

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська юридична академія»

Кафедра штучного інтелекту та математичного моделювання

Баландіна Н. М.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології», за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення»

F3 «Комп'ютерні науки»

F5 «Кібербезпека та захист інформації»

Одеса 2026

*Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична академія»
(протокол № 5 від «24» червня 2026 р.)*

Укладач:

Баландіна Н. М. – старший викладач кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3121-4517>.

Рецензенти:

Якімова Н.А. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Щербина Ю.В. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія».

Дискретна математика: методичні рекомендації для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої освіти у галузі знань F «Інформаційні технології», за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп’ютерні науки», F5 «Кібербезпека та захист інформації» [Електронне видання] / уклад.: Н.М. Баландіна; Нац. ун-т «Одеська юрид. академія». – Одеса, 2026. - 80 с. - Режим доступу: <https://hdl.handle.net/11300/33631>

Методичні рекомендації містять стислий теоретичний матеріал, практичні поради приклади розв’язання задач, завдання для самостійної роботи, рекомендовані джерела до практичних занять та самостійної роботи, а також питання для підсумкового контролю знань і вмінь здобувачів вищої освіти.

Призначені для здобувачів вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології», які навчаються за спеціальностями F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп’ютерні науки», F5 «Кібербезпека та захист інформації» з метою закріплення лекційного матеріалу і підготовки до практичних занять з дисципліни «Дискретна математика».

ВСТУП

Дисципліна «Дискретна математика» є однією з фундаментальних складових математичної підготовки здобувачів вищої освіти галузі знань F «Інформаційні технології» та забезпечує формування теоретичної бази для вивчення професійно орієнтованих дисциплін. Засвоєння основ математичної логіки, теорії множин, комбінаторики, теорії графів, теорії відношень та булевої алгебри сприяє розвитку логічного й алгоритмічного мислення, необхідного для майбутньої професійної діяльності фахівців у сфері інформаційних технологій.

Метою вивчення дисципліни «Дискретна математика» є набуття здобувачами вищої освіти базових знань з основних розділів дискретної математики, зокрема математичної логіки, теорії множин, комбінаторики, теорії відношень і графів, а також формування навичок застосування дискретних моделей і методів для розв'язування професійних задач у галузі інформаційних технологій, програмної інженерії та кібербезпеки.

Завданнями курсу є:

- засвоєння базових понять, термінів і методів дискретної математики;
- формування вмінь будувати та аналізувати дискретні математичні моделі для опису та аналізу інформаційних процесів;
- розвиток навичок формального мислення та математичного обґрунтування рішень;
- оволодіння методами математичної логіки, комбінаторики та теорії графів;
- набуття практичних навичок застосування булевих функцій і логічних схем;
- підготовка до вивчення алгоритмів, структур даних, криптографії та інших фахових дисциплін;
- формування компетентностей, необхідних для професійної діяльності у сфері інформаційних технологій та кібербезпеки.

Опанування курсом «Дискретна математика» передбачає читання лекцій, проведення практичних занять, консультацій, виконання самостійної роботи та складання іспиту.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми після вивчення дисципліни «Дискретна математика» здобувачі вищої освіти повинні:

- знати основні поняття та методи дискретної математики, включаючи множини, відношення, функції, логіку висловлювань, булеві алгебри та графи;
- володіти методами формалізації, аналізу та моделювання дискретних структур, що використовуються в інформаційних технологіях;

- розв'язувати комбінаторні задачі, задачі теорії графів та елементарної теорії чисел;
- використовувати математичні методи для оптимізації алгоритмів та структур даних;
- застосовувати методи булевої алгебри та математичної логіки під час проєктування програмних систем, баз даних і засобів захисту інформації;
- застосовувати знання з дискретної математики для розв'язання задач програмної інженерії, комп'ютерних наук і кібербезпеки.

Методи, які використовуються під час навчання: лекція, практичне заняття, консультація, самостійна робота, дискусія, обговорення, використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Контроль знань:

- поточний (опитування, фронтальна перевірка домашніх завдань, робота біля дошки, домашні самостійні завдання, тести та контрольні роботи, виконані здобувачами вищої освіти на практичних заняттях);
- підсумковий (екзамен/залік).

Шкала оцінювання			
100-бальною шкалою	Шкала за ECTS	За національною шкалою	
		екзамен	залік
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
74-81	C		
64-73	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	Fx	незадовільно	не зараховано
1-34	F		

Поточний контроль знань здобувачів освіти оцінюється за шкалою («2», «3», «4», «5»), з обов'язковим переведенням при підсумковому контролі оцінок в бали за допомогою шкали Університету до національної шкали та шкали ECTS.

Для отримання підсумкової оцінки здобувачу освіти необхідно мати не менше $\frac{1}{2}$ оцінок від загальної кількості практичних/лабораторних занять та поточних контрольних заходів (реферату, контрольної роботи, завдань до самостійної роботи тощо).

Для переводу підсумкової оцінки у 100 бальну шкалу оцінювання знань середньоарифметична підсумкова оцінка множиться на коефіцієнт 20.

Якщо протягом вивчення навчальної дисципліни здобувач освіти, який складає екзамен, набрав не менше ніж $\frac{1}{2}$ від загальної кількості оцінок суму балів 90 та більше за шкалою оцінювання ECTS, то він має право отримати оцінку за набраними балами A/Відмінно без складання підсумкового контролю.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

№ теми	Назва теми	Лекційні заняття (год.)		Практичні заняття (год.)		Самостійна робота (год.)	
		очна	заоч-на	очна	заоч-на	очна	заоч-на
1	Елементи математичної логіки	2	2	8	2	20	26
2	Основи теорії множин	2	2	4	2	18	24
3	Відношення на множинах	2	0	2	0	10	16
4	Комбінаторний аналіз	2	0	2	0	12	16
5	Графи та їх елементи	2	2	14	2	20	26
	Всього	10	6	30	6	80	108

Кожна із запропонованих тем має переліки питань для опрацювання під час практичних занять, а також завдання для самостійної роботи для закріплення відповідного тематичного матеріалу.

НАВЧАЛЬНИЙ КОНТЕНТ

ТЕМА 1

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Питання до практичного заняття

1. Поняття висловлення. Прості та складні висловлювання.
2. Логічні операції над висловленнями.
3. Таблиці істинності: призначення та правила побудови.
4. Логічні формули.
5. Основні закони алгебри логіки.
6. Поняття булевої функції та її зв'язок з логічними висловлюваннями.
7. Форми подання булевих функцій.
8. Логіка предикатів.

Теоретичні відомості

Математична логіка є фундаментальним розділом дискретної математики та теоретичною основою сучасних інформаційних технологій. У межах даної теми розглядаються елементи логіки висловлювань, логічні сполучники та способи подання логічних виразів за допомогою таблиць істинності. Особлива увага приділяється булевим функціям і формам їх подання. Вивчення теми створює основу для аналізу алгоритмів, проектування цифрових і програмних систем та засобів захисту інформації.

Логіка висловлювань є розділом математичної логіки, що вивчає формальні властивості висловлювань — тверджень, які можуть набувати значень істинності *істина* або *хиба*. Просте висловлювання не містить логічних сполучників, складне утворюється з простих за допомогою логічних операцій. **Логічні сполучники** (операції) використовуються для побудови складних висловлювань. Основними є: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація та еквіваленція.

Запереченням висловлювання x називають таке висловлювання, яке істинне, якщо вихідне висловлювання хибне і хибне, якщо вихідне висловлювання істинне (позначення: x' , $\neg x$, $\bar{x}$).

Кон'юнкцією двох висловлювань називається таке їх складне висловлювання, яке істинне тільки в тому випадку, коли обидва вхідні в нього висловлювання істинні (позначення: $x \wedge y$, $x \cdot y$, $x \& y$, $x \text{ у } y$).

Диз'юнкцією двох висловлювань називається таке їх складне висловлювання, яке хибне тільки в тому випадку, коли обидва вхідні в нього висловлювання хибні (позначення $x \vee y$).

Імплікацією двох висловлювань називається таке їх складне висловлювання, яке хибне тільки в тому випадку, коли перше висловлювання (посилка) істинно, а друге (висновок) - хибне (позначення: $x \rightarrow y$, $x \Rightarrow y$).

Еквіваленцією двох висловлювань називається таке їх складне висловлювання, яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлювання приймають різні логічні значення і істинно тоді і тільки тоді, коли логічні значення висловлювань однакові (позначення $x \leftrightarrow y$, $x \Leftrightarrow y$, $x \sim y$, $x \equiv y$).

Кожен логічний сполучник визначається таблицею істинності, яка задає значення істинності складного висловлювання для всіх можливих комбінацій значень його складових.

Таблиця істинності — це табличний спосіб задання логічної формули, що містить усі можливі комбінації значень змінних та відповідні значення функції. Таблиці істинності є універсальним засобом аналізу логічних виразів. Вони дозволяють перевіряти логічну еквівалентність формул, визначати тавтології, суперечності та виконуваність логічних висловлювань. **Логічна еквівалентність** означає, що дві формули мають однакові значення істинності для всіх наборів змінних.

Тавтологія — формула, істинна за будь-яких значень змінних.

Суперечність — формула, хибна за будь-яких значень змінних.

Виконувана формула — формула, істинна хоча б для одного набору значень змінних.

Основні закони алгебри логіки

Назва закону	Формули
Закон тотожності	$x = x$
Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{x}} = x$
Закон виключеного третього	$\overline{x} \vee x = 1$
Закон протиріччя	$x \wedge \overline{x} = 0$
Асоціативні закони	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $x(yz) = (xy)z$
Комутативні закони	$x \vee y = y \vee x$ $xy = yx$
Дистрибутивні закони	$x(y \vee z) = xy \vee xz$ $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$
Закони поглинання	$x(x \vee y) = x$ $x \vee xy = x$

Закони склеювання	$\overline{xy} \vee xy = x$ $(x \vee \overline{y})(x \vee y) = x$
Закони ідемпотентності	$x \vee x = x$ $xx = x$
Закони de Morgan'a	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$
Закони, що визначають дії з константами	$0 \vee x = x$ $1x = x$
Закони зв'язку між операціями	$x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$ $\overline{x \rightarrow y} = x \overline{y}$ $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = \overline{x} \overline{y} \vee xy$ $x + y = \overline{x \leftrightarrow y} = \overline{x} y \vee x \overline{y}$

Булева функція — це функція, що відображає набір булевих змінних у множину $\{0,1\}$. Кожному логічному висловлюванню відповідає булева функція, а кожна булева функція може бути задана логічною формулою або таблицею істинності.

Форми подання булевих функцій включають табличну форму (таблиця істинності), аналітичну форму (логічні формули), диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ), кон'юнктивну нормальну форму (КНФ), канонічні форми: досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ), досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ).

Таблична форма подання булевої функції задає значення функції для кожної можливої комбінації вхідних змінних.

Елементарною диз'юнкцією висловлювань називається диз'юнкція цих висловлювань та їх заперечень.

Елементарною кон'юнкцією висловлювань називається кон'юнкція цих висловлювань і їх заперечень.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) — це довільна диз'юнкція різних елементарних кон'юнкцій.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) — це довільна кон'юнкція різних елементарних диз'юнкцій.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називається диз'юнктивна нормальна форма, що задовольняє властивостям досконалості:

1. Кожен логічний доданок формули містить усі змінні, що входять у функцію.
2. Всі логічні доданки формули різні.
3. Жоден логічний доданок формули не містить одночасно змінну та її заперечення.
4. Жоден логічний доданок формули не містить одну і ту ж змінну двічі.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) називається кон'юнктивна нормальна форма, що задовольняє умовам:

1. Кожен логічний доданок формули містить усі змінні, що входять у функцію.
2. Всі логічні доданки формули різні.
3. Жоден логічний доданок формули не містить одночасно змінну та її заперечення.
4. Жоден логічний доданок формули не містить одну і ту ж змінну двічі.

Предикат — це логічна функція, визначена на множині елементів, яка кожному набору аргументів ставить у відповідність логічне значення **істина (1)** або **хиба (0)**.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Для успішного опанування теми рекомендується розпочати з ознайомлення із основними поняттями математичної логіки, зокрема з поняттями висловлювання, істинності та хибності. Доцільно розглянути приклади простих і складених висловлювань, звертаючи увагу на формування логічних виразів природною мовою та їх подання у формалізованому вигляді..

При підготовці до практичного заняття, варто уважно. Необхідно звернути увагу на вивчення основних логічних сполучників (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність), їхні властивості та пріоритети виконання.

Важливим є правильне використання дужок та розуміння їх впливу на істиннісне значення логічних виразів, оскільки зміна структури формули може призвести до зовсім іншого результату обчислення. Дужки визначають порядок виконання логічних операцій і дають змогу однозначно інтерпретувати складені висловлювання.

Треба зауважити, що математична логіка не цікавиться змістовним сенсом висловлювань, а бере до уваги тільки той факт, що кожне висловлювання може бути або істинним, або хибним (і не може бути одночасно істинним і хибним).

Окрему увагу слід приділити вивченню основних законів математичної логіки. Під час вивчення законів математичної логіки доцільно поєднувати строгий формальний запис з інтуїтивним тлумаченням. Саме таке поєднання інтуїції та формул допомагає краще зрозуміти, як працюють умови if-else у програмуванні або як будуються аргументи в юридичній практиці. Рекомендується працювати поетапно: застосовувати один закон за крок, не кілька одразу.

Для глибшого розуміння законів логіки здобувачам рекомендується систематично перевіряти рівносильність формул за допомогою таблиць істинності. Це дозволяє уникнути формального заучування законів та формує навички самостійної перевірки логічних перетворень.

При підготовці до практичного заняття особливу увагу варто приділяти використанню законів логіки при спрощенні формул та приведенні їх до нормальних форм (ДНФ, КНФ). Це є базою для подальшого вивчення алгоритмів, схемотехніки, логічного програмування, методів та засобів захисту інформації.

Рекомендується детально опрацювати побудову таблиць істинності для логічних виразів різної складності, оскільки вони є базовим інструментом аналізу логічних формул і булевих функцій.

У межах теми «Булеві функції» здобувачі мають ознайомитися з поняттям булевої функції, способами її задання, набутти навичок визначення значень булевих функцій, аналізу логічних виразів та встановлення їх тотожностей. Важливо навчитися переходити між різними формами подання булевих функцій: табличною, аналітичною та логічною.

Вивчення булевих функцій та різних форм їх подання є необхідним для формалізації логічних умов, побудови алгоритмів, проєктування цифрових схем і систем керування доступом, а також для аналізу й оптимізації логічних виразів.

Здобувачам також пропонується ретельно ознайомитися з означенням предиката. Зверніть увагу, що на відміну від висловлювання, предикат не є істинним або хибним сам по собі. Він стає висловлюванням лише тоді, коли замість змінних підставлено конкретні значення: наприклад, речення типу "Він високий" (де є змінна "він") є предикатом, а не висловлюванням, поки не вказано конкретну особу.

Предикат можна розглядати як «шаблон» або «форму» висловлювання. Доки змінні вільні, не можна говорити про істинність. У програмуванні «вільна змінна» — це вхідний параметр функції, а «зв'язана змінна» — це ітератор у середині циклу.

Для фахівців із захисту інформації логіка предикатів — це мова, якою описуються політики безпеки та стани системи.

Предикати дозволяють точно описати, хто має доступ до ресурсу. Будь-яка помилка в логічному виразі — це потенційна вразливість.

Вивчаючи тему "Предикати", уявляйте себе в ролі аудиторів коду. Ваше завдання — знайти такий набір вхідних даних, при якому логічний захист (предикат істинності доступу) "зламається" або спрацює некоректно.

Приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Визначте, які з наведених речень є логічними висловлюваннями, та вкажіть їх значення істинності (1 або 0):

- A. «Увімкніть комп'ютер»
- B. «Чи працює програма?»
- C. «15 — складене число»
- D. «Усі прямокутники — квадрати»

Розв'язання.

Логічне висловлювання — це розповідне речення, про яке можна однозначно сказати, істинне воно чи хибне.

A — Не є логічним висловлюванням (наказове речення, не має істинності)

B — Не є логічним висловлюванням (питальне речення)

C — Є логічним висловлюванням, істинне $\rightarrow 1$

D — Є логічним висловлюванням, хибне $\rightarrow 0$

Відповідь: $C \rightarrow 1, D \rightarrow 0$.

Завдання 2. Нехай A — «Чотирикутник MNPQ — паралелограм»,
B — «Діагоналі чотирикутника MNPQ діляться навпіл». Сформулюйте висловлювання, які відповідають наступним формулам: $A \rightarrow B, B \rightarrow A$.

Відповідь:

$A \rightarrow B$. «Якщо чотирикутник MNPQ — паралелограм, то його діагоналі діляться навпіл».

$B \rightarrow A$. «Якщо діагоналі чотирикутника MNPQ діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм».

Завдання 3. Побудуйте таблиці істинності висловлювання $A \wedge \bar{B}$.

Розв'язання.

A	B	$\bar{B}$	$A \wedge \bar{B}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Відповідь: $A \wedge \bar{B}$: 0010

Завдання 4. Доведіть рівносильність формул $A \rightarrow B$ та $\overline{A} \vee B$ за допомогою таблиць істинності.

A	B	$\overline{A}$	$A \rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Відповідь: Так як $A \rightarrow B: 1101$ і $\overline{A} \vee B: 1101$, то формули $A \rightarrow B$ та $\overline{A} \vee B$ рівносильні.

Завдання 4. Знайти значення формули $f(x, y, z) = \overline{x}y \rightarrow \overline{z} \leftrightarrow x \vee \overline{y}z$ на наборі значень змінних (0,1,0).

Розв'язання.

Підставимо задані значення змінних у формулу і послідовно виконаємо операції згідно домовленості про економію дужок, а саме

$$f(0,1,0) = \overline{0}1 \rightarrow \overline{0} \leftrightarrow 0 \vee \overline{1}0 = 11 \rightarrow 1 \leftrightarrow 0 \vee 00 = 1 \rightarrow 1 \leftrightarrow 0 \vee 0 = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання 5. Знайдіть ДНФ(f) для

$$f(x, y, z) = (\overline{x}y \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{x(y \vee z)}}}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (\overline{x}y \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{x(y \vee z)}}} = \overline{\overline{\overline{x}y \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y}) \vee x(y \vee z)}} = \\ &= \overline{\overline{\overline{x}y(x \vee z \rightarrow \overline{y}) \vee x\overline{(x \vee z \rightarrow \overline{y})} \vee \overline{x} \vee \overline{(y \vee z)}}} = \\ &= (\overline{\overline{x} \vee \overline{y}})(\overline{\overline{x \vee z \vee \overline{y}}} \vee \overline{x}y(x \vee z)\overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = \\ &= (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y}}) \vee x\overline{y}y(x \vee z) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y}}) \vee x0(x \vee z) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = \\ &= (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y}}) \vee 0 \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y}}) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = \end{aligned}$$

$$\bar{x} \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{y} y \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee 0 \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} =$$

$$\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \text{ДНФ}_1(f).$$

Відповідь:

$$\text{ДНФ}_1(f) = \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z};$$

$$\text{ДНФ}_2(f) = \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \text{ (врахували закон поглинання } \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} = \bar{x} \bar{z} \text{)};$$

$$\text{ДНФ}_3(f) = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \text{ (врахували закон поглинання } \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} = \bar{x} \text{)};$$

$$\text{ДНФ}_4(f) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \text{ (аналогічно попередньому).}$$

Завдання 6. Навести формулу $f = (x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z)$ до ДДНФ.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм знаходження ДДНФ:

- побудуємо таблицю істинності;
- виділяємо рядки, де формула набуває значення 1;
- складаємо диз'юнкцію кон'юнкцій за умови, що якщо змінна входить у кон'юнкцію зі значенням 1, то записуємо цю змінну, якщо зі значенням 0, то її заперечення.

Отримуємо ДДНФ.

x	y	z	$\bar{z}$	$x \vee \bar{z}$	$y \rightarrow z$	$(x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Виділяємо рядки, де формула набуває значення 1, складаємо диз'юнкцію кон'юнкцій та отримуємо СДНФ:

$$\text{ДДНФ } f = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Відповідь: ДДНФ $f = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$.

Завдання 7. Нехай область розгляду — множина цілих чисел.

Визначити істинність формул:

1. $\forall x (x + 1 > x)$
2. $\exists x (x^2 = -1)$
3. $\forall x \exists y (x < y)$.

Розв'язання.

1. $\forall x (x + 1 > x)$

Твердження: "Для будь-якого цілого числа x виконується умова, що $x+1$ більше за x ".

Аналіз: Для будь-якого цілого числа x : $x+1$ завжди буде на одну одиницю праворуч на числовій осі, а отже — більшим за початкове число.

Істинність: Істинна. Це випливає з аксіом порядку для цілих чисел.

Відповідь: Формула істинна.

2. $\exists x (x^2 = -1)$

Твердження: "Існує таке ціле число x , квадрат якого дорівнює -1 ".

Аналіз: Квадрат будь-якого цілого числа завжди є невід'ємним: $x^2 \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{Z}$. Тому він не може дорівнювати -1 .

Істинність: Хибна. У множині $\mathbb{Z}$ немає такого числа.

Відповідь: Формула хибна.

3. $\forall x \exists y (x < y)$

Твердження: "Для кожного цілого числа x знайдеться таке ціле число y , яке буде більшим за x ".

Аналіз: Для будь-якого цілого числа x можна взяти, наприклад, $y = x + 1$. Тоді $x < y$.

Оскільки в множині цілих чисел немає найбільшого елемента, завжди знайдеться більше число.

Істинність: Істинна. Множина цілих чисел не має найбільшого елемента.

Відповідь: Формула істинна.

Завдання 8. Для кожного висловлювання:

1. вказати область розгляду;
2. визначити предикати;
3. встановити істинність.

а) $\forall x (x > 3 \rightarrow x^2 > 9)$

б) $\exists x (x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 16)$

в) $\forall x \exists y (y = x + 1).$

Розв'язання.

а) $\forall x (x > 3 \rightarrow x^2 > 9)$

1. Область розгляду: $\mathbb{R}$ (множина дійсних чисел).

2. Предикати:

- $P(x): x > 3$
- $Q(x): x^2 > 9$

Формула має вигляд: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$

3. Істинність:

Якщо $x > 3$, тоді $x^2 > 9$ (оскільки $3^2 = 9$, а квадрат будь-якого числа більшого за 3 буде більшим за 9).

Якщо ж $x \leq 3$, імплікація істинна (бо її умова $P(x)$ хибна).

Відповідь: Висловлювання істинне (на $\mathbb{R}$).

б) $\exists x (x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 16)$

1. Область розгляду: $\mathbb{N}$ (множина натуральних чисел).

2. Предикати:

- $P(x): x \in \mathbb{N}$
- $Q(x): x^2 = 16$

Формула має вигляд: $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$

3. Істинність:

Існує число $x = 4$. Воно є натуральним і задовольняє рівняння $4^2 = 16$.

Відповідь: Висловлювання істинне.

в) $\forall x \exists y (y = x + 1)$

1. Область розгляду: $\mathbb{Z}$ (можна також $\mathbb{R}$ або $\mathbb{N}$ — твердження буде істинним у кожній із цих множин).

2. Предикат:

- $P(x, y): y = x + 1$ (двомісний предикат, що виражає відношення між x та y).

Формула має вигляд: $\forall x \exists y P(x, y).$

3. Істинність:

Для будь-якого числа x існує $y = x + 1$. У множинах чисел R, Z операція додавання одиниці завжди визначена. Для будь-якого обраного числа x завжди можна знайти значення y , просто додавши 1 до x .

Відповідь: Висловлювання істинне.

Питання для обговорення

1. Що називається **висловлюванням** у математичній логіці?
2. Які речення **не є висловлюваннями**? Наведіть приклади.
3. Що таке **істинність** і **хибність** висловлювання?
4. Які значення може набувати логічна змінна?
5. Що таке **логічне заперечення** ($\neg$), ?
6. Що називається **кон'юнкцією** ($\wedge$)?
7. Що називається **диз'юнкцією** ($\vee$)?
8. У чому полягає зміст **імплікації** ($\rightarrow$)?
9. Що таке **еквівалентність** ($\leftrightarrow$)?
10. Як читаються логічні операції в усному мовленні?
11. Чим відрізняється "або" в логіці від повсякденного "або"?
12. Чи може імплікація бути істинною, якщо перше висловлювання хибне?
13. Які логічні операції є базовими для побудови інших?
14. Що таке **таблиця істинності** і для чого вона використовується?
15. Як побудувати таблицю істинності для складної формули?
16. Як за допомогою таблиці істинності перевірити еквівалентність формул?
17. Скільки рядків містить таблиця істинності для n змінних?
18. Що таке **тотожно істинна** та **тотожно хибна** формула?
19. Як за таблицею істинності визначити, чи є формула тотожно істинною?
20. Що називається **логічною формулою**?
21. Який порядок виконання логічних операцій?
22. Коли доцільно використовувати дужки в логічних формулах?
23. Що таке **підформула**?
24. Що означає **інтерпретація** формули?
25. Коли формула є **виконуваною**?
26. Як формулюється **закон заперечення заперечення**.
27. У чому полягає **закон комутативності**?
28. Як формулюється **закон асоціативності**.
29. У чому полягає **закон дистрибутивності**?
30. Як формулюється **закони де Моргана**.

31. Що таке **булева функція**?
32. Яку область визначення має булева функція?
33. Які значення може набувати булева функція?
34. Як логічна формула пов'язана з булевою функцією?
35. Чи кожна булева функція може бути подана логічною формулою?
36. Які **способи задання** булевих функцій ви знаєте?
37. У чому полягає таблична форма подання булевої функції?
38. Що таке **диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)**?
39. Як визначається **алгоритм побудови ДНФ** за допомогою рівносильних перетворень.
40. Які логічні закони найчастіше використовуються для отримання ДНФ?
41. Чи є ДНФ для конкретної формули єдиною? Обґрунтуйте відповідь.
42. Яка мета приведення формули до ДНФ чи КНФ у комп'ютерних науках та схемотехніці?
43. Що таке **досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)**?
44. Чим відрізняються **мінтерми** від **макстермів**?
45. Де використовуються елементи математичної логіки в інформатиці?
46. Як логічні операції застосовуються в програмуванні?
47. Чому математична логіка важлива для алгоритмів і схем?

Завдання для самостійної роботи

1. Перелічте основні логічні сполучники та поясніть їх призначення.
2. Дайте означення тавтології, суперечності та виконуваної формули.
3. Наведіть приклади висловлювань та не-висловлювань у контексті програмування
4. Що станеться, якщо змінити порядок виконання операцій у складному виразі (наприклад, виконати диз'юнкцію перед кон'юнкцією без дужок)?
5. Наведіть приклад висловлювання, яке завжди істинне (тавтологія), незалежно від значень його складових.
6. Як оператори IF, AND, OR, NOT у мовах програмування допомагають керувати поведінкою програм?
7. Наведіть приклади застосування елементів математичної логіки в ІТ або кібербезпеці.
8. Визначте, які з наведених речень є логічними висловлюваннями, та вкажіть їх значення істинності (1 або 0):
 1. Число 15 ділиться на 3 і на 5.
 2. Скільки зараз годин?
 3. Складіть іспит на "відмінно"!

4. $x + 5 > 10$.

5. Місто Париж — столиця Франції.

9. Нехай А — «Користувач авторизований», В — «Доступ до системи дозволено». Запишіть мовою логіки наступні твердження:

- а) Користувач авторизований і доступ дозволено
- б) Якщо користувач авторизований, то доступ дозволено
- в) Доступ дозволено тоді і тільки тоді, коли користувач авторизований.

10. Спростіть логічний вираз, використовуючи закони логіки

$$f = (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x}).$$

11. За допомогою рівносильних перетворень доведіть, що формула

$$f = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y}) \wedge x$$

є тотожно хибною.

12. Знайдіть ДНФ (f) для

$$f(x, y, z) = \bar{x}y \leftrightarrow (y \vee \bar{z} \rightarrow xz).$$

13. Наведіть формулу $f = (x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z)$ до ДКНФ двома способами: за допомогою рівносильних перетворень та за допомогою таблиць істинності.

14. Знайдіть ДДНФ для будь-якої тотожно істинної формули, що містить:

- а) одне висловлювання;
 - б) два висловлювання.
15. Запишіть заперечення природномовних тверджень:
- а) Усі студенти виконали лабораторну роботу.
 - б) Деякі сервери недоступні.
 - в) Для кожного користувача існує унікальний пароль.

16. Нехай:

- User(x) — x є користувачем
- Admin(x) — x є адміністратором
- Access(x, r) — x має доступ до ресурсу r .

Запишіть твердження:

- 1. Усі адміністратори мають доступ до всіх ресурсів.
- 2. Існує користувач, який не має доступу до жодного ресурсу.

17. Формалізуйте твердження з кібербезпеки:

- а) Кожна атака використовує хоча б одну вразливість.
- б) Існує вразливість, яка не усунута жодним патчем.

ТЕМА 2

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Питання до практичного заняття

1. Поняття множини.
2. Способи задання множин.
3. Операції над множинами: об'єднання, перетин, різниця, доповнення, булеан множини, декартів добуток.
4. Властивості операцій над множинами.
5. Потужність множин.

Теоретичні відомості

Теорія множин є розділом дискретної математики, що вивчає множини, їх елементи та операції над ними. Основним поняттям теорії множин є **множина**, яка визначається як сукупність елементів довільної природи, об'єднаних за певною ознакою та розглядуваних як єдине ціле. Об'єкти, що входять до множини, називаються її **елементами**. Належність елемента множині є базовим відношенням теорії множин. Якщо об'єкт належить множині, то говорять, що він є її елементом; у протилежному випадку — що він не належить даній множині.

Множини можуть задаватися переліком своїх елементів, описом властивості, яку мають усі її елементи або графічним способом (діаграми Ейлера-Венна).

Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою**.

Однією з фундаментальних характеристик множин є відношення включення.

Множина називається **підмножиною** іншої множини, якщо кожен її елемент належить цій множині. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Дві множини вважаються **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів.

Над множинами визначаються **основні операції**, у результаті виконання яких утворюються нові множини. **Об'єднанням** множин називається множина, що містить усі елементи, які належать хоча б одній із заданих множин.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$$

Перетином множин є множина елементів, спільних для заданих множин.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}$$

Різницею множин називається множина елементів першої множини, які не належать другій. $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

Універсальна множина (позначається символом U) — це множина, яка містить у собі всі об'єкти та елементи, що розглядаються в межах певної задачі або галузі дослідження.

Доповнення множини A визначається відносно універсальної множини та містить усі елементи універсальної множини, які не належать множині A .
 $\bar{A} = U \setminus A$.

Симетрична різниця $A \Delta B$ — множина елементів, які належать лише одній із множин A або B , але не обом одночасно:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Множина всіх без винятку підмножин даної множини A називається **булеаном множини** A і позначається $\mathcal{P}(A)$ або 2^A . Поняття булеана використовується при розв'язуванні комбінаторних задач, аналізі логічних структур та моделюванні інформаційних процесів у комп'ютерних науках. **Декартів добуток** $A \times B$ множин A і B — це множина всіх **упорядкованих пар** виду (a, b) , де $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Залежно від кількості елементів множини поділяються на скінченні та нескінченні. Кількість елементів множини називається її **потужністю**. Для скінченних множин потужність дорівнює числу їх елементів. Потужність нескінченних множин визначається шляхом встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами.

Практичне значення теорії множин полягає в тому, що вона є формальною основою комп'ютерних наук, програмної інженерії та кібербезпеки. Вона використовується для опису структур даних, алгоритмів, формальних мов і баз даних. У програмній інженерії множини застосовують для специфікації, моделювання та верифікації програм. У кібербезпеці теорія множин лежить в основі моделей контролю доступу, аналізу політик безпеки та виявлення загроз.

Приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | x \text{ — парне число, } x \leq 8\}$.

1. Записати множину B переліком елементів.
2. Чи є множина A підмножиною B ?

Розв'язання.

1. $B = \{2, 4, 6, 8\}$.
2. $A \not\subseteq B$, оскільки $1, 3 \notin B$.

Завдання 2. Нехай $A = \{a, b, c\}$.

1. Записати всі підмножини множини A .
2. Скільки всього підмножин має множина A ?

Розв'язання.

1. $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$.
2. $2^3 = 8$ підмножин.

Завдання 3. Нехай $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Знайти:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$

Відповідь:

1. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $A \cap B = \{3, 5\}$.

Завдання 4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Знайти:

1. $A \setminus B$
2. $B \setminus A$

Відповідь:

1. $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$.
2. $B \setminus A = \{6\}$.

Завдання 5. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

Знайти: $A \Delta B$.

Відповідь:

$$A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Завдання 6. Нехай універсальна множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Знайти: $\overline{A}$ (доповнення A).

Відповідь:

$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Завдання 7. Нехай $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Знайти $A \times B$.

Відповідь:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}.$$

Завдання 8. Нехай $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$.

Записати всі $(a,b) \in A \times B$, для яких $a > b$.

Відповідь:

$$(2,1), (3,1), (3,2).$$

Завдання 9. Чи існують множини A і B , такі що

$$\{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\} = A \times B$$

Розв'язання:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$$

Відповідь:

Так, існують

Завдання 10. Довести: $(A \cap B) \cup A = A$.

Розв'язання.

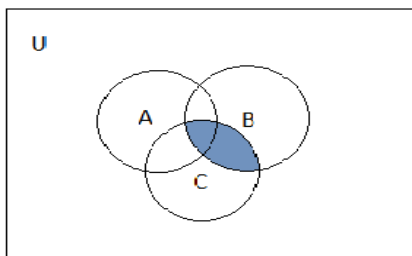
Оскільки $A \cap B \subseteq A$, то $(A \cap B) \cup A = A$. (Закон поглинання).

Завдання 11. Довести: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

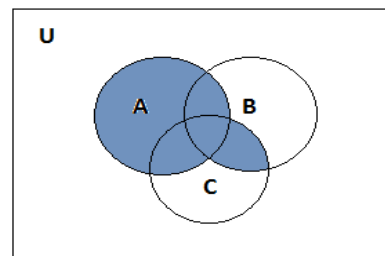
Розв'язання.

Побудуємо послідовно діаграми Ейлера-Венна для правої і лівої частини досліджуваної тотожності. Розглянемо на діаграмах найбільш загальне взаємне розташування множин.

Маємо для лівої частини:

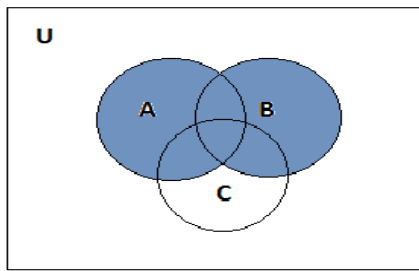


$$B \cap C$$

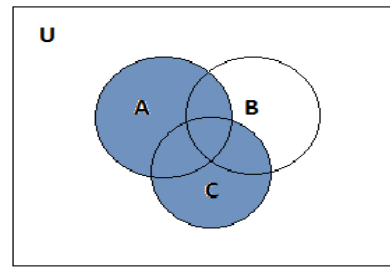


$$A \cup (B \cap C)$$

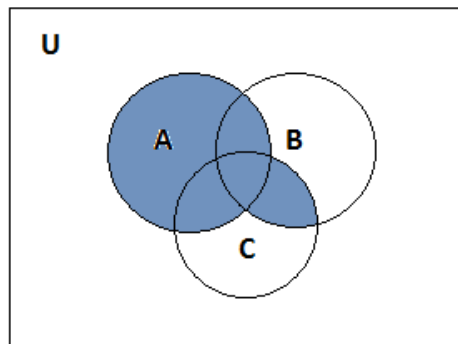
Для правої частини



$$A \cup B$$



$$A \cup C$$



$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Зображення правої і лівої частини тотожності, що перевіряється на діаграмах Ейлера-Венна (темна область) однакові. Тотожність доведена.

Завдання 12. Довести тотожність теорії множин: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Розв'язання.

Розглянемо аналог цієї тотожності в алгебрі логіки

$$x(\overline{\overline{y}z}) = x\overline{y} \vee xz.$$

Доведемо його. Маємо:

$$x(\overline{\overline{y}z}) = x(\overline{\overline{y} \vee \overline{z}}) = x(\overline{\overline{y}} \vee z) = x\overline{y} \vee xz$$

В алгебрі висловлювань тотожність доведена, отже, це тотожність має місце і в теорії множин.

Завдання 13. У групі студентів:

- 18 вивчають Python,
- 12 — C++,
- 7 — і Python, і C++.

Скільки студентів вивчають хоча б одну мову?

Розв'язання.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 18 + 12 - 7 = 23.$$

Методичні рекомендації до вивчення теми

Під час вивчення теми «Основи теорії множин» здобувачам вищої освіти рекомендується приділити особливу увагу засвоєнню базових понять і термінології, оскільки теорія множин є фундаментом для подальшого опанування дисциплін математичного та професійного циклів. Розуміння означень множини, елемента множини, підмножини та потужності множини є необхідною передумовою для успішного вивчення логіки, теорії алгоритмів і структур даних, а також фундаментом для побудови систем управління базами даних, розробки компіляторів, криптографічного захисту інформації та формальної верифікації програмного забезпечення.

При підготовці до практичного заняття необхідно розглянути різні пособи задання множи, від класичного переліку елементів до використання логічних предикатів та рекурсивних правил, оскільки вибір конкретного методу опису визначає подальший алгоритм розв'язання задачі та зручність її аналізу.

Окрему увагу слід звернути на правильне використання математичної символіки та коректність записів при виконанні операцій об'єднання, перетину, різниці та доповнення множин.

Продовжуючи вивчення теми, здобувачам пропонується детально ознайомитися з основними законами теорії множин, зокрема комутативності, асоціативності, дистрибутивності, поглинання, ідемпотентності та законах де Моргана, з обов'язковим підтвердженням їх виконання на практичних прикладах.

Рекомендується встановлювати зв'язок між операціями над множинами та логічними операціями, що сприятиме кращому розумінню аналогій між теорією множин і логікою висловлювань.

У процесі опрацювання теоретичного матеріалу доцільно використовувати наочні приклади та графічні методи подання інформації, зокрема діаграми Ейлера-Венна, що сприяють кращому розумінню операцій над множинами.

При опрацюванні поняття булеана множини необхідно зосередитися на усвідомленні змісту всіх можливих підмножин заданої множини та їх кількості для скінченних множин. Для спеціальностей інформаційних технологій корисним є розгляд прикладів, пов'язаних із перебором варіантів, множинами станів та підмножинами даних.

Вивчаючи декартів добуток множин, слід звернути увагу на поняття впорядкованої пари та відмінність між декартовим добутком і операціями над множинами.

Під час засвоєння поняття потужності множини доцільно починати зі скінченних множин, поступово переходячи до загального уявлення про нескінченні множини та способи їх порівняння. Рекомендується звернути увагу на зв'язок потужності множин з комбінаторними задачами та оцінкою складності алгоритмів.

Для самоконтролю рівня засвоєння матеріалу здобувачам вищої освіти рекомендується відповідати на контрольні запитання, виконувати тестові завдання та розв'язувати типові задачі з курсу дискретної математики. Особливу увагу слід приділяти формуванню навичок самостійної роботи з теоретичним матеріалом та математичною літературою.

Питання для обговорення:

1. Що називається **множиною**?
2. Які способи **задання множин** ви знаєте?
3. Що таке **елемент множини**?
4. Які множини називаються **скінченними** та **нескінченними**?
5. Що таке **порожня множина**? Як вона позначається? Чи може порожня множина бути підмножиною будь-якої множини?
6. Що означає, що множина A є **підмножиною** множини B ?
7. Яка різниця між підмножиною та власною підмножиною?
8. Коли дві множини вважаються **рівними**?
9. Означення **об'єднання** множин.
10. Означення **перетину** множин.
11. Що таке **різниця множин**?
12. Що таке **симетрична різниця**? Як її можна виразити через інші операції?
13. Що таке **доповнення множини**? За якої умови воно визначене?
14. **Комутативність** операцій об'єднання та перетину.
15. **Асоціативність** операцій над множинами.
16. **Дистрибутивні закони**.
17. **Закони ідемпотентності**.
18. **Закони поглинання**.
19. **Закони де Моргана** для множин.
20. Що таке **універсальна множина**?
21. Як зображають операції над множинами за допомогою **діаграм Венна**?
22. Що таке **декартів добуток** множин та де він застосовується?
23. Що таке **булеан** множини? Які множини обов'язково входять до булеана будь-якої множини?

24. Як визначається **потужність** множини?

25. Яке практичне значення має теорія множин у комп'ютерних науках, програмній інженерії та кібербезпеці?

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення множини та наведіть приклади.
2. Поясніть символи $\in$ та $\notin$.
3. Наведіть приклади рівних і нерівних множин.
4. Охарактеризуйте основні операції над множинами.
5. Дайте означення об'єднання та перетину множин. Який зміст мають ці операції?
6. Поясніть поняття булеана множини.
7. Сформулюйте закони де Моргана для множин і поясніть їх зміст.
8. Задайте множину A усіх цілих чисел, менших за 10, двома способами:
 - а) переліком елементів;
 - б) за допомогою властивості.
9. Для множини $B = \{a, b, c, d\}$:
 1. запишіть всі її підмножини;
 2. визначте кількість підмножин.
10. Нехай $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$.
Знайдіть:
 - а) $A \cup B$;
 - б) $A \cap B$;
 - в) $A \setminus B$;
 - г) $B \setminus A$.
11. Для множин $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ знайдіть симетричну різницю $A \Delta B$.
12. Нехай універсальна множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$.
Знайдіть доповнення множини A .
13. Нехай $U = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2\}$, $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:3\}$, $C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:5\}$.
Знайдіть: $\bar{A}$, $\bar{C}$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
14. Які з наступних тверджень справедливі для будь-яких множин A , B , C ?
 - 1) $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
 - 2) $A \subseteq B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
 - 3) $A \cap B \subseteq A \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;
 - 4) $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C$;
 - 5) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow B = \emptyset$;
 - 6) $A \in B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \in C$.

15. Якщо $|A|=3$, $|B|=5$, то $|A \times B| =$

- A) 8
- B) 15
- C) 3
- D) 5.

16. Нехай $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$.

Чому дорівнює $A \times B$?

- A) $\{(1, 3), (2, 4)\}$
- B) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
- C) $\{(3, 1), (4, 2)\}$
- D) $\{1, 2, 3, 4\}$.

17. Перевірте виконання рівності

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

на конкретних множинах A , B , C , заданих довільно.

18. Доведіть рівність:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

19. За допомогою діаграм Ейлера-Венна зобразіть та поясніть множину:

$$(A \cup B) \setminus C.$$

20. Використовуючи діаграми Ейлера-Венна, доведіть наступні тотожності:

- 1) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z);$
- 2) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (Z \setminus X);$
- 3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z);$
- 4) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z);$
- 5) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z);$
- 6) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z);$
- 7) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z);$
- 8) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z.$

21. У групі студентів:

- 15 вивчають мову Python;
- 10 — мову Java;
- 5 — обидві мови.

Визначте кількість студентів, які вивчають хоча б одну з мов програмування.

ТЕМА 3

ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНАХ

Питання до практичного заняття

1. Визначення відношення на множині та способи його задання.
2. Основні властивості відношень: рефлексивність, симетричність, транзитивність, антисиметричність.
3. Типи відношень: еквівалентні відношення, частково впорядковані множини, повністю впорядковані відношення.
4. Поняття класів еквівалентності та їх значення для розбиття множини.

Теоретичні відомості

Тема «Відношення на множинах» є однією з базових у курсах дискретної математики та теорії множин і відіграє важливу роль у формуванні математичного апарату майбутніх фахівців з інформаційних технологій. Поняття відношення дозволяє формалізувати взаємозв'язки між об'єктами, що є необхідним для моделювання процесів, аналізу структур даних, побудови алгоритмів і проєктування інформаційних систем.

Відношення на множині A — це підмножина декартового добутку множини A на саму себе: $R \subseteq A \times A$. Тобто, відношення R — це певна взаємодія між елементами множини A , яку можна представити як набір впорядкованих пар (x, y) , де $x, y \in A$.

Відношення на множині A може мати різні властивості, які визначають його структуру та поведінку.

Відношення R на множині A є **рефлексивним**, якщо для кожного елемента $x \in A$ виконується: $(x, x) \in R$.

Відношення R на множині A є **симетричним**, якщо для всіх $x, y \in A$, якщо $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

Відношення R на множині A є **транзитивним**, якщо для всіх $x, y, z \in A$, якщо $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R$, то також $(x, z) \in R$: $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Відношення R є **антисиметричним**, якщо для всіх $x, y \in A$, де $x \neq y$, якщо $(x, y) \in R$ і $(y, x) \in R$, то $x = y$: $(x, y) \in R$ і $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

Залежно від того, які властивості мають відношення, виділяють кілька типів. Відношення R на множині A називається **еквівалентним**, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Якщо відношення є еквівалентним, то воно розбиває множину на класи еквівалентності.

Клас еквівалентності — множина всіх елементів, еквівалентних заданому елементу.

Відношення R на множині A називається **частково впорядкованим**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Це означає, що на множині можна ввести порядок, при якому деякі елементи можуть бути "непорівнянними".

Якщо частково впорядковане відношення є також чітким, тобто кожні два елементи множини порівнянні, то таке відношення називається **повністю впорядкованим**.

Приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Дано множину цілих чисел Z . Визначено відношення xRy , якщо $x-y$ кратне 3.

Довести, що дане відношення є еквівалентним, та побудувати класи еквівалентності.

Розв'язання.

1. Рефлексивне: $x-x=0$, кратне 3.

Симетричне: якщо $x-y$ кратне 3, то й $y-x$ кратне 3.

Транзитивне: якщо $x-y$ і $y-z$ кратне 3, то $x-z$ кратне 3.

2. Клас елемента 0: $[0]=\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

Клас елемента 1: $[1]=\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

Клас елемента 2: $[2]=\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

Відповідь: відношення є еквівалентним на Z ;
множина Z розбивається на три непересічні класи еквівалентності.

Завдання 2. Перевірити чи є ставлення порівнянності цілих чисел відношенням еквівалентності на множині цілих чисел.

Розв'язання.

$$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad R = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod{m}\}.$$

Якщо m - деяке ціле позитивне число, то

$$x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow (x - y) : m.$$

1. Оскільки $\forall x \in \mathbb{Z}: x \equiv x \pmod{m}$, то досліджуване відношення - рефлексивне ($x \equiv x \pmod{m} \Leftrightarrow (x - x) : m \Leftrightarrow 0 : m$).

2. Маємо:

$$x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow (x - y) : m \Leftrightarrow -(y - x) : m \Leftrightarrow (y - x) : m \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{m}.$$

Таким чином, досліджуване відношення - симетричне.

3. Далі:

$$x \equiv y \pmod{m} \wedge y \equiv z \pmod{m} \Leftrightarrow (x - y) : m \wedge (y - z) : m \Rightarrow (x - y + y - z) : m \\ \Rightarrow (x - z) : m \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}.$$

Таким чином, досліджуване відношення - транзитивне.

Відповідь: порівнянність цілих чисел по деякому модулю є відношенням еквівалентності.

Завдання 3. Довести, що відношення R є відношенням еквівалентності на $\mathbb{N}^2$, де

$$R = \{ \langle (a, b), (c, d) \rangle \mid a + d = b + c \}.$$

Розв'язання.

Перевіримо властивості:

1. R – рефлексивне $a + b = b + a$ тягне $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (a, b) \rangle \in R$;
2. R – симетричне, так як $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (c, d) \rangle \in R \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow \langle (c, d), (a, b) \rangle \in R$.
3. R – транзитивне, так як

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (c, d) \rangle \in R \wedge \langle (c, d), (e, f) \rangle \in R \Rightarrow \\ \Rightarrow a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle (a, b), (e, f) \rangle \in R.$$

Відповідь: R є відношенням еквівалентності на множині натуральних чисел.

Завдання 4. Перевірити чи є ставлення $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x - y| < 2 \}$ відношенням еквівалентності на множині натуральних чисел.

Розв'язання.

1. R – рефлексивне, так як. $\forall x \in \mathbb{N} : |x - x| = 0 < 2$, тобто $\forall x \in \mathbb{N} : (x, x) \in R$;
2. R – симетричне, так як. $\forall x, y \in \mathbb{N} : (x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| < 2 \Leftrightarrow |y - x| < 2 \Leftrightarrow (y, x) \in R$;
3. R – не є транзитивним. Для підтвердження цього факту досить привести контрприклад: $(1, 2) \in R$ і $(2, 3) \in R$, але $(1, 3) \notin R$.

Відповідь: R не є відношенням еквівалентності на множині натуральних чисел.

Завдання 5. Перевірити чи є ставлення подільності на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ відношенням часткового порядку.

Розв'язання.

$$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, R = \{(x, y) \mid x \dot{\vdash} y\}.$$

1. Оскільки $\forall x \in \mathbb{N}: x \dot{\vdash} x$, то ставлення є рефлексивним.
2. Оскільки для натуральних чисел з $x \dot{\vdash} y$ і $y \dot{\vdash} x$ слід, що $x = y$, то ставлення є антисиметричним.
3. Оскільки для натуральних чисел з $x \dot{\vdash} y$ і $y \dot{\vdash} z$ слід, що $x \dot{\vdash} z$, то ставлення є транзитивним.

Відповідь: ставлення подільності на множині натуральних чисел є відношенням часткового порядку.

Методичні рекомендації до вивчення теми.

Вивчення теми рекомендується розпочинати з повторення основних понять теорії множин, зокрема означень множини, елемента множини та декартового добутку множин. Особливу увагу слід звернути на розуміння впорядкованої пари та її відмінність від звичайної множини.

Під час опрацювання означення відношення необхідно добре усвідомити, що відношення задається не довільним набором елементів, а саме множиною впорядкованих пар. Рекомендується навчитися розрізняти відношення на одній множині та відношення між різними множинами.

Далі доцільно перейти до розгляду означення відношення як підмножини декартового добутку множини на саму себе або двох різних множин. На цьому етапі рекомендується ознайомитися з основними способами задання відношень: у вигляді множини впорядкованих пар, таблиць (матриць відношень) та орієнтованих графів.

Продовжуючи вивчення теми, особливу увагу слід звернути на основні властивості відношень: рефлексивність, симетричність, транзитивність та антисиметричність. Рекомендується детально опрацювати означення кожної властивості та закріпити матеріал шляхом аналізу прикладів і контрприкладів для кращого розуміння умов, за яких властивість не виконується.

Окрему увагу варто приділити перевірці властивостей відношень на практиці, навчившись формально доводити або спростовувати наявність тієї чи іншої властивості для заданого відношення.

Після засвоєння основних властивостей доцільно перейти до вивчення основних типів відношень, зокрема еквівалентних та частково впорядкованих. При вивченні частково впорядкованих відношень

рекомендується звернути увагу на можливість непорівнюваності окремих елементів множини. Для кращого засвоєння матеріалу варто використовувати графічні представлення відношень.

Важливо усвідомити, які властивості є визначальними для кожного типу відношень та вміти класифікувати відношення за заданими характеристиками.

Під час вивчення еквівалентних відношень рекомендується зосередитися на понятті класів еквівалентності та їх ролі у розбитті множини. Доцільно розглянути приклади побудови класів еквівалентності для різних відношень.

Для кращого засвоєння матеріалу рекомендується виконати достатню кількість практичних завдань, що передбачають побудову відношень, перевірку їх властивостей та аналіз отриманих результатів.

Питання для обговорення

1. Що називається **відношенням** на множині?
2. Які **способи подання** відношень на множинах ви знаєте?
3. Що таке **рефлексивне** відношення?
4. Що таке **симетричне** відношення?
5. Що таке **антисиметричне** відношення?
6. Що таке **транзитивне** відношення?
7. Що таке **еквівалентне** відношення?
8. Що таке **клас еквівалентності**?
9. Що таке **частково впорядковане** відношення?
10. У чому відмінність між частковим і повним порядком?
11. Які властивості відношення необхідні для того, щоб воно було еквівалентним?
12. Які властивості відношення необхідні для того, щоб воно було частково впорядкованим?
13. Які приклади відношень із реального життя ви можете навести?
14. Як відношення використовуються у базах даних і програмуванні?
15. Чи можна відношення одночасно бути еквівалентним і частково впорядкованим? Чому?
16. Як за допомогою відношень можна групувати або структурувати множину елементів?
17. Що таке **еквівалентне відношення** і як воно формує класи еквівалентності?
18. В чому полягає різниця між симетричним, антисиметричним та асиметричним відношенням?

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення відношення на множині та поясніть його зміст власними словами.
2. Наведіть приклади відношень на множинах та поясніть спосіб їх задання.
3. Дайте означення таких властивостей відношень:
 - рефлексивність;
 - симетричність;
 - транзитивність;
 - іррефлексивність;
 - антисиметричність.
4. Поясніть різницю між симетричним та антисиметричним відношеннями.
5. Сформулюйте означення еквівалентного відношення та навести його приклади.
6. Поясніть поняття класу еквівалентності та його роль у розбитті множини.
7. Дайте означення частково впорядкованого відношення та наведіть приклади таких відношень.
8. Поясніть, у чому полягає відмінність між частковим і повним порядком.
9. Опишіть основні способи подання відношень (множина пар, матриця, граф).
10. Поясніть, чому частково впорядковане відношення не завжди є повним порядком.
11. Нехай задано множину $A = \{1, 2, 3, 4\}$ та відношення $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$.
Визначіть, які властивості має дане відношення.
12. Нехай задано множину $A = \{\text{"apple"}, \text{"apricot"}, \text{"banana"}, \text{"blueberry"}\}$ та відношення xRy , якщо слова починаються з однієї літери.
 1. Перевірте властивості відношення.
 2. Побудуйте класи еквівалентності.
13. Нехай задано множину $A = \{10, 11, 100, 101, 110\}$, xRy — числа мають однакову кількість цифр.
 1. Перевірте властивості відношення.
 2. Побудуйте класи еквівалентності.
14. Нехай задано множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та відношення xRy , якщо $x \equiv y \pmod{2}$ (тобто x та y мають однакову парність).

1. Перевірте властивості відношення.
 2. Побудуйте класи еквівалентності.
15. Для множини $A = \{a, b, c\}$ побудуйте приклад відношення, яке є:
- лише рефлексивним;
 - симетричним, але не транзитивним;
 - транзитивним, але не симетричним.
16. Для множини $A = \{1, 2, 3, 6\}$ задано відношення подільності.
Перевірте, чи є це відношення частково впорядкованим.
17. Подайте задане відношення у вигляді:
- множини впорядкованих пар;
 - матриці відношення;
 - орієнтованого графа.
18. Для довільної множини з не менш ніж п'яти елементів:
- задайте відношення;
 - визначить всі його властивості;
 - зробіть висновок щодо типу відношення.
19. Побудуйте приклад відношення, яке:
- не є рефлексивним;
 - не є симетричним;
 - не є транзитивним.
20. Перевірте чи є відношення $R = \{(x, y) \mid x + y = 8\}$, яке задано на множині натуральних чисел антисиметричним.
21. Перевірте чи є відношення $R = \{(a, b), (c, d) \mid a \cdot d = b\}$ відношенням еквівалентності на множині натуральних чисел.
22. Побудуйте бінарне відношення R з наступними властивостями:
1. R – рефлексивне, симетричне та не транзитивне;
 2. R – рефлексивне, антисиметричне та не транзитивне;
 3. R – рефлексивне, транзитивне та не симетричне;
 4. R – антисиметричне, транзитивне та не рефлексивне;
 5. R – симетричне, транзитивне та не рефлексивне.
23. У частково впорядкованій множині $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ з відношенням подільності:
- знайдіть всі мінімальні та максимальні елементи;
 - визначте найменший і найбільший елементи (якщо вони є).
24. Побудуйте приклад частково впорядкованій множині, яка має точно один мінімальний елемент та не має найменшого елементу.
25. Побудуйте діаграму Гассе для множини $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ з відношенням подільності.

ТЕМА 4

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Питання до практичного заняття

1. Основні поняття та правила комбінаторного аналізу.
2. Перестановки без повторень і з повтореннями.
3. Розміщення без повторень і з повтореннями.
4. Комбінації (сполучення) без повторень і з повтореннями.
5. Біноміальний коефіцієнт та його властивості.

Теоретичні відомості

Комбінаторний аналіз — розділ дискретної математики, що вивчає методи підрахунку кількості можливих способів вибору, розміщення та впорядкування елементів скінченних множин.

При вирішенні багатьох практичних завдань доводиться вибирати з деякої сукупності об'єктів елементи, що володіють тією чи іншою властивістю, підраховувати скільки різних комбінацій можна скласти з кінцевого числа елементів, що належать заданій сукупності, розташовувати ці елементи в певному порядку і т.д. Оскільки у таких завданнях йдеться про ті чи інші комбінації об'єктів, то їх називають комбінаторними завданнями, а область математики, в якій вони вивчаються, — комбінаторикою.

Існує два основних правила, за допомогою яких вирішуються багато завдань комбінаторики - правило суми та правило добутку.

Правило суми (логічне «або»)

Якщо об'єкт А можна вибрати n способами, а об'єкт В — m способами (причому вибори А і В несумісні, тобто не можуть бути обрані одночасно), то вибрати «або А, або В» можна: $n+m$ способами. Це відповідає розгалуженням у програмуванні.

Правило добутку (логічне «і»)

Якщо об'єкт А можна вибрати n способами, і після кожного такого вибору об'єкт В можна вибрати m способами, то пару об'єктів «А і В» можна вибрати: $n \times m$ способами. Це основа оцінки складності вкладених циклів.

Окрім основних правил, для розв'язання задач використовують три типи сполук.

Перестановки — це впорядковані набори з n -елементної множини, які відрізняються між собою лише порядком елементів.

Кількість (число) перестановок з n елементів позначається символом P_n та визначається формулою

$$P_n = n!$$

Перестановки з повтореннями — це впорядковані набори з n елементів, у яких деякі елементи можуть повторюватися, і які відрізняються між собою порядком розташування елементів.

Кількість (число) перестановок з повтореннями з n елементів позначається символом $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ та визначається формулою

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1 n_2 \dots n_k},$$

$n_1, n_2, \dots, n_k$ — кількості повторюваних елементів.

Розміщення — це впорядковані набори по k елементів з n -елементної множини, які відрізняються між собою складом або порядком елементів.

Кількість (число) розміщень з n елементів по k позначається символом A_n^k та визначається формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Розміщення з повтореннями — це впорядковані набори по k елементів з n -елементної множини, які відрізняються складом, порядком елементів або кількістю повторень.

Кількість (число) розміщень з повтореннями визначається формулою

$$A_n^k = n^k$$

Комбінації (сполучення) — це підмножини по k елементів з n -елементної множини, які відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Кількість (число) комбінацій з n елементів по k позначається символом C_n^k та визначається формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Комбінації з повтореннями — це k -елементні набори з n -елементної множини, які відрізняються між собою лише складом елементів з урахуванням повторень.

Кількість (число) комбінацій з повтореннями з n елементів по k визначається формулою

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Біноміальний коефіцієнт C_n^k — це кількість комбінацій по k елементів із n -елементної множини.

Властивості:

1. Крайові значення:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

- Єдиний спосіб вибрати 0 елементів або всі n елементів.
2. Перший рівень:

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$
 Існує n способів вибрати 1 елемент або $n-1$ елемент із n .
3. Симетрія:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
 Кількість комбінацій k елементів дорівнює кількості комбінацій $n-k$ елементів.
4. Трикутник Паскаля (рекурентна формула):

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad 1 \leq k \leq n-1$$
 Кількість способів вибрати k елементів із n дорівнює сумі способів вибрати $k-1$ або k елементів із $n-1$.
5. Сума всіх комбінацій:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$
 Загальна кількість підмножин n -елементної множини дорівнює 2^n .
6. Зв'язок з розміщеннями (без повторень):

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$
 Біноміальний коефіцієнт можна отримати із розміщень k -елементних наборів, поділивши на $k!$, бо порядок елементів у комбінації не важливий.

Приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Скласти всі перестановки множини $\{1,2,3\}$ та визначити їх кількість.

Розв'язання.

1. Кількість: $3!=6$.
2. Варіанти: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Відповідь: Кількість перестановок дорівнює 6.

Завдання 2. На полиці стоять 5 детективів і 3 романи, скількома способами можна вибрати одну книгу (або детектив, або роман)?

Розв'язання.

Нехай n – це кількість способів обрати детектив, а m це кількість способів обрати роман. Скористаємось правилом суми $n+m = 5+3=8$.

Відповідь: Книгу можна вибрати 8 способами.

Завдання 3. Скільки всього шестизначних парних чисел можна становити із цифр 1,3,4,5,7 і 9, якщо з цих цифр жодна не повторюється?

Розв'язання.

Число є парним, якщо воно закінчується на парну цифру. Серед запропонованого набору цифр $\{1,3,4,5,7,9\}$ парною є лише одна цифра — 4. Це означає, що на останньому (шостому) місці в числі обов'язково має стояти цифра 4.

Оскільки цифри не можуть повторюватися, і одну цифру (4) ми вже використали для останньої позиції, у нас залишилося 5 цифр $\{1,3,5,7,9\}$, які потрібно розмістити на решті 5 позицій. Кількість способів зробити це дорівнює кількості перестановок із 5 елементів:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Проведемо розрахунок кількості комбінацій:

$$5! = 120$$

Оскільки для останньої цифри є лише 1 варіант, загальна кількість чисел становить

$$120 \times 1 = 120.$$

Відповідь: Із наведених цифр без їх повторення можна скласти 120 шестизначних парних чисел.

Завдання 4. Скількома способами можна розмістити в ряд 2 зелені і 4 червоні лампочки?

Розв'язання.

Оскільки ми розміщуємо всі лампочки в одну лінію, загальна кількість позицій у ряду дорівнює сумі зелених та червоних лампочок: $n = 2 + 4 = 6$.

Оскільки лампочки одного кольору не відрізняються одна від одної, потрібно знайти кількість способів вибрати 2 позиції із 6 для зелених лампочок (решта 4 позиції автоматично будуть зайняті червоними). Це відповідає формулі комбінацій без повторень:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Підставимо значення $n=6$ (усі місця) та $k=2$ (зелені лампочки) у формулу:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Відповідь: Лампочки можна розмістити 15 різними способами.

Завдання 5. У хокейному турнірі беруть участь 17 команд. Розігруються золота, срібна та бронзова медалі. Скільки способами можуть бути розподілені медалі?

Розв'язання.

Для того щоб знайти кількість способів розподілу медалей, необхідно скористатися формулою розміщення з n елементів по k , оскільки в даному випадку порядок має значення (важливо, яка саме команда посіде перше, друге чи третє місце).

1. На золоту медаль претендують усі 17 команд.
2. На срібну медаль претендує будь-яка з 16 команд, що залишилися.
3. На бронзову медаль претендує будь-яка з 15 команд, що залишилися.

Кількість способів обчислюється як добуток:

$$A_{17}^3 = 17 \times 16 \times 15 = 4080$$

Відповідь: Існує 4080 способів розподілити золоту, срібну та бронзову медалі серед 17 команд.

Завдання 6. У кондитерському магазині продавалося 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, пісочні та листкові. Скількома способами можна купити 7 тістечок, якщо порядок не важливий і можна брати будь-якої кількості кожного сорту?

Розв'язання.

Для того щоб знайти кількість способів, якими можна купити 7 тістечок 4 різних сортів, необхідно скористатися формулою комбінацій з повтореннями.

Де $n=4$ (кількість сортів тістечок),

$k=7$ (кількість тістечок, які ми купуємо)

1. Обчислюємо параметри:

$$n+k-1=4+7-1=10$$

2. Застосовуємо формулу:

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

3. Виконуємо розрахунок

$$C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 3 \times 10 = 120.$$

Відповідь: Є 120 різних способів купити 7 тістечок із 4 сортів, якщо не важливо, в якій саме послідовності вони купуються.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Для ефективного засвоєння теми рекомендується почати з повторення базових понять множин і факторіалу, оскільки більшість комбінаторних формул ґрунтується саме на них.

Перш ніж переходити до формул, необхідно засвоїти два основні принципи, на яких будується вся комбінаторика: правило суми (для вибору одного з альтернативних варіантів) та правило добутку (для послідовних незалежних виборів).

У процесі опрацювання теоретичного матеріалу слід акцентувати увагу на логіці вибору способу підрахунку, а не лише на механічному застосуванні формул. Доцільно проводити порівняльний аналіз перестановок, розміщень і комбінацій із метою формування навичок правильного вибору відповідної моделі задачі.

Під час вивчення цієї теми здобувачам необхідно звернути увагу на різницю між впорядкованими і неупорядкованими підмножинами:

- Перестановки – порядок важливий
- Комбінації – порядок не важливий
- Розміщення – впорядковані підмножини певної довжини

Здобувачам також пропонується починати з простих прикладів, поступово переходячи до складніших. Це дозволяє побачити закономірності і зменшує запам'ятовування «чистих формул».

Важливим критерієм засвоєння теорії є вміння вирішувати завдання на пройденій матеріал.

Під час підготовки до практичного заняття рекомендується звернути увагу на систематизацію формул і властивостей. Корисно зробити короткі таблиці і схеми з прикладами, в яких позначати тип задачі, формулу і ключові умови.

Особливу увагу необхідно приділити задачам із повтореннями та комбінаторним задачам з обмеженнями, а також аналізу типових помилок, які виникають під час розв'язування. Перед розв'язуванням задачі необхідно проаналізувати умову та визначити тип комбінаторного підрахунку.

Отримані результати доцільно перевіряти логічним аналізом: чи враховано всі умови задачі (порядок, повторення, обмеження), чи є результат реалістичним або альтернативним способом підрахунку.

Дослідження з педагогіки комбінаторики підкреслюють, що стадії комбінаторного мислення (формулювання задачі → аналіз варіантів → перевірка всіх варіантів) допомагають краще розв'язувати підрахункові задачі.

Питання для обговорення

1. Що вивчає комбінаторний аналіз і яка його роль у дискретній математиці?
2. Чим відрізняються елементи комбінаторного підрахунку від інших математичних об'єктів?
3. Як обрати правильний **принцип комбінаторного підрахунку** для конкретної задачі?
4. У чому полягає **правило добутку** та як його застосувати при послідовних виборах?
5. Коли використовується **правило суми** і чому важливо, щоб варіанти не перетиналися?
6. У чому відмінність між **перестановками** без повторень і з повтореннями?
7. Як обчислюється кількість перестановок слова з повторюваними літерами?
8. Чим **розміщення** відрізняються від перестановок?
9. Як змінюється кількість розміщень, якщо дозволено повторення елементів?
10. Чим **комбінації** відрізняються від розміщень?
11. Як використання комбінацій допомагає обчислити кількість способів вибору групи об'єктів без урахування порядку?
12. Коли порядок елементів має вирішальне значення, а коли ним можна знехтувати?
13. Що означає «**повторення елементів**» у комбінаторних задачах? Як це впливає на вибір формули?
14. У яких реальних задачах доцільно застосовувати **комбінації з повтореннями**?
15. Як можна перевірити правильність отриманого комбінаторного результату?
16. Як визначити, яку формулу комбінаторного підрахунку слід застосувати до конкретної задачі?
17. Що таке **біноміальний коефіцієнт** і які його основні властивості?
18. Яке значення має властивість симетрії біноміального коефіцієнта?
19. Як **трикутник Паскаля** використовується для обчислення біноміальних коефіцієнтів?
20. Як пов'язані між собою перестановки, розміщення і комбінації?
21. Як комбінаторний аналіз допомагає оцінювати кількість можливих комбінацій паролів?
22. Яка різниця між задачами на підрахунок з обмеженнями та без обмежень?

23. Як вибрати між формулами перестановок, розміщень і комбінацій у конкретній задачі?
24. Як комбінаторика використовується у плануванні експериментів або моделюванні процесів?
25. Де комбінаторний аналіз застосовується в інформатиці, програмуванні та кібербезпеці?

Завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте правило суми та наведіть приклади його застосування.
2. Сформулюйте правило добутку та поясніть, у яких випадках воно використовується.
3. Дайте означення перестановки.
4. Поясніть різницю між перестановками без повторень та з повтореннями.
5. Наведіть приклади задач, які зводяться до перестановок.
6. Опишіть застосування перестановок у програмуванні.
7. Дайте означення розміщення.
8. Поясніть різницю між розміщеннями з повтореннями та без повторень.
9. Порівняйте розміщення і перестановки.
10. Наведіть приклади практичного застосування розміщень.
11. Дайте означення сполучення.
12. Поясніть різницю між сполученнями з повтореннями та без повторень.
13. Поясніть, чому порядок елементів у сполученнях не має значення.
14. Наведіть приклади використання сполучень у задачах аналізу даних.
15. Дайте означення біноміального коефіцієнта.
16. Поясніть його комбінаторний зміст.
17. Опишіть основні властивості біноміальних коефіцієнтів.
18. Поясніть зв'язок біноміальних коефіцієнтів з трикутником Паскаля.
19. Поясніть, як правильно обрати комбінаторну модель для задачі.
20. Скільки різних підмножин має множина з 6 елементів?
21. Скільки різних перестановок літер слова «LEVEL»?
22. Скількома способами можна переставити елементи множини з 7 різних елементів?
23. Скількома способами можна обрати один елемент із множини, що містить 12 елементів, або один елемент із множини, що містить 8 елементів?
24. Скількома способами можна вибрати 3 різні цифри з множини $\{0,1,2,3,4,5\}$ і розмістити їх у зростаючому порядку?
25. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, якщо повторення дозволено?
26. Скількома способами можна скласти пароль, що складається з двох літер і однієї цифри, якщо:

- а) порядок символів фіксований;
 - б) порядок символів довільний?
27. Скільки різних слів можна утворити з літер слова «МАТЕМАТИКА»?
28. Скільки існує перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, у яких число 1 стоїть на першому місці?
29. Скільки різних двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4 без повторень?
30. Скільки різних трьохцифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо повторення дозволено, але перша цифра $\neq 0$?
31. Скільки чотирьохзначних кодів можна скласти з цифр 1–5, якщо жодна цифра не повторюється?
32. Скільки тризначних кодів можна скласти з цифр 1–5, якщо цифри не повторюються?
33. Скільки тризначних кодів можна скласти з цифр 1–5, якщо цифри можуть повторюватися?
34. Скількома способами можна скласти код із трьох символів, якщо код починається з літери, а закінчується цифрою?
35. Скільки різних чотирицифрових кодів можна скласти з цифр 1–9, якщо повторення:
- а) заборонені;
 - б) дозволені?
36. Одиницею цифрової інформації у двійковій системі є байт - це «слово», що складається з 8 біт (кожен біт - це двійковий розряд, що складається з 0 або 1). Чому кодова таблиця для шрифтів містить саме 256 знаків?
37. У камері схову встановлено кодовий замок з чотирьох цифр. Кожна з цифр може дорівнювати 1, 2, 3, 4, 5. Скільки різних варіантів коду можна скласти, якщо відомо:
- а) цифри в коді можуть повторюватися?
 - б) цифри в коді не повинні повторюватися?
 - в) код повинен починатися з цифри «3»?
 - г) код повинен бути парним числом?
 - д) код повинен бути парним числом, цифри якого не повторюються?
38. Обчисліть C_5^2 та C_7^3 .
39. Перевірте симетрію: $C_5^2 = C_5^3$.
40. Побудуйте перші 6 рядків трикутника Паскаля.
41. Перевірте властивість суми: $\sum_{k=0}^3 C_3^k = 2^3$.
42. Наведіть приклади комбінаторних задач у програмуванні та кібербезпеці.

ТЕМА 5

ГРАФИ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ

Питання до практичного заняття

1. Основні поняття теорії графів.
2. Класифікація графів.
3. Основні характеристики графів.
4. Способи представлення графів.
5. Алгоритми обходу графів (DFS, BFS).
6. Алгоритми пошуку найкоротшого шляху у графі.
7. Дерева, ліс.

Теоретичні відомості

Теорія графів є одним із фундаментальних розділів дискретної математики та алгоритміки і теоретичною основою для побудови й аналізу багатьох алгоритмів, що використовуються у програмній інженерії, комп'ютерних науках та кібербезпеці. Розуміння базових понять теорії графів є необхідною передумовою для вивчення таких тем, як маршрутизація, оптимізація, аналіз складності алгоритмів, моделювання мереж та виявлення вразливостей у системах.

З формальної точки зору **звичайним графом** G називається кортеж (набір) двох об'єктів $G = \langle V, U \rangle$, де V - довільна непуста кінцева множина, елементи якої називаються вершинами графа, а U - множина ребер (для неорієнтованого графа) або дуг (для орієнтованого графа).

Вершина — базовий елемент графа, що представляє об'єкт або сутність (процес, комп'ютер, користувач, стан системи).

Ребро — зв'язок між двома вершинами неорієнтованого графа (дорога, кабель, авіасполучення соціальна мережа).

Дуга — впорядкована пара вершин в орієнтованому графі.

Неорієнтований граф — це граф, у якому ребра не мають напрямку, тобто кожне ребро є неупорядкованою парою вершин.

Орієнтований граф (орграф) — це граф, у якому ребра мають напрямок і є упорядкованими парами вершин (дугами).

Зважений граф — граф, у якому кожному ребру (або дузі) поставлено у відповідність числове значення (вага) (відстань, довжина, вартість, час, пропускна здатність).

Незважений граф — граф, у якому ребра не мають ваги, довжина шляху рахується як кількість ребер.

Петля — ребро, що з'єднує вершину саму з собою.

Кратні ребра - декілька ребер, що з'єднують одну й ту саму пару вершин.

Простий граф — граф без петель і кратних ребер.

Мультиграф — граф, який може містити кратні ребра між одними й тими ж вершинами (петлі можуть бути дозволені).

Псевдограф — це граф, який може містити петлі і кратні ребра.

Повний граф — простий неорієнтований граф, у якому кожна пара різних вершин з'єднана ребром.

Підграф — граф, вершини й ребра якого є підмножинами вершин і ребер початкового графа.

Степінь вершини — кількість $\deg(v)$ всіх інцидентних їй ребер.

Для орієнтованого графа: **напівстепенем входу вершини v** називають число $\deg^-(v)$ всіх дуг, що заходять в неї, а **напівстепенем виходу вершини v** - число $\deg^+(v)$ дуг що виходять з неї. **Степенем вершини v** називають число $\deg(v)$ рівне сумі напівстепенів входу і виходу цієї вершини.

Дві вершини називаються **суміжними**, якщо між ними існує ребро.

Ребро називається **інцидентним** вершині, якщо воно з нею з'єднане.

Шлях — це послідовність вершин, у якій кожна пара сусідніх вершин з'єднана ребром (для орієнтованого графа — дугою).

Простий шлях — це шлях, всі вершини якого, крім, бути може, першою і останньою, попарно різні і всі ребра якої попарно різні.

Довжина шляху — кількість ребер або сума їхніх ваг.

Цикл — шлях, у якому початкова та кінцева вершини збігаються.

Граф називається **зв'язним**, якщо між будь-якими двома його вершинами існує шлях.

У неорієнтованому графі — достатньо, щоб існували шляхи між усіма парами вершин.

У орієнтованому графі виділяють:

сильно зв'язний — існує орієнтований шлях між будь-якими двома вершинами в обох напрямках;

слабо зв'язний — граф стає зв'язним, якщо ігнорувати напрямки дуг.

Граф називається **незв'язним**, якщо існує принаймні одна пара вершин, між якими немає жодного шляху. Такий граф можна розбити на **компоненти зв'язності** — максимальні підграфи, які є зв'язними.

Два графа $G = (V, U)$ и $G' = (V', U')$ називаються **ізоморфними** (позначається $G \cong G'$), якщо між їх множинами вершин існує взаємно однозначна відповідність (бієктивне відображення), що зберігає інцидентність ребер.

Обхід графа — це процес **послідовного відвідування всіх вершин графа** за певним правилом так, щоб кожна вершина була розглянута.

Найпоширенішими алгоритмами обходу є:

1. **DFS (пошук у глибину)** — переходить якомога глибше по графу, використовуючи стек або рекурсію.
2. **BFS (пошук у ширину)** — відвідує вершини пошарово, використовуючи чергу.

Найкоротший шлях — це шлях з **мінімальною довжиною** (у незваженому графі — за кількістю ребер, у зваженому — за сумою ваг).

Алгоритми пошуку найкоротшого шляху у графі:

1. **BFS;**
2. **Алгоритм Дейкстри;**
3. **Алгоритм Беллмана—Форда;**
4. **Алгоритм Флойда—Воршелла;**
5. **A*.**

Неорієнтованим деревом називають ациклічний зв'язний граф.

Орієнтованим деревом називають орієнтований безконтурний граф, у якого напівстепень входу кожної вершини не більше 1 і існує рівно одна вершина, звана коренем орієнтованого дерева, напівстепень входу якої дорівнює 0.

Ліс — це граф, компоненти зв'язності якого являють собою дерева.

Теорема (перший критерій дерева).

Неорієнтований граф G є деревом тоді і тільки тоді, коли будь-які дві його вершини з'єднуються єдиним ланцюгом.

Довжина найдовшого шляху з кореня дерева до його листя називається **висотою дерева**.

Теорема (другий критерій дерева).

Зв'язний граф G є деревом тоді і тільки тоді, коли в ньому кількість вершин рівно на одиницю більше кількості ребер.

Остовним (чи каркасним) деревом графа G називають такий його підграф, який є деревом і містить всі вершини графа G .

Планарний граф — це граф, який можна зобразити на площині так, що жодні два ребра не перетинаються, окрім як у спільних вершинах.

Основним і найбільш фундаментальним критерієм планарності є теорема Куратовського.

Теорема (критерій Куратовського).

Граф планарен тоді і тільки тоді, коли він не містить жодного підграфа, гомеоморфного хоча б одному з графів K_5 або $K_{3,3}$.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Вивчення теми рекомендується розпочати з ознайомлення з базовими поняттями теорії графів та їх формальними означеннями. Необхідно чітко засвоїти поняття графа, вершини, ребра (дуги), а також чітко розрізняти орієнтовані та неорієнтовані графи.

Особливу увагу слід звернути на класифікацію графів за їх властивостями, зокрема на прості графи, мультиграфи та псевдографи, оскільки оскільки правильне визначення типу графа є необхідною умовою коректного розв'язання практичних задач.

При опрацюванні степеня вершини необхідно враховувати відмінності між степенем вершини в неорієнтованому графі та вхідним і вихідним степенями в орієнтованому графі. Доцільно приділити увагу формулюванню та застосуванню співвідношень, що пов'язують степені вершин із кількістю ребер графа.

Вивчаючи поняття шляхів і циклів, рекомендується використовувати наочні приклади, будувати графи та розв'язувати задачі з поступовим ускладненням, щоб чітко розрізняти прості шляхи, цикли та їхні властивості. Особливу увагу слід приділити поняттю зв'язності та компонент зв'язності, оскільки вони є базовими для подальшого вивчення алгоритмів обходу графів.

Під час вивчення способів представлення графів необхідно звернути увагу на переваги та недоліки матриці суміжності, матриці інцидентності та списків суміжності. Рекомендується порівнювати ці способи не лише теоретично, а й з позиції їх практичного використання.

Вивчення алгоритмів обходу графів доцільно розпочинати з аналізу ідеї алгоритмів BFS та DFS, після чого перейти до їх покрокового виконання на конкретних прикладах. Особливу увагу слід звернути на порядок відвідування вершин та побудову дерева обходу.

Продовжуючи вивчення теми, необхідно ретельно ознайомитися з алгоритмами пошуку найкоротшого шляху у графі.

Особливу увагу варто приділити алгоритму Дейкстри, зокрема порядку вибору вершини з мінімальною поточною відстанню та використанню пріоритетної черги.

Доцільно опрацювати алгоритм Беллмана–Форда та звернути увагу на можливість роботи з від'ємними вагами ребер.

Варто також ознайомитися з алгоритмом Флойда–Воршелла для знаходження найкоротших шляхів між усіма парами вершин.

Під час підготовки варто порівняти алгоритми за часовою та просторовою складністю.

На завершення здобувачам необхідно розглянути основні визначення і поняття, пов'язані з деревами: дерево, ліс, корінь, вузол, листок, рівень, висота дерева.

Доцільно звернути увагу на ключові властивості дерев, зокрема відсутність циклів, залежність кількості ребер від кількості вершин та вплив порядку обходу на результат роботи алгоритмів.

Слід усвідомити зв'язок між деревами та графами, а також умови, за яких граф є деревом.

Окремо варто опрацювати основні типи дерев, зокрема бінарні дерева та бінарні дерева пошуку.

Під час вивчення теми здобувачам рекомендується поєднувати формальне математичне розуміння з прикладною інтерпретацією графів у комп'ютерних науках та кібербезпеці. Особливу увагу слід приділяти не лише означенням, а й властивостям та обмеженням графових моделей.

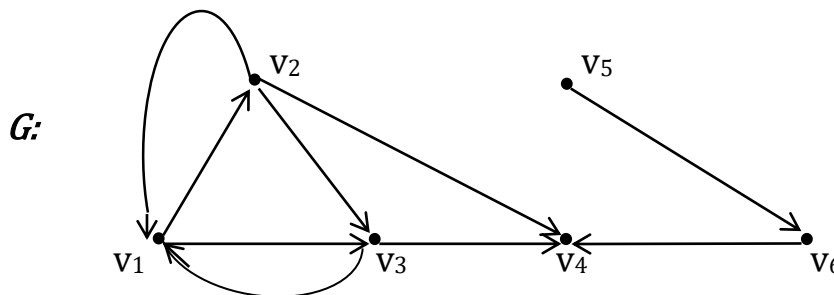
Приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Граф (орграф) $G = (V, U)$ заданий перерахуванням елементів множин V і U :

$$G = (V, U) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)\}).$$

Задати граф (орграф) $G = (V, U)$ геометрично.

Розв'язання. Для заданного орграфа маємо:



Геометричний метод представлення графів є найбільш наочним, що дозволяє швидко знаходити потрібну інформацію про графу, однак цей метод завдання графів має і суттєві недоліки - зображення навіть нескладного графа вимагає великої площі по-перше і, по-друге, обробку так заданого графа не можна доручити ЕОМ.

Завдання 2. Подати граф (орграф) $G = (V, U)$ матрицею інцидентності.

Розв'язання. Нехай $|V| = m$, $|U| = n$, і нехай всі ребра (дуги) графа занумеровані. Тоді граф (неорієнтований або орієнтований) може бути встановлений прямокутною матрицею розмірності $m \times n$.

Для орієнтованого графа елементи матриці задаються так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо для } i - \text{тої вершини } j - \text{та дуга, що виходить,} \\ -1, & \text{якщо для } i - \text{тої вершини } j - \text{та дуга, що заходить,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Побудуємо матрицю інцидентності для заданого орграфу.

Для цього занумеруємо дуги орграфу, наприклад, наступним чином

$(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

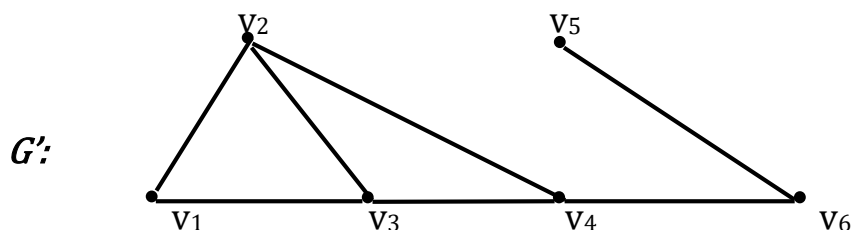
Тоді матриця інцидентності графа G :

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для неорієнтованого графа елементи матриці інцидентності задаються наступним чином

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{та вершина інцидентна } j - \text{тому ребру,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Розглянемо граф, асоційований з орграфом попереднього прикладу



і занумеруємо його ребра, наприклад, наступним чином:

$$\begin{array}{ccccccc} \{v_1, v_2\}, & \{v_1, v_3\}, & \{v_2, v_3\}, & \{v_2, v_4\}, & \{v_3, v_4\}, & \{v_5, v_6\}, & \{v_6, v_4\}. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Тоді матриця інцидентності графа G' наступна:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 3. Подати граф (орграф) $G = (V, U)$ у вигляді матриці суміжності.

Розв'язання. Матриця суміжності — це квадратна матриця розмірності $n \times n$, де $n = |V|$. Елементи матриці суміжності визначаються так:

Для неорієнтованого графа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{та } j - \text{та вершини графа суміжні;} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

З визначення елементів матриці відразу випливає, що матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична.

Для орграфа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з } i - \text{тої вершини графа в } j - \text{ту веде дуга;} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зауважимо, що в k -тому рядку матриці суміжності орграфа кількість одиниць дорівнює **напівстепені виходу** $\deg^+(v_k)$ вершини v_k , а кількість одиниць у k -тому стовпчику матриці суміжності орграфа дорівнює **напівстепені входу** $\deg^-(v_k)$ вершини v_k .

Для неорієнтованого графа завдання 2 матриця суміжності має вигляд:

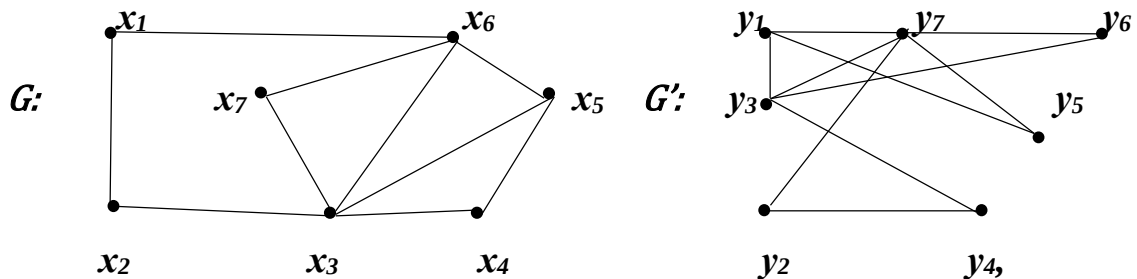
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для орієнтованого графа завдання 1 матриця суміжності наступна:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, матриця суміжності орграфа в цьому випадку симетричною не є.

Завдання 3. З'ясувати, чи ізоморфні графи G і G' , де



Розв'язання.

За означенням два графа $G = (V, U)$ и $G' = (V', U')$ ізоморфні, якщо між їх множинами вершин існує взаємно однозначна відповідність (бієктивне відображення), що зберігає інцидентність ребер.

Зауважимо, перш за все, що кількість вершин першого і другого графів збігаються, а тому взаємно однозначну відповідність (бієктивне відображення) між множиною вершин встановити можна. Але необхідна така відповідність, яка зберігала б інцидентність. Врахуємо, що вершини різного

степеня відповідати один одному не можуть, бо інцидентні різним кількостям ребер (тобто така відповідність не зберігала б інцидентність). Тому підрахуємо степені вершин графів. Маємо:

	у графі G	у графі G'
$\deg(t) = 2:$	x_1, x_2, x_4, x_7	y_2, y_4, y_5, y_6
$\deg(t) = 3:$	x_5	y_1
$\deg(t) = 4:$	x_6	y_3
$\deg(t) = 5:$	x_3	y_7

Оскільки вершин степенів 3,4,5 у графах по одній, то вони і повинні бути зіставлені один одному відповідно. Оформимо шукане бієктивне відображення у вигляді підстановки

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ ? & ? & y_7 & ? & y_1 & y_3 & ? \end{pmatrix}.$$

Переконаємося в тому, що вже встановлена відповідність вершин зберігає інцидентність (наприклад, ребра $\{x_3, x_5\}$, $\{x_3, x_6\}$ у графі G існують і їм відповідають у графі G' відповідно ребра $\{y_7, y_1\}$, $\{y_7, y_3\}$).

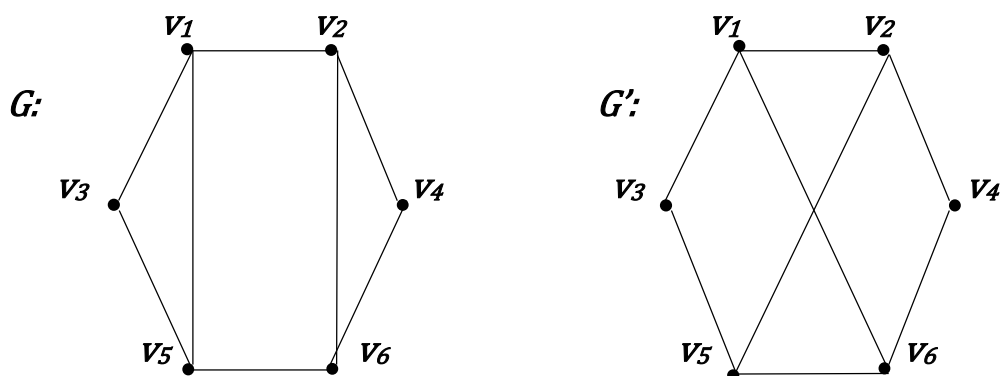
Відповідність решти вершин перебором вимагає великої кількості перевірок інцидентності. Можна, в нашому випадку, зауважити, що в графі G вершина x_3 степеня 5 не з'єднана ребром з вершиною x_1 степені 2. Тоді і в графі G' вершина y_7 не повинна з'єднуватися ребром з вершиною степеня 2. Такою вершиною у графі G' є вершина y_4 . Поставимо у відповідність вершині x_1 вершину y_4 і перевіримо наявність відповідних ребер. Продовжимо подальший аналіз і остаточно отримаємо

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_1 & y_3 & y_6 \end{pmatrix}$$

Таким чином, бієктивне відображення між множинами вершин вихідних графів, що зберігає інцидентність, встановлено і тому ці графи ізоморфні один одному.

Як бачимо, встановлення ізоморфізму двох графів - процедура досить громізка. Іноді про незоморфності графів можна судити за непрямими характеристиками графів.

Завдання 4. Перевірити ізоморфізм графів G и G' , де



Розв'язання.

Кількість вершин вихідних графів (шість) і ребер (вісім) однакова. Тому бієктивні відображення між множиною вершин і ребер відповідно можна встановити. Подальший перебір варіантів відповідності вершин для пошуку відповідності, що зберігає інцидентність відповідних ребер, громіздок. Однак можна відразу помітити, що в графі G є два цикли довжини 3 (v_1, v_3, v_5 и v_2, v_4, v_6), а граф G' циклів довжини 3 взагалі не має. Раніше ми зазначали, що ізоморфні графи мають абсолютно однакові властивості. Тому ми можемо відразу судити про те, що вихідні графи не є ізоморфними.

Встановлення ізоморфізму орграфів відбувається аналогічно описаному вище з тією лише різницею, що при встановленні бієктивного відображення між множинами вершин необхідно враховувати не просто степені вершин, а їх напівстепені входу і виходу.

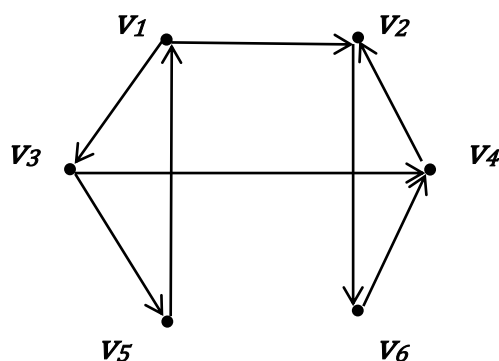
Питання для обговорення

1. Що є базовими **елементами графа** та як вони формалізуються в математичній моделі?
2. Які **типи графів** існують і за якими ознаками вони класифікуються?
3. У чому різниця між **орієнтованим** (орграфом) та **неорієнтованим** графом?
4. Що таке **ступінь вершини** та як визначають вхідний та вихідний ступінь у орієнтованому графі?
5. Який граф називається **змішаним**?
6. Що таке **мультиграф** та **псевдограф**? Чим вони відрізняються від простого графа?
7. Які вершини називаються **суміжними**, а ребра — **інцидентними**?
8. Як знайти **напівступінь входу** та **виходу** для орграфу?
9. Яка вершина називається **ізолюваною**, а яка — **висячою**?
10. **Матриця суміжності**: які її властивості для неорієнтованого графа?
11. Що відображають одиниці, а що — нулі?
12. **Матриця інцидентності**: як вона будується і чим відрізняється від матриці суміжності?
13. **Список суміжності**: у яких випадках цей спосіб зберігання графа в пам'яті комп'ютера ефективніший за матрицю?
14. Що таке **повний** граф та **порожній** граф?
15. Поняття **підграфа** та **остовного підграфа**.
16. Що таке **зв'язний** граф? Як визначити **компоненти зв'язності**?
17. Які властивості суміжності та інцидентності необхідно враховувати при побудові графів?
18. Що розуміється під **шляхом** та **циклом** у графі, та яку роль вони відіграють у алгоритмічному аналізі?
19. Чим відрізняється шлях від **ланцюга** та **циклу**?
20. Які визначення зв'язності графа існують і як розрізняють **сильну** та **слабку зв'язність** у орієнтованих графах?
21. Які **способи представлення** графів існують і які переваги та недоліки кожного з них?
22. Як оцінюється просторово-часова складність матриці суміжності, матриці інцидентності та списків суміжності?
23. У чому полягає суть **алгоритмів обходу графів** (BFS та DFS) та які практичні завдання вони дозволяють розв'язувати?
24. Які види ребер виділяються під час DFS і яка їх значимість для аналізу графа?
25. Чому DFS важливий у кібербезпеці?

26. Як вибір подання графа впливає на ефективність виконання алгоритмів пошуку та обходу?
27. Які приклади застосування теорії графів у комп'ютерних науках та кібербезпеці можна навести?
28. Які критерії доцільності вибору алгоритму обходу графа для конкретної прикладної задачі?

Завдання для самостійної роботи

1. Наведіть формальне означення графа та поясніть різницю між орієнтованим та неорієнтованим графом.
2. Визначте, які типи графів (прості, мультиграфи, псевдографи) застосовуються для моделювання:
 - соціальних мереж,
 - корпоративних мереж з можливими атаками.
3. Поясніть поняття ступеня вершини, вхідного та вихідного ступеня в орієнтованому графі.
4. Поясніть поняття суміжності та інцидентності, наведіть приклади.
5. Визначте різницю між шляхом і циклом, наведіть приклади застосування у прикладних задачах.
6. Опишіть поняття зв'язності графа, сильну та слабку зв'язність у орієнтованих графах.
7. Поясніть переваги та недоліки матриці суміжності, матриці інцидентності та списків суміжності.
8. Наведіть приклади практичного використання алгоритмів обходу графів (BFS та DFS) у КН та КБ.
9. Для орграфу, заданого малюнку:



- 1) Знайдіть півступеня входу та виходу, ступінь кожної з вершин.
- 2) Чи має граф джерела та стоки?

- 3) Чи має граф прості цикли? Якщо так, то вкажіть хоча б один з них і визначте його довжину.
- 4) З'ясуйте, чи є граф зв'язковим? Якщо ні, то знайдіть хоча б одну його компоненту зв'язності.
- 5) Намалюйте граф, асоційований із цим орграфом.
- 6) Який простий шлях у вихідному графі має максимальну довжину? Яка ця довжина?
- 7) Побудуйте матриці інцидентності орграфа та асоційованого із ним графа.
- 8) Побудуйте матриці суміжності орграфа та асоційованого з ним графа.

12. Орграф заданий своєю матрицею інцидентності

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Знайдіть півступеня входу та виходу, ступінь кожної з вершин.
- 2) Визначте тип графа (псевдограф, мультиграф, звичайний граф).
- 3) Чи має орграф джерела та стоки?
- 4) Чи має орграф ізольовані вершини?
- 5) На підставі матриці інцидентності для кожної вершини знайдіть її множини попередників $O^-(v)$ та наступників $O^+(v)$.
- 6) Побудуйте матрицю суміжності орграфа та асоційованого з ним графа.

13. Граф заданий своєю матрицею суміжності.

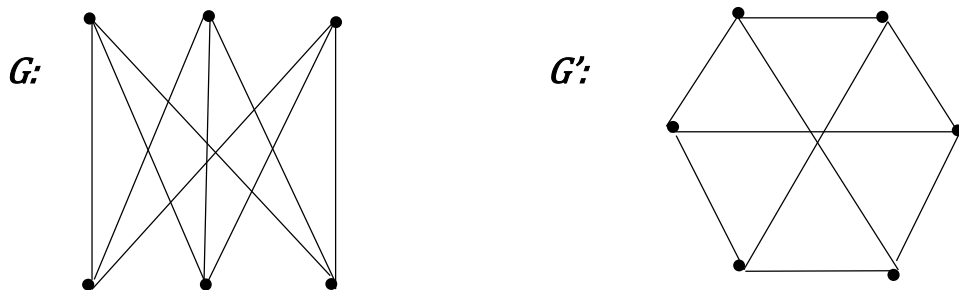
Яку інформацію про граф можна отримати безпосередньо на підставі матриці суміжності?

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Дайте відповіді на питання:

- 1) Чи має орграф джерела та стоки?
- 2) Чи має орграф ізольовані вершини?
- 3) Чи має орграф петлі?
- 4) Чи має орграф кратні ребра?
- 5) Чи є орграф звичайним?
- 6) Знайдіть півступеня входу та виходу, ступінь кожної з вершин.
- 7) Побудуйте матриці інцидентності орграфа та асоційованого із ним графа.

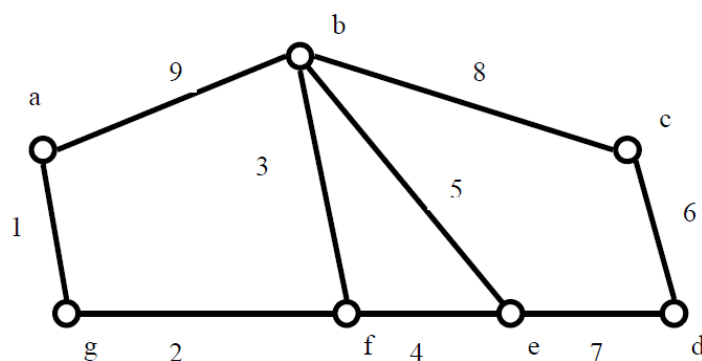
14. Чи є ізоморфними такі графи?



15. Доведіть, що в будь-якому неорієнтованому графі кількість вершин з непарним степенем є парною.

16. Спробуйте намалювати граф, що має 5 вершин зі степенями (1, 2, 2, 3, 4). Якщо це неможливо — поясніть чому, спираючись на лему про рукостискання.

17. Для графа



- 1) Визначте чи є даний граф повним, якщо ні, знайдіть доповнення графа.
- 2) Знайдіть степені вершин графа.
- 3) Побудуйте матриці інцидентності, суміжності.

ТЕМИ РЕФЕРАТИВ

1. Висловлювальна логіка та її застосування в інформатиці.
2. Висловлювальна логіка як основа формальної верифікації систем безпеки.
3. Предикатна логіка: основні поняття та приклади використання.
4. Предикатна логіка в аналізі політик доступу.
5. Парадокси теорії множин: від парадоксу Рассела до кризи основ математики.
6. Застосування логіки предикатів в інженерних моделях.
7. Формальна логіка в програмуванні та верифікації систем.
8. Алгебра логіки та її роль у схемотехніці.
9. Застосування графів у комп'ютерних мережах.
10. Роль дискретної математики в програмуванні.
11. Булева алгебра в криптографічних алгоритмах.
12. Логічні атаки та помилки проєктування систем безпеки.
13. Комбінаторні задачі в програмуванні.
14. Біном Ньютона та трикутник Паскаля: математичні властивості та цікаві закономірності.
15. Комбінаторні методи в оптимізації інженерних рішень.
16. Перестановки та комбінації в аналізі надійності систем.
17. Комбінаторні методи оцінки криптографічної складності.
18. Принцип включення–виключення в аналізі атак.
19. Комбінаторні вибухи та їх вплив на безпеку паролів.
20. Застосування теорії множин у моделюванні технічних систем.
21. Бінарні відношення в задачах керування та автоматизації.
22. Часткові порядки та їх використання в інженерних алгоритмах.
23. Еквівалентні відношення в класифікації сигналів і даних.
24. Теорія графів у проєктуванні комп'ютерних мереж.
25. Орієнтовані графи в моделюванні технологічних процесів.
26. Алгоритми пошуку найкоротшого шляху в навігаційних системах.
27. Древа рішень у системах підтримки прийняття рішень.
28. Планарні графи в електроніці та схемотехніці.
29. Мережеві потоки в логістиці та інженерних системах.
30. Булева алгебра в проєктуванні цифрових схем.
31. Мінімізація логічних функцій у мікропроцесорній техніці.
32. Логічні елементи та їх застосування в автоматизованих системах.
33. Рекурентні співвідношення в моделюванні процесів.

- 34.Складність алгоритмів і її значення для інженерії.
- 35.Алгоритми сортування в обробці технічних даних.
- 36.Дискретна математика в штучному інтелекті.
- 37.Математичні основи блокчейн-технологій.
- 38.Дискретні моделі в робототехніці.
- 39.Теорія автоматів у проектуванні керуючих систем.
- 40.Дискретна оптимізація в інженерних задачах.
- 41.Дискретна математика в цифровій обробці сигналів.
- 42.Задача про комівояжера: сучасні методи розв'язання та практичне застосування в логістиці.
- 43.Розфарбовування графів: теорема про чотири фарби та її застосування при проектуванні мереж.
- 44.Дерева та їх роль у комп'ютерних науках: від структур даних до алгоритмів стиснення.
- 45.Алгебра Буля як основа архітектури сучасних ЕОМ.
- 46.Застосування логічних операцій у розробці пошукових систем.
- 47.Хеш-функції: принципи роботи та використання в технології Blockchain.
- 48.Мащини Тюрінга: поняття та значення.
- 49.Машина Тюрінга як універсальна модель обчислень.
- 50.Формальні методи доведення коректності протоколів безпеки.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. **Висловлюванням у математичній логіці називається:**
 - A) будь-яке речення природної мови
 - B) розповідне речення, для якого можна визначити істинність
 - C) питання або наказ
 - D) будь-який логічний вираз

2. **Які значення істинності може набувати висловлювання?**
 - A) істина, хиба, невизначеність
 - B) 0 та 1
 - C) істина або хиба
 - D) лише істина

3. **Який логічний сполучник відповідає операції «і»?**
 - A) $\vee$
 - B) $\rightarrow$
 - C) $\wedge$
 - D) $\neg$

4. **Таблиця істинності використовується для:**
 - A) побудови алгоритмів
 - B) подання значень логічного виразу для всіх наборів змінних
 - C) доведення теорем
 - D) оптимізації програмного коду

5. **Логічна формула є тавтологією, якщо вона:**
 - A) хибна для всіх наборів змінних
 - B) істинна хоча б для одного набору змінних
 - C) істинна для всіх наборів змінних
 - D) не містить логічних сполучників

6. **Булева функція — це:**
 - A) функція дійсних змінних
 - B) функція, що приймає значення $\{-1, 1\}$
 - C) відображення $\{0,1\}^n$ у $\{0,1\}$
 - D) будь-яка логічна формула

- 7. Дві логічні формули є еквівалентними, якщо вони:**
- А) мають однаковий вигляд
 - В) містять однакову кількість змінних
 - С) мають однакові таблиці істинності
 - Д) записані в одній нормальній формі
- 8. Основне призначення перетворення логічних формул у ДДНФ або ДКНФ:**
- А) спрощення програмного коду
 - В) формальний аналіз і реалізація логічних функцій
 - С) побудова блок-схем
 - Д) зменшення кількості змінних
- 9. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) — це:**
- А) диз'юнкція довільних логічних виразів
 - В) кон'юнкція елементарних диз'юнкцій
 - С) диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, у яких присутні всі змінні
 - Д) будь-яка логічна формула
- 10. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) — це:**
- А) кон'юнкція елементарних диз'юнкцій, у яких присутні всі змінні
 - В) диз'юнкція елементарних кон'юнкцій
 - С) диз'юнкція довільних формул
 - Д) таблиця істинності функції
- 11. Предикат — це:**
- А) висловлювання з фіксованим значенням істинності
 - В) логічна змінна
 - С) висловлювання, істинність якого залежить від значень змінних
 - Д) будь-яка логічна формула
- 12. На відміну від логіки висловлювань, логіка предикатів:**
- А) не використовує логічних зв'язок
 - В) не має змінних
 - С) дозволяє описувати властивості об'єктів та відношення між ними
 - Д) працює лише з істинними висловлюваннями
- 13. Квантор загальності $\forall$ означає:**
- А) існує хоча б один елемент

- В) для деяких елементів
- С) для всіх елементів області визначення
- Д) не існує жодного елемента

15. Квантор існування $\exists$ означає:

- А) для всіх елементів
- В) існує хоча б один елемент
- С) для жодного елемента
- Д) для нескінченної множини

16. Множина — це:

- А) будь-яка сукупність об'єктів
- В) упорядкований набір чисел
- С) логічний вираз
- Д) математична формула

17. Запис $a \in A$ означає:

- А) множина A входить до a
- В) елемент a належить множині A
- С) a не належить A
- Д) A дорівнює a

18. Порожню множину позначають:

- А) $\{0\}$
- В) $\emptyset$ або $\varnothing$
- С) $\{ \}$ з одним елементом
- Д) ∞

19. Множина A є підмножиною множини B , якщо:

- А) $A = B$
- В) A має менше елементів
- С) кожен елемент A належить B
- Д) B не має елементів

20. Операція об'єднання множин $A \cup B$ — це:

- А) множина елементів, спільних для A і B
- В) множина всіх елементів, що належать хоча б одній з множин
- С) множина елементів, які не належать жодній множині
- Д) множина елементів тільки з A

21. Операція перетину множин $A \cap B$ — це:

- A) множина всіх елементів A і B
- B) множина елементів, що належать лише A
- C) множина спільних елементів A і B
- D) порожня множина

22. Різниця множин $A \setminus B$ — це:

- A) множина елементів B , що не належать A
- B) множина всіх елементів A і B
- C) множина елементів A , що не належать B
- D) множина спільних елементів

23. Універсальна множина — це:

- A) порожня множина
- B) множина, що містить усі елементи, які розглядаються
- C) множина всіх множин
- D) нескінченна множина

24. Потужність (кардинальність) множини — це:

- A) сума її елементів
- B) кількість елементів множини
- C) спосіб задання множини
- D) підмножина множини

25. Дві множини називаються рівнопотужними, якщо:

- A) вони рівні
- B) мають спільні елементи
- C) між ними існує взаємно однозначна відповідність
- D) вони скінченні

26. Декартовим добутком множин $A \times B$ називається:

- A) множина спільних елементів A і B
- B) множина всіх упорядкованих пар (a, b) , де $a \in A, b \in B$
- C) множина всіх елементів множин A і B
- D) множина функцій з A у B

27. Відношенням на множині A називається:

- A) будь-яка підмножина множини A
- B) будь-яка функція на множині A

- C) будь-яка підмножина декартового добутку $A \times A$
- D) будь-яка скінченна множина

28. Упорядкована пара (a, b) належить відношенню R , якщо:

- A) $a = b$
- B) $a \in A$
- C) $(a, b) \in R$
- D) $b \in A$

29. Відношення R на множині A називається рефлексивним, якщо:

- A) для будь-яких $a, b \in A$ виконується $aRb \Rightarrow bRa$
- B) для будь-якого $a \in A$ виконується aRa
- C) не існує $a \in A$, для якого aRa
- D) для будь-яких $a, b, c \in A$ виконується $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

30. Відношення R називається симетричним, якщо:

- A) $aRb \Rightarrow aRa$
- B) $aRb \Rightarrow bRa$
- C) aRa для всіх a
- D) $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

31. Відношення R називається антисиметричним, якщо:

- A) $aRb \Rightarrow bRa$
- B) $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- C) aRa не виконується
- D) $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

32. Відношення R називається транзитивним, якщо:

- A) $aRb \Rightarrow bRa$
- B) $aRb \Rightarrow aRa$
- C) $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
- D) $a = b$

33. Які властивості має відношення еквівалентності?

- A) рефлексивність, симетричність
- B) симетричність, транзитивність
- C) рефлексивність, транзитивність
- D) рефлексивність, симетричність, транзитивність

34. Яке з наведених відношень є відношенням еквівалентності?

- A) «менше ніж» на $\mathbb{R}$
- B) «більше або дорівнює» на $\mathbb{R}$
- C) «мати однакову парність» на $\mathbb{Z}$
- D) «бути підмножиною»

35. Відношення часткового порядку має властивості:

- A) симетричність, транзитивність
- B) рефлексивність, симетричність
- C) рефлексивність, антисиметричність, транзитивність
- D) лише транзитивність

36. Прикладом відношення часткового порядку є:

- A) «дорівнює»
- B) «менше ніж»
- C) «бути підмножиною»
- D) «мати спільний елемент»

37. Якщо R — відношення часткового порядку, то елементи a і b можуть бути:

- A) завжди порівнянними
- B) непорівнянними
- C) завжди рівними
- D) симетричними

38. Клас еквівалентності елемента a — це:

- A) множина всіх елементів, менших за a
- B) множина всіх елементів, еквівалентних a
- C) множина всіх підмножин
- D) універсальна множина

39. Розбиття множини — це:

- A) довільний набір підмножин
- B) система непорожніх, попарно неперетинних підмножин, об'єднання яких дає всю множину
- C) будь-яка підмножина
- D) декартовий добуток

40.Комбінаторний аналіз вивчає:

- A) логічні операції
- B) методи підрахунку кількості можливих варіантів
- C) властивості функцій
- D) методи розв'язування рівнянь

41.Правило суми в комбінаториці використовується, коли:

- A) всі дії виконуються послідовно
- B) вибір здійснюється одночасно
- C) вибір здійснюється з кількох взаємовиключних варіантів
- D) кількість елементів нескінченна

42.Перестановки без повторень з n елементів дорівнюють:

- A) C_n^k
- B) A_n^k
- C) $n!$
- D) $k!$

43.Кількість перестановок з повтореннями обчислюється за формулою:

- A) $n!$
- B) $\frac{n!}{n_1 n_2 \dots n_k}$
- C) C_n^k
- D) A_n^k

44.Розміщення без повторень з n елементів по k дорівнює:

- A) C_n^k
- B) $n!$
- C) $\frac{n!}{(n-k)!}$
- D) n^k

45.Комбінації (сполучення) без повторень з n елементів по k — це:

- A) A_n^k
- B) $n!$
- C) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
- D) $(n-k)!$

46. Яка особливість комбінацій у порівнянні з розміщеннями?

- A) кількість елементів завжди дорівнює p
- B) порядок елементів не має значення
- C) елементи не повторюються
- D) порядок елементів має значення

47. Комбінації з повтореннями з n елементів по k дорівнюють:

- A) n^k
- B) C_n^k
- C) C_{n+k-1}^k
- D) k^n

48. Біном Ньютона має вигляд:

- A) $(a + b)^n = a^n + b^n$
- B) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$
- C) $(a + b)^n = n(a + b)$
- D) $(a + b)^n = an - bn$

49. Коефіцієнти C_n^k у біномі Ньютона називаються:

- A) факторіалами
- B) комбінаторними числами
- C) біноміальними коефіцієнтами
- D) розміщеннями

50. Трикутник Паскаля використовується для:

- A) знаходження факторіалів
- B) обчислення біноміальних коефіцієнтів
- C) розв'язування рівнянь
- D) побудови графіків

51. Граф задається:

- A) множиною вершин
- B) множиною ребер
- C) парою множин вершин і ребер
- D) таблицею істинності

52. Неорієнтований граф відрізняється від орієнтованого тим, що:

- A) не має вершин

- В) ребра не мають напрямку
- С) має лише одну вершину
- Д) не містить циклів

53.Орієнтований граф (орграф) — це граф, у якому:

- А) кожне ребро має вагу
- В) кожне ребро має напрямок
- С) кожна вершина з'єднана з усіма іншими
- Д) відсутні ребра

54.Степінь вершини в неорієнтованому графі — це:

- А) кількість вершин у графі
- В) кількість ребер графа
- С) кількість ребер, інцидентних даній вершині
- Д) довжина найкоротшого шляху

55.Напівступінь виходу вершини в орієнтованому графі — це:

- А) кількість ребер, що входять у вершину
- В) кількість ребер, що виходять з вершини
- С) загальний ступінь вершини
- Д) кількість петель

56.Петель у простому графі:

- А) може бути одна
- В) може бути декілька
- С) немає
- Д) завжди дві

57.Простий граф — це граф, який:

- А) не має ребер
- В) не має вершин
- С) не має петель і кратних ребер
- Д) є орієнтованим

58.Шлях у графі — це:

- А) будь-яка підмножина вершин
- В) послідовність вершин, у якій кожні дві сусідні з'єднані ребром
- С) множина всіх ребер
- Д) замкнена послідовність вершин

59. Цикл у графі — це:

- A) шлях без повторень вершин
- B) шлях, у якому початкова і кінцева вершини збігаються
- C) граф без ребер
- D) дерево

60. Зв'язний граф — це граф, у якому:

- A) є ізольовані вершини
- B) між будь-якими двома вершинами існує шлях
- C) немає циклів
- D) кількість ребер мінімальна

61. Дерево — це:

- A) будь-який зв'язний граф
- B) граф з одним циклом
- C) зв'язний граф без циклів
- D) орієнтований граф

62. Скільки ребер має дерево з n вершинами?

- A) n
- B) $n+1$
- C) $n-1$
- D) $2n$

63. Повний граф K_n — це граф, у якому:

- A) є рівно n ребер
- B) кожна пара вершин з'єднана ребром
- C) є лише один шлях
- D) немає циклів

64. Планарний граф — це граф, який:

- A) не має вершин
- B) можна зобразити на площині без перетинів ребер
- C) є повним
- D) має кратні ребра

65. Матриця суміжності графа — це:

- A) таблиця степенів вершин
- B) квадратна матриця, що описує зв'язки між вершинами графа

- C) множина ребер
- D) список вершин

66. Відношення суміжності вершин у графі є прикладом:

- A) відношення еквівалентності
- B) відношення часткового порядку
- C) бінарного відношення
- D) функції

67. Кількість шляхів у повному графі обчислюється здійснюється за допомогою:

- A) логіки предикатів
- B) комбінаторного аналізу
- C) теорії множин
- D) таблиць істинності

68. Клас еквівалентності в теорії відношень відповідає:

- A) вершині графа
- B) ребру графа
- C) підмножині, що є елементом розбиття
- D) дереву

69. Декартів добуток множин використовується для задання:

- A) функцій
- B) відношень
- C) графів
- D) перестановок

70. Теорія графів тісно пов'язана з комбінаторикою, оскільки:

- A) обидві використовують логіку предикатів
- B) у графах підраховують кількість вершин, ребер, шляхів
- C) графи є підмножинами
- D) використовуються лише формули

ПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

1. Поняття висловлювання та його істиннісне значення.
2. Прості та складні висловлювання.
3. Логічні операції: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.
4. Таблиці істинності логічних операцій.
5. Формули логіки висловлювань.
6. Тотожні істинні та тотожні хибні формули.
7. Закони логіки висловлювань.
8. Логічна еквівалентність формул.
9. Інтерпретація формул у логіці висловлювань.
10. Загальнозначущі та суперечливі формули.
11. Поняття булевої функції. Область визначення та область значень.
12. Способи задання булевих функцій.
13. Таблична форма подання булевих функцій.
14. Аналітична форма подання булевих функцій.
15. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).
16. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).
17. Побудова ДДНФ за таблицею істинності.
18. Побудова ДКНФ за таблицею істинності.
19. Еквівалентність булевих функцій.
20. Перетворення булевих виразів за законами булевої алгебри.
21. Поняття предиката та його відмінність від висловлювання.
22. Одномісні та багатомісні предикати.
23. Квантор загальності ($\forall$): зміст і приклади використання.
24. Квантор існування ($\exists$): зміст і приклади використання.
25. Формули логіки предикатів.
26. Поняття множини та її елементів.
27. Способи задання множин.
28. Підмножина та власна підмножина.
29. Рівність множин.
30. Порожня множина.
31. Операції над множинами: об'єднання, перетин, різниця, доповнення.
32. Закони алгебри множин.
33. Універсальна множина

34. Декартів добуток множин.
35. Потужність скінченних множин.
36. Зображення множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна.
37. Поняття бінарного відношення.
38. Задання відношень на множинах.
39. Область визначення та область значень відношення.
40. Властивості відношень: рефлексивність, іррефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність.
41. Відношення еквівалентності.
42. Класи еквівалентності.
43. Відношення порядку.
44. Частковий та лінійний порядок.
45. Основні задачі комбінаторики.
46. Правило суми та правило добутку.
47. Перестановки без повторень.
48. Перестановки з повтореннями.
49. Розміщення без повторень.
50. Розміщення з повтореннями.
51. Сполучення без повторень.
52. Сполучення з повтореннями.
53. Формула біноміальних коефіцієнтів.
54. Трикутник Паскаля.
55. Біном Ньютона.
56. Поняття графа. Основні елементи графа.
57. Вершини та ребра графа. Суміжність і інцидентність.
58. Орієнтовані та неорієнтовані графи.
59. Зважені та незважені графи.
60. Простий граф, мультиграф, псевдограф.
61. Ступінь вершини. Напівстепені входу та виходу.
62. Шлях, простий шлях, цикл.
63. Зв'язний граф. Компоненти зв'язності.
64. Повний граф та його властивості.
65. Способи задання графів.
66. Доповнення графа.
67. Операції над графами.
68. Ізоморфізм графів.
69. Обходи в графах. Ейлерові графи.
70. Мінімальні шляхи в зважених орграфах.
71. Пошук у глибину (DFS): ідея, алгоритм, застосування.

- 72.Пошук у ширину (BFS): ідея, алгоритм, застосування.
- 73.Відмінності між DFS та BFS.
- 74.Алгоритм Дейкстри: принцип роботи та обмеження.
- 75.Алгоритм Беллмана–Форда.
- 76.Алгоритм Флойда–Воршелла.
- 77.Порівняльна характеристика алгоритмів пошуку найкоротших шляхів.
- 78.Часова та просторова складність основних алгоритмів на графах.
- 79.Поняття дерева та лісу.
- 80.Основні властивості дерев.
- 81.Кореневе дерево та його елементи.
- 82.Бінарне дерево та його види.
- 83.Бінарне дерево пошуку.
- 84.Алгоритми обходу дерев.
- 85.Висота та глибина дерева.
- 86.Зв'язок між деревами та графами.
- 87.Плоскі та планарні графи. Критерії планарності графів, теорема Куратовського.
- 88.Розфарбовування графів. Теорема про 5 фарб.

ФОРМИ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ

Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних занять і має на меті перевірку рівня засвоєння здобувачем вивченої теми.

При поточному контролі оцінці підлягають: рівень теоретичних знань та вміння працювати з науковою літературою, знання матеріалу, продемонстрованого у виконаних завданнях самостійної роботи; активність та систематичність роботи на заняттях; результати виконання домашніх завдань, тестів, експрес-опитувань, доповідей, рефератів тощо.

Форми проведення поточного контролю: усне опитування здобувачів, розв'язування практичних завдань, тестові завдання, доповіді, реферати.

Проміжний контроль проводиться після вивчення відповідних тем або блоку тем з метою з'ясування ступеню засвоєності здобувачами відповідного об'єму опрацьованого та вивченого матеріалу та подальшої оцінки рівня отриманих знань. Форми проведення проміжного контролю: контрольна робота, тестове опитування, співбесіда (усне спілкування).

Підсумковий контроль здійснюється у формі іспиту/заліку.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

При використанні форми контролю у вигляді заліку враховується поточна, зокрема самостійна робота, наукова діяльність здобувача. Крім того, здобувач має надати відповідь на залікове запитання. Оцінка рівня знань виконується за принципом "відповідь вірна" або "відповідь невірна". При вірній відповіді виставляється оцінка "зараховано", при невірній, неповній відповіді виставляється оцінка "не зараховано".

Оцінка з національної шкали переводиться у 100-бальну та шкалу ECTS у відповідності до результатів навчальної успішності здобувача протягом семестру.

СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ (СКЛАДОВІ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ)

Пункт оцінки	% підсумкової оцінки або максимальна оцінка в балах	Групове чи індивідуальне оцінювання
Поточний контроль, разом, у т.ч.:	50	
доповіді та повідомлення на семінарах	25	Групове та індивідуальне
виконання письмових індивідуальних завдань, рефератів, контрольних робіт	15	Індивідуальне
опитування на практичних заняттях	10	Групове та індивідуальне
Підсумковий контроль, разом, у т.ч.:	50	
письмова компонента	25	Індивідуальне
усна компонента	25	Індивідуальне

РЕКОМЕНДОВАНИЙ ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ

ОСНОВНІ ДЖЕРЕЛА

1. Журавчак Л. М. Дискретна математика для програмістів : навч. посіб. Львів : Львівська політехніка, 2019. 420 с.
2. Петричко М. В., Штовба С. Д., Козачко О. М. Дискретна математика для програмістів навчальний посібник / Петричко М. В., Штовба С. Д., Козачко О. М. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 120 с.)
3. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика: Підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Львів : «Магнолія 2006», 2007. – 608 с.
4. Кривий С. Л. Дискретна математика: підручник для студентів вищих навчальних закладів / С.Л. Кривий; Міністерство освіти і науки України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Хмельницький національний університет. - Київ – Чернівці: Букрек, 2017. – 567 с.
5. Іглін С. П. Теорія графів. Лекції та варіанти індивідуальних домашніх завдань : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. 146 с.
6. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Підручник. Вид. 2-ге перероб. і доп. – Київ : Видавництво Ліра-К, 2017. – 324 с.
7. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник .-Харків: Компанія СМІТ,2004 . - 480 с.
8. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посіб. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ: Київський університет, 2017. – 248 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.
10. Комп'ютерна логіка: [навч. посібник] / Жабін В.І., Жуков І.А., Клименко І.А., Ткаченко В.В. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 364 с.
11. Бардачов Ю.М. Дискретна математика: підручник / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова, В.Е. Ходаков -2 е вид., перероб. і доп.- К.: Вища школа, 2008. -383 с.
12. Борисенко О.А. Дискретна математика: підручник О.А. Борисенко.- Суми: ВТД «Університетська книга», 2007. - 255 с.
13. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. /В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. – 254 с.

14. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2017. 248 с.
15. Порубльов І. М. Дискретна математика: навч. посіб. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2018. 220 с.
16. Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – Київ, 2024.– 177 с.
17. Балога С.І. Дискретна математика. Навчальний посібник / С.І. Балога. Ужгород: ПП: «АУТОДОР-Шарк», 2021. - 124 с.
18. Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. Київ: Вид. дім "Києво-Могилянська академія 2009. – 159с.
19. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник / Л.Є. Базилевич. – Львів : І.Е. Чижиков, 2013. – 486 с.
20. Кривий С. Л. Збірник задач з дискретної математики : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С.Л. Кривий ; Міністерство освіти і науки України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Київ – Чернівці : Букрек, 2018. – 455 с.
21. Зеліско М. М., Пирч Н. М. Практикум із дискретної математики. Навчальний посібник. – Львів: УАД, 2022.– 609с.
22. Стусь О.В., Статкевич В.М. Дискретна математика. Збірник задач: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 106 с.
23. Кулаковська І. В. Дискретна математика. Частина 1. Множини, відношення та математичні основи криптографії. Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Дискретна математика» студентами спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз» : методичні вказівки / І. В. Кулаковська. – Миколаїв: Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2021. – 100 с.

ДОПОМІЖНІ ДЖЕРЕЛА

1. Баландіна Н. М. Дискретна математика: методичні вказівки / Н. М. Баландіна, С. В. Федоровський. - 2-ге вид., випр. - Одеса : НУ "ОЮА", 2020. – 65 с. URI: <https://hdl.handle.net/11300/14508>
2. Трофименко О.Г., Прокоп Ю.В., Чепурна О.Є., Баландіна Н.М. Роль математики у різних сферах розробки програмного забезпечення. Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія «Технічні науки». 2023. Том 34 (73) № 4. С. 117-123. DOI: 10.32782/2663-5941/2023.4/19. URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/34-73-4>

3. Sokolov A.V., Ihnatenko O.O., Balandina N.M. Increasing the Efficiency of Blind Decoding of the Steganographic Method with Code Control of Additional Information Embedding. Problems of regional energetics. 2024. Vol. 62, No. 2. P. 121-137. doi: 10.52254/1857-0070.2024.2-62.11
4. Kazakova N.F., Sokolov A.V., Balandina N.M. Dependence of the Algebraic Nonlinearity of 4-Functions of Two Variables from the Cryptographic Properties of Their Component Boolean Functions. Proceedings of the Workshop Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems. 2024. Kyiv, Ukraine, February 28, 2024. P. 479–484.
5. Bakunina O. V., Balandina N. M., Sokolov A. V. Synthesis method for S-boxes based on Galois field transform matrices. Ukrainian Journal of Information Technology. 2023. Vol. 5, No. 2. P. 41-48. DOI: 10.23939/ujit2023.02.041.
6. Воробйова О.М., Іванченко В.Д. Основи схемотехніки: У двох частинах: Навчальний посібник. - Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова. - 2004, Ч. 2. - 172с.
7. Сенчуков В. Ф. Тексти лекцій з курсу «Дискретний аналіз» Ч.2 / В. Ф. Сенчуков. – Х.: Харк.екон.ун-т, 2000. – 101 с.
8. Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці: Навчально-методичний посібник. – Суми: УАБС НБУ, 2007. – 84 с.
9. Кравчук А.Ф. Дискретний аналіз: навчальний посібник / А. Ф. Кравчук. – Харків: ІНЖЕК, 2005.– 331 с.
10. Назарова І. А. Дискретний аналіз: навчальний посібник / І. А. Назарова. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 276 с.
11. Биков М.М. Дискретний аналіз і теорія автоматів [Текст]: навч. посіб. / М.М. Биков, В.Д. Черв'яков. - Суми: СумДУ, 2016. - 354 с.

РЕСУРСИ ВІДКРИТОГО ДОСТУПУ

1. <http://cyber.onua.edu.ua> – сайт факультету кібербезпеки та інформаційних технологій, на якому розміщено робочі матеріали з курсу.
2. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/35854/1/Teoriia_hraiv.pdf
3. <https://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html>
4. <https://booksoncode.com/articles/discrete-mathematics> – 7 Best Books on Discrete Math for Beginners in 2022
5. <https://play.google.com/store/apps/details?id=engg.hub.descrete.mathematics&hl=uk&gl=US> – Discrete Mathematics – Додатки в Google Play. Посібник з дискретної математики
6. <http://dspace.onua.edu.ua> – eNUOLAIR – депозитарій (архів) НУ ОЮА.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН	5
НАВЧАЛЬНИЙ КОНТЕНТ	6
Тема 1. Елементи математичної логіки	6
Тема 2. Основи теорії множин	19
Тема 3. Відношення на множинах	28
Тема 4. Комбінаторний аналіз	35
Тема 5. Графи та їх елементи	44
ТЕМИ РЕФЕРАТИВ	58
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ	60
ПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ	71
ФОРМИ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ	74
КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ	74
СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ (СКЛАДОВІ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ)	75
РЕКОМЕНДОВАНИЙ ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ	76

Навчальне видання

Баландіна Наталія Миколаївна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

для підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань

F «Інформаційні технології», за спеціальностями

F2 «Інженерія програмного забезпечення»

F3 «Комп'ютерні науки»

F5 «Кібербезпека та захист інформації»

Електронне видання

В авторській редакції