Векторне поле, основні поняття

В и з н а ч е н н я . *Векторним полем* називається така область двовимірного чи тривимірного простору, у кожній точці якої задано векторну функцію $\overline{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$.

Так, векторним полем є поле точкового заряду q , тому що кожній точці простору ставиться у відповідність вектор напруги $\overline{E} = \frac{q}{r^2} \overline{r}$, який дорівнює силі взаємодії точкового заряду q з одиничним зарядом у заданій точці $M(r)$.

Векторним полем є поле магнітної напруги $\overline{H} = \int_L \frac{\overline{L} \times \overline{R}}{R^3} dl$, яке утворюється струмом, що проходить по прямолінійному провіднику, на кожній точці контура L , яка не належить провіднику.

2.2 Векторні лінії

Для геометричної характеристики векторних полів використовуються так звані векторні лінії.

В и з н а ч е н н я . *Векторною лінією векторного поля $\overline{F}(M)$* називається така крива, дотична до якої у будь-якій точці M має той самий напрямок, що і вектор $\overline{F}(M)$.

Якщо векторне поле є силовим полем, то векторні лінії називаються силовими лініями, а у векторному полі швидкостей руху рідини векторні лінії називаються *лініями струменів*.

Векторні лінії дають певні фізичні характеристики векторних полів.

Так, у магнітному векторному полі векторні лінії – це лінії, які виходять з північного полюса та закінчуються у південному полюсі.

У векторному полі, яке утворено точковим зарядом, векторними лініями будуть промені, які виходять із точки, в якій розміщено заряд.

Векторні лінії характеризують напрямки векторного поля у кожній точці векторного поля (рис. 2.4).

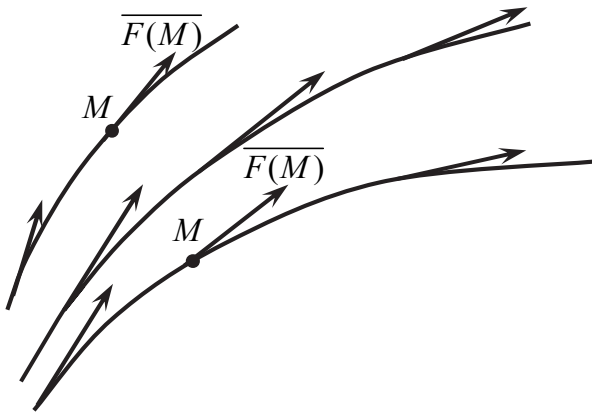


Рисунок 2.4

Ознайомимось з математичним описом векторних ліній. Нехай задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\},$$

де функції $P(M); Q(M); R(M)$ диференційовні, а їхні частинні похідні першого порядку є обмеженими функціями.

Припустимо, що векторна лінія описується рівнянням у параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Виходячи з визначення векторної лінії, можна стверджувати, що координати вектора $\overline{F(M)}$ пропорційні координатам напрямного вектора дотичної, тобто

$$\frac{x'(t)}{P(M)} = \frac{y'(t)}{Q(M)} = \frac{z'(t)}{R(M)},$$

Отже, справедливими є і такі рівняння

$$\frac{dx}{P(M)} = \frac{dy}{Q(M)} = \frac{dz}{R(M)}.$$

Ці рівняння являють собою систему диференціальних рівнянь, методи розв'язування якої будуть розглянуті далі.

Приклади до пункту 2.2

Приклад 2.15. Знайти векторні лінії векторного поля

$$\overline{F(M)} = \{y + z; -x; -x\}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Векторні лінії векторного поля визначаються системою диференціальних рівнянь, а саме,

$$\frac{dx}{P(M)} = \frac{dy}{Q(M)} = \frac{dz}{R(M)}.$$

У даному випадку

$$P(M) = y + z, \quad Q(M) = -x, \quad R(M) = -x.$$

Отже, маємо

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x},$$

звідки виходить таке

$$\begin{cases} \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x}; \\ \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь. З другого рівняння системи виходить

$$dy = dz,$$

звідки $y = z + c$, де $c = \text{const}$.

Тоді перше рівняння системи можна подати у вигляді

$$-x dx = (y + z) dy,$$

$$-x dx = y dy + z dy$$

або, оскільки $dy = dz$, у вигляді

$$x dx + y dy + z dz = 0.$$

Проінтегруємо останню рівність:

$$\int x dx + \int y dy + \int z dz = 0.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = c_1, \quad c_1 > 0$$

чи то

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2,$$

де $c = \text{const}$.

Виходить, що векторними лініями заданого векторного поля є лінії перетину сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ з площинами $y = z + c$, тобто лінії, що визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2; \\ y = z + \tilde{c}. \end{cases},$$

де $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

В і д п о в і д ь :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2; \\ y = z + \tilde{c}. \end{cases}, \text{ де } c, \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

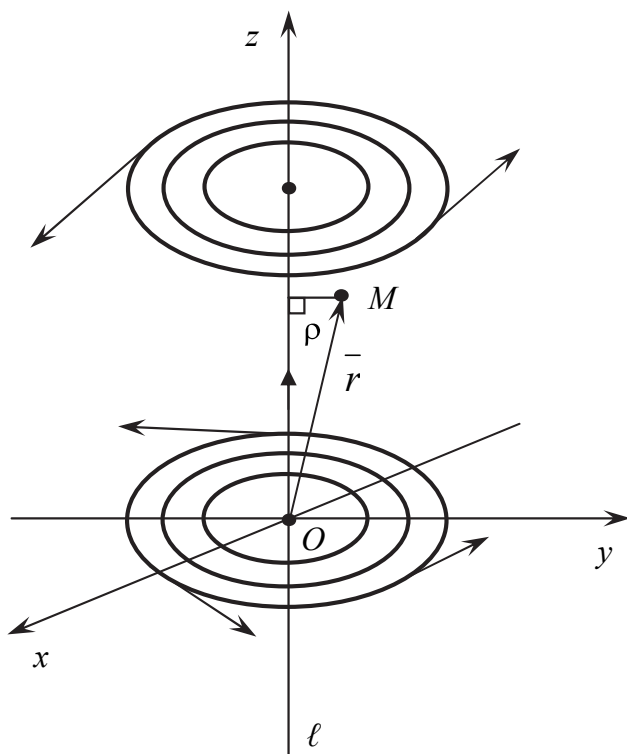


Рисунок до прикладу 2.16

Приклад 2.16. Знайти векторні лінії магнітного поля, яке утворене нескінченним провідником електричного струму.

Розв'язання

Нехай провідник ℓ розміщений на осі Oz (див. рис.). Електричний струм також протікає по осі Oz .

Позначимо через $\vec{H}$ вектор напруги утворюваного магнітного поля, коли через провідник ℓ протікає електричний струм $\vec{I} = \{0; 0; I_k\}$, а через $\vec{r} = \{x; y; z\}$ позначимо радіус-вектор будь-якої точки $M(x; y; z)$, що знаходиться на відстані ρ від осі Oz .

Як відомо з курсу фізики, справедливою є така залежність

$$\vec{H} = \frac{2}{\rho^2} (\vec{I} \times \vec{r}).$$

Звідси маємо

$$\vec{H} = \frac{2}{\rho^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & I_k \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{2}{\rho^2} (-yI_k \vec{i} + xI_k \vec{j} + 0\vec{k}),$$

$$\text{тобто } \vec{H} = \left\{ -\frac{2y}{\rho^2}; \frac{2x}{\rho^2}; 0 \right\}.$$

Векторні лінії такого векторного поля описуються системою рівнянь

$$\frac{dx}{-\frac{2y}{\rho^2}} = \frac{dy}{\frac{2x}{\rho^2}} = \frac{dz}{0} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Визначимо форму векторних ліній.

Якщо $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, то $x dx = -y dy$, звідки

$$\int x dx = -\int y dy, \quad \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = c_1,$$

де $c_1 \in R$ або

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

де $c \in R$.

$$\text{Якщо } \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}, \text{ то } dz = 0, \int dz = 0, z = \tilde{c},$$

де $\tilde{c} = \text{const}$.

Таким чином, векторні лінії магнітного поля являють собою концентричні кола $x^2 + y^2 = c^2$, які лежать у площинах $z = c$, тобто

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2; \\ z = \tilde{c}, \end{cases}$$

де $c, \tilde{c} \in R$.

В і д п о в і д ь :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2; \\ z = \tilde{c}. \end{cases}$$

2.3 Потік векторного поля

В и з н а ч е н н я . *Потоком векторного поля $\overline{F(M)}$ через певну сторону двосторонньої поверхні T називається поверхневий інтеграл другого роду через визначену сторону поверхні T від векторної функції $\overline{F(M)}$, тобто*

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}. \quad (2.20)$$

Якщо векторне поле являє собою поле швидкостей $\overline{V(M)}$ нестисливої рідини, то потік векторного поля $\overline{V(M)}$ через поверхню T визначає кількість рідини, яка протікає через поверхню T за одиницю часу (див. розд. 2 п. 2.2).

Властивості потоку векторного поля Π обумовлені властивостями поверхневих інтегралів другого роду.

Властивості потоку векторного поля

1. **Л і н і й н і с т ь .** Якщо $\overline{F_1(M)}$ та $\overline{F_2(M)}$ векторні поля, а k_1 та k_2 – будь-які сталі, то потік Π векторного поля $(k_1 \overline{F_1(M)} \pm k_2 \overline{F_1(M)})$ через орієнтовану поверхню T визначається формулою

$$\iint_T (k_1 \overline{F_1(M)} \pm k_2 \overline{F_2(M)}) \cdot \overline{ds} = k_1 \iint_T \overline{F_1(M)} \cdot \overline{ds} \pm \iint_T \overline{F_2(M)} \cdot \overline{ds}, \quad (2.21)$$

тобто $\Pi = k_1 \Pi_1 \pm k_2 \Pi_2$, де Π_1 та Π_2 – потоки векторних полів $\overline{F_1(M)}$ та $\overline{F_2(M)}$ через поверхню T .

2. **А д и т и в н і с т ь**. Якщо орієнтована поверхня T складається зі скінченної кількості неперервних поверхонь $T_1, T_2, \dots, T_n$, тобто $T = \sum_{k=1}^n T_k$, то потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню T дорівнює сумі потоків через поверхні T_k ($k = 1; 2; \dots; n$), тобто

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k. \quad (2.22)$$

3. **З а л е ж н і с т ь** потоку від орієнтованості поверхні. Якщо поверхні T_+ та T_- відповідно додатно та від'ємно орієнтовані сторони поверхні T , то потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню T_+ та потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню T_- є протилежними за знаком, тобто

$$\iint_{T_+} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = - \iint_{T_-} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}. \quad (2.23)$$

Нехай T замкнена поверхня, а $\overline{F(M)}$ – векторне поле. Потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через зовнішню сторону поверхні T являє собою потік векторного поля $\overline{F(M)}$ зсередини поверхні T , при цьому використовується позначення

$$\Pi = \oiint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Приклади до пункту 2.3

Приклад 2.17. Обчислити потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{2x; 1 - 2y; 2z\}$ через зовнішню сторону тієї частини параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - 2y$, де $y \geq 0$, що знаходиться у першому октанті.

Р о з в ' я з а н н я

Потік Π векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню T знаходимо за допомогою поверхневого інтеграла другого роду за формулою (2.20), а саме:

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Задане векторне поле є таким

$$\overline{F(M)} = \{2x; 1 - 2y; 2z\}.$$

Рівняння $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ визначає параболоїд обертання з вершиною у точці $B(0; \frac{1}{2}; 0)$, віссю якого є вісь Oy . Задана поверхня T являє собою зовнішню частину поверхні T , яка знаходиться у першому октанті (див. рис. 1).

Для обчислення потоку Π маємо обчислити поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Будемо обчислювати поверхневий інтеграл методом проектування на одну площину. Виходячи з особливостей поверхні, проектування поверхні T зручно провести на площину xOz .

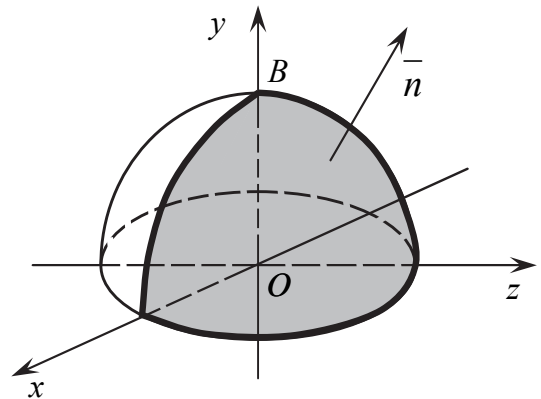


Рисунок 1 до прикладу 2.17

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n}$ до поверхні T . Це можна зробити так само, як ми робили у першому розділі за допомогою певних формул, але після введення поняття градієнта скалярного поля вектор нормалі можна знаходити і в інший спосіб.

Поверхня параболоїда є еквіпотенціальною поверхнею скалярного поля

$$U(M) = x^2 + 2y + z^2 - 1, \text{ тобто } x^2 + 2y + z^2 - 1 = c.$$

Градієнтом цього векторного поля є вектор

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \{2x; 2; 2z\}.$$

Як відомо, градієнт скалярного поля у кожній точці на поверхні рівня збігається з напрямком вектора нормалі до поверхні рівня у цій точці.

Оскільки вектор нормалі може бути проведений з однієї точки і до зовнішньої і до внутрішньої сторін поверхні, то вектор нормалі знаходиться за формулою

$$\overline{n} = \pm \overline{\text{grad}} U(M) = \pm \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}, \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\},$$

а одиничний вектор нормалі знаходиться за формулою

$$\vec{n} = \pm \frac{\overline{\text{grad } U(M)}}{|\overline{\text{grad } U(M)}|} = \frac{1 \cdot \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U(M)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U(M)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U(M)}{\partial z} \right)^2}}.$$

Подвійний знак « $\pm$ » перед координатами нормалі дозволяє обрати потрібну сторону поверхні за тими самими правилами, що і раніше.

Отже, у заданому випадку

$$\vec{n}_0 = \left\{ \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1 + z^2}}; \frac{2}{2\sqrt{x^2 + 1 + z^2}}; \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} \right\}$$

або

$$\vec{n}_0 = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}}; \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}}; \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} \right\}.$$

З двох можливих знаків « $\pm$ » залишився знак плюс тому, що вектор нормалі до поверхні з додатним напрямом осі Oy утворює гострий кут і тоді друга координата вектора $\vec{n}_0$ є додатною.

Спроектуємо поверхню T на площину xOz . У перерізі отримаємо частину круга

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 - 2y; \\ y = 0, \end{cases}$$

що знаходиться у першій чверті, тобто $x^2 + z^2 \leq 1$, де $x \geq 0, z \geq 0$ (див. рис. 2).

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_T (\overline{F(M)} \cdot \vec{n}_0) ds =$$

$$= \iint_T \left(2x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} + (1 - 2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} + 2z \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} \right) ds.$$

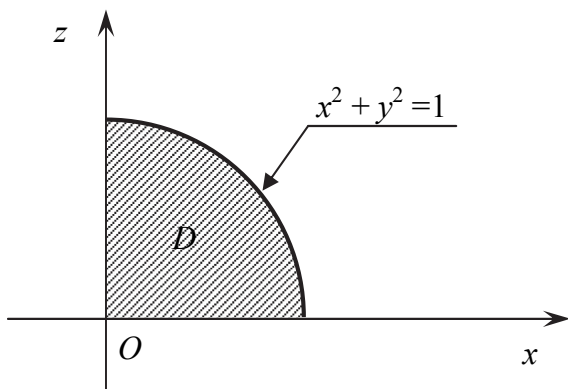


Рисунок 2 до прикладу 2.17

Поверхневий інтеграл по поверхні T переводимо у подвійний інтеграл по області

D . Для цього підставимо $ds = \frac{dx dz}{|\cos \beta|}$, тобто

$$ds = \frac{dx dz}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}}} = \sqrt{x^2 + 1 + z^2} dx dz$$

та

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + z^2 - 1).$$

$$\Pi = \iint_D \frac{2x^2 + 1 + x^2 + z^2 - 1 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + 1 + z^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1 + z^2} dx dz = 3 \iint_D (x^2 + z^2) dx dz.$$

Виходячи з форми області D , доцільно перейти до полярних координат.

Рівняння кола, що обмежує область D : $\rho = 1$. Підінтегральний вираз у полярних координатах: $3(x^2 + z^2) = 3\rho^2$, оскільки $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$.

Отже, маємо:

$$\Pi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = 3\varphi \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \rho^4 \bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{8}.$$

В і д п о в і д ь : $\frac{3\pi}{8}$.

Приклад 2.18. Обчислити потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{xy; yz; x\}$ через частину площини $x - y + z - 1 = 0$, розміщеної у першому октанті у напрямку нормалі, яка з додатним напрямком осі Oz утворює гострий кут.

Р о з в ' я з а н н я

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Будемо знаходити поверхневий інтеграл методом проектування на три площини.

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n}$, для чого вводимо скалярне поле

$$U(M) = x - y + z - 1.$$

Знаходимо

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \{1; -1; 1\}.$$

Тоді модуль градієнта є таким

$$|\overline{\text{grad}} U(M)| = \sqrt{3}.$$

Враховуючи, що

$$\overline{n} = \{1; -1; 1\}, \quad \overline{n}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\},$$

маємо

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_T \left(xy \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - yz \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds.$$

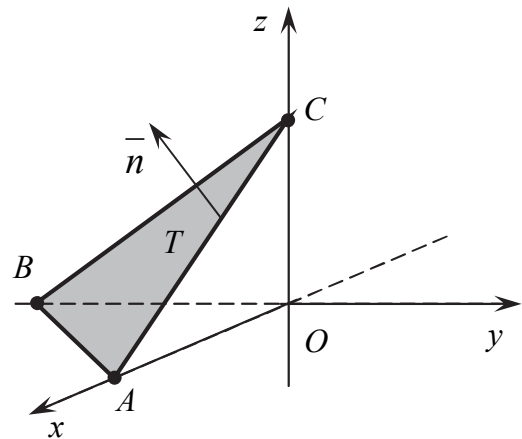


Рисунок до прикладу 2.18

При проектуванні поверхні T на три площини виходить:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_1} xy \Big|_{x=y-z+1} \sqrt{3} dydz - \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_2} yz \Big|_{y=x+z-1} \sqrt{3} dx dz + \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_3} x \Big|_{z=-x+y+1} \sqrt{3} dx dy$$

або

$$\Pi = \iint_{D_1} (y^2 - yz + y) dydz - \iint_{D_2} (xz + z^2 - z) dx dz + \iint_{D_3} x dx dy,$$

де $D_1 \subset yOz$; $D_2 \subset xOz$; $D_3 \subset xOy$.

Область D_1 збігається з трикутником BOC ; область D_2 збігається з трикутником AOC ; область D_3 збігається з трикутником AOB .

Рівняння прямої BC : $-y + z - 1 = 0$; рівняння прямої AC : $x + z - 1 = 0$; рівняння прямої AB : $x - y - 1 = 0$.

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Delta BOC} (y^2 - yz + y) dydz - \iint_{\Delta AOC} (xz + z^2 - z) dx dz + \iint_{\Delta AOB} x dx dy. \\ I_1 &= \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} (y^2 - yz + y) dz = \int_{-1}^0 \left(y^2 z - \frac{1}{2} yz^2 + yz \right) \Big|_0^{y+1} dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(y^3 + y^2 - \frac{1}{2} (y^3 + 2y^2 + y) + y^2 + y \right) dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(y^3 + y^2 - \frac{1}{2} y^3 - y^2 - \frac{1}{2} y + y^2 + y \right) dy = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} y^3 + y^2 + \frac{1}{2} y \right) dy = \\ &= \left(\frac{1}{8} y^4 + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{8} (0 - 1) + \frac{1}{3} (0 + 1) + \frac{1}{4} (0 - 1) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{24}. \\ I_2 &= - \int_0^1 z dz \int_0^{1-z} (x + z - 1) dx = - \int_0^1 z \left(\frac{1}{2} x^2 - (1 - z)x \right) \Big|_0^{1-z} dz = \\ &= - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} z(1 - z)^2 - z(1 - z)^2 \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z - 2z^2 + z^3) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^1 x dx \int_{x-1}^0 dy = \int_0^1 xy \Big|_{x-1}^0 dx = \int_0^1 x(0 - (x-1)) dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Отже, $\Pi = -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$

В і д п о в і д ь : $\frac{1}{6}.$

Приклад 2.19. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{5 - 7x; 3y; 5 - 6z\}$ через зовнішню сторону поверхні T піраміди, утвореної координатними площинами та площиною $2x + 2y + z = 2$.

Р о з в ' я з а н н я

$$\Pi = \iint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Поверхня T – це поверхня піраміди і вона складається з чотирьох поверхонь.

Поверхня T_1 – це трикутник АВС, який лежить на площині $2x + 2y + z = 2$.

Поверхня T_2 – це трикутник АОВ, який лежить на площині $z = 0$.

Поверхня T_3 – це трикутник АОВ, який лежить на площині $y = 0$.

Поверхня T_4 – це трикутник ВОС, який лежить на площині $x = 0$ (див. рис. 1).

Тоді

$$\Pi = \iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_3} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_4} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_1}$ до поверхні T_1 .

$$U(M) = 2x + 2y + z + 2, \quad \overline{\text{grad}} U(M) = \{2; 2; 1\}, \quad |\overline{\text{grad}} U(M)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

$$\overline{n_1} = \pm \{2; 2; 1\}, \quad \overline{n_{01}} = \pm \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

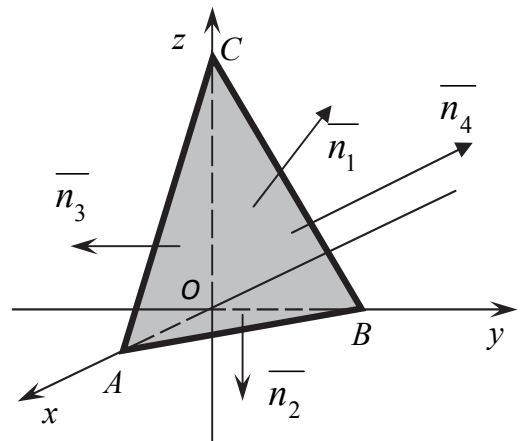
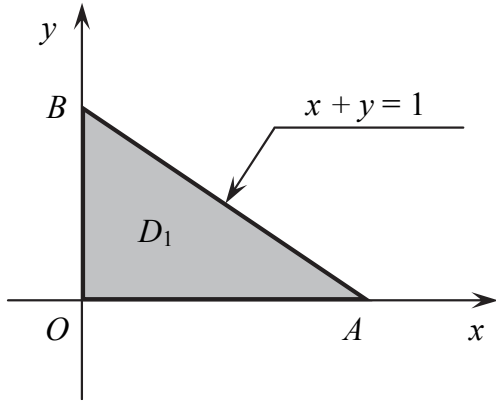


Рисунок 1 до прикладу 2.19

З двох можливих знаків для нормалі $\overline{n_1}$ обираємо знак плюс, оскільки нормаль $\overline{n_1}$ з додатним напрямком осі Oz утворює гострий кут, а третя координата цієї нормалі є додатною.

$$I_1 = \iint_{T_1} (\overline{F(M)} \cdot \overline{n_0}) ds = \frac{1}{3} \iint_{T_1} ((5 - 7x)2 + 3y \cdot 2 + (5 - 6z)) ds.$$



Поверхневі інтеграли будемо розв'язувати методом проектування на одну площину.

Спроектуємо поверхню T_1 на площину xOy в область D_1 , яка являє собою трикутник AOC . Рівняння прямої AB – це лінія перетину площини $2x + 2y + z = 2$ з площиною $z = 0$, тобто пряма AB описується рівнянням $x + y = 1$ (див. рис. 2.19).

Рисунок 2 до прикладу 2.19

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} \iint_{D_1} ((5 - 7x)2 + 3y \cdot 2 + (5 - 6z)) \bigg|_{z=2-2x-2y} \frac{dxdy}{\frac{1}{3}} = \\ &= \iint_{\Delta AOB} (10 - 14x + 6y + (5 - 6(2 - 2x - 2y))) dxdy = \\ &= \iint_{\Delta AOB} (10 - 14x + 6y + 5 - 12 + 12x + 12y) dxdy = \\ &= \iint_{\Delta AOB} (-2x + 18y + 3) dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (-2x + 18y + 3) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 (-2xy + 9y^2 + 3y) \bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (-2x(1-x) + 9(1-x)^2 + 3(1-x)) dx = \\ &= \int_0^1 (-2x + 2x^2 + 9(1-x)^2 + 3(1-x)) dx = \left(-x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 3(1-x)^3 - \frac{3}{2}(1-x^2) \right) \bigg|_0^1 = \\ &= -1 + \frac{2}{3} - 3(0-1) - \frac{3}{2}(0-1) = -\frac{1}{3} + 3 + \frac{3}{2} = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_2}$ до поверхні T_2 .

$$U(M) = z, \quad \overline{\text{grad}} U(M) = \{0; 0; 1\};$$

$$\overline{n_2} = \pm\{0; 0; 1\}; \quad \overline{n_{02}} = \{0; 0; -1\}.$$

З двох можливих знаків для нормалі обираємо знак мінус, оскільки вектор нормалі $\overline{n_2}$ та вісь Oz протилежно напрямлені, тому третя координата вектора нормалі має бути від'ємною.

$$I_2 = \iint_{D_2} (5-6z) \cdot (-1) \Big|_{z=0} dxdy = -5 \int_{\Delta AOB} dxdy = -5 \cdot S_{\Delta AOB} = -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{5}{2}.$$

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_3}$ до поверхні T_3 .

$$\begin{aligned} U(M) &= y; & \overline{\text{grad}} U(M) &= \{0; 1; 0\}; \\ \overline{n_3} &= \pm\{0; 1; 0\}; & \overline{n_{03}} &= \{0; -1; 0\}. \end{aligned}$$

З двох можливих знаків для нормалі обираємо знак мінус, оскільки вектор нормалі $\overline{n_3}$ та вісь Oy протилежно напрямлені, тому друга координата вектора нормалі має бути від'ємною.

$$I_3 = \iint_{D_3} (-3y) \Big|_{y=0} dxdy = 0.$$

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_4}$ до поверхні T_4 .

$$\begin{aligned} U(M) &= x; & \overline{\text{grad}} U(M) &= \{1; 0; 0\}; \\ \overline{n_4} &= \pm\{1; 0; 0\}; & \overline{n_{04}} &= \{-1; 0; 0\}. \end{aligned}$$

З двох можливих знаків для нормалі обираємо знак мінус, оскільки вектор нормалі $\overline{n_4}$ та вісь Ox протилежно напрямлені. З цієї причини перша координата вектора нормалі має бути від'ємною.

$$I_4 = \iint_{D_4} (-1)(5-7x) \Big|_{x=0} dydz = -5 \int_{\Delta BOC} dydz = -5 \cdot S_{\Delta BOC} = -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = -5.$$

Отже,

$$\Pi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{25}{6} - \frac{5}{2} + 0 - 5 = -\frac{10}{3}.$$

В і д п о в і д ь : $-\frac{10}{3}.$

Приклад 2.20. Знайти потік вектора $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$ через зовнішню сторону повної поверхні T прямого кругового циліндра $x^2 + y^2 = 25$, висота якого $H = 16$, радіус основи $R = 5$, віссю циліндра є вісь Oz .

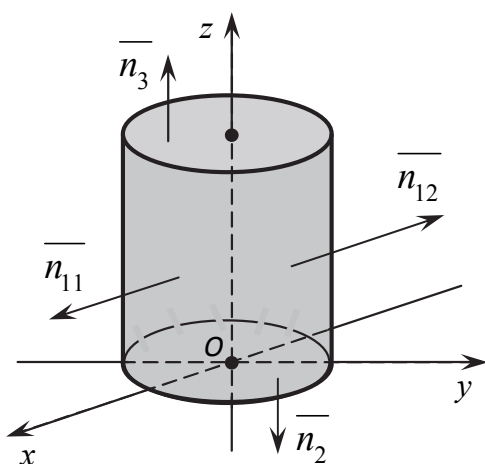


Рисунок 1 до прикладу 2.20

Р о з в ' я з а н н я

Поверхня T складається з трьох поверхонь:

T_1 – бічна поверхня циліндра, задана рівнянням $x^2 + y^2 = 25$;

T_2 – нижня основа циліндра, яка лежить на площині $z = 0$ та являє собою поле круга
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25; \\ z = 0, \end{cases}$$

T_3 – верхня основа циліндра, яка лежить на площині $z = 16$ та являє собою поле круга

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 16, \end{cases} \quad (\text{див. рис. 1}).$$

Тоді

$$\Pi = \iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_3} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Поверхневі інтеграли будемо обчислювати методом проектування на одну площину.

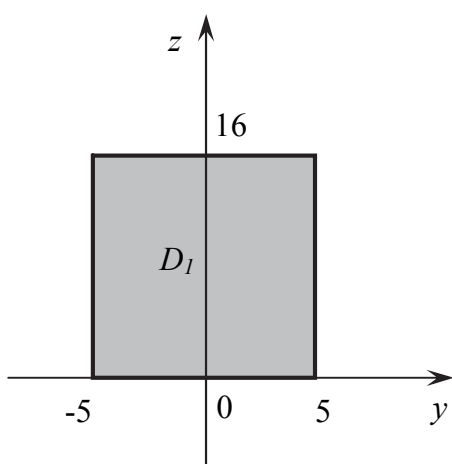


Рисунок 2 до прикладу 2.20

Поверхня T_1 на площину xOy проектується не в область, а в лінію, яка являє собою коло $x^2 + y^2 = 25$. Це означає, що обчислити поверхневий інтеграл по поверхні T_1 проектуванням на площину xOy неможливо. У зв'язку з цим виконаємо проектування на площину yOz .

При цьому у одну і ту саму область D_1 на площину yOz проектується і та частина бічної поверхні, де $x > 0$ і та частина поверхні, де $x < 0$. У зв'язку з цим бічну поверхню T_1 циліндра доведеться поділити на дві поверхні: T_{11} , де $x \geq 0$ та T_{12} , де $x < 0$.

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_{11}}$ до поверхні T_{11} .

$$x^2 + y^2 = 25, x > 0; U(M) = x^2 + y^2 - 25,$$

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \{2x; 2y; 0\}; \quad |\overline{\text{grad}} U(M)| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{25} = 10;$$

$$\overline{n_{11}} = \pm 2\{x; y; 0\}, \quad (\overline{n_{11}})_0 = \left\{ \frac{x}{5}; \frac{y}{5}; 0 \right\}.$$

З двох можливих знаків обрали знак плюс, щоб перша координата вектора нормалі була додатною.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \iint_{T_{11}} (\overline{F(M)} \cdot (\overline{n_{11}})_0) ds = \frac{1}{5} \iint_{T_{11}} (x^2 + y^2) ds = \\ &= \frac{1}{5} \iint_{T_{11}} 25 ds = 5 \iint_{T_{11}} ds = 5 \cdot S_{T_{11}} = 5 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 16 = 400\pi, \end{aligned}$$

як «половина» бічної поверхні циліндра.

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_{12}}$ до поверхні T_{12} , де $x < 0$

$$x^2 + y^2 = 25, x < 0; U(M) = x^2 + y^2 - 25,$$

$$\overline{\text{grad}} U(M) = \{2x; 2y; 0\}, \quad |\overline{\text{grad}} U(M)| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{25} = 10,$$

$$\overline{n_{12}} = \pm \{x; y; 0\}; \quad (\overline{n_{12}})_0 = \{x; y; 0\}.$$

З двох можливих знаків обрали знак плюс, щоб перша координата вектора нормалі була від'ємною, оскільки x за умовою менше за нуль.

$$\begin{aligned} I_{12} &= \iint_{T_{12}} (\overline{F(M)} \cdot (\overline{n_{12}})_0) ds = \frac{1}{5} \iint_{T_{12}} (x^2 + y^2) ds = \\ &= \frac{1}{5} \iint_{T_{12}} 25 ds = 5 \iint_{T_{12}} ds = 5 \cdot S_{T_{12}} = 5 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 16 = 400\pi. \end{aligned}$$

Тоді $I_1 = I_{11} + I_{12} = 800\pi$.

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_2}$ до поверхні T_2 .

$$z = 0, U(M) = z, \quad \overline{\text{grad}} U(M) = \{0; 0; 1\};$$

$$\overline{n_2} = \pm \{0; 0; 1\}, \quad |\overline{n_2}| = 1, \quad \overline{n_{20}} = \{0; 0; -1\}.$$

З двох можливих знаків обрали мінус, щоб третя координата була від'ємною. Тоді

$$I_2 = \iint_{T_2} (\overline{F(M)} \cdot (\overline{n_{20}})) ds = - \iint_{T_2} z ds.$$

Спроектуємо поверхню T_2 на площину xOy у область D_2 , яка являє собою поле круга $x^2 + y^2 \leq 25$.

$$I_2 = - \iint_{D_2} z \Big|_{z=0} dxdy = 0.$$

Знаходимо вектор нормалі $\overline{n_3}$ до поверхні T_3 .

$$z = 16, U(M) = z - 16, \overline{\text{grad}} U(M) = \{0; 0; 1\};$$

$$\overline{n_3} = \pm \{0; 0; 1\}; \quad |\overline{n_3}| = 1, \quad \overline{n_{30}} = \{0; 0; 1\}.$$

З двох можливих знаків обираємо плюс, оскільки третя координата має бути додатною.

$$I_3 = \iint_{T_3} z ds = \iint_{D_3} z \Big|_{z=16} dxdy = 16 S_{D_3} = 16 \cdot \pi \cdot 25 = 400\pi.$$

$$\text{Отже, } \Pi = I_1 + I_2 + I_3 = 800\pi + 0 + 400\pi = 1200\pi.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо звернути увагу на те, що задане векторне поле $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$ збігається з радіус-вектором $\overline{r(M)} = \{x\bar{i}; y\bar{j}; z\bar{k}\}$, то потік можна знайти значно простіше.

$$I_1 = \int_{T_1} (\overline{r(M)} \cdot \overline{n_{10}}) ds,$$

де $\overline{n_{10}}$ – одиничний вектор нормалі до бічної поверхні T_1 . Маємо $\overline{r(M)} \cdot \overline{n_{10}} = \text{пр}_{\overline{n_{10}}} \overline{r(M)} = 5$, оскільки проекція будь-якого радіус-вектора точки на бічній поверхні на одиничний вектор нормалі $\overline{n_{10}}$, який є паралельний площині xOy , дорівнює радіусу основи.

Виходить

$$I_1 = \iint_{T_1} 5 ds = 5 \iint_{T_1} ds = 5 \cdot S_{T_1} = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 16 = 800\pi.$$

Для поверхні T_2 , як було показано раніше, $\overline{n_{20}} = \{0; 0; -1\}$. Тому

$$I_2 = \int_{T_2} (\overline{r(M)} \cdot \overline{n_{20}}) ds.$$

Радіус-вектор будь-якої точки на нижній основі і вектор $\overline{n_{20}}$ перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\text{Отже, } I_2 = 0.$$

Для поверхні T_3 , як було показано раніше, $\overline{n_{30}} = \{0; 0; 1\}$.

$$I_3 = \int_{T_3} (\overline{r(M)} \cdot \overline{n_{30}}) ds.$$

Для будь-якої точки на верхній основі

$$\overline{r(M)} \cdot \overline{n_{30}} = \text{пр}_{\overline{n_{30}}} \overline{r(M)} = H = 16.$$

Тоді

$$I_3 = \iint_{T_3} 16 ds = 16 \iint_{T_3} ds = 16 \cdot S_{T_3} = 16 \cdot \pi \cdot 25 = 400\pi.$$

$$\text{Отже, } \Pi = I_1 + I_2 + I_3 = 800\pi + 0 + 400\pi = 1200\pi.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Потік K через замкнену поверхню виявився додатним числом. Це означає, що всередині замкненої поверхні T потужність джерел перебільшує потужність стоків.

В і д п о в і д ь : 1200π .

2.4 Особливі точки векторного поля

Векторне поле $\overline{F(M)}$ вважається неперервним у точці M_0 векторним полем, якщо $\overline{F(M_0)} \neq 0$ та є неперервною векторна функція $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, а значить, якщо є неперервними функції $P(M); Q(M); R(M)$.

Точка M_0 називається особливою точкою векторного поля $\overline{F(M)}$, якщо не виконується хоч би одна з умов неперервності векторного поля.

Розглянемо векторні поля, зображені на рис. 2.5.

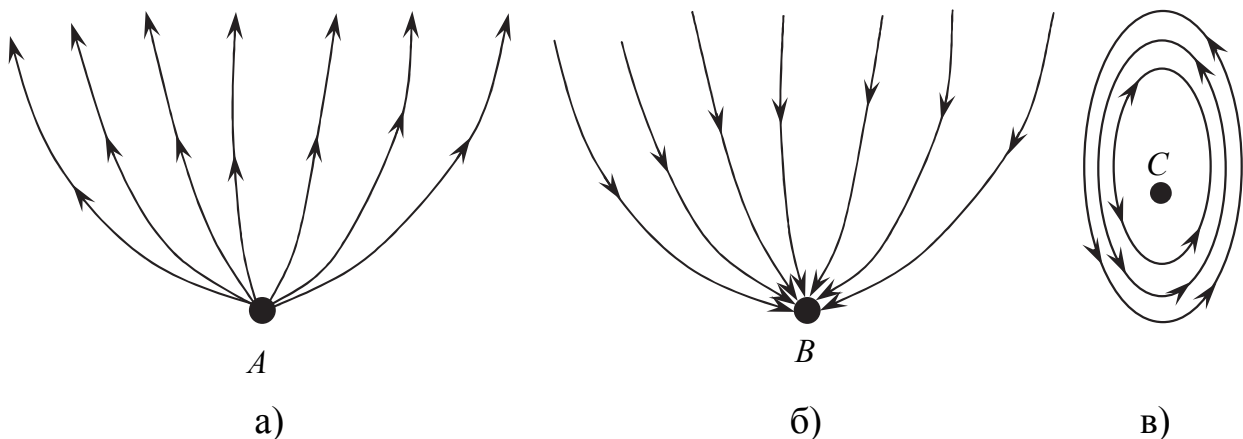


Рисунок 2.5

Завдання векторного поля передбачає, що за допомогою векторної функції $\overline{F}(M)$ у кожній точці M є заданий напрямок векторного поля. У точці A (рис. 2.5, а) визначити напрямок векторного поля $\overline{F}(M)$ неможливо, тому що з цієї точки виходить більше ніж одна векторна лінія. Значить, точка A є особливою точкою векторного поля. Аналогічно, у точці B (рис. 2.5, б) також не можна визначити напрямок векторного поля, оскільки у цю точку приходять більше ніж одна векторна лінія. Точка B є особливою точкою векторного поля. Нарешті, точка C (рис. 2.5, в) також є особливою, оскільки у цій точці неможливо визначити напрямок векторного поля у зв'язку з тим, що через цю точку не проходить жодної векторної лінії.

У точках типу точки A виникають векторні лінії. Такі точки називаються джерелами векторного поля.

У точках типу точки B зникають векторні лінії. Такі точки називаються стоками векторного поля.

Точки типу C характеризуються тим, що навколо таких точок виникають вихори або ротор векторного поля. Такі точки називаються вихровими точками.

2.5 Дивергенція векторного поля

Нехай $\overline{V}(M)$ – поле швидкостей течії рідини, а T – замкнена поверхня. Знайдемо потік Π векторного поля $\overline{V}(M)$ через поверхню T .

Якщо $\Pi > 0$, то це означає, що зсередини поверхні T витікає рідини більш, ніж втікає усередину поверхні зовні. Це означає, що усередині поверхні T є точки, звані джерелами, які виділяють рідину.

Якщо $\Pi < 0$, то це означає, що зовні через поверхню T втікає рідини більш, ніж витікає зсередини. Це означає, що усередині поверхні T є точки, звані стоками, які поглинають рідину.

Якщо $\Pi = 0$, то це означає, що джерела та стоки врівноважують одне одного або взагалі відсутні.

Аналогічні твердження поширюються і на будь-які інші векторні поля.

Наявність джерел та стоків у векторному полі, а також їхня потужність є важливими характеристиками векторних полів.

Джерела та стоки бувають ізольовані та скупчені.

Для дослідження наявності джерела або стока у певній точці доцільно побудувати замкнену поверхню, приміром – сферу, навколо досліджуваної точки та обчислити потік через цю замкнену поверхню. Якщо джерела та стоки

не ізольовані, а скупчені, то усередині замкненої поверхні окрім досліджуваної точки може бути безліч інших точок, в яких знаходяться джерела та стоки, що заважає дослідженню джерела або стока, які знаходяться у заданій точці. У такому випадку розглядають границю відношення потоку через замкнену поверхню T , що обмежує точку M , до об'єму V тіла Ω , яке обмежене поверхнею T за умови, що тіло Ω стягується у точку M .

В и з н а ч е н н я . Дивергенцією або розбіжністю векторного поля $\overline{F(M)}$ у точці M називається границя відношення потоку вектора $\overline{F(M)}$ через замкнену поверхню T , що обмежує точку M до об'єму V тіла, обмеженого замкненою поверхнею T за умови, що діаметр d_T поверхні T прямує до нуля. При цьому використовується позначення

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \lim_{d_T} \frac{\oiint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}}{V}. \quad (2.24)$$

Дивергенція векторного поля $\overline{F(M)}$ є скалярною величиною. Дивергенція $\overline{F(M)}$ визначає потужність джерела або стоку, який розміщений у точці M . Якщо $\operatorname{div} \overline{F(M)} > 0$, то у точці M розміщено джерело, а якщо $\operatorname{div} \overline{F(M)} < 0$, то у точці M розміщено сток векторного поля. Якщо $\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0$, то у точці M ані джерела, ані стоків немає.

Теорема. Якщо векторна функція $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ є диференційовною функцією, а частинні похідні першого порядку $\frac{\partial P(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q(M)}{\partial y}; \frac{\partial R(M)}{\partial z}$ є неперервними функціями, то у точці M існує дивергенція векторного поля $\overline{F(M)}$, що знаходиться за формулою

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Д о в е д е н н я

Користуючись формулою Остроградського-Гаусса, подамо потік вектора $\overline{F(M)}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi &= \oiint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \oiint_T (P(M) \cos \alpha + Q(M) \cos \beta + R(M) \cos \gamma) ds = \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

де T – замкнена поверхня, усередині якої знаходиться точка M , а Ω – тіло, обмежене поверхнею T .

Застосовуючи до потрібного інтеграла теорему про середнє значення, отримаємо

$$\Pi = \left(\frac{\partial P(C)}{\partial x} + \frac{\partial Q(C)}{\partial y} + \frac{\partial R(C)}{\partial z} \right) V,$$

де C – деяка точка усередині поверхні T , а V – об'єм тіла Ω , обмеженого замкненою поверхнею T . Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{F(M)} &= \lim_{d_T \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial P(C)}{\partial x} + \frac{\partial Q(C)}{\partial y} + \frac{\partial R(C)}{\partial z} \right) V}{V}; \\ \operatorname{div} \overline{F(M)} &= \lim_{d_T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial P(C)}{\partial x} + \frac{\partial Q(C)}{\partial y} + \frac{\partial R(C)}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Якщо поверхня T починає стягуватись у точку, то точки C та M збігаються. Остаточно маємо

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \quad (2.25)$$

Користуючись формулою для визначення дивергенції векторного поля можемо надати векторну формуліровку теорему Остроградського-Гаусса.

Теорема. Потік векторного поля $\overline{F(M)}$ зсередини замкненої поверхні T дорівнює потрібному інтегралу по об'єму тіла Ω , що обмежене поверхнею T , від дивергенції векторного поля $\overline{F(M)}$, тобто

$$\oiint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overline{F(M)} dV. \quad (2.26)$$

2.6 Властивості дивергенції векторного поля

1. Якщо диференційовними векторними функціями визначені векторні поля $\overline{F_1(M)}$ та $\overline{F_2(M)}$, то справедливою є формула

$$\operatorname{div}(\overline{F_1(M)} \pm \overline{F_2(M)}) = \operatorname{div} \overline{F_1(M)} \pm \operatorname{div} \overline{F_2(M)}.$$

Д о в е д е н н я

Якщо

$$\overline{F_1(M)} = \{P_1(M); Q_1(M); R_1(M)\}, \quad \overline{F_2(M)} = \{P_2(M); Q_2(M); R_2(M)\},$$

то

$$\overline{F_1(M)} \pm \overline{F_2(M)} = \{P_1(M) \pm P_2(M); Q_1(M) \pm Q_2(M); R_1(M) \pm R_2(M)\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overline{F_1(M)} \pm \overline{F_2(M)}) &= \\ \frac{\partial}{\partial x}(P_1(M) \pm P_2(M)) + \frac{\partial}{\partial y}(Q_1(M) \pm Q_2(M)) + \frac{\partial}{\partial z}(R_1(M) \pm R_2(M)) &= \\ = \frac{\partial P_1(M)}{\partial x} \pm \frac{\partial P_2(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q_1(M)}{\partial y} \pm \frac{\partial Q_2(M)}{\partial y} + \frac{\partial R_1(M)}{\partial z} \pm \frac{\partial R_2(M)}{\partial z} &= \\ \left(\frac{\partial P_1(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q_1(M)}{\partial y} + \frac{\partial R_1(M)}{\partial z} \right) \pm \left(\frac{\partial P_2(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q_2(M)}{\partial y} + \frac{\partial R_2(M)}{\partial z} \right) &= \\ = \operatorname{div} \overline{F_1(M)} \pm \operatorname{div} \overline{F_2(M)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\operatorname{div}(\overline{F_1(M)} \pm \overline{F_2(M)}) = \operatorname{div} \overline{F_1(M)} \pm \operatorname{div} \overline{F_2(M)}. \quad (2.27)$$

2. Якщо диференційовною векторною функцією визначене векторне поле $\overline{F(M)}$, а k – будь-яка стала, то справедливою є формула

$$\operatorname{div}(k \overline{F(M)}) = k \operatorname{div} \overline{F(M)}.$$

Д о в е д е н н я

Якщо $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то $k \overline{F(M)} = \{kP(M); kQ(M); kR(M)\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \overline{F(M)}) &= \frac{\partial(kP(M))}{\partial x} + \frac{\partial(kQ(M))}{\partial y} + \frac{\partial(kR(M))}{\partial z} = \\ = k \frac{\partial P(M)}{\partial x} + k \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + k \frac{\partial R(M)}{\partial z} &= k \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) = k \operatorname{div} \overline{F(M)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\operatorname{div}(k \overline{F(M)}) = k \operatorname{div} \overline{F(M)}. \quad (2.28)$$

3. Якщо задані скалярне поле диференційовною функцією $U = U(M)$ та векторне поле диференційовною функцією $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то справедливою є формула

$$\operatorname{div}(U(M) \overline{F(M)}) = U(M) \operatorname{div} \overline{F(M)} + \overline{F(M)} \cdot \overline{\operatorname{grad} U(M)}.$$

Д о в е д е н н я

Якщо

$$\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\},$$

то

$$U(M) \overline{F(M)} = \{U(M)P(M); U(M)Q(M); U(M)R(M)\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(U(M)\overline{F(M)}) &= \frac{\partial(U(M)P(M))}{\partial x} + \frac{\partial(U(M)Q(M))}{\partial y} + \frac{\partial(U(M)R(M))}{\partial z} = \\ &= P(M)\frac{\partial U(M)}{\partial x} + U(M)\frac{\partial P(M)}{\partial x} + Q(M)\frac{\partial U(M)}{\partial y} + \\ &+ U(M)\frac{\partial Q(M)}{\partial y} + R(M)\frac{\partial U(M)}{\partial z} + U(M)\frac{\partial R(M)}{\partial z} = \\ &= U(M)\left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}\right) + \\ &+ \left(P(M)\frac{\partial U(M)}{\partial x} + Q(M)\frac{\partial U(M)}{\partial y} + R(M)\frac{\partial U(M)}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Оскільки $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, а

$$\overline{\operatorname{grad} U(M)} = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\},$$

то

$$P(M)\frac{\partial U(M)}{\partial x} + Q(M)\frac{\partial U(M)}{\partial y} + R(M)\frac{\partial U(M)}{\partial z} = \overline{F(M)} \cdot \overline{\operatorname{grad} U(M)}.$$

Отже,

$$\operatorname{div}(U(M)\overline{F(M)}) = U(M)\operatorname{div}\overline{F(M)} + \overline{F(M)} \cdot \overline{\operatorname{grad} U(M)}. \quad (2.29)$$

Приклади до пунктів 2.5 та 2.6

Приклад 2.21. Знайти дивергенцію векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$.

Р о з в ' я з а н н я

Дивергенцію векторного поля знаходимо за формулою (2.25), а саме,

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

У даному випадку

$$P(M) = x; \quad Q(M) = y; \quad R(M) = z.$$

Тоді

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial R(M)}{\partial z} = 1. \quad \operatorname{div} \overline{F(M)} = 1 + 1 + 1, \quad \operatorname{div} \overline{F(M)} = 3.$$

В і д п о в і д ь : 3.

Приклад 2.22. Знайти дивергенцію векторного поля $\overline{F(M)} = c\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки $M(x; y; z)$, а $c = \text{const}$.

Р о з в ' я з а н н я

$$\overline{F(M)} = \{cx; cy; cz\}. \quad P(M) = cx; \quad Q(M) = cy; \quad R(M) = cz.$$

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = c; \quad \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = c; \quad \frac{\partial R(M)}{\partial z} = c. \quad \text{div } \overline{F(M)} = 3c.$$

В і д п о в і д ь : $3c$.

Приклад 2.23. Знайти дивергенцію векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; y^2; z^3\}$ та обчислити її значення у точці $M_0(-2; 4; 5)$.

Р о з в ' я з а н н я

Так як $P(M) = x; \quad Q(M) = y^2; \quad R(M) = z^3$, то

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial R(M)}{\partial z} = 3z^2.$$

Тому $\text{div } \overline{F(M)} = 1 + 2y + 3z^2$.

$$\text{div } \overline{F(M_0)} = 1 + 8 + 75, \quad \text{div } \overline{F(M_0)} = 84.$$

В і д п о в і д ь : 84 .

Приклад 2.24. Задане скалярне поле $U(M) = xy^2z^3 + x^2y^3z + x^3yz^2$. Знайти $\text{div } \overline{\text{grad } U(M)}$ та обчислити її значення у точці $M_0(-1; 1; 0)$.

Р о з в ' я з а н н я

Так як

$$\overline{\text{grad } U(M)} = \{y^2z^3 + 2xy^3z + 3x^2yz^2; \quad 2xyz^3 + 3x^2y^3z + x^3z^2; \quad 3xy^2z^2 + x^2y^3 + 2x^3yz\},$$

то $\text{div } \overline{\text{grad } U(M)} = (2y^3z + 6xyz^2) + (2xz^3 + 6x^2yz) + (6xy^2z + 2x^3y)$.

$$\text{div } \overline{\text{grad } U(M_0)} = -2.$$

В і д п о в і д ь : -2 .

Приклад 2.25. Магнітне поле, утворене електричним струмом силою I , що протікає по нескінченному провіднику, визначається формулою

$$\overline{H(x; y)} = 2I \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2}; -\frac{y}{x^2 + y^2} \right\}.$$

Знайти $\text{div } \overline{H(x; y)}$.

Р о з в ' я з а н н я

Так як $P(M) = \frac{2Ix}{x^2 + y^2}$; $Q(M) = -\frac{2Iy}{x^2 + y^2}$, то

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = 2I \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{x^2 + y^2} = 2I \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = -2I \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 2I \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}.$$

Тоді $\operatorname{div} \overline{H(x; y)} = 2I \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} + 2I \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} = 4I \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}.$

В і д п о в і д ь : $4I \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}.$

Приклад 2.26. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{5 - 7x; 3y; 5 - 6z\}$ через зовнішню сторону поверхні T піраміди, утвореної координатними площинами та площиною $2x + 2y + z = 2$, за допомогою теореми Остроградського-Гаусса.

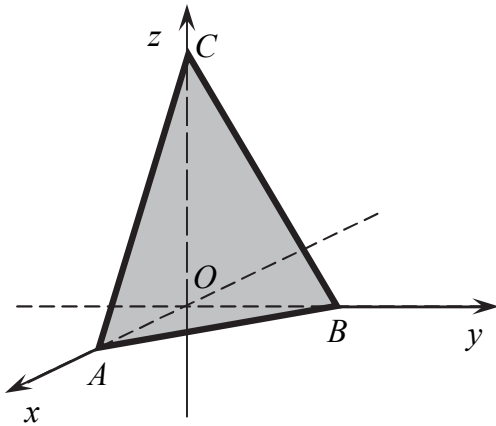


Рисунок до прикладу 2.26

Р о з в ' я з а н н я

Скористуємось формулою (2.26), а

саме

$$\oint_T \overline{F(M)} \cdot ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overline{F(M)} dV.$$

Так як $\overline{F(M)} = \{5 - 7x; 3y; 5 - 6z\}$, то

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = -7 + 3 - 6 = -10.$$

Тоді

$$\Pi = \iiint_{\Omega} (-10) dV = -10V_{\text{пір}} = -10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AO \parallel OB \parallel OC| = -\frac{10}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -\frac{10}{3}.$$

В і д п о в і д ь : $-\frac{10}{3}.$

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте розв'язки прикладів 2.19 та 2.26.

Приклад 2.27. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$ через зовнішню сторону повної поверхні T прямого кругового циліндра $x^2 + y^2 = 25$, висота якого $H = 16$, радіус основи $R = 5$, віссю циліндра є вісь Oz .

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки поверхня T є замкненою, то доцільно користуватись теоремою Остроградського-Гаусса.

Так як $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$, то $\operatorname{div} \overline{F(M)} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Тоді

$$\Pi = \iiint_{\Omega} 3dV = 3V_{\text{цил}} = 3 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 16 = 1200\pi.$$

В і д п о в і д ь : 1200π .

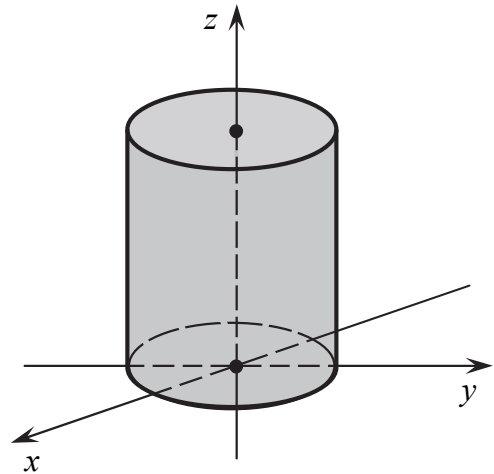


Рисунок до прикладу 2.27

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте розв'язки прикладів 2.20 та 2.27.

2.7 Циркуляція векторного поля

В и з н а ч е н н я . *Циркуляцією векторного поля $\overline{F(M)}$ по замкнутому контуру Γ називається криволінійний інтеграл другого роду від неперервної векторної функції $\overline{F(M)}$ по замкнутому контуру Γ . При цьому використовується позначення*

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}. \quad (2.30)$$

З'ясуємо фізичний зміст векторного поля.

Нехай векторне поле $\overline{V_o(M)} = \{V_o; 0; 0\}$ – це векторне поле швидкостей, що задає поступальний рух твердого тіла у додатному напрямку осі Ox . У такому векторному полі відсутній обертальний рух. Векторні лінії цього векторного поля паралельні осі Ox .

Знайдемо циркуляцію векторного поля $\overline{V_o(M)}$ уздовж будь-якого замкнутого контура Γ (рис. 2.6).

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \overline{V_o(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{AEB} \overline{V_o(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{BDA} \overline{V_o(M)} \cdot \overline{dl}. \quad (2.30)$$

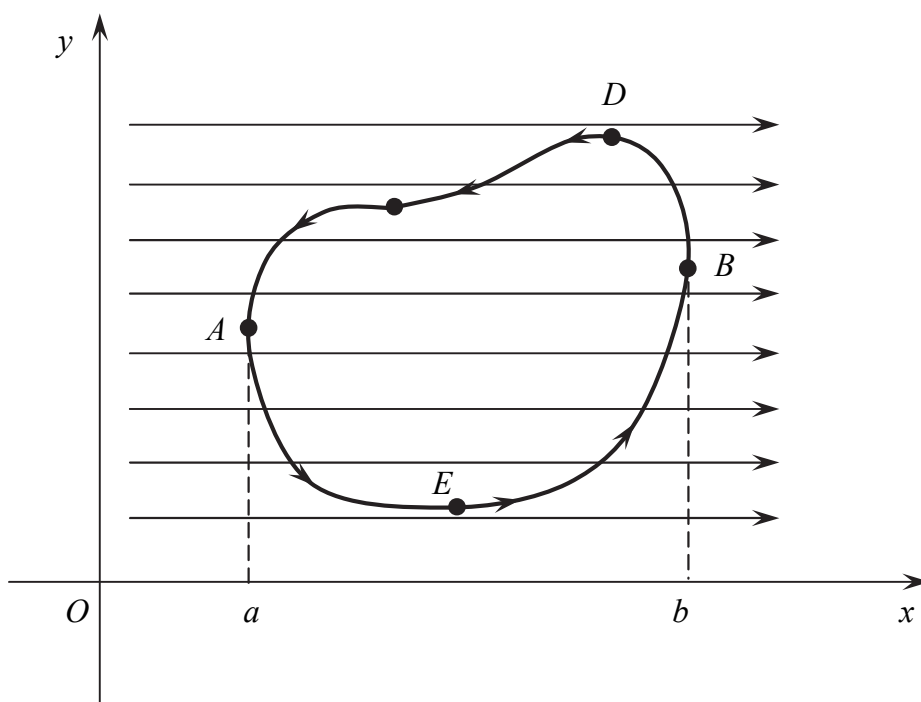


Рисунок 2.6

Оскільки

$$\overline{V_o(M)} \cdot \overline{dl} = V_o dx + 0 dy + 0 dz = V_o dx,$$

то

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} V_o dx = V_o \oint_{\Gamma} dx = V_o \left(\int_{AEB} dx + \int_{BDA} dx \right) = V_o \left(\int_{AEB} dx - \int_{ADB} dx \right) = V_o \left(\int_a^b dx - \int_a^b dx \right) = 0.$$

Отже, $\mathcal{C} = 0$.

Розглянемо ще одне векторне поле, а саме, векторне поле лінійних

швидкостей $\overline{V(M)} = \{-\omega y; \omega x\}$, де ω – кутова швидкість тіла. Таке векторне поле описує обертальний рух твердого тіла навколо осі Oz . Векторні лінії цього векторного поля являють собою концентричні кола, які розміщені у площинах, паралельних площині xOy (рис. 2.7).

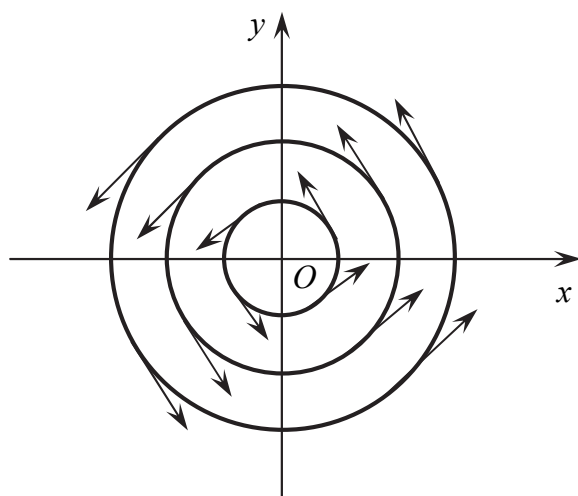


Рисунок 2.7

Знайдемо циркуляцію означеного векторного поля по будь-якому замкненому контуру Γ (рис. 2.8), який обмежує вихрову точку O та лежить у площині xOy , що є перпендикулярною до осі обертання.

Тоді

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{\Gamma} (-\omega y) dx + \omega x dy = -\omega \int_{\Gamma} y dx - x dy .$$

До криволінійного інтеграла по замкненому контуру Γ застосуємо теорему Стокса, зважаючи на те, що нормаль до області D , обмеженої контуром Γ напрямлена у сторону зростання осі Ox , тобто $\overline{n_0} = \{0; 0; 1\}$.

$$\begin{aligned} -\omega \int_{\Gamma} y dx - x dy &= \\ &= -\omega \iint_D \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) ds \end{aligned}$$

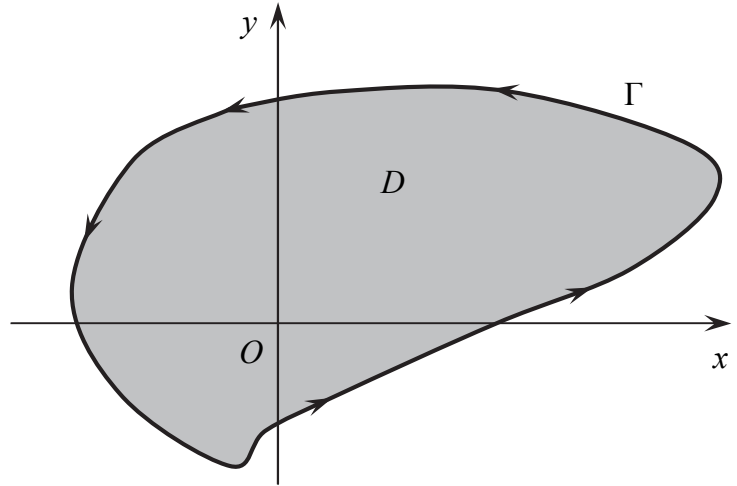


Рисунок 2.8

або

$$\Pi = \omega \iint_D 2 dx dy = 2\omega \iint_D dx dy = 2\omega S_D ,$$

де S_D – площа області D .

Отже, $\Pi = 2\omega S_D \neq 0$.

Якщо припустити, що контур Γ лежить у площині, яка не паралельна площині xOy , та утворює з нею деякий кут $\psi \neq \frac{\pi}{2}$, то тоді $\Pi = 2\omega S_D \cos \psi \neq 0$.

Аналізуючи розглянуті приклади, доходимо висновку, що циркуляція векторного поля характеризує його обертальну властивість.

Векторне поле, таким чином, має обертальну властивість на замкненому контурі Γ , якщо цей контур обмежує вихрову точку. Як виходить з останнього прикладу, величина циркуляції залежить від площі області, обмеженої замкненим контуром Γ . Тому було б доцільно контур Γ стягнути у точку, що збігається з вихровою точкою, для того, щоб знайти циркуляцію у точці, але у такому разі не можна обчислити криволінійний інтеграл.

У зв'язку з цим для характеристики вихрової точки, в якій народжуються вихори векторного поля, розглядають не саму циркуляцію по замкненому контуру, який цю точку обмежує, а густину циркуляції у вихровій точці.

Приклади до пункту 2.7

Приклад 2.28. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; -2z^2; y\}$ уздовж лінії перетину площини $x + 2y - z + 2 = 0$ та циліндричної поверхні $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ за умови, що обхід контура відбувається у додатному напрямку відносно нормалі $\bar{n} = -\{1; 2; -1\}$ до заданої площини.

Р о з в ' я з а н н я

Складаємо рівняння лінії перетину:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0; \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

Для зручності рівняння еліпса запишемо у параметричній формі:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0; \\ x = 4 \cos t; \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$$

де $t \in [0; 2\pi]$.

Звідси виходить:

$$\begin{cases} x = 4 \cos t; \\ y = 3 \sin t; \\ z = 4 \cos t + 6 \sin t + 2, \end{cases}$$

де $t \in [0; 2\pi]$.

За формулою (2.30) маємо

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot d\bar{l} = \oint_{\Gamma} x dx - 2z^2 dy + y dz = \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos t (-4 \sin t) - 2(4 \cos t + 6 \sin t + 2)^2 3 \cos t + 3 \sin t \cdot (-4 \sin t + y \cos t)) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (96 \cos^2 t + 12 \sin^2 t) dt = -12 \int_0^{2\pi} (1 + 7 \cos^2 t) dt = -12 \left|_0^{2\pi} - 42 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \right. \\ &= -24\pi - 42t + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = -24\pi - 84\pi = -108\pi. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь : -108π .

Приклад 2.29. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; -2z^2; y\}$ по контуру прямокутника, утвореного прямими $x=2, x=4, y=3, y=6$ за умови, що обхід контура відбувається у додатному напрямку.

Р о з в ' я з а н н я

Контур інтегрування

$$\Gamma = AB \cup BC \cup CD \cup DA.$$

Тоді

$$\text{Ц} = \int_{AB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{BC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{CD} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{DA} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}.$$

Знаходимо криволінійні інтеграли другого роду, з яких складається циркуляція.

$$I_1 = \int_{AB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{AB} (x+4) dx + (3y-1) dy.$$

Оскільки рівняння прямої $AB \in y=3$, то $dy=0$. Тоді

$$I_1 = \int_2^4 (x+4) dx = \frac{1}{2}(x+4)^2 \Big|_2^4 = \frac{1}{2}(64-36) = 14.$$

$$I_2 = \int_{BC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{BC} (x+4) dx + (3y-1) dy.$$

Оскільки рівняння прямої $BC \in x=4$, то $dx=0$. Тоді

$$I_2 = \int_3^6 (3y-1) dy = \frac{1}{6}(3y-1)^2 \Big|_3^6 = \frac{1}{6}(289-64) = \frac{225}{6}.$$

$$I_3 = \int_{CD} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{CD} (x+4) dx + (3y-1) dy.$$

Оскільки рівняння прямої $CD \in y=6$, то $dy=0$. Тоді

$$I_3 = \int_4^2 (x+4) dx = \frac{1}{2}(x+4)^2 \Big|_4^2 = \frac{1}{2}(36-64) = -14.$$

$$I_4 = \int_{DA} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{DA} (x+4) dx + (3y-1) dy.$$

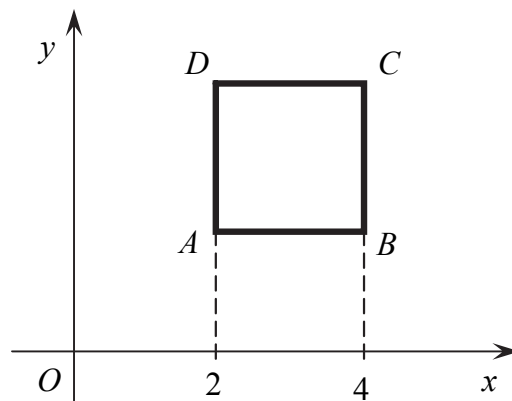


Рисунок до прикладу 2.29

Оскільки рівняння прямої $DA \in x = 2$, то $dx = 0$. Тоді

$$I_4 = \int_6^3 (3y-1) dy = \frac{1}{6} (3y-1)^2 \Big|_3^6 = \frac{1}{6} (64-289) = -\frac{225}{6}.$$

Остаточно маємо

$$\Pi = 14 + \frac{225}{6} - 14 - \frac{225}{6} = 0.$$

$$\Pi = 0.$$

В і д п о в і д ь : 0.

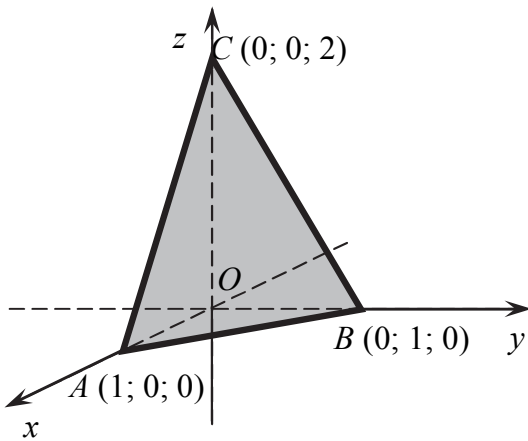


Рисунок до прикладу 2.30

Приклад 2.30. Знайти циркуляцію

векторного поля $\overline{F(M)} = \{5 - 7x; 3y; 5 - 6z\}$ по контуру трикутника, що утворюється при перетині площини $2x + 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами. Напрямок обходу контура додатний.

Р о з в ' я з а н н я

Контур $\Gamma = AB \cup BC \cup CA$.

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{AB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{BC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{CA} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}.$$

Знаходимо інтеграли, з яких складається циркуляція:

$$I_1 = \int_{AB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{AB} (5 - 7x) dx + 3y dy + (5 - 6z) dz.$$

Рівняння прямої AB : $x + y = 1$, на прямій AB $dz = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{AB} (5 - 7x) dx + 3y dy = \int_1^0 (5 - 7x) dx + 3 \int_0^1 y dy = \\ &= -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} (5 - 7x)^2 \Big|_1^0 + \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{14} (25 - 4) + \frac{3}{2} (1 - 0) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{BC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{BC} (5 - 7x) dx + 3y dy + (5 - 6z) dz.$$

Рівняння прямої BC : $2y + z - 2 = 1$, на прямій BC $dx = 0$. Тоді

$$I_2 = \int_{BC} 3ydy + (5-6z)dz = 3 \int_1^0 ydy + \int_0^2 (5-6z)dz =$$

$$= \frac{3}{2}y^2 \Big|_1^0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}(5-6z)^2 \Big|_0^2 = \frac{3}{2}(0-1) - \frac{1}{12}(49-25) = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2}.$$

$$I_3 = \int_{CA} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{CA} (5-7x)dx + 3ydy + (5-6z)dz.$$

Рівняння прямої CA : $2x + z - 2 = 0$, на прямій CA $dy = 0$. Тоді

$$I_3 = \int_0^1 (5-7x)dx + \int_2^0 (5-6z)dz =$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}(5-7x)^2 \Big|_1^0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}(5-6z)^2 \Big|_2^0 = -\frac{1}{14}(4-25) - \frac{1}{12}(25-49) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

Остаточнo маємо: $\Pi = 0 - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$; $\Pi = 0$.

В і д п о в і д ь : $\Pi = 0$.

Приклад 2.31. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)} = \left\{ \frac{y}{3}; -3x; x \right\}$

уздовж контура Γ , якщо

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t; \\ z = -2 \cos t - 2 \sin t + 1, \end{cases}$$

де $t \in [0; 2\pi]$.

Р о з в ' я з а н н я

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \oint_{\Gamma} \frac{1}{3} ydx - 3x dy + x dz.$$

Оскільки $dx = -2 \sin t dt$; $dy = 2 \cos t dt$; $dz = (2 \sin t - 2 \cos t) dt$,

то

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \sin t \cdot (-2 \sin t) - 3 \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t + 2 \cos t \cdot (2 \sin t - 2 \cos t) \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3} \sin^2 t - 12 \cos^2 t + 4 \sin t \cos t - 4 \cos^2 t \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3} \sin^2 t - 16 \cos^2 t + 2 \sin 2t \right) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) - 16 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt + 2 \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{26}{3} - \frac{22}{3} \cos 2t \right) dt - \cos 2t \Big|_0^{2\pi} = -\frac{26}{3} t \Big|_0^{2\pi} - \frac{11}{3} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = -\frac{52}{3} \pi
\end{aligned}$$

Отже, $\text{Ц} = -\frac{52}{3} \pi$.

В і д п о в і д ь : $-\frac{52}{3} \pi$.

2.8 Ротор векторного поля

Нехай $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ – задане векторне поле; T – деяка поверхня у цьому векторному полі; Γ – замкнений контур, що обмежує поверхню T та обходиться у додатному напрямку. На поверхні T візьмемо точку M , проведемо через неї дотичну площину до поверхні T та побудуємо у цій точці нормаль $\overline{n(M)}$ напрямлену так, щоб з кінця цієї нормалі рух по замкненому контуру Γ спостерігався як рух проти годинникової стрілки. Такий напрямок нормалі називається додатним.

З точки M проведемо ще один вектор, проекція якого на напрямок нормалі $\overline{n(M)}$ визначається границею. $\lim_{d_T \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}}{S}$.

В и з н а ч е н н я . Ротором або вихором векторного поля $\overline{F(M)}$ називається такий вектор, проекція якого на напрямок одиничного вектора нормалі $\overline{n_0(M)}$ до поверхні T , обмеженої замкненим контуром Γ , дорівнює границі відношення циркуляції векторного поля $\overline{F(M)}$ по замкненому контуру Γ до площі поверхні T , якщо контур Γ стягується у точку. При цьому використовується позначення

$$\lim_{d_T \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}}{S} = \text{пр}_{\overline{n_0(M)}} \overline{\text{rot } F(M)}. \quad (2.31)$$

Як виходить з визначення, вектор $\overline{\text{rot } F(M)}$ показує напрямок, в якому відбувається обертання векторного поля $\overline{F(M)}$, коли контур Γ стягується у точку.

Величина $\text{pr}_{\overline{n_0(M)}} \overline{\text{rot} F(M)}$ дорівнює поверхневій густині циркуляції векторного поля у точці M . Найбільшого значення густина циркуляції досягає у випадку, коли напрямок вектора $\overline{\text{rot} F(M)}$ збігається з напрямком нормалі $\overline{n_0(M)}$ до поверхні.

Вектор $\overline{\text{rot} F(M)}$ векторного поля $\overline{F(M)}$ утворює нове векторне поле. Його векторні лінії називаються *вихровими лініями векторного поля $\overline{F(M)}$* .

Теорема. Якщо векторна функція $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ є диференційовною функцією, а частинні похідні першого порядку $\frac{\partial P(M)}{\partial y}, \frac{\partial P(M)}{\partial z}, \frac{\partial Q(M)}{\partial x}, \frac{\partial Q(M)}{\partial z}, \frac{\partial R(M)}{\partial x}, \frac{\partial R(M)}{\partial y}$ є неперервними функціями, то у точці M існує ротор векторного поля $\overline{F(M)}$, який визначається формулою

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \left\{ \frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}, \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x}, \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\}.$$

Д о в е д е н н я

Користуючись формулою Стокса, подамо циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi = \oint_{\Gamma} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = \iint_T \left(\left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) ds, \end{aligned}$$

де T – поверхня, обмежена замкненим контуром Γ .

Застосовуючи до поверхневого інтеграла теорему про середнє значення, отримаємо

$$\Pi = \left(\left(\frac{\partial R(C)}{\partial y} - \frac{\partial Q(C)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P(C)}{\partial z} - \frac{\partial R(C)}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q(C)}{\partial x} - \frac{\partial P(C)}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) \cdot S,$$

де C – деяка точка на поверхні T , а S – площа поверхні T .

Тоді

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\overline{n_0(M)}} \overline{\text{rot} F(M)} = \\ = \lim_{d_T \rightarrow 0} \frac{\left(\left(\frac{\partial R(C)}{\partial y} - \frac{\partial Q(C)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P(C)}{\partial z} - \frac{\partial R(C)}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q(C)}{\partial x} - \frac{\partial P(C)}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) \cdot S}{S}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{пр}_{\overline{n_0(M)}} \overline{\text{rot} F(M)} = \\ & = \lim_{d_T \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\partial R(C)}{\partial y} - \frac{\partial Q(C)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P(C)}{\partial z} - \frac{\partial R(C)}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q(C)}{\partial x} - \frac{\partial P(C)}{\partial y} \right) \cos \gamma \right). \end{aligned}$$

Якщо поверхня T стягується у точку, то точки C та M також збігаються.

Отже,

$$\begin{aligned} & \text{пр}_{\overline{n_0(M)}} \overline{\text{rot} F(M)} = \\ & = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Як виходить з формули (2.32) проекція вектора $\overline{\text{rot} F(M)}$ на напрямок одиничного вектора нормалі $\overline{n_0(M)}$ дорівнює сумі добутків однойменних координат двох векторів, одним з яких є вектор $\overline{n_0(M)} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$, а другим вектором є вектор

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \left\{ \frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\}. \quad (2.33)$$

Запишемо формулу (2.33) у вигляді

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (2.34)$$

Розглянемо тепер символічний визначник

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix} = \\ & = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \bar{k}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

У цьому визначнику другий рядок містить не певні величини, а символічне позначення операцій, які необхідно застосувати до елементів третього рядка.

Порівнюючи формули (2.34) та (2.35), отримаємо зручну у користуванні формулу для обчислювання ротора

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix}. \quad (2.36)$$

Користуючись формулою (2.33) для визначення ротора векторного поля, можемо надати векторну формулювання теорему Стокса.

Теорема. Потік ротора векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню T , обмежену контуром Γ , дорівнює циркуляції векторного поля $\overline{F(M)}$ по замкненому контуру Γ , тобто

$$\iint_T \overline{\text{rot } F(M)} \cdot \overline{ds} = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}. \quad (2.37)$$

2.9 Властивості ротора векторного поля

1. Якщо диференційовними векторними функціями визначені векторні поля $\overline{F_1(M)}$ та $\overline{F_2(M)}$, то справедливою є формула

$$\overline{\text{rot}(F_1(M) \pm F_2(M))} = \overline{\text{rot} F_1(M)} \pm \overline{\text{rot} F_2(M)}.$$

Д о в е д е н н я

Якщо $\overline{F_1(M)} = \{P_1(M); Q_1(M); R_1(M)\}$, $\overline{F_2(M)} = \{P_2(M); Q_2(M); R_2(M)\}$, то $\overline{F_1(M) \pm F_2(M)} = \{P_1(M) \pm P_2(M); Q_1(M) \pm Q_2(M); R_1(M) \pm R_2(M)\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}(F_1(M) \pm F_2(M))} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(R_1(M) \pm R_2(M)) - \frac{\partial}{\partial z}(Q_1(M) \pm Q_2(M)); \right. \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z}(P_1(M) \pm P_2(M)) - \frac{\partial}{\partial x}(R_1(M) \pm R_2(M)); \frac{\partial}{\partial x}(Q_1(M) \pm Q_2(M)) - \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y}(P_1(M) \pm P_2(M)) \right\} = \left\{ \left(\frac{\partial R_1(M)}{\partial y} \pm \frac{\partial R_2(M)}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial Q_1(M)}{\partial z} \pm \frac{\partial Q_2(M)}{\partial z} \right); \right. \\ &\quad \left(\frac{\partial P_1(M)}{\partial z} \pm \frac{\partial P_2(M)}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial R_1(M)}{\partial x} \pm \frac{\partial R_2(M)}{\partial x} \right); \\ &\quad \left(\frac{\partial Q_1(M)}{\partial x} \pm \frac{\partial Q_2(M)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial P_1(M)}{\partial y} \pm \frac{\partial P_2(M)}{\partial y} \right) \Big\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial R_1(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q_1(M)}{\partial z}; \frac{\partial P_1(M)}{\partial z} - \frac{\partial R_1(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q_1(M)}{\partial x} - \frac{\partial P_1(M)}{\partial y} \right\} \pm \\ &\pm \left\{ \frac{\partial R_2(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q_2(M)}{\partial z}; \frac{\partial P_2(M)}{\partial z} - \frac{\partial R_2(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q_2(M)}{\partial x} - \frac{\partial P_2(M)}{\partial y} \right\} = \\ &= \overline{\text{rot} F_1(M)} \pm \overline{\text{rot} F_2(M)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{rot}(F_1(M) \pm F_2(M))} = \overline{\text{rot} F_1(M)} \pm \overline{\text{rot} F_2(M)}. \quad (2.38)$$

2. Якщо диференційовною векторною функцією визначене векторне поле $\overline{F(M)}$, а k – будь-яка стала, то справедливою є формула

$$\overline{\text{rot}}(\overline{kF(M)}) = k\overline{\text{rot}F(M)}.$$

Д о в е д е н н я

Якщо $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то $\overline{kF(M)} = \{kP(M); kQ(M); kR(M)\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}}(\overline{kF(M)}) &= \\ \left\{ \frac{\partial(kR(M))}{\partial y} - \frac{\partial(kQ(M))}{\partial z}; \frac{\partial(kP(M))}{\partial z} - \frac{\partial(kR(M))}{\partial x}; \frac{\partial(kQ(M))}{\partial x} - \frac{\partial(kP(M))}{\partial y} \right\} &= \\ = \left\{ k \frac{\partial R(M)}{\partial y} - k \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; k \frac{\partial P(M)}{\partial z} - k \frac{\partial R(M)}{\partial x}; k \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - k \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\} &= \\ = k \left\{ \frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\} &= k\overline{\text{rot}F(M)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{rot}}(\overline{kF(M)}) = k\overline{\text{rot}F(M)}. \quad (2.39)$$

3. Якщо задані скалярне поле диференційовною функцією $U = U(M)$ та векторне поле диференційовною векторною функцією $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то справедливою є формула

$$\overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)}) = U(M)\overline{\text{rot}F(M)} + \overline{\text{grad}U(M)} \times \overline{F(M)}.$$

Д о в е д е н н я

$$U(M)\overline{F(M)} = \{U(M)P(M); U(M)Q(M); U(M)R(M)\}.$$

$$\begin{aligned} U(M)\overline{\text{rot}F(M)} &= \left\{ U(M) \frac{\partial R(M)}{\partial y} - U(M) \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; U(M) \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - U(M) \frac{\partial R(M)}{\partial x}; U(M) \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - U(M) \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

$$\overline{\text{grad}U(M)} \times \overline{F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial U(M)}{\partial x} & \frac{\partial U(M)}{\partial y} & \frac{\partial U(M)}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial y} R(M) - \frac{\partial U(M)}{\partial z} Q(M); \frac{\partial U(M)}{\partial z} P(M) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial U(M)}{\partial x} R(M); \frac{\partial U(M)}{\partial x} Q(M) - \frac{\partial U(M)}{\partial y} P(M) \right\}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)}) &= \left\{ \frac{\partial(U(M)R(M))}{\partial y} - \frac{\partial(U(M)Q(M))}{\partial z}; \frac{\partial(U(M)P(M))}{\partial z} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial(U(M)R(M))}{\partial x}; \frac{\partial(U(M)Q(M))}{\partial x} - \frac{\partial(U(M)P(M))}{\partial y} \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial y} R(M) + U(M) \frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial U(M)}{\partial z} Q(M) - U(M) \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; \right. \\
 &\quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} P(M) + U(M) \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial U(M)}{\partial x} R(M) - U(M) \frac{\partial R(M)}{\partial x}; \\
 &\quad \left. \frac{\partial U(M)}{\partial x} Q(M) + U(M) \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial U(M)}{\partial y} P(M) - U(M) \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\} = \\
 &= U(M) \left\{ \frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}; \frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x}; \frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right\} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial y} R(M) - \frac{\partial U(M)}{\partial z} Q(M); \frac{\partial U(M)}{\partial z} P(M) - \frac{\partial U(M)}{\partial x} R(M); \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial U(M)}{\partial x} Q(M) - \frac{\partial U(M)}{\partial y} P(M) \right\} = U(M) \overline{\text{rot} F(M)} + \overline{\text{grad} U(M)} \times \overline{F(M)}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)}) = U(M)\overline{\text{rot} F(M)} + \overline{\text{grad} U(M)} \times \overline{F(M)}. \quad (2.40)$$

Приклади до пунктів 2.8 та 2.9

Приклад 2.32. Задано векторне поле $\overline{F(M)} = \{x^2 + y^2; y^2 + z^2; z^2 + x^2\}$ і точки $M_1(1; 2; 3)$ та $M_2(1; 1; -1)$. Знайти кут між векторами $\overline{\text{rot} F(M_1)}$ та $\overline{\text{rot} F(M_2)}$.

Р о з в ' я з а н н я

За формулою (2.36) знаходимо $\overline{\text{rot} F(M)}$

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{rot} F(M)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 + y^2)}{\partial z} \right) \bar{j} +
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} \right) \bar{k} = -2z\bar{i} - 2x\bar{j} - 2y\bar{k} = \{-2z; -2x; -2y\}.$$

Знаходимо $\overline{\text{rot}F(M_1)}$ та $\overline{\text{rot}F(M_2)}$.

$$\overline{\text{rot}F(M_1)} = \{-6; -2; -4\}; \quad \overline{\text{rot}F(M_2)} = \{2; -2; -2\}.$$

Знаходимо кут між цими векторами

$$\cos \varphi = \frac{-12 + 4 + 8}{\sqrt{36 + 4 + 16} \sqrt{4 + 4 + 4}} = 0,$$

звідки $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

В і д п о в і д ь : $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.33. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)} = \{5 - 7x; 3y; 5 - 6z\}$ по контуру трикутника, що утворюється при перетині площини $2x + 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами, користуючись формулою Стокса. Напрямок обходу контура додатний.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо $\overline{\text{rot}F(M)}$:

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}F(M)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5 - 7x & 3y & 5 - 6z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(5 - 6z)}{\partial y} - \frac{\partial(3y)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial(5 - 6z)}{\partial x} - \frac{\partial(5 - 7x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(3y)}{\partial x} - \frac{\partial(5 - 7x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \bar{0}. \end{aligned}$$

Тоді, згідно з формулою Стокса, $\mathcal{C} = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язанням прикладу 2.30.

В і д п о в і д ь : 0.

Приклад 2.34. Користуючись формулою Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)} = \left\{ \frac{1}{3}y; -3x; x \right\}$ уздовж контура Γ , якщо

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t; \\ z = -2 \cos t - 2 \sin t + 1, \end{cases}$$

де $t \in [0; 2\pi]$.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо $\overline{\text{rot} F(M)}$:

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{3}y & -3x & x \end{vmatrix} = -\bar{j} + (-3 - \frac{1}{3})\bar{k} = \left\{ 0; -1; -\frac{10}{3} \right\}.$$

За формулою Стокса знаходимо циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ :

$$\Pi = \iint_T \overline{\text{rot} F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_T \overline{\text{rot} F(M)} \cdot \overline{n_0} ds,$$

де T – поверхня, обмежена контуром Γ .

Як виходить з умови, контур Γ – це лінія перетину площини $z = -x - y + 1$ з циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 4$.

У перетині виходить область, обмежена еліпсом, яка на площину xOy проектується у круг, що обмежений колом $x = 2 \cos t$; $y = 2 \sin t$, де $t \in [0; 2\pi]$.

Знайдемо нормаль $\bar{n}$ до площини $x + y + z + 1 = 0$: $\bar{n} = \{1; 1; 1\}$.

$$\text{Тоді } |\bar{n}| = \sqrt{3}, \quad \overline{n_0} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

$$\Pi = \iint_T \left(\overline{\text{rot} F(M)} \cdot \overline{n_0} \right) ds = \iint_T \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds.$$

Спроектуємо поверхню T на площину xOy . При цьому

$$\Pi = \iint_T \left(-\frac{13}{3\sqrt{3}} \right) ds = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint_D \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -13 \iint_D dxdy = \frac{13}{3} S_D = -\frac{13}{3} \pi \cdot 4 = -\frac{52\pi}{3}.$$

$$\text{Отже, } \Pi = -\frac{52\pi}{3}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Порівняйте з розв'язанням прикладу 2.31.

$$\text{В і д п о в і д ь : } -\frac{52\pi}{3}.$$

Приклад 2.35. Задано векторну функцію $\overline{F(M)} = \{x; -z; y^2\}$. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ безпосередньо та за формулою Стокса, якщо контуром Γ є контур трикутника, який утворюється

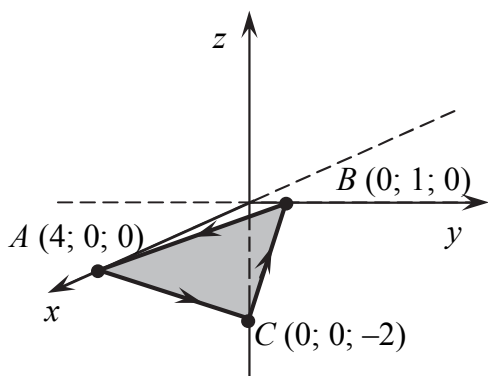


Рисунок до прикладу 2.35

при перетині площини $x + 4y - 2z - 4 = 0$ з координатними площинами. Напрямок обходу додатний.

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо рівняння площини у вигляді

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$$

та побудуємо цю площину (див. рис. 2.35).

Знайдемо циркуляцію векторного поля безпосередньо.

$$\text{Ц} = \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{AC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{CB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} + \int_{BA} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl}.$$

Рівняння прямої AC : $x - 2y - 4 = 0$, на прямій AC $y = 0$, $dy = 0$. Тоді

$$I_1 = \int_{AC} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_4^0 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_4^0 = -8.$$

Рівняння прямої CB : $4y - 2z - 4 = 0$ або $2y - z - 2 = 0$. На прямій CB $x = 0$ та $dx = 0$. Тоді

$$I_2 = \int_{CB} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = \int_{CB} -z dy + y^2 dz.$$

Оскільки $z = 2y - 2$, то $dz = 2dy$. Отже,

$$I_2 = \int_0^1 (2y - 2) dy + y^2 \cdot 2 dy = 2 \cdot \frac{1}{2} (y - 1)^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Рівняння прямої BA : $x + 4y - 4 = 0$. На прямій BA $z = 0$ та $dz = 0$. Тоді

$$I_3 = \int_0^4 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 = 8.$$

Остаточно маємо $\text{Ц} = -8 + \frac{5}{3} + 8 = \frac{5}{3}$.

Знайдемо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса.

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -z & y^2 \end{vmatrix} = (2y + 1)\bar{i} - 0\bar{j} + 0\bar{k} = \{2y + 1; 0; 0\}.$$

Звідси маємо

$$\Omega = \iint_T \overline{\operatorname{rot} F(M)} \cdot ds = \iint_T (\overline{\operatorname{rot} F(M)} \cdot \overline{n_0}) ds.$$

Поверхнею T є трикутник ABC , який лежить на площині $x + 4y - 2z - 4 = 0$. Нормаль до цієї площини

$$\overline{n} = \{1; 4; -2\}, \quad |\overline{n}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}, \quad \overline{n_0} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; -\frac{2}{\sqrt{21}} \right\}.$$

Тоді

$$\overline{\operatorname{rot} F(M)} \cdot \overline{n_0} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2y + 1).$$

Далі маємо

$$\Omega = \iint_T \frac{1}{\sqrt{21}}(2y + 1) ds.$$

Приводимо поверхневий інтеграл до подвійного. Для цього поверхню T , тобто $\triangle ABC$, спроектуємо на площину xOy . Дістанемо область D на площині xOy , тобто $\triangle AOB$. Замість ds підставимо $\frac{dxdy}{|\cos \gamma|}$, тобто $\frac{\sqrt{21}}{2}dxdy$.

Виходить

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_{AOB} \frac{1}{\sqrt{21}}(2y + 1) \frac{\sqrt{21}}{2} dxdy = \frac{1}{2} \iint_{AOB} (2y + 1) dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 dx \int_0^{\frac{1}{4}(4-x)} (2y + 1) dy = \frac{1}{2} \int_0^4 (y^2 + y) \Big|_0^{\frac{1}{4}(4-x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2 + 1 - \frac{1}{4}x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{3 \cdot 16}{8} + \frac{1 \cdot 64}{48} \right) = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Отже, $\Omega = \frac{5}{3}$.

В і д п о в і д ь : $\frac{5}{3}$.

2.10 Оператор Гамільтона та оператор Лапласа

В и з н а ч е н н я . Оператором Гамільтона або оператором набла називається символічний вектор

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}. \quad (2.41)$$

У цьому операторі поєднані диференціальні та векторні властивості.

Сам по собі символічний вектор $\bar{\nabla}$ не має реального змісту, але результат застосування вектора $\bar{\nabla}$ до скалярних або векторних величин являє собою реальні фізичні величини. При користуванні оператором набла будемо поводитись з ним як з вектором, а формальне множення $\frac{\partial}{\partial x}$ на $f(x; y; z)$ будемо розглядати як операцію знаходження частинної похідної $\frac{\partial f(x; y; z)}{\partial x}$ і так далі.

Якщо $U(M)$ – скалярна диференційовна функція, то добуток вектора набла на скалярну функцію дорівнює градієнту скалярного поля, а саме

$$\bar{\nabla} U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \bar{k}. \quad (2.42)$$

$$\bar{\nabla} U(M) = \overline{\text{grad } U(M)}.$$

Якщо $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ – векторна функція, де $P(M); Q(M); R(M)$ – диференційовні функції, то скалярний добуток вектора набла на векторну функцію $\overline{F(M)}$ дорівнює дивергенції векторного поля $\overline{F(M)}$, а саме,

$$\bar{\nabla} \cdot \overline{F(M)} = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

або

$$\bar{\nabla} \cdot \overline{F(M)} = \overline{\text{div } F(M)}. \quad (2.43)$$

Якщо $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ – векторна функція, де $P(M); Q(M); R(M)$ – диференційовні функції, то векторний добуток вектора набла на векторну функцію $\overline{F(M)}$ дорівнює ротору векторного поля, а саме,

$$\bar{\nabla} \times \overline{F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix}$$

або

$$\bar{\nabla} \times \overline{F(M)} = \overline{\text{rot } F(M)}. \quad (2.44)$$

Оператор $\bar{\nabla}$ на вираз, що розміщений праворуч, діє і як вектор і як похідна. Тому при знаходженні градієнта, дивергенції або ротора тих чи інших виразів слід користуватись правилом знаходження похідної і правилом

множення вектора на скаляр або правилом знаходження скалярного чи векторного добутків. Припустимо, що скалярні і векторні функції, які будуть розглянуті далі, є диференційовними функціями. Розглянемо деякі важливі приклади застосування оператора набла.

1. Знайдемо $\overline{\text{grad}}(U(M)V(M))$.

$$\begin{aligned}\overline{\text{grad}} U((M)V(M)) &= \overline{\nabla}(U(M)V(M)) = \overline{\nabla}(U(M)V_c(M)) + \overline{\nabla}(U_c(M)V(M)) = \\ &= V_c(M)\overline{\nabla}U(M) + U_c(M)\overline{\nabla}V(M) = V(M)\overline{\text{grad}} U(M) + U(M)\overline{\text{grad}} V(M),\end{aligned}$$

де індекс c має означати, що на даному етапі величина з індексом c вважається сталою.

Отже,

$$\overline{\text{grad}}(U(M)V(M)) = V(M)\overline{\text{grad}} U(M) + U(M)\overline{\text{grad}} V(M) \quad (2.45)$$

або

$$\overline{\nabla}(U(M)V(M)) = V(M)\overline{\nabla}U(M) + U(M)\overline{\nabla}V(M). \quad (2.46)$$

2. Знайдемо $\text{div}(U(M)\overline{F(M)})$.

$$\begin{aligned}\text{div}(U(M)\overline{F(M)}) &= \overline{\nabla} \cdot (U(M)\overline{F(M)}) = \overline{\nabla} \cdot (U(M)\overline{F_c(M)}) + \overline{\nabla} \cdot (U_c(M)\overline{F_c(M)}) = \\ &= \overline{F_c(M)} \overline{\nabla}(U(M)) + U_c(M)\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)} = \overline{F(M)} \cdot \overline{\text{grad}} U(M) + U(M)\text{div}\overline{F(M)}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\text{div}(U(M)\overline{F(M)}) = \overline{F(M)} \cdot \overline{\text{grad}} U(M) + U(M)\text{div}\overline{F(M)}. \quad (2.47)$$

або

$$\overline{\nabla} \cdot (U(M)\overline{F(M)}) = (U(M)\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)}) + \overline{F(M)} \cdot \overline{\nabla}U(M). \quad (2.48)$$

3. Знайдемо $\overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)})$.

$$\begin{aligned}\overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)}) &= \overline{\nabla} \times (U(M)\overline{F(M)}) = \overline{\nabla} \times (U(M)\overline{F_c(M)}) + \overline{\nabla} \times (U_c(M)\overline{F_c(M)}) = \\ &= \overline{\nabla}U(M) \times \overline{F_c(M)} + U_c(M)\overline{\nabla} \times \overline{F(M)} = \overline{\text{grad}} U(M) \times \overline{F(M)} + U(M)\overline{\text{rot}}\overline{F(M)} = \\ &= -\overline{F(M)} \times \overline{\text{grad}}U(M) + U(M)\overline{\text{rot}}\overline{F(M)}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\text{rot}}(U(M)\overline{F(M)}) = U(M)\overline{\text{rot}} \overline{F(M)} - \overline{F(M)} \times \overline{\text{grad}} U(M) \quad (2.49)$$

або

$$\overline{\nabla} \times (U(M)\overline{F(M)}) = (U(M)\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}) - \overline{F(M)} \times \overline{\nabla}U(M). \quad (2.50)$$

4. Знайдемо $\text{div}(\overline{F(M)} \times \overline{\Phi(M)})$.

$$\begin{aligned}\text{div}(\overline{F(M)} \times \overline{\Phi(M)}) &= \overline{\nabla} \cdot (\overline{F(M)} \times \overline{\Phi(M)}) = \overline{\nabla} \cdot (\overline{F(M)} \times \overline{\Phi_c(M)}) + \\ &+ \overline{\nabla} \cdot (\overline{F_c(M)} \times \overline{\Phi(M)}) = \overline{\Phi_c(M)} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}) - \overline{F_c(M)} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{\Phi(M)}) = \\ &= \overline{\Phi(M)} \cdot \overline{\text{rot}} \overline{F(M)} - \overline{F(M)} \cdot \overline{\text{rot}} \overline{\Phi(M)}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\operatorname{div}(\overline{F(M)} \times \overline{\Phi(M)}) = \overline{\Phi(M)} \cdot \overline{\operatorname{rot} F(M)} - \overline{F(M)} \cdot \overline{\operatorname{rot} \Phi(M)} \quad (2.51)$$

або

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{F(M)} \times \overline{\Phi(M)}) = \overline{\Phi(M)} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}) - \overline{F(M)} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{\Phi(M)}). \quad (2.52)$$

5. Знайдемо $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)}$.

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)} = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} U(M) = (\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}) U(M) = \overline{\nabla}^2 U(M).$$

$$\overline{\nabla}^2 = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ тому що}$$

скалярний добуток $\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}$ дорівнює сумі квадратів координат вектора $\overline{\nabla}$.

Звідси

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(M) \quad (2.52)$$

або

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} U(M) = \overline{\nabla}^2 U(M).$$

ЗАУВАЖЕННЯ. У векторному полі $\overline{\nabla} U(M)$ оператор набла при повторному застосуванні до $\overline{\nabla} U(M)$ утворює скалярне поле $\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} U = \operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)}$.

У процесі застосування оператора набла ми отримали ще один оператор

$$\overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.53)$$

який називається *оператором Лапласа або Лапласіаном*.

Оператор Лапласа є диференціальним оператором другого порядку. Нарівні з позначенням $\overline{\nabla}^2$ для оператора Лапласа використовується і позначення Δ (дельта), тобто

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta. \quad (2.54)$$

Тоді

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)} = \overline{\nabla}^2 U(M) \quad (2.55, a)$$

або

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} U(M)} = \Delta U(M). \quad (2.55, b)$$

6. Знайдемо $\overline{\operatorname{rot} \operatorname{grad} U(M)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot grad}} U(M) &= \overline{\nabla} \times \overline{\text{grad}} U(M) = \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} U(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U(M)}{\partial x} & \frac{\partial U(M)}{\partial y} & \frac{\partial U(M)}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 U(M)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z \partial y} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial^2 U(M)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U(M)}{\partial x \partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 U(M)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y \partial x} \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що мішані частинні похідні другого порядку диференційовної функції рівні між собою, маємо

$$\overline{\text{rot grad}} U(M) = \bar{0} \quad (2.56)$$

або

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} U(M) = \bar{0}. \quad (2.57)$$

7. Знайдемо $\overline{\text{grad div}} \overline{F(M)}$.

$$\overline{\text{grad div}} \overline{F(M)} = \overline{\nabla} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)}) \quad (2.58)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо до векторного поля застосувати оператор $\overline{\nabla}$, то цей оператор утворює скалярне поле $\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)} = \overline{\text{div}} \overline{F(M)}$. Повторне застосування оператора набла утворює векторне поле $\overline{\nabla} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F}) = \overline{\text{grad div}} \overline{F(M)}$.

8. Знайдемо $\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)})$.

$$\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)}) = \overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}).$$

Права частина являє собою подвійний векторний добуток, який визначається формулою

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

Тоді маємо

$$\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)}) = \overline{\nabla} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)}) - (\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}) \overline{F(M)} = \overline{\nabla} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)}) - \Delta \overline{F(M)}.$$

Отже,

$$\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)}) = \overline{\text{grad div}} \overline{F(M)} - \left(\frac{\partial^2 P(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R(M)}{\partial z^2} \right) \quad (2.59)$$

$$\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}) = \overline{\nabla} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)}) - \Delta \overline{F(M)}. \quad (2.61)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. У векторному полі $\overline{F(M)}$ оператор набла утворює векторне поле $\overline{\nabla} \times \overline{F(M)} = \overline{\text{rot}} \overline{F(M)}$. Повторне застосування оператора набла утворює векторне поле

$$\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{F(M)}) = \overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)}).$$

Таблиця 1 – Диференціальні операції другого порядку

Назва операцій	Скалярне поле $U(M)$	Векторне поле $\overline{F(M)}$	
	$\overline{\text{grad}} U(M)$	div	$\overline{\text{rot}}$
$\overline{\text{grad}}$		$\overline{\text{grad}} \text{div} \overline{F(M)} =$ $= \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{F(M)})$	
div	$\text{div} \overline{\text{grad}} U(M) = \Delta U$		$\text{div} \overline{\text{rot}} \overline{F(M)} = 0$
$\overline{\text{rot}}$	$\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} U(M) = \overline{0}$		$\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \overline{F(M)}) =$ $= \overline{\text{grad}} \text{div} \overline{F(M)} - \Delta \overline{F(M)}$

ЗАУВАЖЕННЯ. 1. Якщо оператор $\overline{\nabla}$ діє на деякий добуток, то в першу чергу враховується диференціальний характер оператора, а потім вже враховується векторні властивості оператора.

2. Якщо оператор $\overline{\nabla}$ тимчасово не впливає на деяку величину, яка входить до складу виразу, до якого застосовується оператор, то таку величину позначають індексом c , де $c = \text{const}$. По закінченні перетворень індекс c знімають.

3. Ті величини, на які оператор $\overline{\nabla}$ не впливає, наприкінці перетворень записуються ліворуч від оператора.

Приклади до пункту 2.10

Приклад 2.36. Користуючись оператором Гамільтона, довести, що справедливою є рівність

$$\overline{\nabla} \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V \overline{\nabla} U - U \overline{\nabla} V}{V^2}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Так як $\overline{\nabla} \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U}{V} \right) \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{V} \right) \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U}{V} \right) \overline{k}$, то

$$\overline{\nabla} \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x}}{V^2} \overline{i} + \frac{V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y}}{V^2} \overline{j} + \frac{V \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial V}{\partial z}}{V^2} \overline{k}.$$

Тоді

$$\overline{\nabla} \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V}{V^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \overline{k} \right) - \frac{U}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \overline{k} \right)$$

або

$$\bar{\nabla}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V}{V^2} \bar{\nabla}U - \frac{U}{V^2} \bar{\nabla}V.$$

Отже,

$$\bar{\nabla}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \bar{\nabla}U - U \bar{\nabla}V}{V^2},$$

що і потрібно було довести.

Приклад 2.37. Користуючись оператором Гамільтона, довести, що є справедливою рівність

$$\bar{\nabla}f(U) = f'(U) \bar{\nabla}U.$$

Р о з в ' я з а н н я

Так як

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}f(U) &= \frac{\partial}{\partial x} f(U) \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} f(U) \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} f(U) \bar{k}, \text{ то} \\ \bar{\nabla}f(U) &= \frac{\partial f(U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f(U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f(U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\bar{\nabla}f(U) = \frac{\partial f(U)}{\partial U} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} \right)$$

або

$$\bar{\nabla}f(U) = f'(U) \bar{\nabla}U,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 2.38. Довести, що вектор напруги електричного поля задовольняє хвильовому рівнянню

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \bar{E},$$

де ε – коефіцієнт електричної проникливості; μ – коефіцієнт магнітної проникливості; c – швидкість світла у порожнині.

Р о з в ' я з а н н я

Будемо виходити з системи рівнянь Максвелла для однорідного та ізотропного середовища, в якому відсутні заряди та струми:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \bar{\nabla} \times \bar{H}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{\nabla} \times \bar{E}, \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0, \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{H} = 0, \end{cases}$$

де $\varepsilon = \text{const}$; $\mu = \text{const}$.

Продиференціюємо за змінною t перше рівняння з вищевказаної системи рівнянь. Отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla} \times \bar{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right)$$

або

$$\bar{\nabla} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}.$$

Як виходить з другого рівняння системи рівнянь

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}(\bar{\nabla} \times \bar{E}).$$

Тоді

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\frac{c}{\mu} \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E})$$

або

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}).$$

Права частина останньої рівності являє собою подвійний векторний добуток. Скористаємось формулою

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

У даному випадку маємо

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \bar{E}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}).$$

Оскільки, як виходить з третього рівняння розглянутої системи рівнянь, $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$, то $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = -\bar{E}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})$.

$$\text{Як відомо, } \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

$$\text{Отже, } \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = -\Delta \bar{E}.$$

Остаточно маємо

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \Delta \overline{E},$$

що і потрібно було довести.

2.11 Соленоїдальне векторне поле

Визначення. Векторне поле $\overline{F(M)}$ називається *соленоїдальним векторним полем*, якщо у кожній точці цього векторного поля виконується умова

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0. \quad (2.61)$$

Рівність (2.61) називається умовою соленоїдальності векторного поля. Розглянемо ознаки соленоїдального векторного поля.

1. У соленоїдальному векторному полі відсутні джерела та стоки.

Згідно з теоремою Остроградського-Гаусса маємо

$$\oint\oint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \overline{F(M)} \, dxdydz = 0,$$

де T – будь-яка замкнена поверхня, що обмежує тіло Ω .

Це означає, що у соленоїдальному векторному полі відсутні джерела та стоки.

2. У соленоїдальному векторному полі діє принцип збереження інтенсивності векторної трубки.

У просторі, де діє соленоїдальне векторне поле $\overline{F(M)}$ утворимо так звану векторну трубку, яка являє собою частину простору, що складається з векторних ліній.

Кожна векторна лінія, яка належить векторній трубці цілком, лежить у цій трубці, тобто не починається там і не закінчується. Нехай T – замкнена поверхня, яка обмежує векторну трубку (рис. 2.6). Складається поверхня T з трьох поверхонь: T_1 та T_2 – нижній та верхній перерізи відповідно; T_3 – бічна поверхня.

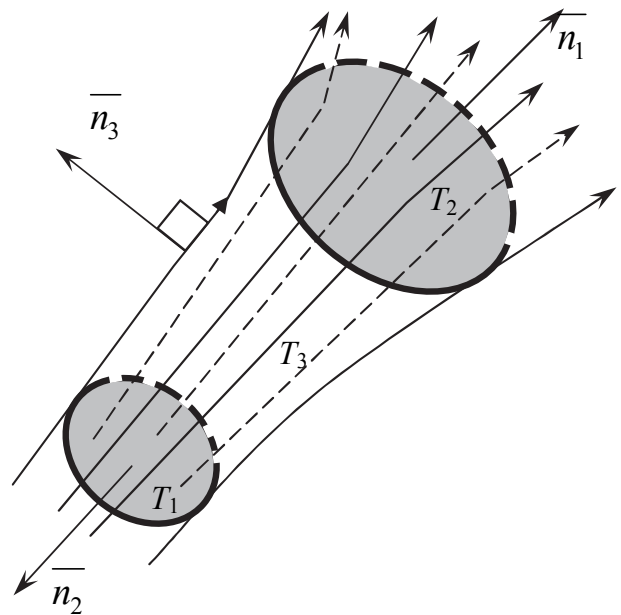


Рисунок 2.9

Тоді

$$\oint_T \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_3} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = 0.$$

Вектор нормалі $\overline{n_3(M)}$ до бічної поверхні T_3 , перпендикулярний до вектора $\overline{F(M)}$, який напрямлений по дотичній до векторних ліній. У такому разі, $\iint_{T_3} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_{T_3} \overline{F(M)} \cdot \overline{n_{03}(M)} ds = 0$ де $\overline{n_{03}(M)}$ – одиничний вектор нормалі $\overline{n_3(M)}$. Звідси маємо

$$\iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} + \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = 0.$$

Напрямок однієї з нормалей $\overline{n_1(M)}$ та $\overline{n_2(M)}$ оберемо так, щоб це були протилежні напрямки. Тоді

$$\iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} - \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = 0, \quad \iint_{T_1} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds} = \iint_{T_2} \overline{F(M)} \cdot \overline{ds}.$$

Останній результат означає, що незалежно від розміру перерізів через кожний переріз проходить однакова кількість векторних ліній. Отже, векторні лінії у векторній трубці не виникають і не зникають, тобто у векторній трубці немає джерел та немає стоків. Така властивість соленоїдального векторного поля називається *принципом збереження інтенсивності векторної трубки*.

Тому соленоїдальні векторні поля називаються трубчастими векторними полями.

3. Якщо існує таке векторне поле $\overline{\Phi(M)}$, що справедливою є рівність

$$\overline{F(M)} = \text{rot } \overline{\Phi(M)}, \quad (2.62)$$

то векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем.

Нехай $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, $\overline{\Phi(M)} = \{A(M); B(M); C(M)\}$ – векторні поля, при цьому координати векторного поля $\overline{F(M)}$ є диференційовними функціями, а координати векторного поля $\overline{\Phi(M)}$ – двічі диференційовні функції, а їхні частинні похідні другого порядку є неперервними функціями.

Оскільки за умовою $\overline{F(M)} = \text{rot } \overline{\Phi(M)}$, то є рівні між собою відповідні координати цих векторних полів, тобто

$$P(M) = \frac{\partial C(M)}{\partial y} - \frac{\partial B(M)}{\partial z}; Q(M) = \frac{\partial A(M)}{\partial z} - \frac{\partial C(M)}{\partial x}; R(M) = \frac{\partial B(M)}{\partial x} - \frac{\partial A(M)}{\partial y}.$$

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\overline{F(M)}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \overline{F(M)} &= \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C(M)}{\partial y} - \frac{\partial B(M)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A(M)}{\partial z} - \frac{\partial C(M)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial B(M)}{\partial x} - \frac{\partial A(M)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 C(M)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 B(M)}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A(M)}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A(M)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B(M)}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A(M)}{\partial y \partial z} = 0, \\ \text{оскільки } \frac{\partial^2 C(M)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 C(M)}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 B(M)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 B(M)}{\partial z \partial x}; \frac{\partial^2 C(M)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C(M)}{\partial y \partial x}.\end{aligned}$$

Виходить, що $\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0$, а це означає, що векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем.

Можна показати, що справедливим є і обернене твердження: якщо векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем, то існує таке векторне поле $\overline{\Phi(M)}$, що справедливою є рівність $\overline{F(M)} = \operatorname{rot} \overline{\Phi(M)}$.

Векторне поле $\overline{\Phi(M)}$ при цьому називається *векторним потенціалом* векторного поля $\overline{F(M)}$.

Приклади до пункту 2.11

Приклад 2.39. Задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{2x + 5yz; 5xz - 6y; 5xy + 4z\}.$$

Перевірити, чи є векторне поле $\overline{F(M)}$ соленоїдальним.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\overline{F(M)}$.

$$P(M) = 2x + 5yz; \quad Q(M) = 5xz - 6y; \quad R(M) = 5xy + 4z.$$

Так як

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = -6; \quad \frac{\partial R(M)}{\partial z} = 4,$$

то

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z},$$

тобто

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0.$$

Значить, векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем.

В і д п о в і д ь : $\overline{F(M)}$ – соленоїдальне векторне поле.

Приклад 2.40. Перевірити, чи є векторне поле $\overline{\text{grad}} \frac{1}{r}$ соленоїдальним, якщо $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ – радіус-вектор поточної точки $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

Р о з в ’ я з а н н я .

Так як

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ то}$$

$$\overline{\text{grad}} \frac{1}{r} = \left\{ -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

При цьому

$$P(M) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; Q(M) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; R(M) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Тоді

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial y} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial R(M)}{\partial z} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Отже,

$$\text{div } \overline{\text{grad}} \frac{1}{r} = -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0.$$

Якщо $\text{div } \overline{\text{grad}} \frac{1}{r} = 0$, то векторне поле $\overline{\text{grad}} \frac{1}{r}$ є соленоїдальним векторним

полем.

В і д п о в і д ь : $\overline{\text{grad}} \frac{1}{r}$ – соленоїдальне векторне поле.

Приклад 2.41. Задані векторні поля

$$\overline{\Phi}_1(M) = \{x; y; z\}, \quad \overline{\Phi}_2(M) = \{y; z; x\}; \quad \overline{F}(M) = \overline{\Phi}_1(M) \times \overline{\Phi}_2(M).$$

Перевірити, чи є векторне поле $\overline{F}(M)$ соленоїдальним.

Р о з в ’ я з а н н я :

Знаходимо $\overline{F}(M)$.

$$\overline{F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (xy - z^2)\bar{i} + (yz - x^2)\bar{j} + (xz - y^2)\bar{k}.$$

Значить,

$$P(M) = xy - z^2; Q(M) = yz - x^2; R(M) = xz - y^2;$$

$$\frac{\partial P(M)}{\partial x} = y; \frac{\partial Q(M)}{\partial y} = z; \frac{\partial R(M)}{\partial z} = x.$$

Тоді

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = x + y + z.$$

Векторне поле $\overline{F(M)}$ не є соленоїдальним векторним полем.

В і д п о в і д ь : $\overline{F(M)}$ – не є соленоїдальним векторним полем.

Приклад 2.42. Перевірити, чи є соленоїдальним векторне поле $\overline{F(M)} = U(r)\overline{r}$, де $\overline{r} = \{x; y; z\}$, а $r = |\overline{r}|$.

Р о з в ' я з а н н я

Згідно з третьою властивістю дивергенції маємо

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \operatorname{div}(U(r)\overline{r}) = U(r)\operatorname{div} \overline{r} + \overline{r} \cdot \overline{\operatorname{grad} U(r)}.$$

Оскільки $\overline{r} = \{x; y; z\}$, то $\operatorname{div} \overline{r} = 1 + 1 + 1 = 3$;

$$\overline{\operatorname{grad} U(r)} = \left\{ \frac{\partial U(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}; \frac{\partial U(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}; \frac{\partial U(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \right\}.$$

Звідси

$$\overline{\operatorname{grad} U(r)} = \frac{\partial U(r)}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x}; \frac{\partial r}{\partial y}; \frac{\partial r}{\partial z} \right\}.$$

Оскільки $r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

та

$$\frac{\partial r}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \bar{k} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\overline{r}}{r}.$$

Тоді

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = 3U(r) + \left(\overline{r} \cdot \frac{\overline{r}}{r} \right) \frac{\partial U(r)}{\partial r}; \quad \operatorname{div} \overline{F(M)} = 3U(r) + \frac{r^2}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial r};$$

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = 3U(r) + r \frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

Отже, $\operatorname{div} \overline{F(M)} \neq 0$, а задане векторне поле не є соленоїдальним векторним полем.

В і д п о в і д ь : задане векторне поле не є соленоїдальним.

Приклад 2.43. Довести, що векторне поле електростатичної напруги

$$\overline{E} = \frac{q}{r^3} \overline{r},$$

де $\overline{r} = \{x; y; z\}$, а $r = |\overline{r}|$ є соленоїдальним векторним полем в усіх точках векторного поля, за винятком точки $O(0; 0; 0)$.

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємось третьою властивістю дивергенції

$$\operatorname{div} \overline{E} = \operatorname{div} \left(\frac{q}{r^3} \overline{r} \right) = \frac{q}{r^3} \operatorname{div} \overline{r} + \overline{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{q}{r^3}.$$

Оскільки $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, то $\operatorname{div} \overline{r} = 3$.

Так як $\frac{q}{r^3} = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, то

$$-\frac{3}{2}q = \left\{ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2x\overline{i} + 2y\overline{j} + 2z\overline{k}) \right\} = -3q \frac{\overline{r}}{r^5}.$$

Значить,

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{3q}{r^3} - \overline{r} \cdot \frac{3q}{r^5} \overline{r}, \operatorname{div} \overline{E} = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^5} r^2; \operatorname{div} \overline{E} = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^3} = 0, \text{ якщо } r \neq 0.$$

Таким чином, $\operatorname{div} \overline{E} = 0$ в усіх точках, за винятком точки $O(0; 0; 0)$.

Приклад 2.44. Знайти векторний потенціал для соленоїдального векторного поля $\overline{F(M)} = \{3y^2; -3x^2; -(y^2 + 2x)\}$

Р о з в ' я з а н н я

Якщо векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем, то його векторним потенціалом є такий вектор $\overline{\Phi(M)}$, який задовольняє умову

$$\overline{F(M)} = \operatorname{rot} \overline{\Phi(M)}.$$

Векторних потенціалів у векторного поля $\overline{F(M)}$ існує безліч та відрізняються вони на градієнт будь-якої диференційовної скалярної функції, тобто

$$\overline{\Phi^*(M)} = \overline{\text{rot}\Phi(M)} + \overline{\text{grad}U(M)}.$$

Нехай $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, $\overline{\Phi(M)} = \{P_1(M); Q_1(M); R_1(M)\}$.

Оскільки векторних потенціалів безліч, то будемо шукати такий векторний потенціал $\overline{\Phi(M)}$, що $P_1(M) \equiv 0$. Тоді $\overline{\Phi(M)} = \{0; Q_1(M); R_1(M)\}$.

Звідси маємо, що $\overline{F(M)} = \overline{\text{rot}\Phi(M)}$, тобто

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q_1(M)}{\partial z} = P(M); \\ \frac{\partial R_1(M)}{\partial x} = -Q(M); \\ \frac{\partial Q_1(M)}{\partial x} = R(M). \end{cases} \quad (*)$$

У нашому випадку

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q_1(M)}{\partial z} = 3y^2; \\ \frac{\partial R_1(M)}{\partial x} = -(-3x^2); \\ \frac{\partial Q_1(M)}{\partial x} = -(y^2 + 2x). \end{cases} \quad (**)$$

Тоді

$$R_1(M) = -\int Q(M)dx + C_1(y; z), \quad Q_1(M) = \int R(M)dx + C_2(y; z),$$

де $C_1(y; z), C_2(y; z)$ – будь-які диференційовні функції змінних y та z .

У нашому випадку

$$R_1(M) = -\int (-3x^2)dx + C_1(y; z), \quad Q_1(M) = \int (-(y^2 + 2x))dx + C_2(y; z).$$

Можна припустити, що $C_2(y; z) \equiv 0$, а функцію $C_1(y; z)$ візьмемо таку, щоб виконувались перше та друге рівняння системи (*) та відповідно (**), а саме:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \int Q(M)dx + \frac{\partial C_1(y; z)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \int R(M)dx + 0 = P(M),$$

звідки

$$\frac{\partial C_1(y; z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int Q(M)dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(M)dx + P(M).$$

Далі маємо

$$\int \left(\frac{\partial C_1(y; z)}{\partial y} \right) dy = \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int Q(M) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(M) dx + P(M) \right) dy + C_3(z).$$

Нехай $C_3(z) \equiv 0$.

Тоді

$$C_1(y; z) = \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int Q(M) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(M) dx + P(M) \right) dy.$$

Підставимо знайдене $C_1(y; z)$ у вираз для $R_1(M)$ та отримаємо розв'язок системи рівнянь (*).

У заданому випадку маємо

$$R_1(M) = x^3 + C_1(y; z), \quad Q_1(M) = -y^2 x - x^2 + C_2(y; z).$$

Припускаємо, що $C_2(y; z) \equiv 0$.

Далі маємо

$$\frac{\partial x^3}{\partial y} + \frac{\partial C_1(y; z)}{\partial y} - \frac{\partial(-y^2 x - x^2)}{\partial z} = 3y^2.$$

$$\text{З того, що} \quad \frac{\partial C_1(y; z)}{\partial y} = 3y^2,$$

виходить

$$C_1(y; z) = \int 3y^2 dy = y^3.$$

Значить, $P_1(M) \equiv 0$; $Q_1(M) = -y^2 x - x^2$; $R_1(M) = x^3 + y^3$.

Отже, $\overline{\Phi(M)} = \{0; x^2 - y^2 x; x^3 + \frac{2}{3}y^3 + 2xy\}$.

Зробимо перевірку, для чого знайдемо $\overline{\text{rot } \Phi(M)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot } \Phi(M)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -x^2 - y^2 x & x^3 + y^3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(x^3 + y^3)}{\partial y} - \frac{\partial(-x^2 - y^2 x)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(-\frac{\partial(x^3 + y^3)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(-x^2 - y^2 x)}{\partial x} \right) \bar{k} = \\ &= 3y^2 \bar{i} - 3x^2 \bar{j} + (-2x - y^2) \bar{k} = \{3y^2; -3x^2; -2x - y^2\}. \end{aligned}$$

Таким чином, знайдено векторний потенціал

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; -x^2 - y^2 x; x^3 + y^3\}.$$

В і д п о в і д ь : $\overline{\Phi(M)} = \{0; -x^2 - y^2 x; x^3 + y^3\}.$

2.12 Потенціальне векторне поле

В и з н а ч е н н я . Векторне поле $\overline{F(M)}$ називається *потенціальним векторним полем*, якщо існує така скалярна диференційовна функція $U(M)$, що у кожній точці цього векторного поля виконується умова

$$\overline{F(M)} = \overline{\text{grad } U(M)}. \quad (2.63)$$

Функція $U(M)$ при цьому називається *скалярним потенціалом векторного поля* $\overline{F(M)}$.

Розглянемо ознаки потенціального векторного поля:

1. Для визначення потенціального векторного поля достатньо лише однієї скалярної функції.

Звичайно для визначення векторного поля необхідно три скалярних функції, що є координатами векторної функції $\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ і лише для визначення потенціального векторного поля достатньо лише однієї скалярної функції $U(M)$ такої, що $\overline{F(M)} = \overline{\text{grad } U(M)}$.

2. Для того, щоб векторне поле було потенціальним векторним полем необхідно та достатньо, щоб воно було безвихровим векторним полем.

Н е о б х і д н і с т ь

Якщо $\overline{F(M)}$ – потенціальне векторне поле, то

$$\overline{F(M)} = \overline{\text{grad } U(M)}.$$

Тоді згідно з рівністю (2.56), маємо

$$\text{rot } \overline{F(M)} = \text{rot}(\overline{\text{grad } U(M)}) = \bar{0}.$$

З того, що $\text{rot } \overline{F(M)} = \bar{0}$ виходить, що у векторному полі $\overline{F(M)}$ відсутні вихори.

Д о с т а т н і с т ь

Якщо векторне поле $\overline{F(M)}$ є безвихровим векторним полем, то

$$\text{rot } \overline{F(M)} = \bar{0}, \text{ а також } \lim_{d_T \rightarrow 0} \frac{\overline{F(M)} \cdot \overline{dl}}{S} = 0, \text{ звідки виходить, що } \oint_{\Gamma} \overline{F(M)} \cdot \overline{dl} = 0$$

тобто $\oint_{\Gamma} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = 0$. Тоді на основі теореми 6 (п. 1.6 розд. 1) можна стверджувати, що існує така функція $U(M)$, для якої підінтегральний вираз є повним диференціалом, тобто

$$dU(M) = P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz$$

або

$$dU(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(M)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(M)}{\partial z} dz.$$

Остання рівність означає, що

$$\overline{F(M)} = \{P(M); Q(M); R(M)\} = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\} = \overline{\text{grad } U(M)}.$$

Тим самим доведено, що безвихрове векторне поле є потенціальним векторним полем.

Н а с л і д о к . Якщо циркуляція векторного поля $\overline{F(M)}$ по будь-якому замкненому контуру Γ , що належить області, в якій задане векторне поле $\overline{F(M)}$, дорівнює нулю, то таке векторне поле є потенціальним векторним полем. (Обернене твердження не завжди є справедливим).

Розглянемо як знаходиться скалярний потенціал потенціального векторного поля.

Якщо
$$dU(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(M)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(M)}{\partial z} dz,$$

то

$$U(M) = \int_{M_0}^M \frac{\partial U(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(M)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(M)}{\partial z} dz$$

або

$$U(M) = \int_{M_0}^M P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz, \quad (2.64)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – деяка фіксована точка; $M(x; y; z)$ – довільна точка на контурі Γ по якому береться криволінійний інтеграл (рис. 2.10).

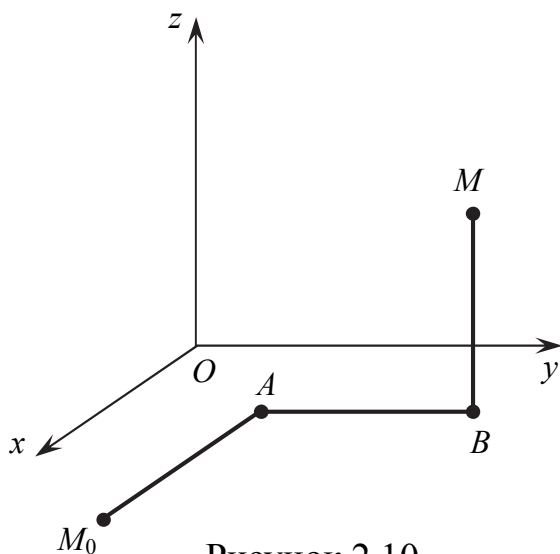


Рисунок 2.10

Оскільки векторне поле потенціальне, то криволінійний інтеграл не залежить від форми контура інтегрування.

Тому за контур інтегрування зручно взяти ламану M_0ABM , ланки якої M_0A , AB , BM є паралельні координатним осям: $M_0A \parallel Ox$; $AB \parallel Oy$; $BM \parallel Oz$. При такому припущенні формула (2.64) набуває вигляду.

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y_0; z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y; z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x; y; z) dz + c. \quad (2.65)$$

Якщо за точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ взяти точку $M_0(0; 0; 0)$, то отримаємо формулу

$$U(x; y; z) = \int_0^x P(x; 0; 0) dx + \int_0^y Q(x; y; 0) dy + \int_0^z R(x; y; z) dz. \quad (2.66)$$

Приклади до пункту 2.12

Приклад 2.45. Задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{yz - xy; xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2; xy + y^2z\}.$$

Довести, що задане векторне поле є потенціальним векторним полем та знайти його скалярний потенціал.

Р о з в ' я з а н н я

Для перевірки векторного поля на потенціальність знайдемо його ротор

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot} F(M)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz - xy & xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2 & xy + y^2z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(xy + y^2z)}{\partial y} - \frac{\partial(xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial(yz - xy)}{\partial z} - \frac{\partial(xy + y^2z)}{\partial x} \right) \bar{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial(xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(yz - xy)}{\partial z} \right) \bar{k} = \\ &= ((x + 2yz) - (x + 2yz))\bar{i} + (y - y)\bar{j} + ((z - x) - (z - x))\bar{k} = \bar{0}. \end{aligned}$$

Векторне поле $\overline{F(M)}$ є потенціальним векторним полем.

Знайдемо його скалярний потенціал. Розглянемо декілька способів знаходження скалярного потенціалу:

1. Знайдемо скалярний потенціал $U(M)$ за формулою (2.65)

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y_0; z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y; z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x; y; z) dz + c,$$

де $c \in R$.

За точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ візьмемо точку $M_0(0; 0; 0)$. Тоді можна скористуватись формулою (2.66):

$$U(x; y; z) = \int_0^x P(x; 0; 0) dx + \int_0^y Q(x; y; 0) dy + \int_0^z R(x; y; z) dz + c.$$

Отже,

$$U(x; y; z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) dy + \int_0^z (xy + y^2 z) dz;$$

$$U(x; y; z) = -\frac{1}{2}x^2 y \Big|_0^y + xyz \Big|_0^z + \frac{1}{2}y^2 z^2 \Big|_0^z; \quad U(x; y; z) = -\frac{1}{2}x^2 y + xyz + \frac{1}{2}y^2 z^2 + c,$$

де $c \in R$.

2. За визначенням

$$\overline{F(M)} = \overline{\text{grad } U(M)}.$$

Це означає, що:

$$P(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \quad Q(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \quad R(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial z},$$

тобто

$$\frac{\partial U(M)}{\partial x} = yz - xy; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = xy + y^2 z.$$

Проінтегруємо першу рівність за змінною x . Виходить

$$U(M) = \int_0^x (yz - xy) dx = xyz - \frac{1}{2}x^2 y \Big|_0^x + f(y; z)$$

або

$$U(M) = xyz - \frac{1}{2}x^2 y + a(y; z), \quad (*)$$

де $a(y; z)$ – невизначена функція від y та z .

Отриману рівність продиференціюємо за змінною y . Отже,

$$\frac{\partial U(M)}{\partial y} = xz - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\partial a(y; z)}{\partial y}.$$

У такому разі маємо

$$xz - \frac{1}{2}x^2 + yz = xz - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\partial a(y; z)}{\partial y},$$

звідки

$$\frac{\partial a(y; z)}{\partial y} = yz^2.$$

Проінтегруємо останню рівність за змінною y . Тоді

$$\int_0^y \frac{\partial a(y; z)}{\partial y} dy = \int_0^y yz^2 dy$$

або

$$a(y; z) = \frac{1}{2}y^2 z^2 \Big|_0^y + b(z) = \frac{1}{2}y^2 z^2 + b(z),$$

де $b(z)$ – невизначена функція від z .

Підставимо вираз для $a(y; z)$ у рівність (*)

$$U(x; y; z) = xyz - \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}y^2 z^2 + b(z). \quad (**)$$

Для знаходження $b(z)$ продиференціюємо за змінною z рівність (**), звідки маємо

$$\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial z} = xy + y^2 z + b'(z).$$

Тоді

$$xy + y^2 z = xy + y^2 z + b'(z),$$

звідки $b'(z) = 0$, а $b(z) = c$, де $c = \text{const}$.

Отже,

$$U(x; y; z) = xyz - \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}y^2 z^2 + c.$$

3. Для того, щоб бути скалярним диференціалом векторного поля, функція $U(x; y; z)$ має задовольняти умову

$$dU(x; y; z) = \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial z} dz.$$

Знаючи частинні похідні, маємо

$$U(x; y; z) = (yz - xy)dx + (xz - \frac{1}{2}x^2 + y^2 z^2)dy + (xy + y^2 z)dz.$$

Виконаємо деякі перетворення.

$$dU(x; y; z) = yzdx - xydx + xz - \frac{1}{2}x^2 dy + yz^2 dy + xydz + y^2 z dz;$$

$$dU(x; y; z) = (x(zdx + ydz) + yzdx) - \left(xydx + \frac{1}{2}x^2dy \right) + \left(z^2ydy + y^2zdz \right);$$

$$dU(x; y; z) = (xd(yz) + (yz)dx) - d\left(\frac{1}{2}x^2y\right) + d\left(\frac{1}{2}y^2z^2\right);$$

$$dU(x; y; z) = d(xyz) - d\left(\frac{1}{2}x^2y\right) + d\left(\frac{1}{2}y^2z^2\right);$$

$$dU(x; y; z) = d\left(xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2\right).$$

Тоді $dU(x; y; z) = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + c$,

де $c \in R$, а $U(M) = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + c$.

Значить, векторне поле $\overline{F(M)}$ є скалярним векторним полем.

В і д п о в і д ь : $U(M) = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + c$, де $c \in R$.

Приклад 2.46. Впевнитись у тому, що векторне поле $\overline{F(M)} = \{2xyz; x^2z; x^2y\}$ є потенціальним векторним полем та знайти його скалярний потенціал ($\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Р о з в ' я з а н н я

$$\overline{F(M)} = \{2xyz; x^2z; x^2y\},$$

Знаходимо ротор векторного поля $\overline{F(M)}$.

$$\overline{\text{rot} F(M)} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 - x^2)\overline{i} + (2xy - 2xy)\overline{j} + (2xz - 2xz)\overline{k} = 0\overline{i} + 0\overline{j} + 0\overline{k} = \overline{0}.$$

Оскільки $\overline{\text{rot} F(M)} = \overline{0}$, то векторне поле $\overline{F(M)}$ є потенціальним векторним полем.

Знаходимо потенціал $U(M)$ за формулою (2.66)

$$U(M) = \int_0^x 0dx + \int_0^y 0dy + \int_0^z x^2ydz = x^2yz \Big|_0^z + c = x^2yz + c,$$

де $c \in R$.

Отже, $U(M) = x^2 yz + c$, де $c \in R$.

В і д п о в і д ь : $x^2 yz + c$, де $c \in R$.

Приклад 2.47. Впевнитись у тому, що задане векторне поле $\overline{F(M)} = \frac{\overline{r}}{r^2}$ є потенціальним векторним полем та знайти його скалярний потенціал.

Р о з в ' я з а н н я

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\}.$$

Знаходимо $\overline{\text{rot } F(M)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot } F(M)} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial y} - \frac{\partial(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial z} \right) \overline{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial z} - \frac{\partial(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial x} \right) \overline{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial x} - \frac{\partial(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})}{\partial y} \right) \overline{k} = \\ &= \left(-z(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2y + y(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} 2z \right) \overline{i} + \\ &+ \left(-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2z + z(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} 2x \right) \overline{j} + \\ &+ \left(-y(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot 2x + x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} 2y \right) \overline{k} = \\ &= 0\overline{i} + 0\overline{j} + 0\overline{k} = \overline{0}. \end{aligned}$$

Векторне поле $\overline{F(M)}$ є потенціальним векторним полем.

Знаходимо його скалярний потенціал за формулою (2.65).

$$U(M) = \int_{x_0}^x \frac{x}{x^2 + y_0^2 + z_0^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{y}{x^2 + y^2 + z_0^2} dy + \int_{z_0}^z \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y_0^2 + z_0^2 \right| \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y^2 + z_0^2 \right| \Big|_{y_0}^y + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y^2 + z^2 \right| \Big|_{z_0}^z = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y_0^2 + z_0^2 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \right| + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y^2 + z_0^2 \right| - \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y_0^2 + z_0^2 \right| + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y^2 + z^2 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y^2 + z_0^2 \right| = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z^2)}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)} = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \ln \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \ln |\bar{r}| + c = \ln r + c,
\end{aligned}$$

де $c \in R$.

В і д п о в і д ь : $\ln r + c$.

Приклад 2.48. Електростатичне векторне поле $\bar{E}$ заряду q задане у вигляді $\bar{E}(M) = \frac{q}{r^3} \bar{r}$. Якщо це векторне поле є потенціальним векторним

полем, то знайти його потенціал ($\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки

$$\bar{E}(M) = q \left\{ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

то

$$\overline{\text{rot} E(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial z} \right) \bar{i} + \\
&+ \left(\frac{\partial \left(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial x} \right) \bar{j} + \\
&+ \left(\frac{\partial \left(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\
&= \left(-3yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right) \bar{i} + \\
&+ \left(-3xz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3xz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right) \bar{j} + \\
&+ \left(-3xy(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3xy(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2y \right) \bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Значить, векторне поле $\bar{E}$ є потенціальним векторним полем.

Знаходимо його скалярний потенціал за формулою (2.65).

$$\begin{aligned}
U(M) &= q \left(\int_{x_0}^x \frac{x}{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{y_0}^y \frac{y}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dy + \int_{z_0}^z \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \right) = \\
&= q \left(-\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{x_0}^x - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{y_0}^y - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{z_0}^z \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q \left(-\frac{1}{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \\
&= q \left(-\frac{1}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = -\frac{q}{r}.
\end{aligned}$$

Отже, $U(M) = -\frac{q}{r} + c$, де $c \in R$.

В і д п о в і д ь : $-\frac{q}{r} + c$, де $c \in R$.

Приклад 2.49. Векторне поле магнітної напруги лінійного струму задане у вигляді $\overline{H}(M) = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\overline{i} + x\overline{j})$. Якщо векторне поле $\overline{H}(M)$ є потенціальним, то знайти його скалярний потенціал.

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки

$$\overline{H}(M) = 2I \left\{ -\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right\},$$

то

$$\overline{\text{rot}H(M)} = 2I \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2I \left(-\frac{\partial (x(x^2 + y^2)^{-1})}{\partial z} \bar{i} - \frac{\partial (y(y^2 + x^2)^{-1})}{\partial z} \bar{j} + \left(\frac{\partial (x(x^2 + y^2)^{-1})}{\partial x} + \frac{\partial (y(y^2 + x^2)^{-1})}{\partial y} \right) \bar{k} \right) = \\
&= 2I \left(0\bar{i} + 0\bar{j} + \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \bar{k} \right) = \\
&2I \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \bar{k} = 4I(0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}) = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Значить, векторне поле $\overline{H}(M)$ є потенціальним векторним полем.

Знаходимо його скалярний потенціал за формулою (2.65)

$$\begin{aligned}
U(M) &= -2I \int_{x_0}^x \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} dx + 2I \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2I \left(-y_0 \cdot \frac{1}{y_0} \operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} \Big|_{x_0}^x + x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y_0}^y \right) = \\
&= 2I \left(-\operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x} \right) = 2I \left(-\operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + \\
&+ 2I \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} \right) = 2I \left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} \right) + 2I \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 2I \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c,
\end{aligned}$$

де $c \in R$.

В і д п о в і д ь : $2I \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c$, де $c \in R$.

2.13 Гармонічне векторне поле

В и з н а ч е н н я . Векторне поле, що є водночас і соленоїдальним і потенціальним векторним полем, називається *гармонічним векторним полем*.

На гармонічні векторні поля поширюються властивості і соленоїдальних, і потенціальних векторних полів.

Якщо $\overline{F(M)}$ – гармонічне векторне поле, то $\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0$, а $\overline{F(M)} = \operatorname{grad} U(M)$, де $U(M)$ – скалярний потенціал векторного поля $\overline{F(M)}$. Звідси виходить, що

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U(M) = 0, \quad \Delta U(M) = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 U(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.67)$$

Функція $U(M)$, яка задовольняє рівнянню Лапласа (2.67), називається *гармонічною функцією*.

2.14 Теорема Гельмгольца

Теорема. Будь-яке векторне поле $\overline{F(M)}$ можна подати у вигляді суми двох векторних полів, одне з яких є соленоїдальне, а друге – потенціальне.

Д о в е д е н н я

Нехай $\overline{F(M)}$ – деяке векторне поле; $\overline{F_1(M)}$ – соленоїдне векторне поле; $\overline{F_2(M)}$ – потенціальне векторне поле.

Тоді $\operatorname{div} \overline{F_1(M)} = 0$; $\operatorname{rot} \overline{F_2(M)} = \overline{0}$, до того ж, існує така функція $U(M)$, що $\overline{F_2(M)} = \operatorname{grad} U(M)$. З'ясуємо, як її знайти. Згідно з властивостями потенціального векторного поля. $\operatorname{rot} \overline{F_2(M)} = \operatorname{rot} \operatorname{grad}(U(M)) = \overline{0}$.

Розглянемо векторне поле $\overline{F_1(M)}$ у вигляді $\overline{F_1(M)} = \overline{F(M)} - \overline{F_2(M)}$, звідки $\overline{F_1(M)} = \overline{F(M)} - \operatorname{grad} U(M)$.

Знайдемо $\operatorname{div} \overline{F_1(M)}$.

$$\operatorname{div} \overline{F_1(M)} = \operatorname{div} \overline{F(M)} - \operatorname{div} \operatorname{grad} U(M).$$

Оскільки $\operatorname{div} \overline{F_1(M)} = 0$, то $\operatorname{div} \overline{F(M)} = \operatorname{div} \operatorname{grad} U(M)$.

Згідно з формулою (2.55,б) маємо

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \Delta U(M). \quad (2.68)$$

Для знаходження функції $U(M)$ отримали рівняння, яке має розв'язок. Отже, якщо можна знайти функцію $U(M)$, то можливим є подання

$$\overline{F(M)} = \overline{F_1(M)} + \overline{F_2(M)}. \quad (2.69)$$

Приклади до пунктів 2.13 та 2.14

Приклад 2.50. Скалярним потенціалом векторного поля сил тяжіння, яке утворене точковою масою, що розміщена у початку координат, є скалярне поле $U(M) = \frac{c}{r}$, де $c = \text{const}$, $r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Довести, що скалярне поле $U(M)$ є гармонічним скалярним полем.

Р о з в ' я з а н н я

Скалярне поле $U = U(M)$ називається гармонічним або лапласовим скалярним полем, якщо функція $U(M)$ задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta U = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 U(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(M)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) = \frac{\partial \left(c(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x} = 2cx(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \frac{\partial^2 U(M)}{\partial x^2} &= 2c \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right); \\ \frac{\partial U(M)}{\partial y} &= 2cy(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y^2} &= 2c \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right); \\ \frac{\partial U(M)}{\partial z} &= 2cz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z^2} &= 2c \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 U(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z^2} = \\ &= 2c \left(3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right) = \\ &= 2c \left(3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

Доведено, що скалярне поле є гармонічним скалярним полем.

Приклад 2.51. Перевірити, чи є гармонічним векторне поле

$$\overline{F(M)} = \frac{\bar{r}}{r^2} \quad (\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}, r = |\bar{r}|).$$

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки
$$\overline{F(M)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \bar{j},$$

то

$$\operatorname{div} \overline{F(M)} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{rot} F(M)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)}{\partial z} \bar{i} + \frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial z} \bar{j} + \left(\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= 0\bar{i} + 0\bar{j} + \left(\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= 0\bar{i} + 0\bar{j} + \left(-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} = \bar{0}. \end{aligned}$$

Оскільки $\operatorname{div} \overline{F(M)} = 0$, то векторне поле $\overline{F(M)}$ є соленоїдальним векторним полем. Оскільки $\overline{\operatorname{rot} F(M)} = \bar{0}$, то векторне поле $\overline{F(M)}$ є потенціальним векторним полем. У такому разі векторне поле $\overline{F(M)}$ є гармонічним векторним полем.

В і д п о в і д ь : $\overline{F(M)}$ – гармонічне векторне поле

Приклад 2.52. Довести, що коли скалярна функція $U(M)$ є гармонічною скалярною функцією, то векторне поле $\overline{\nabla} U(M)$ є соленоїдальним та потенціальним векторним полем.

Р о з в ' я з а н н я

За умовою скалярна функція $U(M)$ є гармонічною скалярною функцією,

$$\frac{\partial^2 U(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Розглянемо векторне поле

$$\overline{\nabla}U(M) = \overline{\text{grad}} U(M) = \left\{ \frac{\partial U(M)}{\partial x}; \frac{\partial U(M)}{\partial y}; \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right\}.$$

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\overline{\nabla}U(M)$.

$$\text{div}(\overline{\nabla}U(M)) = \overline{\nabla} \cdot (\nabla U(M)) = \Delta U(M) = 0.$$

Виходить, що векторне поле $\overline{\nabla}U(M)$ є соленоїдальним векторним полем.

Знайдемо ротор векторного поля $\overline{\nabla}U(M)$.

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\nabla}U(M)) = \overline{\nabla} \times (\overline{\nabla}U(M)) = \overline{0}.$$

Виходить, що векторне поле $\overline{\nabla}U(M)$ є потенціальним векторним полем.

2.15 Операції векторного аналізу у криволінійних координатах

Прямокутна декартова система координат, в якій були розглянуті операції векторного аналізу, є найбільш поширеною системою координат. Але у деяких випадках зручно користуватись іншими системами координат.

Якщо між кожною точкою M тривимірного простору та трьома числами, взятими у певному порядку, встановлена взаємно однозначна відповідність, то тим самим у тривимірному просторі задана система так званих криволінійних координат точки M .

Частинними випадками криволінійних координат є циліндричні та сферичні координати.

У циліндричних координатах точці $M(x; y; z)$ відповідає точка $M(\rho; \varphi; z)$, де

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \\ z = z. \end{cases} \quad (2.70)$$

Координатні поверхні у циліндричній системі координат є наступні:

$\rho = \rho_0$ – кругові циліндри, віссю симетрії яких є вісь Oz ;

$\varphi = \varphi_0$ – півплощини, які розходяться у радіальних напрямках від осі Oz ;

$z = z_0$ – площини, перпендикулярні до осі Oz .

Координатні лінії у циліндричній системі координат:

- промені, що відповідають змінній ρ , які перпендикулярні до осі Oz та починаються на осі Oz ;

- кола з центром на осі Oz , що відповідають змінній φ та лежать у площинах, паралельних площині xOy ;
- прямі, що відповідають змінній z та паралельні осі Oz .

Одиничні вектори $\overline{e_\rho}, \overline{e_\varphi}, \overline{e_z}$ напрямлені по дотичних до координатних ліній та утворюють базис у циліндричній системі координат.

У сферичних координатах точці $M(x; y; z)$ відповідає точка $M(\rho; \theta; \varphi)$, де

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta; \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta; \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (2.71)$$

Координатні поверхні у сферичній системі координат є такі:

$\rho = \rho_0$ – сфери з центром у точці $O(0; 0; 0)$ та з радіусом ρ_0 ;

$\theta = \theta_0$ – кругові півконуси з віссю симетрії Oz ;

$\varphi = \varphi_0$ – півплощини, які розходяться у радіальних напрямках від осі Oz .

Координатні лінії у сферичній системі координат:

проміні, що відповідають змінній ρ та виходять з точки $O(0; 0; 0)$;

лінії, що відповідають змінній θ та являють собою меридіани на сфері;

лінії, що відповідають змінній φ та являють собою паралелі на сфері.

Одиничні вектори $\overline{e_\rho}, \overline{e_\theta}, \overline{e_\varphi}$ напрямлені по дотичним до координатних ліній та утворюють базис у сферичній системі координат.

Далі розглядаємо як основні операції векторного аналізу знаходяться у циліндричних та сферичних координатах.

Таблиця 2 – Векторні операції у декартових прямокутних координатах, циліндричних та сферичних координатах

Назва векторної операції		Описання векторної операції		
	У декартових прямокутних координатах	У циліндричних координатах	У сферичних координатах	
Рівняння векторних ліній	$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}$	$\frac{dr}{P(r;\varphi;z)} = \frac{rd\varphi}{Q(r;\varphi;z)} = \frac{dz}{R(r;\varphi;z)}$	$\frac{dr}{P(r;\theta;\varphi)} = \frac{rd\theta}{Q(r;\theta;\varphi)} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{R(r;\theta;\varphi)}$	
3. Градієнт скалярного поля	$\overline{\text{grad}} U(x;y;z) = \frac{\partial U(x;y;z)}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial U(x;y;z)}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial U(x;y;z)}{\partial z} \overline{k}$	$\overline{\text{grad}} U(r;\varphi;z) = \frac{\partial U(r;\varphi;z)}{\partial r} \overline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r;\varphi;z)}{\partial \varphi} \overline{e}_\varphi + \frac{\partial U(r;\varphi;z)}{\partial z} \overline{e}_z$	$\overline{\text{grad}} U(r;\theta;\varphi) = \frac{\partial U(r;\theta;\varphi)}{\partial r} \overline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r;\theta;\varphi)}{\partial \theta} \overline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U(r;\theta;\varphi)}{\partial \varphi} \overline{e}_\varphi$	
3. Дивергенція векторного поля	$\text{div} \overline{F}(x;y;z) = \frac{\partial P(x;y;z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}$	$\text{div} \overline{F}(r;\varphi;z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rP(r;\varphi;z))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q(r;\varphi;z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial R(r;\varphi;z)}{\partial z}$	$\text{div} \overline{F}(r;\theta;\varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 P(r;\theta;\varphi))}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot Q(r;\theta;\varphi))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R(r;\theta;\varphi)}{\partial \varphi}$	

4. Циркуляція векторного поля	$C = \oint_{\Gamma} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz.$	$C = \oint_{\Gamma} P(\rho; \varphi; z) d\rho + Q(\rho; \varphi; z) d\varphi + R(\rho; \varphi; z) dz.$	$C = \oint_{\Gamma} P(\rho; \theta; \varphi) d\rho + Q(\rho; \theta; \varphi) d\theta + R(\rho; \theta; \varphi) d\varphi.$
5. Ротор векторного поля	$\operatorname{rot} \overline{F(M)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x; y; z) & Q(x; y; z) & R(x; y; z) \end{vmatrix}.$	$\operatorname{rot} \overline{F(\rho; \varphi; z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \bar{e}_\rho & \bar{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(\rho; \varphi; z) & Q(\rho; \varphi; z) & R(\rho; \varphi; z) \end{vmatrix}$	$\operatorname{rot} \overline{F(\rho; \theta; \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \bar{e}_\rho & \frac{1}{\rho \sin \theta} \bar{e}_\theta & \frac{1}{\rho} \bar{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ P(\rho; \theta; \varphi) & Q(\rho; \theta; \varphi) & R(\rho; \theta; \varphi) \end{vmatrix}$
6. Оператор Лапласа	$\Delta U(x; y; z) = \frac{\partial^2 U(x; y; z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x; y; z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x; y; z)}{\partial z^2}$	$\Delta U(\rho; \varphi; z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho; \varphi; z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho; \varphi; z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U(\rho; \varphi; z)}{\partial z^2}$	$\Delta U(\rho; \theta; \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U(\rho; \theta; \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U(\rho; \theta; \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U(\rho; \theta; \varphi)}{\partial \varphi^2}$

Приклади до пункту 2.15

Приклад 2.53. Векторне поле $\overline{F(M)}$ задане у циліндричних координатах.

$$\overline{F(M)} = \{\rho \sin \varphi; \rho^2 z; \rho^3\}.$$

Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ :

$$\begin{cases} \rho = \sin \varphi; \\ z = 0, \end{cases}$$

де $0 \leq \varphi \leq \pi$

- 1) безпосередньо;
- 2) за теоремою Стокса.

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння $\rho = \sin \varphi$ визначає коло, яке описується, коли $\varphi \in [0; \pi]$. Це коло лежить на площині xOy .

- 1) Знаходимо циркуляцію по контуру Γ безпосередньо за формулою

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \rho \sin \varphi d\rho + \rho^2 z d\varphi + \rho^3 dz.$$

На контурі Γ : $z = 0, dz = 0$, тому

$$\Pi = \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin \varphi \cos \varphi d\rho = \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\rho = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = 0.$$

- 2) За теоремою Стокса маємо:

$$\Pi = \iint_T \operatorname{rot} \overline{F(M)} \cdot \overline{n_0} ds.$$

За поверхню T візьмемо поле круга, обмеженого колом $\rho = \sin \varphi$ на площині $z = 0$. Тоді $\overline{n_0} = \{0; 1\}$.

$$\operatorname{rot} \overline{F(M)} = \begin{vmatrix} \overline{e_{\rho}} & \overline{\rho e_{\varphi}} & \overline{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho \sin \varphi & \rho^2 z & \rho^3 \end{vmatrix} = -\overline{\rho e_{\rho}} - 3\rho^2 \overline{e_{\varphi}} + (2z - \cos \varphi) \overline{e_z}.$$

Знаходимо $\operatorname{rot} \overline{F(M)} \cdot \overline{n_0}$.

$$\operatorname{rot} \overline{F(M)} \cdot \overline{n_0} = (-\overline{\rho e_{\rho}} \cdot 0 - 3\rho^2 \overline{e_{\varphi}} \cdot 0 + (2z - \cos \varphi) \overline{e_z} \cdot \overline{e_z}) = 2z - \cos \varphi.$$

Тоді

$$\Pi = \iint_T (2z - \cos \varphi) ds.$$

Оскільки $z = 0$, а $ds = \rho d\rho d\varphi$, то

$$\begin{aligned} \Pi &= - \iint_D \cos \varphi ds = - \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho d\rho = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \varphi \cdot \rho^2 \Big|_0^{\sin \varphi} d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{1}{6} \sin^3 \varphi \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь : 0.

Приклад 2.54. Векторне поле $\overline{F(M)} = \{\cos \varphi \sin \theta; \cos \varphi \cos \theta; -\sin \varphi\}$ задане у сферичних координатах. Знайти $\overline{\text{rot } F(M)}$.

Р о з в ' я з а н н я

У сферичній системі координат

$$\overline{\text{rot } F(M)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \overline{e_\rho} & \frac{1}{\rho \sin \theta} \overline{e_\theta} & \frac{1}{\rho} \overline{e_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ P(\rho; \theta; \varphi) & \rho Q(\rho; \theta; \varphi) & \rho \sin \theta R(\rho; \theta; \varphi) \end{vmatrix},$$

$$\overline{\text{rot } F(M)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \overline{e_\rho} & \frac{1}{\rho \sin \theta} \overline{e_\theta} & \frac{1}{\rho} \overline{e_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ P(\rho; \theta; \varphi) & \rho Q(\rho; \theta; \varphi) & \rho \sin \theta R(\rho; \theta; \varphi) \end{vmatrix},$$

тобто

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot } F(M)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \overline{e_\rho} & \frac{1}{\rho \sin \theta} \overline{e_\theta} & \frac{1}{\rho} \overline{e_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= (-\rho \sin \varphi \cos \theta + \rho \cos \theta \sin \varphi) \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \overline{e_\rho} - (-\sin \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \theta) \frac{1}{\rho \sin \theta} \overline{e_\theta} + \\ &\quad + (\cos \theta \cos \varphi - \cos \varphi \cos \theta) \frac{1}{\rho} \overline{e_\varphi} = \overline{0}. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь : $\overline{0}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає геометричний зміст похідної за напрямком?
2. Яку характеристику векторного поля можна обчислювати за допомогою поверхневого інтеграла другого роду?
3. Назовіть методи обчислювання потоку векторного поля.
4. Що відноситься до характеристик векторного поля?
5. Що називається дивергенцією векторного поля?
6. У чому полягає фізичний зміст дивергенції?
7. До яких величин належить ротор: до векторних чи до скалярних?
8. У чому полягає фізичний зміст ротора?
9. Яке співвідношення встановлює зв'язок між потоком та дивергенцією векторного поля?
10. Сформулюйте теорему Остроградського-Гаусса у скалярній та векторній формах.
11. Яку характеристику векторного поля можна обчислювати за допомогою криволінійного інтеграла другого роду?
12. У чому полягає фізичний зміст циркуляції векторного поля?
13. За якою формулою визначається циркуляція векторного поля, якщо контур задано в явній формі?
14. За якою формулою визначається циркуляція векторного поля, якщо контур задано у параметричній формі?
15. Сформулюйте теорему Стокса у скалярній та векторній формах.
16. Що спільного між теоремами Остроградського-Гаусса та Стокса?
17. Наведіть приклади векторних полів.
18. Яке векторне поле називається потенціальним векторним полем?
19. Яке векторне поле називається соленоїдальним векторним полем?
20. Що називається векторним потенціалом векторного поля?
21. Що називається скалярним потенціалом векторного поля?
22. Як розміщені векторні лінії соленоїдального векторного поля?
23. Що називається ротором векторного поля?
24. Чи можна вважати векторне поле $\overline{\text{grad}} U(x; y; z)$ потенціальним векторним полем?
25. Що являють собою оператори Гамільтона та Лапласа?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Задане скалярне поле

$$U(M) = 4x - 3y + 2z.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) поверхнями рівня скалярного поля $U(M)$ є сім'я параболоїдів;
- 2) поверхнями рівня скалярного поля $U(M)$ є сім'я паралельних площин;
- 3) поверхнями рівня скалярного поля $U(M)$ є сім'я концентричних сфер;
- 4) інша відповідь?

2. Задане скалярне поле

$$U(M) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{11}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) до ліній рівня скалярного поля $U(M)$ належить еліпс

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{11} = 1;$$

- 2) до ліній рівня скалярного поля $U(M)$ належить еліпс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{22} = 1;$$

- 3) до ліній рівня скалярного поля $U(M)$ належить еліпс

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{22} = 1;$$

- 4) інша відповідь?

3. Задане скалярне поле

$$U(M) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) до поверхонь рівня скалярного поля $U(M)$ належить однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1;$$

- 2) до поверхонь рівня скалярного поля $U(M)$ належить однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{90} - \frac{z^2}{40} = 1;$$

3) до поверхонь рівня скалярного поля $U(M)$ належить однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$$

4) інша відповідь?

4. Задані скалярне поле

$$U(M) = xe^y + ye^x - z^2,$$

вектор $\vec{l} = \{1; 1; 1\}$ та точка $M_0(3; 0; 2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

$$1) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = e^3 \sqrt{3}; \quad 2) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = \frac{e^3}{\sqrt{3}};$$

$$3) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = e^3 + \sqrt{3}; \quad 4) \text{інша відповідь?}$$

5. Задані скалярне поле

$$U(M) = x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

вектор $\vec{l} = \{4; 3\}$ та точка $M_0(2; -1)$.

Яке з тверджень є справедливим:

$$1) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = 2,6; \quad 2) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = 26;$$

$$3) \frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = 0,26; \quad 4) \text{інша відповідь?}$$

6. Задані скалярне поле

$$U(M) = 3x^2 - 4ye^2 + 6z$$

та точка $M_0(1; -1; 2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

$$1) \overline{\text{grad}} U(M_0) = \{6; 8; 6\}; \quad 2) \overline{\text{grad}} U(M_0) = \{6; -8; 2\};$$

$$3) \overline{\text{grad}} U(M_0) = \{3; -4; 6\}; \quad 4) \text{інша відповідь?}$$

7. Задані скалярне поле

$$U(M) = x^2 + 4xyz$$

точки $M_1(1; 2; -1)$ та $M_2(2; 1; -1)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) вектори $\overline{\text{grad}} U(M_1)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_2)$ колінеарні;
- 2) вектори $\overline{\text{grad}} U(M_1)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_2)$ перпендикулярні;
- 3) вектори $\overline{\text{grad}} U(M_1)$ та $\overline{\text{grad}} U(M_2)$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$;
- 4) інша відповідь?

8. Задані векторне поле

$$\overline{F}(M) = 4x^3\bar{i} + 9y^2z\bar{j} - 7z^3\bar{k}$$

та точка $M_0(0; 1; -1)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\text{div} \overline{F}(M_0) = -32$;
- 2) $\text{div} \overline{F}(M_0) = 32$;
- 3) $\text{div} \overline{F}(M_0) = 0$;
- 4) інша відповідь?

9. Задані векторне поле

$$\overline{F}(M) = 5\sqrt{x}y\bar{i} + 4y^2\bar{j} + 2z\bar{k}$$

та точка $M_0(1; 2; -2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\text{div} \overline{F}(M_0) = 23$;
- 2) $\text{div} \overline{F}(M_0) = 5$;
- 3) $\text{div} \overline{F}(M_0) = 0$;
- 4) інша відповідь?

10. Задані скалярне поле

$$U(M) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

та точка $M_0(1; 1; 0)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\text{div} \overline{\text{grad}} U(M_0) = 2$;
- 2) $\text{div} \overline{\text{grad}} U(M_0) = 4$;
- 3) $\text{div} \overline{\text{grad}} U(M_0) = 6$;
- 4) інша відповідь?

11. Задані скалярне поле

$$U(M) = x^2z^2 - 5x^2 + 9y^2$$

та точка $M_0(2; -1; 0)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} U(M_0) = 0$;
- 2) $\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} U(M_0) = 1$;
- 3) $\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} U(M_0) = -1$;
- 4) інша відповідь?

12. Задані векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{4x^3; 5y^2; 6z\}$$

та точка $M_0(0; 1; -1)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\overline{\text{rot rot } F(M_0)} = 0$; 2) $\overline{\text{rot rot } F(M_0)} = 4$;
3) $\overline{\text{rot rot } F(M_0)} = 6$; 4) інша відповідь?

13. Задані векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{x^2 + y^2; y^2 + z^2; z^2 + x^2\}$$

та точка $M_0(1; -1; 1)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\overline{\text{div rot } F(M_0)} = 0$; 2) $\overline{\text{div rot } F(M_0)} = -1$;
3) $\overline{\text{div rot } F(M_0)} = 2$; 4) інша відповідь?

14. Задані векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{xyz; xyz^2; xy^2z^2\}$$

та точка $M_0(2; -1; 2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\overline{\text{grad div } F(M_0)} = \{0; 1; -3\}$; 2) $\overline{\text{grad div } F(M_0)} = \{8; -14; 11\}$;
3) $\overline{\text{grad div } F(M_0)} = \{2; 2; -1\}$; 4) інша відповідь?

15. Задане соленоїдальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{0; 0; e^x - e^y\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; e^x - xe^y; 0\};$$

- 2) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; 0; ye^x - xe^y\};$$

- 3) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; 0; e^{x+y}\};$$

- 4) інша відповідь?

16. Задане соленоїдальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{1; 1; 1\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; x; y - x\};$$

2) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{x; 0; y - x\};$$

3) векторний потенціал соленоїдального векторного поля має вигляд

$$\overline{\Phi(M)} = \{0; 0; y - x\};$$

4) інша відповідь?

17. Задано потенціальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{2xyz; x^2z; x^2y\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = x^2yz;$$

2) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = xy^2z;$$

3) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = xyz^2;$$

4) інша відповідь?

18. Задано потенціальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = (yz + 1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = x + xyz, \text{ де } c = \text{const};$$

2) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = y + xyz, \text{ де } c = \text{const};$$

3) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = z + xyz, \text{ де } c = \text{const};$$

4) інша відповідь?

19. Задано потенціальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{C_1; C_2; C_3\},$$

де $C_1, C_2, C_2 - \text{const.}$

Яке з тверджень є справедливим:

1) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = C_1x + C_2y + C_3z + C;$$

2) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = (C_1 + C_2 + C_3)(x + y + z);$$

3) скалярний потенціал потенціального векторного поля має вигляд

$$U(M) = C_1x^2 + C_2y^2 + C_3z^2 + C;$$

4) інша відповідь?

20. Задано потенціальне векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{y^2 + z^2; x^2 + z^2; x^2 + y^2\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

$$1) \nabla^2 \overline{F(M)} = 4\{x; y; z\}; \quad 2) \nabla^2 \overline{F(M)} = \{x; y; z\};$$

$$3) \nabla^2 \overline{F(M)} = \vec{0}; \quad 4) \text{інша відповідь?}$$

21. Задані векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{y; -2z; x\}$$

та замкнений контур

$$\Gamma: \begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = R^2; \\ x - y = 0, \end{cases}$$

який обходиться у додатному напрямку.

Яке з тверджень є справедливим:

$$1) \text{циркуляція векторного поля } \overline{F(M)} \text{ по контуру } \Gamma \text{ дорівнює } \mathcal{C} = 3\pi R^2;$$

$$2) \text{циркуляція векторного поля } \overline{F(M)} \text{ по контуру } \Gamma \text{ дорівнює } \mathcal{C} = \pi R^2;$$

$$3) \text{циркуляція векторного поля } \overline{F(M)} \text{ по контуру } \Gamma \text{ дорівнює } \mathcal{C} = 3\pi;$$

4) інша відповідь?

22. Задані векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{z^2; x^2; y^2\}$$

та замкнений контур

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ x + y + z = R, \end{cases}$$

який обходиться у додатному напрямку.

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) циркуляція векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ дорівнює $\Pi = \frac{4}{3}\pi R^3$;
- 2) циркуляція векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ дорівнює $\Pi = 4\pi R^3$;
- 3) циркуляція векторного поля $\overline{F(M)}$ по контуру Γ дорівнює $\Pi = \pi R^3$;
- 4) інша відповідь?

23. Задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) векторне поле $\overline{F(M)}$ у сферичних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \sin \theta \overline{e_\varphi}$;
- 2) векторне поле $\overline{F(M)}$ у сферичних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \cos \theta \overline{e_\varphi}$;
- 3) векторне поле $\overline{F(M)}$ у сферичних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \sin \theta \overline{e_\Theta}$;
- 4) інша відповідь?

24. Задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \{xz; yz; -z\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \rho z (\overline{e_\rho} - \overline{e_z})$;
- 2) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \overline{e_\rho} - \overline{e_z}$;
- 3) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд $\overline{F(M)} = \{\overline{e_\rho}; \overline{e_\varphi}; \overline{e_z}\}$;
- 4) інша відповідь?

25. Задане векторне поле

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \overline{e_\rho}; \overline{e_\phi}; -\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \overline{e_z} \right\};$$

2) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд

$$\overline{F(M)} = \left\{ \rho \overline{e_\rho}; \overline{e_\phi}; -z \overline{e_z} \right\};$$

3) векторне поле $\overline{F(M)}$ у циліндричних координатах має вигляд

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \overline{e_\rho}; \overline{e_\phi}; -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \overline{e_z} \right\};$$

4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Задані скалярне поле $U = f(x; y; z)$, точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$.

Знайти:

1) градієнт скалярного поля $U = f(x; y; z)$ у точці A ;

2) похідну за напрямком вектора $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$ та обчислити її значення у точці A .

№ завдання	$U = f(x; y; z)$	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$\vec{S}$
1.01	$U = x^2 y + xy^3 z$	$A(1; 1; 2)$	$B(2; 3; 1)$	$\overrightarrow{AB}$
1.02	$U = x^3 yz + xy^2$	$A(1; 1; 3)$	$B(3; -1; 2)$	$\overrightarrow{AB}$
1.03	$U = x^2 y + xy^2$	$A(3; 1; 3)$	$B(4; 0; 2)$	$\overrightarrow{AB}$
1.04	$U = xy + xy^2 z$	$A(2; 2; 1)$	$B(5; 1; 1)$	$\overrightarrow{AB}$
1.05	$U = xy^2 z + \frac{y}{z}$	$A(2; 1; 1)$	$B(3; 2; -1)$	$\overrightarrow{AB}$
1.06	$U = x^3 z - y^2 xz$	$A(2; -1; 1)$	$B(3; 1; 0)$	$\overrightarrow{AB}$
1.07	$U = x^2 yz + xy^2 z^2$	$A(1; 1; 2)$	$B(3; 4; 1)$	$\overrightarrow{AB}$
1.08	$U = \frac{x + yz}{x^2 + y^2}$	$A(-1; -2; 1)$	–	$\vec{S} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$
1.09	$U = \frac{xyz}{x^2 + y^2}$	$A(2; -1; -1)$	–	$\vec{S} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
1.10	$U = \arctg \frac{xy}{2z}$	$A(3; 2; 1)$	$B(2; 2; 3)$	$\overrightarrow{AB}$
1.11	$U = x^2 + xyz + y^2$	$A(1; 1; -1)$	$B(0; 3; 1)$	$\overrightarrow{AB}$
1.12	$U = xy^4 z + 4yz$	$A(1; 2; 2)$	–	$\vec{S} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
1.13	$U = 4xyz + 5z$	$A(-1; 2; 1)$	–	$\vec{S} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$

Задані скалярне поле $U = f(x; y; z)$, точка $A(x_1; y_1; z_1)$ та вектор $\vec{S}$.

Знайти:

1) градієнт скалярного поля $U = f(x; y; z)$ у точці A ;

2) похідну за напрямком вектора $\vec{S}$ та обчислити її значення у точці A .

№ завдання	$U = f(x; y; z)$	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$\bar{S}$
1.14	$U = \operatorname{arctg}(xyz)$	$A(1; 2; 3)$	–	$\bar{S} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
1.15	$U = \frac{x}{y^2} + 4xz$	$A(2; 1; -1)$	–	$\bar{S} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$
1.16	$U = \ln(x^2 yz)$	$A(1; -1; 2)$	–	$\bar{S} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$
1.17	$U = \operatorname{arctg} \frac{yz}{x}$	$A(1; 2; 1)$	–	$\bar{S} = 6\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$
1.18	$U = \ln(3x + 2y + z)$	$A(1; 1; 1)$	$B(2; 3; 4)$	$\overline{AB}$
1.19	$U = 3x^2 + xyz$	$A(3; -1; -2)$	–	$\bar{S} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$
1.20	$U = x^3 y + xy^3 z$	$A(2; 1; 2)$	$B(0; 1; 2)$	$\overline{AB}$
1.21	$U = x^3 + 3xz + 2y$	$A(1; -1; 1)$	$B(3; 4; -1)$	$\overline{AB}$
1.22	$U = \ln(x^2 y + yxz)$	$A(1; 1; -2)$	$B(2; 4; 2)$	$\overline{AB}$
1.23	$U = x^4 yz + 5xz$	$A(-2; 1; 1)$	–	$\bar{S} = -3\bar{i} - 2\bar{j}$
1.24	$U = 2xy^2 + xyz^2$	$A(1; 3; 2)$	$B(4; 5; 2)$	$\overline{AB}$
1.25	$U = x^3 z + y^3 z^2$	$A(-1; 1; 1)$	$B(2; 3; 1)$	$\overline{AB}$

2. Задані векторне поле $\overline{F(M)} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}$ та площина $Ax + By + Cz + D = 0$, яка разом з координатними площинами утворює піраміду Ω . Нехай σ_1 – основа піраміди, яка належить площині P ; Γ – контур, що обмежує поверхню σ_1 ; $\overline{n}$ – нормаль до зовнішньої сторони поверхні σ_1 .

Знайти:

- 1) потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через поверхню σ_1 у напрямку нормалі $\overline{n}$;
- 2) циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ по замкненому контуру Γ безпосередньо та за теоремою Стокса;
- 3) потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через повну поверхню σ піраміди у напрямку зовнішньої нормалі $\overline{n}$ до поверхні σ безпосередньо та за теоремою Остроградського-Гаусса.

2.01. $\overline{F} = x\overline{i} + z\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} 2x + y + z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.02. $\overline{F} = xz\overline{i} + \overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.03. $\overline{F} = 2(y - z)\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} 2x - y + z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.04. $\overline{F} = (x + y)\overline{i} - 2z\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} 3x + 2y - z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.05. $\overline{F} = (2y + x)\overline{i} + y\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - y + z = 2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.06. $\overline{F} = (2z + y)\overline{i} + 3z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.07. $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.08. $\overline{F} = xz\overline{j} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.09. $\overline{F} = xy\overline{i} - z\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} 2x + y - z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.10. $\overline{F} = xz\overline{i} + zy\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} x - y + z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.11. $\overline{F} = x\overline{i} + z\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} x + y + 2z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.12. $\overline{F} = -y\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

2.13. $\overline{F} = z\overline{i} + y\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} 2x + y - z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.14. $\overline{F} = xy\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - y - z = 3 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.15. $\overline{F} = y\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + 2y + z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.16. $\overline{F} = (x + z)\overline{i} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.17. $\overline{F} = (y + z)\overline{i} + \overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} 3x + 2y - z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.18. $\overline{F} = y\overline{i} - 2z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + y - z = 3 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.19. $\overline{F} = y\overline{i} - z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + y + z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.20. $\overline{F} = x\overline{i} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} 2x + y + z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.21. $\overline{F} = xz\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + y + z = 2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.22. $\overline{F} = yzi\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x + y + 2z = 2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.23. $\overline{F} = y\overline{j} + 4\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} 2x - y + z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	2.24. $\overline{F} = y^2\overline{j} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x - y + z = 6 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
2.25. $\overline{F} = xzi\overline{i}$, $\sigma: \begin{cases} x + y + z = 2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	

3. Задані векторне поле $\overline{F(M)} = 5\sqrt{x}y\overline{i} + 4y^2\overline{j} + 2z\overline{k}$ та замкнена поверхня σ , що складається з поверхні другого порядку σ_1 та площин. Поверхня σ_1 обмежена контуром Γ ; $\overline{n}$ нормаль до зовнішньої сторони поверхні σ_1 .

Знайти:

- 1) потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через зовнішню сторону поверхні σ_1 ;
- 2) циркуляцію векторного поля $\overline{F(M)}$ по замкнутому контуру Γ безпосередньо та за теоремою Стокса;
- 3) потік векторного поля $\overline{F(M)}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні σ безпосередньо та за теоремою Остроградського-Гаусса.

3.01. $\overline{F} = xy\overline{i} + z\overline{j} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$	3.02. $\overline{F} = xy\overline{i} + z^2\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} y^2 = 1 - x - z & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$
3.03. $\overline{F} = xyz\overline{i} + y\overline{j} + y^2\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 2 - y^2 & (\sigma_1); \\ x = 1; x = 2; y \geq 0. \end{cases}$	3.04. $\overline{F} = xy\overline{i} + z\overline{j} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 1. \end{cases}$
3.05. $\overline{F} = y\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 2 - x^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; y = 2. \end{cases}$	3.06. $\overline{F} = xy\overline{i} + x^2\overline{j} - y\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 1. \end{cases}$
3.07. $\overline{F} = xy\overline{i} - z^2y\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 1. \end{cases}$	3.08. $\overline{F} = z\overline{i} - xy\overline{j} + x^2\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 1 - x^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; y = 3. \end{cases}$
3.09. $\overline{F} = 2\overline{i} + y\overline{j} + xy\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 2. \end{cases}$	3.10. $\overline{F} = z\overline{i} - xy\overline{j} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 2. \end{cases}$
3.11. $\overline{F} = xyz\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 2 - x^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; y = 2. \end{cases}$	3.12. $\overline{F} = x\overline{i} - xy\overline{j} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + z = 4 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; y = 2. \end{cases}$

3.13. $\overline{F} = y\overline{i} + \overline{j} - xz\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 1. \end{cases}$	3.14. $\overline{F} = xy\overline{i} - y\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 2. \end{cases}$
3.15. $\overline{F} = xz\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; x = 1. \end{cases}$	3.16. $\overline{F} = y\overline{i} - zx\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} y^2 + z^2 = x & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; x = 1. \end{cases}$
3.17. $\overline{F} = z\overline{i} + xy\overline{j} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; x = 2. \end{cases}$	3.18. $\overline{F} = xy\overline{i} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 3. \end{cases}$
3.19. $\overline{F} = xy\overline{i} + \overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; x = 1. \end{cases}$	3.20. $\overline{F} = z\overline{i} - xy\overline{j} + x^2\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 2 - x^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; y = 2. \end{cases}$
3.21. $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + zx\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 0; z = 2. \end{cases}$	3.22. $\overline{F} = x\overline{i} + 2y\overline{j}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 3. \end{cases}$
3.23. $\overline{F} = xz\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} z = 1 - x^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 1; y = 2; z = 0. \end{cases}$	3.24. $\overline{F} = (1 - 2x)\overline{i} + 2y\overline{j} + 2z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (\sigma_1); \\ x = 0; y = 0; z = 4. \end{cases}$
3.25. $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (\sigma_1); \\ z = 1; x = 0. \end{cases}$	

4. Перевірити, чи є векторне поле $\overline{F(M)} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}$:

1) соленоїдальним;

2) потенціальним.

Якщо векторне поле $\overline{F(M)}$ є потенціальним векторним полем, то знайти його потенціал.

4.01. $\overline{F} = (4x + yz)\overline{i} + (4y + xz)\overline{j} + (4z + xy)\overline{k}$.

4.02. $\overline{F} = (x + yz)\overline{i} + (y + xz)\overline{j} + (z + xy)\overline{k}$.

4.03. $\overline{F} = (2x + 5yz)\overline{i} + (2y + 5xz)\overline{j} + (2z + 5xy)\overline{k}$.

4.04. $\overline{F} = (3x + yz)\overline{i} + (3y - xz)\overline{j} + (3z - xy)\overline{k}$.

4.05. $\overline{F} = (x + 5yz)\overline{i} + (y + 5xz)\overline{j} + (z + 5xy)\overline{k}$.

4.06. $\overline{F} = (5x + 4yz)\overline{i} + (5y + 4xz)\overline{j} + (5z + 4xy)\overline{k}$.

4.07. $\overline{F} = (x - 2yz)\overline{i} + (y - 2xz)\overline{j} + (z - 2xy)\overline{k}$.

4.08. $\overline{F} = (7x + 2yz)\overline{i} + (7y + 2xz)\overline{j} + (7z + 2xy)\overline{k}$.

4.09. $\overline{F} = (3x + yz)\overline{i} + (3y + xz)\overline{j} + (3z + xy)\overline{k}$.

4.10. $\overline{F} = (x - 5yz)\overline{i} + (y - 5xz)\overline{j} + (z - 5xy)\overline{k}$.

4.11. $\overline{F} = (2x + 3yz)\overline{i} + (2y + 3xz)\overline{j} + (2z + 3xy)\overline{k}$.

4.12. $\overline{F} = (9x + 5yz)\overline{i} + (9y + 5xz)\overline{j} + (9z + 5xy)\overline{k}$.

4.13. $\overline{F} = (x + 3yz)\overline{i} + (y + 3xz)\overline{j} + (z + 3xy)\overline{k}$.

4.14. $\overline{F} = (x + 7yz)\overline{i} + (y + 7xz)\overline{j} + (z + 7xy)\overline{k}$.

4.15. $\overline{F} = (10x - zy)\overline{i} + (10y - xz)\overline{j} + (10z - xy)\overline{k}$.

4.16. $\overline{F} = (x + xy)\overline{i} + (y + 2xz)\overline{j} + (z + 2xy)\overline{k}$.

4.17. $\overline{F} = (2x - 3yz)\overline{i} + (2y - 3xz)\overline{j} + (2z - 3xy)\overline{k}$.

4.18. $\overline{F} = (yz - 3x)\overline{i} + (xz - 3y)\overline{j} + (xy - 3z)\overline{k}$.

4.19. $\overline{F} = (-2x - yz)\overline{i} + (-2y - xz)\overline{j} + (-2z - xy)\overline{k}$.

4.20. $\overline{F} = (2yz - x)\overline{i} + (2xz - y)\overline{j} + (2xy - z)\overline{k}$.

4.21. $\overline{F} = (2x + 4yz)\overline{i} + (2y + 4xz)\overline{j} + (2z + 4xy)\overline{k}$.

4.22. $\overline{F} = (x + 4yz)\overline{i} + (y + 4xz)\overline{j} + (z + 4xy)\overline{k}$.

4.23. $\overline{F} = (x - 10yz)\overline{i} + (y - 10xz)\overline{j} + (z - 10xy)\overline{k}$.

4.24. $\overline{F} = (2x + yz)\overline{i} + (2y + xz)\overline{j} + (2z + xy)\overline{k}$.

4.25. $\overline{F} = (9x - yz)\overline{i} + (9y - xz)\overline{j} + (9z - xy)\overline{k}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Задане скалярне поле

$$U(M) = x^2 - y^2 + z^2.$$

Знайти поверхню рівня скалярного поля, яка проходить через точку $(1; 2; 1)$.

Задача 2. Знайти лінії рівня скалярного поля

$$U(M) = \ln \sqrt{\frac{y}{2x}}.$$

Задача 3. Знайти похідну скалярного поля

$$U(M) = x^2 y + x z^2 - 2$$

у напрямку вектора $\overline{M_1 M_2}$, якщо задані точки $M_1(1; 1; -1)$; $M_2(2; -1; 3)$.

Задача 4. Знайти похідну скалярного поля

$$U(M) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

у точці $M_0(2; -2)$, що лежить на колі $x^2 - 4x + y^2 = 0$ у напрямку цього кола.

Задача 5. Знайти похідну скалярного поля

$$U(M) = 2xy + y^2$$

у точці $M_0(\sqrt{2}; 1)$, що лежить на еліпсі $x^2 + 2y^2 = 4$ за напрямком зовнішньої нормалі до еліпсу у точці M_0 .

Задача 6. Задане скалярне поле $U(M) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y+z}$ та точки $M_1(1; 1; 0)$;

$M_1(-1; 0; 1)$. Знайти кут між векторами $\overline{\operatorname{grad} U(M_1)}$ та $\overline{\operatorname{grad} U(M_2)}$.

Задача 7. Знайти найбільшу швидкість змінення скалярного поля

$$U(M) = \ln^2(x^2 + y^2 + 4z)$$

у точці $M_0(0; 1; 2)$.

Задача 8. Довести, що

$$U(M) = \overline{\operatorname{grad} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y\bar{i} + x\bar{j}).$$

Задача 9. Знайти векторні лінії векторного поля $\overline{F(M)} = \overline{\operatorname{grad}(xyz)}$.

Задача 10. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; y; z\}$ через ту частину площини $y + z - 1 = 0$, яка розміщується у першому октанті та

відтинається площиною $x - 2 = 0$, якщо нормаль до площини $y + z - 1 = 0$ з додатим напрямом осі Oz утворює тупий кут.

Задача 11. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{2x; 2y; 1 - 2z\}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні T , утвореної поверхнями $x^2 + y^2 = 1 - 2z$ та $z = 0$.

Задача 12. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{2x + 3; 3y - 1; 4z - 3\}$ через зовнішню сторону поверхні T , що являє собою ту частину площини $10x + 6y + 15z - 30$, яка розміщена у першому октанті.

Задача 13. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{x; y; \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\}$ через зовнішню сторону однопорожнинного гіперболоїда $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, обмеженого площинами $z = 0$ та $z = \sqrt{3}$.

Задача 14. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{3x; -y; -z\}$ через зовнішню сторону поверхні $x^2 + y^2 = 9 - z$, яка розміщується у першому октанті.

Задача 15. Знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{xz; -yz; z^2\}$ через поверхню T , що являє собою ту частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, яка розміщена над площиною $z = 2$.

Задача 16. Знайти дивергенцію векторного поля

$$\overline{F(M)} = \left\{ \frac{1}{(x + y + z)^{\frac{2}{3}}}; \frac{1}{(x + y + z)^{\frac{2}{3}}}; \frac{1}{(x + y + z)^{\frac{2}{3}}} \right\}.$$

Задача 17. Користуючись теоремою Остроградського-Гаусса, знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{x^3; y^3; z^3\}$ через зовнішню сторону поверхні куба $|x| \leq 5, |y| \leq 5, |z| \leq 5$.

Задача 18. Користуючись теоремою Остроградського-Гаусса, знайти потік векторного поля $\overline{F(M)} = \{z - y; x - z; y - x\}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні

$$T: \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y - z = 1; \\ x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Задача 19. Користуючись оператором Гамільтона, довести, що вектор напруги $\overline{H}$ магнітного поля задовольняє хвильовому рівнянню

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \overline{H},$$

де ε – коефіцієнт електричної проникливості; μ – коефіцієнт магнітної проникливості; c – швидкість світла у порожнині.

Задача 20. Знайти векторний потенціал соленоїдального векторного поля

$$\overline{F(M)} = 6y^2 \overline{i} + 6z \overline{j} + 6x \overline{k}.$$

Задача 21. Знайти векторний потенціал соленоїдального векторного поля

$$\overline{F(M)} = \{ye^{x^2}; 2yz; -2xyze^{x^2} - z^2\}.$$

Задача 22. Довести, що коли скалярна функція $U(M)$ є гармонічною, то векторне поле $\nabla U(M)$ є соленоїдальним та потенціальним векторним полем.

Задача 23. Довести, що векторне поле $\overline{F(M)} = \frac{\overline{r}}{r^2}$ є гармонічним векторним полем ($\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $r = |\overline{r}|$).

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. $x^2 - y^2 + z^2 = -2$.

Задача 2. $2x - y = c$.

Задача 3. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Задача 4. $\frac{1}{4}$.

Задача 5. $\frac{2(2\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3}}$.

Задача 6. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Задача 7. $\overline{\text{grad}}U(M) = \frac{4}{9}(3\bar{i} + 4\bar{k})\ln 3$; $V_{\max} = \frac{20}{9}\ln 3$.

Задача 8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ y - z = c, \end{cases}$ де $c = \text{const}$; $R = \text{const}$.

Задача 9. $K = -2$.

Задача 10. $K = \frac{\pi}{2}$.

Задача 11. $K = \frac{69}{2}$.

Задача 12. $K = 2\pi\sqrt{3}$.

Задача 13. $K = \frac{81}{8}\pi$.

Задача 14. $K = 45\pi$.

Задача 15. $-\frac{2}{(x + y + z)^{\frac{5}{3}}}$.

Задача 16. $24 \cdot 5^5$.

Задача 17. 0.

Задача 18. $K = 60\pi$.

Задача 19. $\overline{\Phi(M)} = \{0; 3x^2; 2y^2 - 6xz\}$

Задача 20. $\overline{\Phi(M)} = \{0; -xz^2 - yze^{x^2}; -2xyz\}$.

Задача 21. Векторне поле є потенціальним векторним полем.

СПИСОК ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ

1. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. І. Підручник для фахівців в галузі зв'язку / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса, 2010. – 594 с.
2. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. II. Підручник для фахівців в галузі зв'язку / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса, 2010. – 620 с.
3. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. III. Підручник для фахівців в галузі зв'язку / Стрелковська І. В., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса, 2012. – 494 с.
4. Овчинников І. І. Вища математика. Ч. I, II / Овчинников І. І., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К.: Техніка, 2000.
5. Бойко В. О. Інтеграли та ряди: метод. вказ. / Бойко В. О., Паскаленко В. М., Стрелковська І. В., Харсун О. М., 2000.
6. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 592 с.
7. Литвин І. І. Вища математика / І. І. Литвин, Г. О. Конанчук, Г. О. Желєзняк. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 368 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

**Стрелковська Ірина Вікторівна,
Паскаленко Вікторія Миколаївна**

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

*Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти,
які навчаються за спеціальностями
галузі 12 Інформаційні технології*

Українською мовою