

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
МІЖНАРОДНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Кафедра інформаційних технологій

**ДОВІДНИК З ФІЗИКИ**

---

**Горбачов В.Е.**

для здобувачів факультету кібербезпеки, програмної інженерії  
та комп'ютерних наук усіх спеціальностей

Одеса 2025

Затверджено Вченою Радою Міжнародного гуманітарного університету  
(протокол № 8 від 28.12.2025 р.)

**Горбачов В.Е.**

Фізика: Довідник з фізики для здобувачів факультету кібербезпеки, програмної інженерії та комп'ютерних наук усіх спеціальностей [Електронне видання]. / Горбачов В.Е. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету. Одеса, 2025. – 62 с.

Довідник з фізики розроблено відповідно до навчального плану. В довіднику містяться практично усі формули, які входять до загального курсу з фізики, дещо більш докладно надані формули з розділу «Електромагнетизм». В кінці довідника наведені деякі відомості з математики, що необхідні для розв'язання більшості задач, а також значення найбільш часто використовуваних фізичних сталих. Матеріали призначено для здобувачів факультету кібербезпеки, програмної інженерії та комп'ютерних наук Міжнародного гуманітарного університету усіх спеціальностей.

## ЗМІСТ

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП.....                                                            | 4  |
| I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ.....                                       | 5  |
| 1.1 Елементи кінематики.....                                          | 5  |
| 1.2 Динаміка матеріальної точки й поступального руху твердого тіла... | 6  |
| 1.3 Робота й енергія.....                                             | 6  |
| 1.4 Механіка обертального руху твердого тіла.....                     | 7  |
| 1.5 Тяжіння. Елементи теорії поля.....                                | 9  |
| 1.6 Елементи спеціальної теорії відносності.....                      | 10 |
| II. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ Й ТЕРМОДИНАМІКИ.....                   | 11 |
| 2.1 Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів.....                 | 11 |
| 2.2 Основи термодинаміки.....                                         | 14 |
| III. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....                                            | 16 |
| 3.1 Електростатика.....                                               | 16 |
| 3.2 Постійний електричний струм.....                                  | 21 |
| 3.3 Термоелектрорушійна сила й термоелектронна емісія.....            | 24 |
| 3.4 Магнітне поле.....                                                | 24 |
| 3.5 Електромагнітна індукція.....                                     | 27 |
| 3.6 Магнітні властивості речовини.....                                | 29 |
| 3.7 Основи електромагнітної теорії Максвелла.....                     | 29 |
| IV. КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ.....                                            | 30 |
| 4.1 Механічні й електромагнітні коливання.....                        | 30 |
| 4.2 Пружні хвилі.....                                                 | 35 |
| 4.3 Електромагнітні хвилі.....                                        | 36 |
| V. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ І ВОЛНОВОЇ ОПТИКИ.....                       | 37 |
| 5.1 Геометрична оптика.....                                           | 37 |
| 5.2 Фотометрія.....                                                   | 38 |
| 5.3 Інтерференція світла.....                                         | 39 |
| 5.4 Дифракція світла.....                                             | 40 |
| 5.5 Взаємодія електромагнітних хвиль із речовиною.....                | 40 |
| 5.6 Поляризація світла.....                                           | 41 |
| 5.7 Квантова природа світла. Закони теплового випромінювання.....     | 42 |
| VI. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ АТОМІВ,<br>МОЛЕКУЛ ТВЕРДИХ ТІЛ.....     | 44 |
| 6.1 Теорія атомів водню за Бором.....                                 | 44 |
| 6.2 Елементи квантової механіки.....                                  | 45 |
| 6.3 Елементи сучасної фізики атомів і молекул.....                    | 47 |
| 6.4 Елементи квантової статистики.....                                | 49 |

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 6.5 Елементи фізики твердого тіла..... | 49 |
| ДОДАТОК 1.....                         | 55 |
| ДОДАТОК 2.....                         | 58 |

## ВСТУП

Фізика – це наука, яка вивчає найбільш загальні властивості руху матерії у вигляді речовини і поля та відповідні їм найбільш загальні закони природи. Описані фундаментальні форми руху матерії (механічна, теплова, електрична, магнітна та інші ) є складовими більш складних форм руху матерії, тому фізика є підґрунтям для інших наук. Фізика – база для створення нових галузей техніки – фундаментальна основа підготовки інженера.

Довідник, що пропонується, призначається для систематизації та швидкого відновлення в пам'яті одержаних раніше знань з фізики, достатніх для розв'язання фізичних задач з широкого кола тем. У ньому містяться практично усі формули, які входять до загального курсу з фізики. Дещо більш докладно надані формули з розділів «Електромагнетизм», «Коливання та хвилі», «Фізика твердого тіла», що є дуже важливими для студентів та інженерів, які працюють у ІТ-галузі.

В кінці довідника наведені деякі відомості з математики, що необхідні для розв'язання більшості задач, а також значення найбільш часто використовуваних фізичних сталих.

## I ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

### 1.1 Елементи кінематики

Швидкість матеріальної точки

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

де  $\Delta \mathbf{r}$  – елементарне переміщення точки за проміжок часу  $\Delta t$ ;  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор точки.

Прискорення матеріальної точки

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Повне прискорення при криволінійному русі

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

де  $a_\tau = \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$  – тангенційна складова прискорення;  $a_n = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$  – нормальна складова прискорення ( $r$  – радіус кривизни траєкторії в даній точці).

Швидкість і шлях для рівнозмінного руху

$$v = v_0 \pm at; \quad s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

де  $v_0$  – початкова швидкість.

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

де  $d\varphi$  – кут обороту за час  $\Delta t$ .

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Кутова швидкість для рівномірного обертального руху

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

де  $T$  – період обертання;  $n$  – частота обертання.

Кутова швидкість й кут повороту для рівнозмінного обертального руху

$$\omega = \omega_0 t \pm \varepsilon t; \quad \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

де  $\omega_0$  – початкова кутова швидкість.

Зв'язок між лінійними й кутовими величинами

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a_\tau = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R,$$

де  $R$  – відстань до осі обертання.

## 1.2 Динаміка матеріальної точки й поступального руху твердого тіла

Імпульс (кількість руху) матеріальної точки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Другий закон Ньютона (основне рівняння динаміки матеріальної точки)

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}; \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Це ж рівняння в проекціях на дотичну й нормаль до траєкторії точки

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt}; \quad F_n = ma_n = m \frac{dv_n}{dt} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Сила тертя ковзання

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання;  $N$  – сила нормального тиску.

Закон збереження імпульсу для замкненої системи

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

де  $n$  – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему.

## 1.3 Робота й енергія

Робота, учинювана постійною силою

$$dA = F_s ds = F ds \cos \alpha,$$

де  $F_s$  – проекція сили на напрямок переміщення;  $ds$  – елементарний шлях;  $\alpha$  – кут між напрямками сили й переміщення.

Робота, учинювана змінною силою

$$A = \int_s F_s ds = \int_s F \cos \alpha ds.$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad N = \mathbf{F}\mathbf{v} = Fv \cos \alpha.$$

Потенційна енергія в полі тяжіння

$$\Pi = mgh,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Сила пружності

$$F = -kx,$$

де  $x$  – деформація;  $k$  – коефіцієнт пружності (твердість).

Потенційна енергія пружно деформованого тіла

$$\Pi = kx^2/2.$$

Закон збереження механічної енергії (для консервативної системи)

$$T + \Pi = E = \text{const},$$

де  $T$  – кінетична енергія;  $E$  – повна енергія системи.

### 1.4 Механіка обертального руху твердого тіла

Момент інерції матеріальної точки

$$J = mr^2,$$

де  $m$  – маса точки;  $r$  – відстань до осі обертання.

Момент інерції системи (тіла)

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

де  $r_i$  – відстань матеріальної точки з масою  $m_i$  до осі обертання.

У випадку безперервного розподілу мас

$$J = \int r^2 dm.$$

Моменти інерції тіл однорідних правильної геометричної форми:

| Тіло                                    | Положення осі обертання                                      | Момент інерції      |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---------------------|
| Полий тонкостінний циліндр радіусом $R$ | Вісь симетрії                                                | $mr^2$              |
| Суцільний циліндр або диск радіусом $R$ | Вісь симетрії                                                | $\frac{1}{2} mr^2$  |
| Прямий тонкий стрижень довжиною $l$     | Вісь перпендикулярна стрижню й проходить через його середину | $\frac{1}{12} ml^2$ |
| Прямий тонкий стрижень довжиною $l$     | Вісь перпендикулярна стрижню й проходить через його кінець   | $\frac{1}{3} ml^2$  |
| Куля радіусом $R$                       | Вісь проходить через центр кулі                              | $\frac{2}{5} mr^2$  |

Теорема Штейнера

$$J = J_C + mr^2,$$

де  $J_C$  – момент інерції щодо осі, що проходить через центр мас;  $J$  – момент інерції відносно паралельної осі, що відстоїть від першої на відстані  $r$ ;  $m$  – маса тіла.

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $z$

$$T_{об} = J_z \omega^2 / 2,$$

де  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі  $z$ ;  $\omega$  – його кутова швидкість.

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання,

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

де  $m$  – маса тіла;  $v_C$  – швидкість центру мас тіла;  $J_C$  – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас;  $\omega$  – кутова швидкість тіла.



Момент сили щодо нерухомої точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}],$$

де  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор, проведений із цієї точки в точку додатка сили  $\mathbf{F}$ .

Модуль моменту сили

$$M = Fl,$$

де  $l$  – плече сили (відстань від осі обертання до лінії дії сили).

Робота при обертанні тіла

$$dA = M_z d\varphi,$$

де  $d\varphi$  – кут повороту тіла;  $M_z$  – момент сили відносно осі  $z$ .

Момент імпульсу (момент кількості руху) твердого тіла відносно осі обертання

$$L_z = \sum m_i v_i r_i = J_z \omega,$$

де  $r_i$  – відстань від осі  $z$  до окремої частки тіла;  $m_i v_i$  – імпульс цієї частки;  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі  $z$ ;  $\omega$  – його кутова швидкість.

Рівняння (закон) динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{M}}{J}; \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення;  $J$  – момент інерції тіла.

Проекція обертального моменту  $\mathbf{M}$  на вісь  $z$

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

де  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі  $z$ .

Закон збереження моменту імпульсу (моменту кількості руху) для замкненої системи

$$\mathbf{L} = \text{const.}$$

Нормальна механічна напруга

$$\sigma = F_n/S,$$

де  $F_n$  – розтягувальна (стискаюча) сила, що перпендикулярна до площини поперечного перерізу;  $S$  – площа поперечного перерізу.

Тангенційна механічна напруга

$$\tau = F_\tau/S.$$

Відносне поздовження розтягу (стиску)

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

де  $\Delta l/l$  – відносна деформація розтягу (стиску);  $l$  – довжина тіла до деформації.

Відносна деформація зсуву

$$\text{tg}\gamma = \frac{\Delta l}{h},$$

де  $\Delta l$  – зсув верхньої грані;  $h$  – висота тіла;  $\gamma$  – кут зсуву (для малих кутів  $\text{tg}\gamma \approx \gamma$ , рад).

Закон Гука для розтягання (стиску)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

де  $\varepsilon$  – відносне поздовжнє розтягання (стиск);  $E$  – модуль Юнга;  $\sigma$  – нормальна механічна напруга.

Закон Гука для зсуву

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\tau}{G},$$

де  $\operatorname{tg}\gamma$  – відносна деформація зсуву;  $\tau$  – тангенційна механічна напруга;  $G$  – модуль зсуву.

### 1.5 Тяжіння. Елементи теорії поля

Третій закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – періоди обертання планет навколо Сонця;  $R_1$  і  $R_2$  – великі півосі їхніх орбіт.

Закон всесвітнього тяжіння

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де  $F$  – сила всесвітнього тяжіння (гравітаційна сила) двох матеріальних точок масами  $m_1$  і  $m_2$ ;  $r$  – відстань між точками;  $G$  – гравітаційна стала.

Вага тіла

$$P = mg,$$

де  $m$  – маса тіла;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Напруженість поля тяжіння

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m,$$

де  $\mathbf{F}$  – сила тяжіння, що діє на матеріальну точку масою  $m$ , поміщену в дану точку поля.

Потенційна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами  $m_1$  і  $m_2$ , що перебувають на відстані  $r$  одна від одної,

$$\Pi = - Gm_1 m_2 / r.$$

Потенціал поля тяжіння

$$\varphi = \Pi/m,$$

де  $\Pi$  – потенційна енергія матеріальної точки масою  $m$ , поміщеної в дану точку поля.

## 1.6 Елементи спеціальної теорії відносності

### Перетворення Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де передбачається, що система відліку  $K'$  рухається зі швидкістю  $v$  у позитивному напрямку осі  $x$  системи відліку  $K$ , причому осі  $x'$  й  $x$  збігаються, а осі  $y'$  й  $y$ ,  $z'$  і  $z$  – паралельні;  $c$  – швидкість поширення світла у вакуумі.

### Релятивістське вповільнення ходу годин

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де  $\tau$  – проміжок часу між двома подіями, відлічений, що рухаються разом з тілом годинником;  $\tau'$  – проміжок часу між тими ж подіями, відлічений годинником, що перебуває у спокої.

### Релятивістське (лоренцеве) скорочення довжини

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

де  $l_0$  – довжина стрижня, обмірювана в системі відліку, відносно якої стрижень перебуває у спокої (власна довжина);  $l$  – довжина стрижня, обмірювана в системі відліку, відносно якої він рухається зі швидкістю  $v$ .

### Релятивістський закон додавання швидкостей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

де передбачається, що система відліку  $K'$  рухається зі швидкістю  $v$  у позитивному напрямку осі  $x$  системи відліку  $K$ , причому осі  $x'$  й  $x$  збігаються, а осі  $y'$  і  $y$ ,  $z'$  і  $z$  – паралельні.

### Інтервал $s_{12}$ між подіями (інваріантна величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv},$$

де  $t_{12}$  – проміжок часу між подіями 1 і 2;  $l_{12}$  – відстань між точками, де відбулися події.

### Маса релятивістської частинки й релятивістський імпульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де  $m_0$  – маса спокою.

### Основний закон релятивістської динаміки

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

де  $\mathbf{p}$  – релятивістський імпульс частинки.

Повна й кінетична енергії релятивістської частинки

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2.$$

Зв'язок між енергією й імпульсом релятивістської частинки

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}.$$

Енергія зв'язку системи

$$E_{\text{зв}} = \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 - M_0c^2,$$

де  $m_{0i}$  – маса спокою  $i$ -й частинки у вільному стані;  $M_0$  – маса спокою системи, що складається із частинок.

## II ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ Й ТЕРМОДИНАМІКИ

### 2.1 Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів

Закон Бойля-Маріотта

$$pV = \text{const при } T = \text{const}, m = \text{const},$$

де  $p$  – тиск;  $V$  – об'єм;  $T$  – термодинамічна температура;  $m$  – маса газу.

Закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t); \quad V = V_0\alpha T; \quad V_1/V_2 = T_1/T_2 \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const};$$

закон Шарля

$$p = p_0(1 + \alpha t); \quad p = p_0\alpha T; \quad p_1/p_2 = T_1/T_2 \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const},$$

де  $t$  – температура за шкалою Цельсія;  $T$  – температура за шкалою Кельвіна;

$V_0$  і  $p_0$  – відповідно об'єм і тиск при  $0^\circ\text{C}$ ; коефіцієнт  $\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$ ; індекси 1 і 2

відносяться до довільних станів.

Закон Дальтона для тиску суміші  $n$  ідеальних газів

$$p = \sum_{i=1}^n p_i,$$

де  $p_i$  – парціальний (частковий) тиск  $i$ -го компонента суміші.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$pV = (m/M)RT \text{ (для довільної маси газу),}$$

де  $R$  – універсальна газова стала;  $M$  – молярна маса газу;  $m$  – маса газу;  $m/M = \gamma$  – кількість речовини.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

або

$$p = \frac{2}{3} n \left( \frac{m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2}{2} \right) = \frac{2}{3} E,$$

або

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{KB}} \rangle^2,$$

де  $\langle v_{\text{KB}} \rangle$  – середня квадратична швидкість молекул;  $E$  – сумарна кінетична енергія поступального руху всіх молекул газу;  $n$  – концентрація молекул;  $m_0$  – маса однієї молекули;  $m = nm_0$  – маса одиничного об'єму газу.

Швидкість молекул:

– найбільш імовірна

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{2RT/M} = \sqrt{2kT/m_0};$$

– середня арифметична

$$v = \sqrt{RT/(\pi M)} = \sqrt{8kT/(\pi m_0)};$$

– середня квадратична

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{3RT/M} = \sqrt{3kT/m_0},$$

де  $m_0$  – маса однієї молекули.

З урахуванням того, що середня кінетична енергія поступального руху молекули ідеального газу

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2}{2},$$

одержуємо залежність тиску газу від концентрації молекул й температури

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2 = nkT,$$

де  $k$  – постійна Больцмана ( $k = R/N_A$ ;  $N_A$  – постійна Авогадро).

Закон Максвелла для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)},$$

де функція  $f(v)$  розподілу молекул за швидкостями визначає відносне число молекул  $dn(v)/N$  із загального числа  $N$  молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від  $v$  до  $v + dv$ .

Закон Максвелла для розподілу молекул ідеального газу за енергіями теплового руху

$$f(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{Nd\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)},$$

де функція  $f(\varepsilon)$  розподілу молекул за енергіями теплового руху визначає відносне число молекул  $dN(\varepsilon)/N$  із загального числа  $N$  молекул, які мають кінетичні енергії  $\varepsilon = m_0 v^2/2$ , що знаходяться в інтервалі від  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

Барометрична формула

$$p_h = p_0 e^{-Mg(h-h_0)/(RT)},$$

де  $p_h$  і  $p_0$  – тиск газу на висоті  $h$  і  $h_0$ .

Розподіл Больцмана для молекул у зовнішньому потенційному полі

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} \quad \text{або} \quad n = n_0 e^{-\Pi/(kT)},$$

де  $n$  і  $n_0$  – концентрація молекул на висоті  $h$  і  $h = 0$ ;  $\Pi = m_0 gh$  – потенційна енергія молекули в полі тяжіння.

Середнє число зіткнень, випробовуваних молекулою газу за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle,$$

де  $d$  – ефективний діаметр молекули;  $n$  – концентрація молекул;  $\langle v \rangle$  – середня арифметична швидкість молекул.

Середня довжина вільного пробігу молекул газу

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Закон теплопровідності Фур'є

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} St,$$

де  $Q$  – теплота, що пройшла за допомогою теплопровідності через площу  $S$  за час  $t$ ;  $dt/dx$  – градієнт температури;  $\lambda$  – питома теплопровідність:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

де  $c_v$  – питома теплоємність газу при постійному об'ємі;  $\rho$  – густина газу;  $\langle v \rangle$  – середня арифметична швидкість теплового руху його молекул;  $\langle l \rangle$  – середня довжина вільного пробігу молекул.

Закон дифузії Фіка для маси речовини:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} St;$$

закон дифузії Фіка для кількості частинок:

$$N = -D \frac{dn}{dx} St,$$

де  $M$  і  $N$  – маса речовини й кількість частинок, що переносяться за допомогою дифузії через площу  $S$  за час  $t$ ;  $dp/dx$  – градієнт густини;  $dn/dx$  – градієнт концентрації;  $D$  – коефіцієнт дифузії, який дорівнює

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Закон Ньютона для внутрішнього тертя (в'язкості)

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

де  $F$  – сила внутрішнього тертя між рухомими шарами площею  $S$ ;  $dv/dx$  – градієнт швидкості;  $\eta$  – динамічна в'язкість:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

## 2.2 Основи термодинаміки

Середня кінетична енергія поступального руху, що припадає на один ступінь свободи молекули,

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Середня енергія молекули

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де  $i$  – сума поступальних, обертальних і подвоєного числа коливальних ступенів свободи ( $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{обер}} + 2 i_{\text{колив}}$ ).

Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT,$$

де  $\nu$  – кількість речовини;  $m$  – маса газу;  $M$  – молярна маса газу;  $R$  – універсальна газова стала.

Перший початок термодинаміки

$$Q = \Delta U + A,$$

де  $Q$  – кількість теплоти, повідомлене системі або віддане нею;  $\Delta U$  – зміна її внутрішньої енергії;  $A$  – робота системи проти зовнішніх сил.

Перший початок термодинаміки для ізобаричного процесу:

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

– для ізохоричного процесу:

$$\delta Q = dU;$$

– для ізотермічного процесу:

$$\delta Q = \delta A;$$

– для адіабатичного процесу:

$$\delta A = -dU.$$

Зв'язок між молярною  $C_m$  і питомою  $c$  теплоємкостями газу

$$C_m = cM,$$

де  $M$  – молярна маса газу.

Молярні теплоємності газу при постійному об'ємі й постійному тиску

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_P = \frac{i+2}{2}R.$$

Рівняння Майєра

$$C_P = C_V + R.$$

Із рівняння Майєра витікає: універсальна газова стала дорівнює роботі одного моля газу при його нагріві на 1К в ізобаричному процесі.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

Робота, здійснювана газом при зміні його об'єму,

$$dA = p dV.$$

Повна робота при зміні об'єму газу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

де  $V_1$  і  $V_2$  – відповідно початковий і кінцевий об'єми газу.

Робота газу:

– при ізобаричному процесі

$$A = p(V_2 - V_1), \quad \text{або} \quad A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1);$$

– при ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \text{або} \quad A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Рівняння адіабатичного процесу (рівняння Пуассона)

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

де  $\gamma = C_P/C_V = (i+2)/i$  – показник адіабати (коефіцієнт Пуассона).

Робота у випадку адіабатичного процесу

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2),$$



або

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

де  $T_1$ ,  $T_2$  і  $V_1$ ,  $V_2$  – відповідно початкові й кінцеві температури та об'єм газу.

Термічний коефіцієнт корисної дії для кругового процесу (циклу)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

де  $Q_1$  – кількість теплоти, отримана системою;  $Q_2$  – кількість теплоти, віддана системою;  $A$  – робота, виконувана за цикл.

Термічний коефіцієнт корисної дії циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де  $T_1$  – температура нагрівача;  $T_2$  – температура холодильника.

Зміна ентропії при рівноважному переході зі стану 1 у стан 2

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

### III ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

#### 3.1 Електростатика

Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_1| |q_2|}{r^2},$$

де  $F$  – сила взаємодії двох точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$ ;  $r$  – відстань між зарядами;  $\epsilon_0$  – електрична постійна, що дорівнює  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища.

Напруженість і потенціал електростатичного поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0; \varphi = \Pi/q_0 \text{ або } \varphi = A_\infty/q_0,$$

де  $\mathbf{F}$  – сила, що діє на точковий позитивний заряд  $q_0$ , поміщений у дану точку поля;  $\Pi$  – потенційна енергія точкового заряду  $q_0$ ;  $A_\infty$  – робота кулонівської сили по переміщенню заряду з даної точки поля за його межі (у нескінченність).

Напруженість і потенціал електростатичного поля точкового заряду на відстані  $r$  від заряду

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Потік вектора напруженості через площинку

$$d\Phi_E = E dS = E_n dS,$$

де  $d\mathbf{S} = dS_n$  – вектор, модуль якого дорівнює  $dS$ , а напрямок збігається з нормаллю  $\mathbf{n}$  до площинки;  $E_n$  – складова вектора  $\mathbf{E}$  в напрямку нормалі до площинки.

Потік вектора напруженості через довільну поверхню  $S$

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_S E_n dS.$$

Принцип суперпозиції (накладення) електростатичних полів.

Напруженість в точці поля, створюваного  $n$  зарядами, дорівнює геометричній (векторній) сумі векторів  $\mathbf{E}_i$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i,$$

де  $\mathbf{E}_i$  – напруженість поля, створюваного  $i$ -м зарядом.

Потенціал у точці поля, створеного  $n$  зарядами, дорівнює алгебраїчній сумі значень  $\varphi_i$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

де  $\varphi_i$  – потенціал поля, створюваного  $i$ -м зарядом.

Зв'язок між напруженістю й потенціалом електростатичного поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \text{або} \quad \mathbf{E} = -\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right),$$

де  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – одиничні вектори координатних осей.

У випадку поля, що має центральну або осьову симетрію,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Електричний момент диполя (дипольний момент)

$$\mathbf{p} = |q|\mathbf{l},$$

де  $\mathbf{l}$  – плече диполя.

Лінійна, поверхнева й об'ємна густина зарядів

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV},$$

тобто відповідно заряд, що припадає на одиницю довжини, поверхні й об'єму (відповідна одиниця виміру – Кл/м, Кл/м<sup>2</sup>, Кл/м<sup>3</sup>).

Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля у вакуумі

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

де  $\epsilon_0$  – електрична постійна;  $\sum_{i=1}^n q_i$  – алгебраїчна сума зарядів, поміщених усередині замкненої поверхні  $S$ ;  $n$  – число локальних зарядів;  $\rho$  – об'ємна густина зарядів;  $V$  – об'єм, обмежений поверхнею  $S$ .

Напруженість поля, створюваного рівномірно зарядженою нескінченною площиною

$$E = \sigma / (2\epsilon_0 \epsilon).$$

Напруженість поля, створюваного двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими площинами

$$E = \sigma / \epsilon_0 \epsilon.$$

Напруженість поля, створюваного рівномірно зарядженою сферичною поверхнею радіусом  $R$  із загальним зарядом  $q$  на відстані  $r$  від центру сфери

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (усередині сфери);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \text{ при } r \geq R \text{ (поза сферою).}$$

Напруженість поля, створюваного об'ємно рівномірно зарядженою кулею радіусом  $R$  із загальним зарядом  $q$  на відстані  $r$  від центру кулі

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^3} \text{ при } r \leq R \text{ (усередині кулі);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \text{ при } r \geq R \text{ (поза кулею).}$$

Напруженість поля, створюваного рівномірно зарядженим нескінченним циліндром радіусом  $R$  на відстані  $r$  від осі циліндра,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (усередині циліндра);}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \text{ при } r \geq R \text{ (поза циліндром).}$$

Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля уздовж замкненого контуру  $L$ :

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

де  $E_l$  – проекція вектора  $\mathbf{E}$  на напрямок елементарного переміщення  $dl$ . Інтегрування можливе по будь-якому замкненому шляху  $L$ .

Робота, виконувана силами електростатичного поля при переміщенні заряду  $q_0$  із точки 1 у точку 2

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ або } A_{12} = q_0 \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = q_0 \int_1^2 E_l dl ;$$

якщо точки 1 і 2 співпадають, то робота

$$A_{11} = q_0 \int_1^1 E_l dl = q_0 \oint_L E_l dl = 0,$$

де  $E_l$  – проекція вектора  $\mathbf{E}$  на напрямок елементарного переміщення  $dl$ .

Поляризованість

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i}{V} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots)}{V},$$

де  $V$  – об'єм діелектрика;  $\mathbf{p}_i$  – дипольний момент  $i$ -ї молекули.

Зв'язок між поляризованістю діелектрика й напруженістю електростатичного поля

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

де  $\chi$  – діелектрична сприйнятливість речовини.

Зв'язок діелектричної проникності  $\varepsilon$  з діелектричною сприйнятливістю  $\chi$ :

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Зв'язок між напруженістю  $E$  поля в діелектрику й напруженістю  $E_0$  зовнішнього поля

$$E = E_0 - P/\varepsilon_0, \text{ або } E = E_0/\varepsilon.$$

Зв'язок між векторами електричного зміщення й напруженістю електростатичного поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Зв'язок між  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i,$$

де  $\sum_{i=1}^n q_i$  – алгебраїчна сума поміщених усередині замкненої поверхні  $S$  вільних електричних зарядів;  $D_n$  – складова вектора  $\mathbf{D}$  за напрямом нормалі до

площини;  $d\mathbf{S}$  – вектор, модуль якого дорівнює  $dS$ , а напрямок збігається з нормаллю  $\mathbf{n}$  до площини.

Напруженість електростатичного поля біля плоскої поверхні провідника на відстані набагато меншої, чім радіус кривизни поверхні

$$E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon),$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина зарядів.

Електроємність відокремленого провідника

$$C = q/\phi,$$

де  $q$  – заряд, наданий провіднику;  $\phi$  – потенціал провідника.

Ємність плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon \sigma S/d,$$

де  $S$  – площа кожної обкладки конденсатора;  $d$  – відстань між обкладками;  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища між обкладками.

Ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(r_2/r_1)},$$

де  $l$  – довжина обкладок конденсатора;  $r_1, r_2$  – радіуси коаксіальних обкладок.

Ємність сферичного конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

де  $r_1$  і  $r_2$  – радіуси концентричних сфер.

Ємність системи конденсаторів при послідовному і паралельному з'єднаннях

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad \text{і} \quad C = \sum_{i=1}^n C_i,$$

де  $C_i$  – ємність  $i$ -го конденсатора;  $n$  – число конденсаторів.

Деякі узагальнюючі відомості зручно представити у вигляді нижченаведеної табл. 3.1.

Енергія відокремленого зарядженого провідника

$$W = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{q\phi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Енергія взаємодії системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n q_i \varphi_k,$$

де  $\varphi_k$  – потенціал, створюваний у тій точці, де перебуває заряд  $q_i$ , усіма зарядами, крім  $i$ -го ( $i \neq k$ ).

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де  $q$  – заряд конденсатора;  $C$  – його ємність;  $\Delta\varphi$  – різниця потенціалів між обкладками.

Енергія плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V,$$

де  $S$  – площа однієї обкладки;  $U$  – різниця потенціалів між обкладками;  $V = Sd$  – об'єм конденсатора.

Об'ємна густина енергії

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

де  $D$  – електричний зсув.

### 3.2 Постійний електричний струм

Сила й густина електричного струму

$$I = \frac{dq}{dt}; j = \frac{I}{S},$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу провідника.

Густина струму в провіднику

$$\mathbf{j} = nev,$$

де  $\mathbf{v}$  – швидкість упорядкованого руху зарядів у провіднику (швидкість дрейфу);  $n$  – концентрація зарядів;  $e$  – заряд електрона.

Електрорушійна сила  $\mathcal{E}$ , що діє в ланцюзі,

$$\mathcal{E} = A/q_0, \text{ або } \mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l},$$

де  $q_0$  – одиничний позитивний заряд;  $A$  – робота сторонніх сил;  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$  – напруженість поля сторонніх сил, тобто сил не електростатичної природи.

Опір  $R$  однорідного лінійного провідника, провідність  $G$  провідника й питома електрична провідність  $\gamma$  речовини провідника

$$R = \rho l/S; G = 1/R; \gamma = 1/\rho = en\mu,$$

де  $\rho$  – питомий електричний опір;  $S$  – площа поперечного перерізу провідника;  $l$  – його довжина;  $\mu$  – рухливість носіїв струму (дрейфова швидкість в одиничному полі);  $n$  – концентрація носіїв струму;  $e$  – заряд електрона.

Опір провідників при послідовному і паралельному з'єднаннях:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad \text{і} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i},$$

де  $R_i$  – опір  $i$ -го провідника;  $n$  – число провідників.

Залежність питомого опору  $\rho$  від температури

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) = \rho_0 \alpha T,$$

де  $\rho$  – температурний коефіцієнт опору.

Закон Ома:

– для однорідної ділянки ланцюга

$$I = U/R;$$

– для неоднорідної ділянки ланцюга

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12})/R;$$

– для повного ланцюга

$$I = \mathcal{E}/(R + r),$$

де  $U$  – напруга на ділянці ланцюга;  $R$  – опір зовнішньої ділянки ланцюга;  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки ланцюга;  $\mathcal{E}_{12}$  – ЄРС джерел струму, що входять у ділянку;  $\mathcal{E}$  – алгебраїчна сума ЄРС. усіх джерел струму в ланцюзі.  $\mathcal{E}_{12} > 0$ , якщо джерело підтримує струм від точки 1 до точки 2, і  $\mathcal{E}_{12} < 0$ , якщо джерело перешкоджає протіканню струму від точки 1 до точки 2.

Закон Ома в диференціальній формі

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

де  $\mathbf{E}$  – напруженість електростатичного поля.

Робота струму за час  $t$

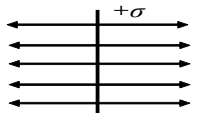
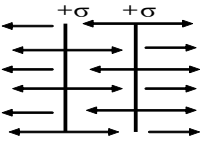
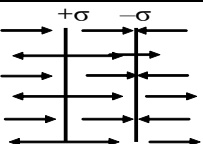
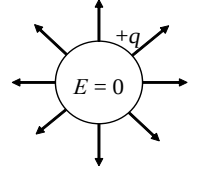
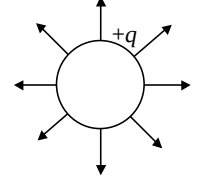
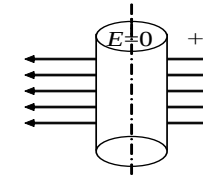
$$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t.$$

Закони Кірхгофа:

Перший закон Кірхгофа

$$\sum_k I_k = 0.$$

Таблиця 1

| Вид зарядженої поверхні                                                                 | Рисунок                                                                             | Напруженість, розрахована за теоремою Остроградського-Гаусса                                                                                                                                | Різниця потенціалів $(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_1}^{r_2} E dr$                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Ємність $(C=q/U)$                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Поле нескінченної однорідно зарядженої площини. ( $\sigma$ – поверхнева густина заряду) |    | $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}$                                                                                                                                                    | $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} (x_2 - x_1)$<br>(різниця потенціалів між точками $x_1$ і $x_2$ )                                                                                                                                                                          | –                                                                                                                 |
| Поле двох однойменно заряджених площин ( $\sigma$ – поверхнева густина заряду)          |    | $E = 0 \text{ – між пластинами;}$<br>$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} \text{ – за пластинами}$                                                                                        | –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | –                                                                                                                 |
| Поле двох різноіменно заряджених площин ( $\sigma$ – поверхнева густина заряду)         |    | $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} \text{ – між пластинами;}$<br>$E = 0 \text{ – за пластинами}$                                                                                        | $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} d$ (різниця потенціалів між двома різноіменними пластинами)                                                                                                                                                                                         | $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$                                                                              |
| Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні                                           |    | $E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \text{ (поза сферою);}$<br>$E(R) = 0 \text{ (у середині сфери)}$                                                                               | $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \text{ (у середині сфери); } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \text{ (поза сферою);}$<br>$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$<br>(між точками $r_1$ і $r_2$ поза сферою) | $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$<br>( $r_1$ – радіус внутрішньої сфери; $r_2$ – зовнішньої) |
| Поле кулі з постійною об'ємною густиною заряду                                          |  | $E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} r \text{ (} r \leq R \text{)}$<br>(у середині кулі);<br>$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \text{ (} r \geq R \text{)}$ (поза кулею) | $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$<br>(поза кулею)                                                                                                                                                                               | –                                                                                                                 |
| Поле нескінченного зарядженого циліндра (нитки) ( $\tau$ – лінійна густина заряду)      |  | $E(R) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} \text{ (} r \geq R \text{)}$ (поза ниткою, циліндром);<br>$E(R) = 0 \text{ (} r < R \text{)}$ (у середині циліндра)                           | $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$<br>(між точками $r_1$ і $r_2$ поза циліндром)                                                                                                                                                            | $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ ( $r_1$ – радіус внутрішнього циліндра; $r_2$ – зовнішнього)   |





Струм, що входить у вузол, береться зі знаком плюс, що виходить із вузла – зі знаком мінус.

Другий закон Кірхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

Струм у напрямку обходу електричного контуру береться зі знаком плюс, проти напрямку – зі знаком мінус; електрорушійна сила  $\mathcal{E}$ , що підтримує струм у напрямку обходу, береться зі знаком плюс, що перешкоджає – зі знаком мінус.

### 3.3 Термоелектрорушійна сила й термоелектронна емісія

Контактна різниця потенціалів на межі двох металів 1 і 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2},$$

де  $A_1, A_2$  – роботи виходів електронів з металів;  $k$  – постійна Больцмана;  $n_1, n_2$  – концентрації вільних електронів у металах.

Термоелектрорушійна сила

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e} (T_1 - T_2) \ln \frac{n_1}{n_2},$$

де  $(T_1 - T_2)$  – різниця температур спайок.

Формула Річардсона-Дешмана

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

$j_{\text{нас}}$  – густина струму насичення термоелектронної емісії;  $C$  – стала, теоретично однакова для всіх металів;  $A$  – робота виходу електрона з металу;  $T$  – температура.

### 3.4 Магнітне поле

Механічний момент, що діє на контур зі струмом, поміщений в однорідне магнітне поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]; \quad M = p_m B \sin \alpha,$$

де  $\mathbf{B}$  – магнітна індукція;  $\mathbf{p}_m$  – магнітний момент контуру зі струмом;  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{p}_m$  і  $\mathbf{B}$ ;

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n},$$

де  $I$  – сила струму в контурі;  $S$  – площа контуру зі струмом;  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні контуру.

Зв'язок магнітної індукції  $\mathbf{B}$  і напруженості  $\mathbf{H}$  магнітного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

де  $\mu_0$  – магнітна постійна;  $\mu$  – магнітна проникність середовища.

Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

де  $d\mathbf{B}$  – магнітна індукція поля, створювана елементом довжини  $d\mathbf{l}$  провідника зі струмом  $I$ ;  $r$  – радіус-вектор, проведений від  $d\mathbf{l}$  до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Модуль вектора  $d\mathbf{B}$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $d\mathbf{l}$  і  $\mathbf{r}$ .

Принцип суперпозиції (накладення) магнітних полів: магнітна індукція в точці поля, створеного  $n$  елементами довжини  $d\mathbf{l}$  провідників зі струмом  $I$ , дорівнює геометричній (векторній) сумі векторів  $\mathbf{B}_i$

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i,$$

де  $\mathbf{B}$  – магнітна індукція результуючого поля;  $\mathbf{B}_i$  – магнітні індукції полів, що накладаються.

Магнітна індукція поля, створюваного нескінченно довгим прямим провідником зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{R},$$

де  $R$  – відстань від осі провідника.

Магнітна індукція поля, створюваного відрізком провідника зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути, які створює провідник з радіус-векторами, проведеними від кінців провідника до розглядуваної точки.

Магнітна індукція в центрі колового провідника зі струмом

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R},$$

де  $R$  – радіус кривизни провідника.

Магнітна індукція на осі колового провідника зі струмом

$$B = \mu_0 \mu \frac{IR^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

де  $R$  – радіус кривизни провідника;  $a$  – відстань від центра колового провідника зі струмом до будь-якої точки осі колового провідника.

Закон Ампера

$$dF = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

де  $dF$  – сила, що діє на елемент довжини  $d\mathbf{l}$  провідника зі струмом  $I$ , поміщений у магнітне поле з індукцією  $\mathbf{B}$ .

Модуль сили Ампера (закон Ампера)

$$dF = IB \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $d\mathbf{l}$  і  $\mathbf{B}$ .

Сила взаємодії двох нескінчених прямолінійних паралельних провідників зі струмами  $I_1$  і  $I_2$

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} dl,$$

де  $R$  – відстань між провідниками;  $dl$  – відрізок провідника.

Магнітне поле рухомого заряду

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v} \mathbf{r}]}{r^3},$$

де  $r$  – радіус-вектор, проведений від заряду до точки спостереження;

– у скалярному вигляді:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{v}$  і  $\mathbf{r}$ .

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

– у скалярному вигляді:

$$F = qvB \sin \alpha,$$

де  $\mathbf{F}$  – сила, що діє на заряд  $q$ , який рухається в магнітному полі зі швидкістю  $\mathbf{v}$ ;  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{v}$  і  $\mathbf{B}$ .

Результуюча сила  $\mathbf{F}$ , що діє на рухомий заряд  $q$ , при дії на нього електричного поля напруженістю  $\mathbf{E}$  і магнітного поля індукцією  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Голлівська поперечна різниця потенціалів

$$\Delta\phi = R \frac{IB}{d},$$

де  $B$  – магнітна індукція;  $I$  – сила струму;  $d$  – товщина пластинки;  $R = 1/(en)$  – стала Голлу ( $n$  – концентрація електронів).

Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі (теорема про циркуляцію вектора  $\mathbf{B}$ )

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B_l dl = \sum_{k=1}^n I_k,$$

де  $\mu_0$  – магнітна постійна;  $d\mathbf{l}$  – вектор елементарної довжини контуру, спрямованої уздовж обходу контуру;  $B_l = B \cos \alpha$  – складова вектора  $\mathbf{B}$  у напрямку дотичної контуру довільної форми (з урахуванням обраного напрямку обходу);  $\alpha$  – кут між векторами  $\mathbf{B}$  і  $d\mathbf{l}$ ;  $\sum_{k=1}^n I_k$  – алгебраїчна сума струмів, охоплених контуром.

Магнітна індукція усередині соленоїда, що має  $N$  витків,

$$B = \mu_0 \mu NI / l,$$

де  $l$  – довжина соленоїда;  $\mu$  – магнітна проникність середовища.

Магнітна індукція усередині тороїда

$$B = \mu_0 \mu NI / 2\pi r.$$

де  $r$  – радіус тороїда;  $\mu$  – магнітна проникність середовища.

Потік вектора магнітної індукції (магнітний потік) через площинку  $dS$

$$d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_n ds,$$

де  $d\mathbf{S} = dS_n$  – вектор, модуль якого дорівнює  $dS$ , а напрямок збігається з нормаллю  $n$  до площинки;  $B_n$  – проекція вектора  $\mathbf{B}$  на напрямок нормалі до площинки.

Потік вектора магнітної індукції через довільну поверхню

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_n dS.$$

Потокозчеплення  $\Psi$  (повний магнітний потік, зчеплений з усіма  $N$  витками соленоїда)

$$\Psi = N \Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S.$$

Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітнім полі

$$dA = I \cdot d\Phi,$$

де  $d\Phi$  – магнітний потік, пересічений рухомих провідником.

Робота з переміщення замкнутого контуру зі струмом у магнітному полі

$$dA = I d\Phi',$$

де  $d\Phi'$  – зміна магнітного потоку, зчепленого з контуром.

### 3.5 Електромагнітна індукція

#### Закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де  $\mathcal{E}_i$  – ЕРС індукції;  $d\Phi$  – зміна магнітного потоку через контур.

ЕРС індукції, що виникає в рамці площею  $S$  при обертанні рамки з кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ ,

$$\mathcal{E}_i = BS\omega \sin \omega t.$$

Потокозчеплення, створюване струмом  $I$  у контурі з індуктивністю  $L$ ,  
 $\Phi = LI$ .

ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt},$$

де  $L$  – індуктивність контуру.

Індуктивність довгого соленоїда (тороїда)

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

де  $N$  – число обвитків соленоїда;  $l$  – його довжина.

Струми при включенні на джерело й при замиканні  $RL$ -ланцюга самого на себе:

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{і} \quad I = I_0 e^{-t/\tau},$$

де  $\tau = L/R$  – постійна часу ( $L$  – індуктивність,  $R$  – опір).

ЕРС взаємної індукції (ЕРС, індукована зміною сили струму в сусідньому контурі)

$$\mathcal{E} = -L_{12} \frac{dI}{dt},$$

де  $L_{12}$  – взаємна індуктивність контурів.

Взаємна індуктивність двох котушок (із числом обвитків  $N_1$  і  $N_2$ , намотаних на спільне тороїдальне осердя),

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S,$$

де  $\mu_0$  – магнітна проникність осердя;  $l$  – довжина осердя по середній лінії;  $S$  – площа осердя.

Коефіцієнт трансформації

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2},$$

де  $N$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $I$  – відповідно число обвитків, ЕРС і сила струму в обмотках трансформатора.

Енергія магнітного поля, створюваного струмом  $I$  у котушці зі струмом,

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

де  $L$  – індуктивність котушки.

Об'ємна густина енергії однорідного магнітного поля

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

### 3.6 Магнітні властивості речовини

Зв'язок орбітального магнітного  $\mathbf{p}_m$  і орбітального механічного  $\mathbf{L}_e$  моментів електрона

$$\mathbf{p}_m = -g\mathbf{L}_e = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}_e,$$

де  $g = e/(2m)$  – гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

Намагніченість

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_m/V = \frac{\sum \mathbf{p}_a}{V},$$

де  $\mathbf{P}_m = \sum \mathbf{p}_a$  – магнітний момент магнетика, який дорівнює векторній сумі магнітних моментів окремих молекул.

Зв'язок між намагніченістю й напруженістю магнітного поля

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

де  $\chi$  – магнітна сприйнятливість речовини.

Зв'язок між векторами  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

де  $\mu_0$  – магнітна постійна.

Зв'язок між магнітною проникністю й магнітною сприйнятливістю речовини

$$\mu = 1 + \chi.$$

Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля (закон повного струму)

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

де  $I$  – алгебраїчна сума струмів провідності, охоплюваних контуром  $L$ .

### 3.7 Основи електромагнітної теорії Максвелла

Густина струму зміщення

$$\mathbf{j}_{\text{зс}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

де  $\mathbf{D}$  – електричний зсув;  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  – густина струму зсуву у вакуумі;  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  – густина струму поляризації.

Повна система рівнянь Максвелла:

– в інтегральній формі

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \text{або} \quad \oint_L E_l d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS;$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad \text{або} \quad \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) d\mathbf{S}, \quad \text{або} \quad \oint_L H_l d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_i + \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS;$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \text{або} \quad \oint_S B_n dS = 0;$$

– у диференційній формі

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho;$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

де  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ ;  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  ( $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$  – відповідно електрична й магнітна сталі,  $\varepsilon$  і  $\mu$  – відносні діелектрична й магнітна проникності;  $\rho$  – густина заряду;  $S$  – поверхня, що опирається на контур  $L$ ;  $V$  – об'єм, обмежений замкненою поверхнею  $S$ ).

## IV КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ

### 4.1 Механічні й електромагнітні коливання

Рівняння гармонійних коливань

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$



де  $x$  – зміщення коливної величини від положення рівноваги;  $A$  – амплітуда коливань;  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$  – колова (циклічна) частота;  $\nu = 1/T$  – частота;  $T$  – період коливань;  $\varphi_0$  – початкова фаза.

Швидкість і прискорення точки, що гармонійно коливається,

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x.$$

Кінетична енергія коливної точки масою  $m$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенційна енергія

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Повна енергія

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Диференціальне рівняння гармонійних коливань пружинного маятника (матеріальної точки масою  $m$ )

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $k$  – коефіцієнт пружності (твердість пружини)  $k = \omega_0^2 m$ ;  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

де  $m$  – маса пружинного маятника.

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g},$$

де  $J$  – момент інерції маятника щодо осі коливань;  $l$  – відстань між точкою підвісу й центром мас маятника;  $L = J/(ml)$  – наведена довжина фізичного маятника;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

де  $l$  – довжина маятника.

Формула Томсона для періоду  $T$  власних коливань у контурі без активного опору з індуктивністю  $L$  і ємністю контуру  $C$ ,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Диференціальне рівняння вільних гармонійних коливань заряду  $q$  в контурі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0, \text{ або } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0,$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – власна частота контуру.

Розв'язок диференціального рівняння вільних гармонійних коливань заряду в контурі:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $q_m$  – амплітуда коливань заряду.

Напруга на конденсаторі:

$$U_C = U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

напруга на індуктивності:

$$U_L = -U_{Lm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

струм в контурі:

$$I = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплітуда  $A$  результуючого коливання, що виходить при додаванні двох гармонійних коливань однакового напрямку й однакової частоти,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – амплітуди коливань, що складаються;  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – їх фази.

Початкова фаза результуючого коливання

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Період биття

$$T = 2\pi/\Delta\omega, \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|.$$

Рівняння траєкторії руху точки, що брала участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi,$$

де  $A$  и  $B$  – амплітуди коливань, що складаються;  $\varphi$  – різниця фаз коливань.

Диференціальне рівняння загасаючих коливань лінійної системи і його розв'язок:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = 0; x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де  $x$  – коливна величина, що описує фізичний процес;  $\beta$  – коефіцієнт загасання ( $\beta = r/(2m)$  у випадку механічних коливань і  $\beta = R/(2L)$  у випадку

електромагнітних коливань);  $\omega_0$  – циклічна частота вільних незатухаючих коливань тієї ж коливальної системи;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота загасаючих коливань;  $A_0 e^{-\beta t}$  – амплітуда загасаючих коливань.

Декремент загасання

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

де  $A(t)$  і  $A(t+T)$  – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на період.

Логарифмічний декремент загасання

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

де  $\tau = 1/\beta$  – час релаксації;  $N$  – число коливань, здійснюваних за час зменшення амплітуди в  $e$  разів.

Добротність коливальної системи

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Добротність механічної коливальної системи

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{km}.$$

Добротність коливального контуру

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Враховуючи, що  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\beta = \frac{R}{2L}$  і  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , можна одержати вираз для відношення частоти загасаючих коливань до власної частоти коливань ідеального контуру:

$$\frac{\omega_{\text{заг}}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

При добротності 3,5 і більше це відношення відрізняється від 1 на 1% і менше. При точності вимірів частоти 1% цією відмінністю вже можна зневажити.

Диференціальне рівняння вимушених коливань лінійної системи і його розв'язок:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \cos \omega t; \quad x = A \cos(\omega t - \varphi_0),$$

де  $x$  – коливна величина, що описує фізичний процес ( $x_0 = F_0/m$  у випадку механічних коливань;  $x_0 = U_m/L$  у випадку електромагнітних коливань)

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}; \varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансна частота для конденсатора в коливальному контурі

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Враховуючи, що  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\beta = \frac{R}{2L}$  і  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , можна одержати вираз для відношення резонансної частоти в реальному контурі до частоти в ідеальному контурі:

$$\frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

При добротності від 5 і більше це відношення відрізняється від 1 на 1% і менше. При точності вимірів частоти 1% цією відмінністю вже можна зневажити.

Резонансна амплітуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Повний опір  $Z$  ланцюга змінного струму, що містить послідовно включені резистор опором  $R$ , котушку індуктивністю  $L$  і конденсатор ємністю  $C$ , на кінці якої подається змінна напруга  $U = U_m \cos \omega t$ ,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

де  $X_L = \omega L$  – реактивний індуктивний опір;  $X_C = 1/(\omega C)$  – реактивний ємнісний опір.

На резонансній частоті  $\omega = \omega_0$

$$Z = R.$$

Зсування фаз між напругою й силою струму такий, що

$$\tg \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

Діючі (ефективні) значення струму й напруги

$$I = I_m / \sqrt{2}; \quad U = U_m / \sqrt{2}.$$

Середня потужність, що виділяється в послідовному ланцюзі змінного струму,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi,$$

де

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

## 4.2 Пружні хвилі

Зв'язок довжини хвилі  $\lambda$ , періоду  $T$  коливань і частоти  $\nu$ :

$$\lambda = \nu T; \nu = \lambda T; \nu = 1/T,$$

де  $\nu$  – швидкість поширення коливань у середовищі (фазова швидкість).

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється уздовж позитивного напрямку осі  $x$ ,

$$y(x, t) = A \cos(\omega(t - x/\nu) + \varphi_0) = A \cos(2\pi(t/T - x/\lambda) + \varphi_0) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де  $y(x, t)$  – зсув точок середовища з координатою  $x$  у момент часу  $t$ ;  $A$  – амплітуда хвилі;  $\omega$  – циклічна (кругова) частота;  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(\nu T) = \omega/\nu$  – хвильове число ( $\lambda$  – довжина хвилі,  $\nu$  – фазова швидкість;  $T$  – період коливань);  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань.

Положення фронту хвилі, виходячи з того факту, що  $\varphi_{\text{фр}} = 0$ , знаходяться за співвідношенням

$$\frac{x_{\text{фр}}}{\lambda} = \frac{t_1}{T},$$

де  $x_{\text{фр}}$  – положення фронту хвилі в момент часу  $t_1$ .

Зв'язок між різницею фаз  $\Delta\varphi$  і різницею ходу  $\Delta$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Умови максимуму й мінімуму амплітуди при інтерференції хвиль

$$\Delta_{\text{max}} = \pm m\lambda \text{ (ціле число довжин хвиль);}$$

$$\Delta_{\text{min}} = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \text{ (непарне число півхвиль),}$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Фазова  $\nu$  і групова  $u$  швидкості,

$$\nu = \frac{\omega}{k}; u = \frac{d\omega}{dk},$$

а також зв'язок між ними

$$u = \nu - \lambda \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

## Рівняння стоячої хвилі

$$y(x, t) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t = 2A \cos kx \cos \omega t.$$

## Координати пучностей

$$x_n = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

та вузлів

$$x_y = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

## Рівень інтенсивності звуку

$$L = \lg(I/I_0) \text{ (Белл)} \text{ або } L = 10 \lg(I/I_0) \text{ (дециБелл)},$$

де  $I$  – інтенсивність звуку;  $I_0$  – інтенсивність звуку на порозі чутності ( $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2 = 1 \text{ пВт/м}^2$ ).

## Швидкість поширення звукових хвиль у газах

$$v = \sqrt{\gamma RT / M},$$

де  $R$  – універсальна газова стала;  $M$  – молярна маса;  $\gamma = C_p / C_v$  ( $\gamma = \frac{i+2}{i}$  – коефіцієнт Пуассона), відношення молярної теплоємності газу при постійному тиску до молярної теплоємності газу при постійному об'ємі;  $i$  – число ступенів свободи молекули;  $T$  – термодинамічна температура.

## Ефект Допплера в акустиці

$$v = \frac{v \pm v_{\text{пр}}}{v \mp v_{\text{ист}}} v_0,$$

де  $v$  – частота звуку, сприймана рухаючимся приймачом;  $v_0$  – частота звуку, що посиляє джерело;  $v_{\text{пр}}$  – швидкість руху приймача;  $v_{\text{дж}}$  – швидкість руху джерела;  $v$  – швидкість поширення звуку. Верхній знак береться, якщо при русі джерела або приймача відбувається їхнє зближення; нижній знак – у випадку їх взаємного видалення.

## Ефект Допплера для електромагнітних хвиль у вакуумі

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta},$$

де  $v_0$  і  $v$  – відповідно частоти електромагнітного випромінювання, що випускається джерелом і сприймається приймачем;  $v$  – швидкість джерела електромагнітного випромінювання відносно приймача;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\theta$  – кут між вектором швидкості  $v$  і напрямком спостереження, вимірюваний у системі відліку, пов'язаної зі спостерігачем.

Поперечний ефект Допплера для електромагнітних хвиль у вакуумі ( $\theta = \pi/2$ )

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

### 4.3 Електромагнітні хвилі

Фазова швидкість поширення електромагнітних хвиль у середовищі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

де  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – швидкість поширення світла у вакуумі;  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  – відповідно діелектрична й магнітна сталі;  $\epsilon$  і  $\mu$  – відповідно діелектрична й магнітна проникності середовища.

Зв'язок між миттєвими значеннями напруженостей електричного ( $E$ ) і магнітного ( $H$ ) полів електромагнітної хвилі

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H,$$

де  $E$  і  $H$  – відповідно миттєві значення напруженостей електричного й магнітного полів хвилі.

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де  $\mathbf{E}_0$  і  $\mathbf{H}_0$  – відповідно амплітуди напруженостей електричного й магнітного полів хвилі;  $\omega$  – колова частота;  $k = \omega/v$  – хвильове число;  $\varphi_0$  – початкові фази коливань у точці з координатою  $x = 0$ .

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Густина потоку енергії (вектор Умова-Пойтинга):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Інтенсивність хвилі:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} EH.$$

## V ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ Й ХВИЛЬОВОЇ ОПТИКИ

### 5.1 Геометрична оптика

Закони відбиття світла

$$i_1' = i_1$$

й заломлення світла

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21},$$

де  $i_1$  – кут падіння;  $i_1'$  – кут відбиття;  $i_2$  – кут заломлення;  $n_{21} = n_2/n_1$  – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого;  $n_1$  і  $n_2$  – абсолютні показники заломлення першого й другого середовища.

Абсолютний показник заломлення

$$n = \frac{c}{v},$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $v$  – швидкість світла в середовищі.

Граничний кут повного внутрішнього відбиття при поширенні світла із середовища оптично більш густого в середовище оптично менш густе знаходиться зі співвідношення:

$$\sin i_{\text{гп}} = n_2/n_1 = n_{21}.$$

Формула сферичного дзеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

де  $a$  і  $b$  – відповідно відстані від полюса дзеркала до предмета й зображення;  $f$  – фокусна відстань дзеркала;  $R$  – радіус кривизни дзеркала.

Оптична сила тонкої лінзи

$$\Phi = \frac{1}{f} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

де  $f$  – фокусна відстань лінзи;  $n_{21} = n_2/n_1$  – відносний показник заломлення ( $n_2$  і  $n_1$  – відповідно абсолютні показники заломлення лінзи й навколишнього середовища);  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни поверхонь ( $R > 0$  для опуклої поверхні;  $R < 0$  для вгнутої;  $R = \infty$  для плоскої поверхні);  $a$  і  $b$  – відповідно відстані від оптичного центру лінзи до предмета й зображення.

## 5.2 Фотометрія

Сила випромінювання

$$I_e = \Phi_e / \omega,$$

де  $\Phi_e$  – потік випромінювання джерела;  $\omega$  – тілесний кут, у межах якого це випромінювання розповсюджується.

Повний світловий потік, що випускається ізотропним точковим джерелом,

$$\Phi_0 = 4\pi I,$$

де  $I$  – сила світла джерела.

Світність поверхні

$$R = \Phi / S,$$

де  $\Phi$  – світловий потік, що випускається поверхнею;  $S$  – площа цієї поверхні.

Яскравість  $B$  поверхні, що світиться, у деякому напрямку  $\varphi$

$$B_\varphi = (I/S) \cdot \cos \varphi,$$



де  $I$  – сила світла;  $S$  – площа поверхні;  $\varphi$  – кут між нормаллю до елемента поверхні й напрямком спостереження.

Освітленість  $E$  поверхні

$$E = \Phi/S,$$

де  $\Phi$  – світловий потік, що падає на поверхню;  $S$  – площа цієї поверхні.

Зв'язок світності  $R$  і яскравості  $B$  за умови, що яскравість не залежить від напрямку,

$$R = \pi B.$$

### 5.3 Інтерференція світла

Різниця фаз двох когерентних хвиль

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

де  $L = sn$  – оптична довжина шляху ( $s$  – геометрична довжина шляху світлової хвилі в середовищі;  $n$  – показник заломлення цього середовища);  $\Delta = L_2 - L_1$  – оптична різниця ходу світлових хвиль;  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі).

Умова інтерференційних максимумів

$$\Delta = \pm m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Умова інтерференційних мінімумів

$$\Delta = \pm(2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ширина інтерференційної смуги (відстань між найближчими мінімумами):

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0,$$

де  $d$  – відстань між двома когерентними джерелами, що перебувають на відстані  $l$  від екрана, паралельного лінії розташування джерел, за умови  $l \gg d$ .

Умови максимумів і мінімумів інтерференції світла, відбитого від верхньої й нижньої поверхонь тонкої плоскопаралельної плівки, що перебуває в повітрі ( $n_0 = 1$ ),

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $d$  – товщина плівки;  $n$  – її показник заломлення;  $i$  – кут падіння. У загальному випадку  $\pm\lambda_0/2$  (втрата півхвилі) обумовлена стрибком фази на  $\pi$  при відбитті світла від границі розділу: якщо  $n > n_0$ , коли відбиття відбувається з зовнішньої сторони,  $n_0 > n$ , коли відбиття відбувається з внутрішньої сторони.

Для обчислення  $d_{\min}$  при максимумі інтерференції береться  $(+\lambda_0/2)$ , а при мінімумі інтерференції  $(-\lambda_0/2)$ .

Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_m = \sqrt{(m-1/2)\lambda_0 R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

або темних у проходящому світлі

$$r_m = \sqrt{m\lambda_0 R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $m$  – номер кільця;  $R$  – радіус кривизни лінзи.

У випадку "просвітління" оптики інтерферуючі промені у відбитому світлі гасять один одного за умови

$$n = \sqrt{n_c},$$

де  $n_c$  – показник заломлення скла;  $n$  – показник заломлення плівки.

### 5.4 Дифракція світла

Умови дифракційних максимумів і мінімумів від однієї щілини, на яку світло падає нормально:

$$a \sin \varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}; \quad a \sin \varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = m\lambda; \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $a$  – ширина щілини;  $\varphi$  – кут дифракції;  $m$  – порядок спектра;  $\lambda$  – довжина хвилі.

Умови головних максимумів дифракційної ґратки, на яку світло падає нормально:

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda; \quad m = 1, 2, \dots,$$

де  $d$  – період дифракційної ґратки;  $N$  – число штрихів ґратки.

Для центрального максимуму ( $\varphi = 0$ ) для всіх довжин хвиль виконується умова максимуму.

Період дифракційної ґратки

$$d = 1/N_0,$$

де  $N_0$  – число щілин, що припадають на одиницю довжини ґратки (просторова частота).

Умова дифракційних максимумів від просторової ґратки (формула Вульфа-Брегга)

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $d$  – відстань між атомними площинами кристала;  $\theta$  – кут ковзання.

Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

де  $\lambda, (\lambda + \delta\lambda)$  – довжини хвиль двох сусідніх спектральних ліній, розділюваних ґраткою;  $m$  – порядок спектра;  $N$  – загальне число щілин ґратки.

## 5.5 Взаємодія електромагнітних хвиль з речовиною

Зв'язок кута  $\varphi$  відхилення променів призмою й заломлюючого кута  $A$  призми

$$\varphi = A(n - 1),$$

де  $n$  – показник заломлення призми.

Зв'язок між показником заломлення й діелектричною проникністю речовини

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Рівняння змушених коливань електрона під дією електричної складової поля хвилі (найпростіше завдання дисперсії)

$$-\omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} \cos \omega t,$$

де  $eE_0$  – амплітуда сили, що діє на електрон з боку поля хвилі;  $\omega_0$  – власна частота коливань електрона;  $\omega$  – частота зовнішнього поля;  $m$  – маса електрона.

Залежність показника заломлення речовини  $n$  від частоти  $\omega$  зовнішнього поля, відповідно до елементарної електронної теорії дисперсії,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0} \sum \frac{e^2 / m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична постійна;  $n_{0i}$  – концентрація електронів з власною частотою  $\omega_{0i}$ ;  $m$  – маса електрона;  $e$  – заряд електрона.

Закон поглинання світла в речовині (закон Бугера-Бера)

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

де  $I_0$  і  $I$  – інтенсивності плоскої монохроматичної світлової хвилі відповідно на вході й виході шару поглинаючої речовини товщиною  $x$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт поглинання.

## 5.6 Поляризація світла

Коефіцієнт поляризації світла

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  – відповідно максимальна й мінімальна інтенсивності частково поляризованого світла, що пропускається аналізатором.

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

де  $I$  – інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло через аналізатор;  $I_0$  – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на

аналізатор;  $\alpha$  – кут між головною площиною аналізатора й площиною поляризації падаючої хвилі.

### Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

де  $i_B$  – кут падіння, за якого відбитий від діелектрика промінь є плоскополяризованим;  $n_{21}$  – відносний показник заломлення ( $n_{21} > 1$ ).

Оптична різниця ходу між звичайним і незвичайними променями  $l$  у комірці Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = klE^2,$$

де  $n_o$ ,  $n_e$  – показники заломлення відповідно звичайного й незвичайного променів у напрямку, перпендикулярному оптичній осі;  $l$  – довжина комірки Керра;  $E$  – напруженість електричного поля;  $k$  – постійна.

Оптична різниця ходу між звичайними і незвичайними променями в комірці Поккельса

$$\Delta = \frac{n^3 r E_{ox} l}{2},$$

де  $n^3 r$  – фактор якості електрооптичного кристала комірки;  $l$  – довжина комірки Поккельса;  $E_{ox}$  – напруженість поперечного електричного поля.

При поданні півхвильової напруги  $U_{\lambda/2}$  оптична різниця ходу дорівнює

$$\Delta = \frac{n^3 r U_{\lambda/2} l}{2 \cdot d} = \frac{\lambda}{2}$$

і при рівності інтенсивностей звичайного та незвичайного променей площина поляризації повертається на  $90^\circ$  (втрата півхвилі).

Кут повороту площини поляризації:

– для оптично активних кристалів і чистих рідин

$$\varphi = \alpha d;$$

– для оптично активних розчинів

$$\varphi = \alpha C d,$$

де  $d$  – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активній речовині;  $\alpha$  – питоме обертання;  $C$  – масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

## 5.7 Квантова природа світла. Закони теплового випромінювання

### Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

де  $R_e$  – енергетична світність (випромінюваність) чорного тіла;  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана;  $T$  – термодинамічна температура.

Зв'язок енергетичної світності  $R_e$  й спектральної щільності енергетичної світності  $r_{\nu, T}$  ( $r_{\lambda, T}$ ) чорного тіла

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Енергетична світність сірого тіла

$$R_T^c = A_T \sigma T^4,$$

де  $A_T$  – поглинальна здатність сірого тіла:  $0 < A_T < 1$ ;  $A_T = 1$  – абсолютно чорне тіло.

Закон зміщення Віна

$$\lambda_{\max} = b/T,$$

де  $\lambda_{\max}$  – довжина хвилі, що відповідає максимальному значенню спектральної щільності енергетичної світності чорного тіла;  $b$  – стала Віна.

Залежність максимальної спектральної щільності енергетичної світності чорного тіла від температури

$$r_{\lambda,T} = CT^5,$$

де  $C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

Енергія кванта світла – фотона:

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda.$$

Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1};$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1},$$

де  $h$  – стала Планка.

Зв'язок радіаційної  $T_p$  та дійсної  $T$  температур

$$T_p = \sqrt[4]{A_T T}.$$

Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{\max},$$

де  $\varepsilon = h\nu$  – енергія поглиненого фотона;  $A$  – робота виходу електрона з металу;  $T_{\max} = m v_{\max}^2 / 2$  – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

«Червона межа» фотоефекту для даного матеріала

$$\nu_0 = A/h; \lambda_0 = hc/A,$$

де  $\lambda_0$  – максимальна довжина хвилі випромінювання ( $\nu_0$  – відповідно мінімальна частота), за якої фотоефект ще можливий.

Маса й імпульс фотона

$$m_\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c},$$

де  $h\nu$  – енергія фотона.

Тиск світла на поверхню, що відбиває

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

де  $E_e = N h \nu$  – опромінення поверхні (енергія всіх фотонів, що падають на одиницю поверхні за одиницю часу);  $\rho$  – коефіцієнт відбиття;  $w$  – об'ємна густина енергії випромінювання;  $h$  – стала Планка.

Коефіцієнт відбиття

$$\rho = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2},$$

де  $n$  – відносний показник заломлення.

Зміна довжини хвилі рентгенівського випромінювання при комптонівському розсіюванні

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

де  $\lambda$  і  $\lambda'$  – довжини хвиль падаючого й розсіяного випромінювання;  $m_0$  – маса електрона;  $\theta$  – кут розсіювання;  $\lambda_c = h/(m_0 c)$  – комптонівська довжина хвилі.

## VI ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ ФІЗИКИ АТОМІВ, МОЛЕКУЛ І ТВЕРДИХ ТІЛ

### 6.1 Теорія атомів водню за Бором

Узагальнена формула Бальмера, що описує серії в спектрі водню,

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де  $\nu$  – частота спектральних ліній у спектрі атома водню;  $R$  – постійна Рідберга;  $m$  визначає серію ( $m = 1, 2, 3, \dots$ );  $n$  визначає окремі лінії відповідної серії ( $n = m + 1, m + 2, \dots$ ):  $m = 1$  (серія Лаймана),  $m = 2$  (серія Бальмера),  $m = 3$  (серія Пашена),  $m = 4$  (серія Брекета),  $m = 5$  (серія Пфунда),  $m = 6$  (серія Хемфрі).

Перший постулат Бора (постулат стаціонарних станів)

$$m_e v r_n = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $m_e$  – маса електрона;  $v$  – швидкість електрона по  $n$ -й орбіті радіусом  $r_n$ .

Другий постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m,$$

де  $E_n$  і  $E_m$  – відповідно енергії стаціонарних станів атома до й після випромінювання (поглинання).

Радіус  $n$ -ої стаціонарної орбіти

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots;$$

енергія електрона на  $n$ -й стаціонарній орбіті

$$E_n = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $Z$  – порядковий номер елемента в системі Менделєєва;  $\varepsilon_0$  – електрична постійна.

## 6.2 Елементи квантової механіки

Зв'язок довжини дебройлівської хвилі частинки з імпульсом  $p$

$$\lambda = h/p = h/(mv),$$

де  $m$  – маса частинки;  $v$  – її швидкість.

Фазова швидкість частинки, що вільно рухається

$$v_{\text{фаз}} = \omega/k = E/p = c^2/v,$$

де  $E = \hbar \omega$  – енергія частинки ( $\omega$  – кругова частота);  $p = \hbar k$  – імпульс ( $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число).

Групова швидкість частинки, що вільно рухається

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

Співвідношення невизначеностей:

– для координати й імпульсу частинки

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

де  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  – невизначеності координат;  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$ ,  $\Delta p_z$  – невизначеності відповідних проекцій імпульсу частинки на осі координат;

– для енергії й часу

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

де  $\Delta E$  – невизначеність енергії даного квантового стану;  $\Delta t$  – час перебування системи в даному стані;  $\hbar$  – стала Планка ( $\hbar = h/2\pi$ ).

Імовірність знаходження частинки в об'ємі  $dV$

$$dW = \Psi \Psi^* dV = |\Psi|^2 dV,$$

де  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$  – хвильова функція, що описує стан частинки;  $\Psi^*$  – функція, комплексно спряжена з  $\Psi$ ;  $|\Psi|^2 = \Psi \Psi^*$  – квадрат модуля хвильової функції.

Для стаціонарних станів

$$dW = \psi \psi^* dV = |\psi|^2 dV,$$

де  $\psi = \psi(x, y, z)$  – координатна (амплітудна) частина хвильової функції.

Умова нормування ймовірностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1,$$

де інтегрування проводиться по всьому нескінченному простору, тобто по координатах  $x, y, z$  від  $\infty$  до  $-\infty$ .

Імовірність виявлення частинки в інтервалі від  $x_1$  до  $x_2$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx.$$

Середнє значення фізичної величини  $L$ , що характеризує частинку, що перебуває в стані, описуваному хвильовою функцією  $\Psi$ ,

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} L |\Psi|^2 dV,$$

де  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$  – хвильова функція, що описує стан частинки.

Рівняння Шредингера для стаціонарних станів

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

де  $\psi = \psi(x, y, z)$  – координатна частина хвильової функції ( $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i(E/\hbar)t}$ );  $U = U(x, y, z)$  – потенційна енергія частинки;  $E$  – повна енергія частинки;  $\hbar = h/(2\pi)$ ;  $m$  – маса частинки;  $\Delta$  – оператор Лапласа  $\left( \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$ .

Хвильова функція, що описує одномірний рух вільної частинки,

$$\Psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)},$$

де  $A$  – амплітуда хвиль де Бройля;  $p_x = \hbar k$  – імпульс частинки;  $E = \hbar \omega$  – енергія частинки;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Власне значення енергії  $E_n$  частинки, що перебуває на  $n$ -му енергетичному рівні в одномірній прямокутній «потенційній ямі» з нескінченно високими «стінками»,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $l$  – ширина ями.



Власна хвильова функція, що відповідає вищенаведеному власному значенню енергії,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, n = 1, 2, 3, \dots$$

Коефіцієнт прозорості  $D$  (імовірність тунелювання) прямокутного потенційного бар'єра кінцевої ширини  $l$ ,

$$D = D_0 \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} l \right],$$

де  $D_0$  – множник, який можна прирівняти одиниці;  $U$  – висота потенційного бар'єра;  $E$  – енергія частинки;

– для бар'єра довільної форми

$$D = D_0 \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U_x - E)} dx \right].$$

Рівняння Шредингера для лінійного гармонійного осцилятора у квантовій механіці

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0,$$

де  $\frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = U$  – потенційна енергія осцилятора;  $\omega_0$  – власна частота коливань осцилятора;  $m$  – маса частинки.

Власні значення енергії гармонійного осцилятора

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0, n = 1, 2, 3, \dots$$

Енергія нульових коливань гармонійного осцилятора

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0.$$

### 6.3 Елементи сучасної фізики атомів і молекул

Потенційна енергія  $U(r)$  взаємодії електрона з ядром у водневоподібному атомі

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

де  $r$  – відстань між електроном і ядром;  $Z$  – порядковий номер елемента;  $\epsilon_0$  – електрична постійна.

Власне значення енергії  $E_n$  електрона у водневоподібному атомі

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Енергія іонізації атома водню

$$E_i = -E_1 = \frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}.$$

Момент імпульсу (механічний орбітальний момент) електрона

$$L_i = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

де  $l$  – орбітальне квантове число, що приймає при заданому  $n$  наступні значення:  $l = 0, 1, \dots, n-1$  (усього  $n$  значень).

Проекція моменту імпульсу на напрямок зовнішнього магнітного поля

$$L_{iz} = \hbar m_l,$$

де  $m_l$  – магнітне квантове число, що ухвалює при заданому  $l$  наступні значення:  $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$  (усього  $(2l+1)$  значень).

Правила відбору при електронних переходах для орбітального й магнітного квантових чисел

$$\Delta l = \pm 1 \quad \text{і} \quad \Delta m_l = 0, \pm 1.$$

Нормована хвильова функція, що відповідає  $1s$ -стану (основному стану) електрона в атомі водню,

$$\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a},$$

де  $a = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m e^2)$  – величина, що збігається з першим боровським радіусом.

Імовірність виявити електрон в атомі водню, що перебуває в  $1s$ -стані, в інтервалі від  $r$  до  $r + dr$

$$dW = |\Psi_{100}|^2 dV = |\Psi_{100}|^2 4\pi r^2 dr.$$

Спін (власний механічний момент імпульсу) електрона

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

де  $s$  – спінове квантове число ( $s = 1/2$ ).

Проекція спіну на напрямок  $z$  зовнішнього магнітного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

де  $m_s$  – магнітне спінове квантове число ( $m_s = \pm 1/2$ ).

Принцип Паулі

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ або } 1,$$

де  $Z(n, l, m_l, m_s)$  – число електронів, що перебувають у квантовому стані, описуваному набором чотирьох квантових чисел:  $n$  – головного,  $l$  – орбітального,  $m_l$  – магнітного,  $m_s$  – магнітного спінового.

Максимальне число електронів  $Z(n)$ , обумовлених даним головним квантовим числом  $n$ ,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

Закон Мозлі, що визначає частоти спектральних ліній характеристичного рентгенівського випромінювання,

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де  $R$  – постійна Рідберга,  $Z$  – порядковий номер елемента в періодичній системі;  $\sigma$  – постійна екранування;  $m$  визначає серію ( $m = 1, 2, 3, \dots$ );  $n$  визначає окремі лінії відповідної серії ( $n = m+1, m+2, \dots$ ).

Закон Мозлі для лінії  $K\alpha$  ( $\sigma = 1$ )

$$\nu = R(Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

## 6.4 Елементи квантової статистики

Розподіл Бозе-Ейнштейна

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/(kT)} - 1}$$

і Фермі-Дірака

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/(kT)} + 1},$$

де  $\langle N_i \rangle$  – відповідно середні числа бозонів і ферміонів у квантовому стані з енергією  $E_i$ ;  $k$  – постійна Больцмана;  $T$  – термодинамічна температура;  $\mu$  – хімічний потенціал (рівень Фермі  $E_F$ ). При  $e^{(E_i - \mu)/(kT)} \gg 1$  обидва розподіли переходять у класичний розподіл Максвелла-Больцмана  $\langle N_i \rangle = A e^{-E_i/(kT)}$ , де  $A = e^{\mu/(kT)}$ .

## 6.5 Елементи фізики твердого тіла.

### Метали

Концентрація електронів у металах від температури не залежить і визначається концентрацією атомів  $n_{\text{ат}}$  і кількістю електронів  $n_0$ , що припадають на один атом:

$$n = n_0 \cdot n_{\text{ат}} = n_0 \cdot \frac{DN_A}{M},$$

де  $D$  – густина речовини;  $M$  – молярна маса;  $N_A$  – число Авогадро (число атомів у молі).

Розподіл Фермі-Дірака за енергіями для вільних електронів у металі

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1},$$

де  $E_F$  – енергія Фермі.

При  $T = 0$  К

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E < E_F, \\ 0, & E > E_F. \end{cases}$$

Положення рівня Фермі в металах від температури не залежить і його можна знайти за формулою:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

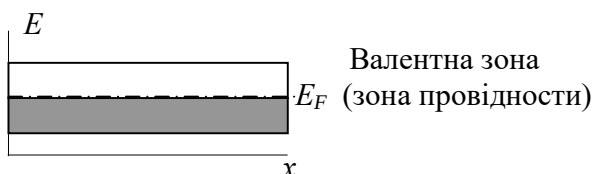
де  $m$  – ефективна маса електрона;  $n$  – концентрація електронів.

Електрична провідність металу згідно з квантовою теорією електропровідності металів,

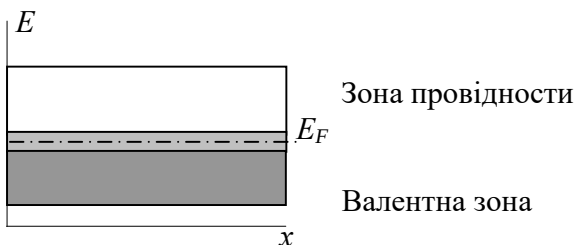
$$\gamma = \frac{ne^2 l \langle l_F \rangle}{m u_F},$$

де  $n$  – концентрація електронів провідності в металі;  $\langle l_F \rangle$  – середня довжина вільного пробігу електрона, що має енергію Фермі;  $u_F$  – швидкість електронів, що має енергію Фермі.

Якщо валентна зона заповнена електронами не повністю (рис. 6.1, а), то



а)



б)

Рисунок 6.1 – Зонні діаграми одновалентних металів (а) і двовалентних металів (б);

$E_F$  – рівень Фермі

електрон, одержавши як завжди малу енергію (наприклад, за рахунок теплового руху або електричного поля), зможе перейти на більш високий енергетичний рівень тієї ж зони, тобто стати вільним і брати участь у провідності. Внутрішньозонний перехід цілком можливий, тому що, наприклад, при 1 К енергія теплового руху  $kT \approx 10^{-4}$  еВ, тобто набагато більше різниці енергій між сусідніми станами. Кристал, що має таку зонну діаграму, є металом.

Типовими представниками речовин, в яких спостерігається часткове заповнення валентної зони (у випадку

металу її називають також зоною провідності) є одновалентні лужні метали і благородні метали, такі як Cu, Ag, Au, Pt та ін.

Тверде тіло є провідником електричного струму і в тому випадку, коли валентна зона повністю заповнена електронами і перекривається з вільною зоною (зоною провідності), не зайнятою електронами (рис. 6.1, б). У цьому випадку утворюється так звана «гібридна» зона, яка заповнюється валентними електронами лише частково. Це має місце для двовалентних лужноземельних елементів (Be, Mg, Ca і т.д.).

## Напівпровідники

Власна провідність напівпровідника

$$\sigma = en_i(\mu_n + \mu_p),$$

де  $e$  – заряд електрона;  $n_i$  – концентрація носіїв струму у власному напівпровіднику;  $\mu_n, \mu_p$  – рухливості електронів і дірок відповідно.

Зонна діаграма власного напівпровідника наведена на рисунку 6.2.

Постійність власної концентрації носіїв заряду зумовлена рівністю процесу теплової генерації і рекомбінації.

Концентрація носіїв струму у власному напівпровіднику

$$n_i = p_i = \sqrt{N_C N_V} \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right),$$

де  $E_g$  – ширина забороненої зони напівпровідника,  $k$  – постійна Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.

Ефективна щільність станів у зоні провідності

$$N_C = \frac{2(2\pi m_n kT)^{3/2}}{h^3},$$

де  $m_n$  – ефективна маса електрона,  $h$  – постійна Планка.

Ефективна щільність станів у валентній зоні

$$N_V = \frac{2(2\pi m_p kT)^{3/2}}{h^3},$$

де  $m_p$  – ефективна маса дірки;  $h$  – постійна Планка.

Енергія Фермі у власному напівпровіднику

$$E_F = -\frac{E_g}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_C} = -\frac{E_g}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \frac{m_p}{m_n}.$$

Зонні діаграми домішкових напівпровідників наведені на рисунках 6.3 (електронного напівпровідника) і 6.4 (діркового напівпровідника).

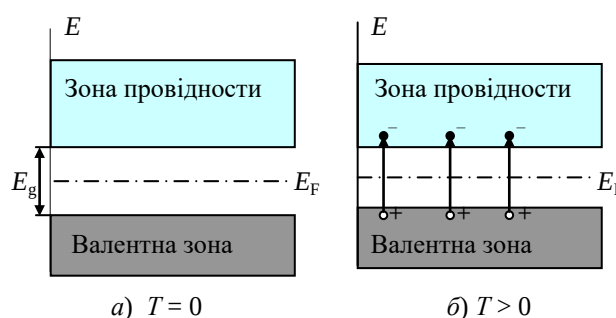


Рисунок 6.2 – Зонна діаграма власного напівпровідника для температур: а)  $T = 0$ ; б)  $T > 0$

### Електронна провідність на-півпровідника ( $n$ – тип)

$$\sigma = en_n\mu_n,$$

де  $e$  – заряд електрона;  $n_n$  – концентрація основних носіїв (електронів);  $\mu_n$  – рухливість електронів.

Концентрація електронів

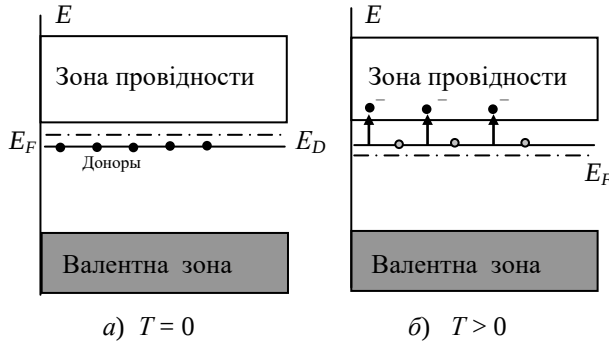


Рисунок 6.3 – Зонна діаграма домішкового (електронного) напівпровідника при: а)  $T = 0$ ; б)  $T > 0$

$$n_n = N_C \cdot e^{-\frac{(E_C - E_F)}{kT}},$$

де  $E_F$  – енергія Фермі в електронному напівпровіднику.

$$E_F = -kT \ln \frac{N_C}{N_D},$$

де  $N_D$  – концентрація донорів. У випадку дрібних донорів  $n_n = N_D$ .

Концентрація неосновних носіїв (дірок) в електронному напівпровіднику

$$p_n = N_V \cdot e^{-\frac{(E_F - E_V)}{kT}}.$$

Діркова провідність напів-провідника ( $p$  – тип)

$$\sigma = ep_p\mu_p,$$

де  $e$  – заряд електрона;  $p_p$  – концентрація основних носіїв (дірок);  $\mu_p$  – рухливість дірок.

Концентрація дірок дорівнює

$$p_p = N_V \cdot e^{-\frac{(E_F - E_V)}{kT}},$$

де  $E_F$  – енергія Фермі.

$$E_F = -kT \ln \frac{N_C}{N_D},$$

де  $N_A$  – концентрація акцепторів.

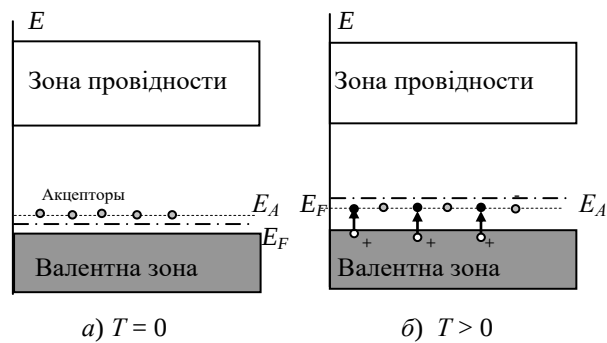


Рисунок 6.4 – Зонна діаграма домішкового (діркового) напівпровідника при: а)  $T = 0$ ; б)  $T > 0$

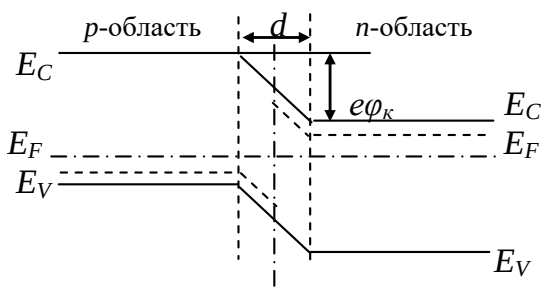


Рисунок 6.5 –  $p$ - $n$ -перехід, що перебуває в термодинамічній рівновазі (незміщений  $p$ - $n$ -перехід)

Концентрація неосновних носіїв (електронів) у діркового напівпровіднику

$$n_p = N_C \cdot e^{-\frac{(E_C - E_{F_p})}{kT}}.$$

Зв'язок між концентраціями власних, основних і неосновних носіїв струму в напівпровіднику:

$$n_i^2 = p_i^2 = n_n \circ p_n = n_p p_n.$$

Зонна діаграма  $p$ - $n$ -переходу, що

перебуває у стані термодинамічної рівноваги, наведена на рисунку 6.5.

Контактна різниця потенціалів  $\phi_k$  у  $p$ - $n$ -переході, що перебуває в термодинамічній рівновазі дорівнює

$$\phi_k = \frac{kT}{e} \cdot \ln \left( \frac{p_p \cdot n_n}{n_i^2} \right).$$

Зонні діаграми симетричних прямо зміщеного і зворотно зміщеного  $p$ - $n$ -переходів наведені на рисунках 6.6 і 6.7 відповідно.

Ширина збідненого шару в симетричному прямо зміщеному  $p$ - $n$ -переході

$$d = [(2\varepsilon\varepsilon_0/e)(N_A + N_D)(\phi_k - U) / N_A N_D]^{1/2},$$

де  $U$  – величина прямої напруги.

Ширина збідненого шару в симетричному зворотно зміщеному  $p$ - $n$ -переході

$$d = [(2\varepsilon\varepsilon_0/e)(N_A + N_D)(\phi_k + U) / N_A N_D]^{1/2},$$

де  $U$  – величина зворотної напруги.

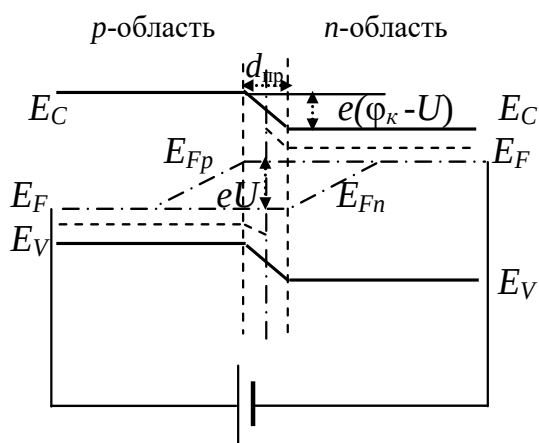


Рисунок 6.6 – Прямо зміщений  $p$ - $n$ -перехід

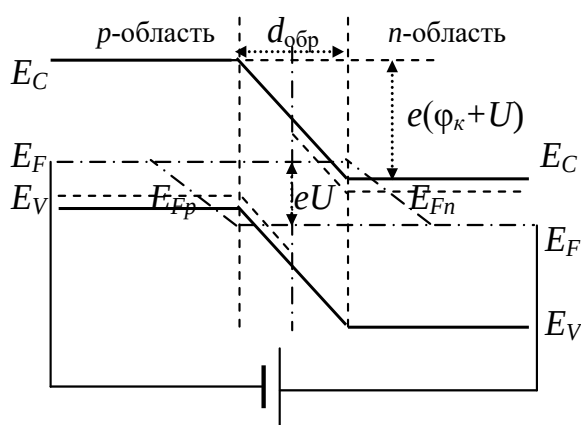


Рисунок 6.7 – Зворотно зміщений  $p$ - $n$ -перехід

Якщо до  $p$ -області приєднати плюс, а до  $n$ -області – мінус від зовнішнього джерела ЕРС, то знак зовнішньої ЕРС буде вважатися позитивним і потенційний бар'єр зменшиться на величину прикладеної напруги. Така полярність зовнішньої напруги називається прямою. Якщо до  $p$ -області приєднати мінус, а до  $n$ -області – плюс від зовнішнього джерела ЕРС, то знак зовнішньої ЕРС буде вважатися негативним і потенційний бар'єр збільшиться на величину прикладеної напруги. Така полярність зовнішньої напруги називається зворотною.

Бар'єрна ємність симетричного  $p$ - $n$ -переходу

при прямому зміщенні

$$C_3 = S \cdot \left[ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \cdot \frac{e N_D N_A}{(N_A + N_D)(\phi_k - U)} \right]^{1/2};$$

при зворотньому зміщенні

$$C_3 = S \cdot \left[ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \cdot \frac{e N_D N_A}{(N_A + N_D)(\phi_k + U)} \right]^{1/2}.$$

Густина струму  $p$ - $n$ -переходу (вольтамперна характеристика, див. рис. 6.8)

$$j = j_s \cdot (e^{\frac{eU}{kT}} - 1),$$

де густина струму насичення

$$j_s = e \left( \frac{D_p p_n}{L_p} + \frac{D_n n_p}{L_n} \right),$$

$D_p, D_n$  – коефіцієнти дифузії дірок і електронів відповідно;  $L_p, L_n$  – дифузійні довжини дірок і електронів відповідно;

$$L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p}; L_n = \sqrt{D_n \cdot \tau_n},$$

де  $\tau_p, \tau_n$  – часи життя електронів і дірок відповідно.

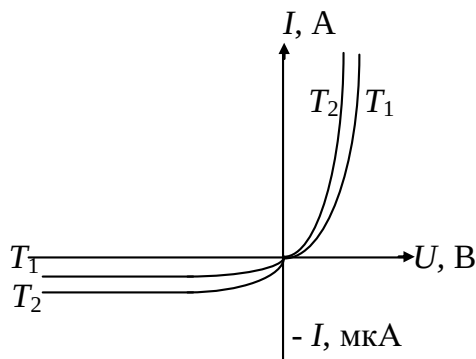


Рис. 6.8 – ВАХ  $p$ - $n$ -переходу для різних температур:  $T_1 < T_2$

Коефіцієнти дифузії

$$D_p = \frac{kT}{e} \mu_p; D_n = \frac{kT}{e} \mu_n,$$

де  $\mu_p$  і  $\mu_n$  – рухливості дірок і електронів відповідно.

Напруга змищення підставляється зі своїм знаком згідно із зазначеним правилом. Пряма напруга на  $p$ - $n$ -переході обмежена значенням контактної різниці потенціалів  $\phi_k$ , а зворотня – пробоем  $p$ - $n$ -перехода.

У нерівноважних стаціонарних умовах концентрації нерівновісних носіїв змінюються за законами:

$$\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right) - \text{для електронів}; \Delta p = \Delta p_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) - \text{для дірок}.$$

У нестационарних умовах:

$$\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) - \text{для електронів}; \Delta p = \Delta p_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) - \text{для дірок}.$$



## ДОДАТКИ

## Додаток 1.

## Основні фізичні постійні (округлені значення)

| Фізична постійна                                  | Позначення                 | Значення                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Нормальне прискорення                             | $g$                        | 9,81 м/с                                                                                                                                                  |
| Гравітаційна постійна                             | $G$                        | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ (м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2\text{)}$                                                                                     |
| Постійна Авогадро                                 | $N_A$                      | $6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$                                                                                                                    |
| Постійна Фарадея                                  | $F$                        | $96,48 \cdot 10^3 \text{ Кл/моль}$                                                                                                                        |
| Універсальна газова постійна                      | $R$                        | $8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$                                                                                                                   |
| Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов | $V_m$                      | $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$                                                                                                              |
| Постійна Больцмана                                | $k$                        | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$                                                                                                                        |
| Швидкість світла у вакуумі                        | $c$                        | $3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$                                                                                                                             |
| Постійна Стефана-Больцмана                        | $\sigma$                   | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4\text{)}$                                                                                             |
| Постійна закону зміщення Віна                     | $b$                        | $2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$                                                                                                             |
| Постійна Планка                                   | $h$ ,<br>$\eta = h / 2\pi$ | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} =$<br>$= 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ еВ} \cdot \text{с}$<br>$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ |
| Постійна Рідберга                                 | $R$                        | $1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$                                                                                                                          |
| Радіус Бора                                       | $a$                        | $0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$                                                                                                                          |
| Маса спокою електрона                             | $m_e$                      | $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$                                                                                                                          |
| Маса спокою протона                               | $m_p$                      | $1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                                                                                                        |
| Маса спокою нейтрона                              | $m_n$                      | $1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                                                                                                        |
| Маса спокою $\alpha$ -частинки                    | $m_\alpha$                 | $6,6425 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                                                                                                        |
| Атомна одиниця маси                               | а.о.м.                     | $1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                                                                                                         |
| Відношення маси протона до маси електрона         | $m_p/m_e$                  | 1836,15                                                                                                                                                   |
| Елементарний заряд                                | $e$                        | $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$                                                                                                                          |
| Відношення заряду електрона до його маси          | $e/m_e$                    | $1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$                                                                                                                        |
| Комптонівська довжина хвилі електрона             | $\lambda$                  | $2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$                                                                                                                           |
| Енергія іонізації атома водню                     | $E_i$                      | $2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж (13,6 еВ)}$                                                                                                                |
| Магнетон Бора                                     | $\mu_B$                    | $0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$                                                                                                         |
| Електрична постійна                               | $\varepsilon_0$            | $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$                                                                                                                         |
| Магнітна постійна                                 | $\mu_0$                    | $4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$                                                                                                  |

## Одиниці й розмірності фізичних величин у СІ

| Величина                                                                                                             |                      | Одиниця      |                | Вираження<br>через основні й<br>додаткові<br>одиниці |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|----------------|------------------------------------------------------|
| найменування                                                                                                         | розмірність          | найменування | позначенн<br>я |                                                      |
| Основні одиниці                                                                                                      |                      |              |                |                                                      |
| Довжина                                                                                                              | $L$                  | метр         | м              |                                                      |
| Маса                                                                                                                 | $M$                  | кілограм     | кг             |                                                      |
| Час                                                                                                                  | $T$                  | секунда      | с              |                                                      |
| Сила електричного<br>струму                                                                                          | $I$                  | ампер        | А              |                                                      |
| Термодинамічна<br>температура                                                                                        | $\Theta$             | кельвін      | К              |                                                      |
| Кількість речовини                                                                                                   | $N$                  | моль         | моль           |                                                      |
| Сила світла                                                                                                          | $J$                  | кандела      | кд             |                                                      |
| Додаткові одиниці                                                                                                    |                      |              |                |                                                      |
| Плоский кут                                                                                                          | —                    | радіан       | рад            |                                                      |
| Тілесний кут                                                                                                         | —                    | стерадіан    | ср             |                                                      |
| Похідні одиниці                                                                                                      |                      |              |                |                                                      |
| Частота                                                                                                              | $T^{-1}$             | герц         | Гц             | $c^{-1}$                                             |
| Сила, вага                                                                                                           | $LMT^{-2}$           | ньютон       | Н              | $m \cdot kg \cdot c^{-2}$                            |
| Тиск, механічна<br>напруга                                                                                           | $L^{-1}MT^{-2}$      | паскаль      | Па             | $m^{-1} \cdot kg \cdot c^{-2}$                       |
| Енергія, робота,<br>кількість теплоти                                                                                | $L^2MT^{-2}$         | джоуль       | Дж             | $m^2 \cdot kg \cdot c^{-2}$                          |
| Потужність, потік<br>енергії                                                                                         | $L^2MT^{-3}$         | ват          | Вт             | $m^2 \cdot kg \cdot c^{-3}$                          |
| Кількість електри-<br>ки (електричний<br>заряд)                                                                      | $TI$                 | кулон        | Кл             | $c \cdot A$                                          |
| Електрична напру-<br>га, електричний<br>потенціал, різниця<br>електричних по-<br>тенціалів, електро-<br>рушійна сила | $L^2MT^{-3}I^{-1}$   | вольт        | В              | $m^2 \cdot kg \cdot c^{-3} \cdot A^{-1}$             |
| Електрична<br>ємність                                                                                                | $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$ | фарад        | Ф              | $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot c^4 \cdot A^2$           |
| Електричний опір                                                                                                     | $L^2MT^{-3}I^{-2}$   | ом           | Ом             | $m^2 \cdot kg \cdot c^{-3} \cdot A^{-2}$             |
| Електрична<br>провідність                                                                                            | $L^{-2}M^{-1}T^3I^2$ | сименс       | См             | $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot c^3 \cdot A^2$           |
| Магнітний потік                                                                                                      | $L^2MT^{-2}I^{-1}$   | вебер        | Вб             | $m^2 \cdot kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$             |
| Магнітна індукція                                                                                                    | $MT^{-2}I^{-1}$      | тесла        | Тл             | $kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$                       |

|                                                                            |                    |           |    |                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------|----|------------------------------------------|
| Індуктивність,<br>взаємна<br>індуктивність                                 | $L^2MT^{-2}I^{-2}$ | генрі     | Гн | $M^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ |
| Світловий потік                                                            | $J$                | люмен     | лм | кд·порівн                                |
| Освітленість                                                               | $L^{-2}J$          | люкс      | лк | $M^{-2} \cdot кд \cdot порівн$           |
| Активність ізотопу<br>(активність нуклі-<br>да в радіоактивнім<br>джерелі) | $T^{-1}$           | беккерель | Бк | $s^{-1}$                                 |
| Поглинена доза<br>випромінювання                                           | $L^{-2}T^{-2}$     | грій      | Гр | $M^2 \cdot з^{-2}$                       |

### Множники й приставки для дільних одиниць і утвору десяткових кратних

| Множник    | Приставка | Позначення<br>приставки |           | Множник   | Приставка | Позначення приставки |                           |
|------------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|---------------------------|
|            |           | між-<br>народне         | російське |           |           | між-<br>народне      | російське<br>(українське) |
| $10^{-18}$ | ато       | a                       | а         | $10^1$    | дека      | da                   | да                        |
| $10^{-15}$ | фемто     | f                       | ф         | $10^2$    | гекто     | h                    | г                         |
| $10^{-12}$ | піко      | p                       | п         | $10^3$    | кіло      | k                    | к                         |
| $10^{-9}$  | нано      | n                       | н         | $10^6$    | Мега      | M                    | М                         |
| $10^{-6}$  | мікро     | μ                       | мк        | $10^9$    | Гіга      | G                    | Г                         |
| $10^{-3}$  | мілі      | m                       | м         | $10^{12}$ | Тера      | T                    | Т                         |
| $10^{-2}$  | санті     | c                       | с         | $10^{15}$ | Пета      | P                    | П                         |
| $10^{-1}$  | деці      | d                       | д         | $10^{18}$ | Екса      | E                    | Э                         |

### Грецький алфавіт

| Позначення букв | Назви букв | Позначення букв | Назви букв |
|-----------------|------------|-----------------|------------|
| A, α            | альфа      | N, ν            | ню         |
| B, β            | бета       | Ξ, ξ            | ксі        |
| Γ, γ            | гама       | Ο, ο            | омікрон    |
| Δ, δ            | дельта     | Π, π            | пі         |
| E, ε            | епсілон    | Ρ, ρ            | ро         |
| Z, ζ            | дзета      | Σ, σ            | сигма      |
| H, η            | ета        | Τ, τ            | тау        |
| Θ, θ, ϑ         | тета       | Υ, υ            | іпсилон    |
| I, ι            | йота       | Φ, φ            | фі         |
| K, κ            | каппа      | Χ, χ            | хі         |
| Λ, λ            | ламбда     | Ψ, ψ            | псі        |
| M, μ            | мю         | Ω, ω            | омега      |

## Додаток 2

### КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ

Розкладання на множники:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); & a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2; \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); & a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 &= (a \pm b)^3; \\ ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2), \end{aligned}$$

де  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ – формула кореня квадратного рівняння.}$$

Теорема Вієта:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

Арифметична прогресія:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots &\text{ – члени арифметичної прогресії;} \\ d &\text{ – різниця арифметичної прогресії;} \\ a_{n+1} &= a_n + d \text{ – визначення арифметичної прогресії;} \\ a_n &= a_1 + d(n - 1) \text{ – формула } n\text{-го члена;} \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ – характеристична властивість;} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \text{ – формула суми } n \text{ перших членів.}$$

Теорема косинусів. У будь-якому трикутнику

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Формули площі будь-якого трикутника:

$$\begin{aligned} S &= \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, S = pr, S = \frac{abc}{4R}, \\ S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – формула Герона.} \end{aligned}$$

Диференційне обчислення функцій однієї змінної

Похідні найпростіших елементарних функцій:

– правила диференціювання суми, різниці, добутку й частки відповідно:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (uv)' = u'v + uv'; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0;$$

– похідна постійної функції

$$y = f(x) = C \Rightarrow y' = 0. (Cu)' = Cu'.$$

– похідна степеневої функції

$$(x^n)' = nx^{n-1}; (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}.$$

– похідна показової функції

$$(a^x)' = a^x \ln a; (e^x)' = e^x.$$

– похідна логарифмічної функції

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

– похідні тригонометричних функцій

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$y'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$  – правило диференціювання складної функції  $y = f[\varphi(t)]$  у точці  $t_0$ ; тут  $x_0 = \varphi(t_0)$ .

$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$  – правило диференціювання зворотної функції  $x = \varphi(y)$  у точці  $y_0 = f(x_0)$ .

Табличні інтеграли:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$  – формула заміни змінної в невизначеному інтегралі.

Навчальне видання

**Горбачов Віктор Едуардович**

Довідник з фізики

для здобувачів факультету кібербезпеки, програмної інженерії  
та комп'ютерних наук усіх спеціальностей