

**ОДЕССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ ИМ. А. С. ПОПОВА
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Стрелковская И. В., Паскаленко В. Н.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
для иностранных студентов
технических специальностей

Одеса 2013

УДК 517/517.5
ББК 22.11я73
С 84

План УМН 2013 г.

Рецензенты: к. т. н., доц. каф. в. м. Григорьева Т. И.,
к. п. н., доц. каф. в. м. Василенко О. А.

С 84 Стрелковская И. В. Введение в математический анализ: Учеб. пособ. /
И. В. Стрелковская, В. Н. Паскаленко. – Одесса. ОНАС им. А. С. Попова,
2013. – 228 с.

В учебном пособии изложены основные теоретические положения по теме
“Введение в математический анализ”.

Рассмотрены последовательности, их виды и свойства; теория пределов
последовательностей. Функции, их виды и свойства; теория пределов функций;
непрерывность функций, свойства непрерывных функций.

Все теоретические положения сопровождаются большим количеством
примеров с подробным решением.

Для более полного усвоения материала предложены контрольные вопросы,
проверочные тесты, тренировочные упражнения, задачи для самостоятельного
решения.

Учебное пособие предназначено для студентов технических
специальностей.

Утверждено
Методическим советом
Академии связи
Протокол №5 от 20.12.2012г.

Одобрено на
заседании кафедры
высшей математики
и рекомендовано к печати.
Протокол №3 от 31.10.12

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.	
ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.....	5
1.1 Числовые последовательности.....	5
1.1.1 Последовательности. Основные понятия.....	5
1.1.2 Арифметические операции над последовательностями.....	6
1.2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.....	7
1.2.1 Понятие бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей.....	7
1.2.2 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.....	7
1.3 Сходящиеся последовательности и их свойства.....	10
1.3.1 Понятие сходящейся последовательности.....	10
1.3.2 Свойства сходящихся последовательностей.....	11
1.4 Предельный переход в неравенствах.....	14
1.5 Монотонные последовательности. Второй замечательный предел.....	16
1.6 Неопределенные выражения.....	18
Примеры к главе 1	19
 Глава 2. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ.....	 35
2.1 Функции. Основные понятия.....	35
2.1.1 Определение функции. Классификация функций.....	35
2.1.2 Чётные, нечётные функции и их свойства.....	37
2.1.3 Периодические функции и их свойства.....	38
2.1.4 Монотонные функции и их свойства.....	40
2.1.5 Ограниченные функции и их свойства.....	41
2.1.6 Обратные функции и их свойства.....	42
2.1.7 Функции, заданные в параметрической форме.....	43
2.1.8 Полярная система координат.....	44
2.1.9 Связь между полярными и декартовыми координатами.....	46
2.1.10 График функции, заданной в полярной системе координат.....	47
2.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	48
2.3 Предел функции.....	50
2.3.1 Определение предела функции по Коши.....	50
2.3.2 Определение предела функции по Гейне.....	53
2.3.3 Необходимое и достаточное условие существования предела функции.....	54
2.3.4 Свойства пределов функций.....	55
2.4 Классификация бесконечно малых и бесконечно больших функций.....	57
2.4.1 Сравнение бесконечно малых функций.....	57
2.4.2 Сравнение бесконечно больших функций.....	59
2.5 Замечательные пределы.....	60
2.5.1 Первый замечательный предел.....	60

2.5.2 Второй замечательный предел.....	62
Примеры к главе 2	65
Глава 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ	102
3.1 Определение непрерывной функции.....	102
3.2 Свойства функций, непрерывных в точке.....	103
3.3 Свойства функций, непрерывных в интервале.....	104
3.4 Точки разрыва функции и их классификация.....	105
3.5 Свойства функций, непрерывных на сегменте.....	106
3.6 Равномерная непрерывность функций.....	107
3.7 Некоторые специальные функции, которые используются в теории аналоговых и дискретных цепей.....	108
Примеры к главе 3	113
Контрольные вопросы.....	128
Проверочные тесты.....	129
Тренировочные упражнения.....	132
Задачи для самостоятельного решения	146
<i>Ответы к задачам для самостоятельного решения</i>	<i>153</i>
Приложения.....	158
Приложение А. Методы нахождения пределов последовательностей.....	158
Приложение Б. Основные элементарные функции.....	159
Приложение В. Некоторые элементарные функции.....	165
Приложение Г. Некоторые важные кривые, заданные в параметрической форме.....	173
Приложение Д. Некоторые важные кривые, заданные в полярной системе координат.....	184
Приложение Е. Методы нахождения пределов функций.....	195
Приложение Ж. Основные сведения о тригонометрических и гиперболических функциях.....	198
Приложение И. Построение графиков функций в декартовой системе координат при помощи элементарных преобразований.....	224
СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	225

Г л а в а 1

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1.1 Числовые последовательности

1.1.1 Последовательности. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Если задан закон, по которому каждому натуральному числу n соответствует определенное действительное число a_n , то множество действительных чисел a_n называется *числовой последовательностью*. Числа a_n называются *элементами* или *членами последовательности*.

Символически последовательности обозначаются так: $\{a_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Например, последовательность $\left\{ \frac{n+1}{n^3} \right\}$ определяет множество чисел

$$2; \frac{3}{8}; \frac{4}{27}; \frac{5}{64}; \frac{6}{125}; \frac{7}{216}; \dots; \frac{n+1}{n^3}; \dots,$$

а последовательность $\left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ – множество чисел

$$0; \frac{5}{2}; \frac{8}{3}; \frac{17}{4}; \frac{24}{5}; \dots; n + \frac{(-1)^n}{n}; \dots$$

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если каждый член последовательности, начиная со второго, больше предыдущего, то есть $a_{n+1} > a_n$ и *неубывающей*, если $a_{n+1} \geq a_n$ для любого натурального числа n .

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей*, если каждый член последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего, то есть $a_{n+1} < a_n$ и *невозрастающей*, если $a_{n+1} \leq a_n$ для любого натурального числа n .

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Возрастающие и убывающие последовательности при этом называются *строго монотонными*.

О п р е д е л е н и е 4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое действительное число M , что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $a_n \leq M$.

О п р е д е л е н и е 5. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое действительное число m , что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $m \leq a_n$.

О п р е д е л е н и е 6. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

она ограничена и сверху, и снизу, то есть если существуют такие действительные числа m и M , что для всех элементов последовательности справедливо неравенство

$$m \leq a_n \leq M. \quad (1.1)$$

Обозначим через $A = \max(|m|, |M|)$. Тогда для ограниченной последовательности справедливо неравенство

$$-A \leq a_n \leq A. \quad (1.2)$$

Неравенства (1.1) и (1.2) представляют собой условия ограниченности последовательности.

Определение ограниченной последовательности можно представить в другом виде.

О п р е д е л е н и е 7. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое положительное число A , что для всех элементов последовательности справедливо неравенство $|a_n| \leq A$.

О п р е д е л е н и е 8. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого сколь угодно большого положительного числа A существует хотя бы один элемент последовательности, который удовлетворяет условию $|a_n| > A$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательность, ограниченная только сверху или только снизу, также принадлежит к неограниченным последовательностям.

1.1.2 Арифметические операции над последовательностями

Над последовательностями можно выполнять арифметические операции. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две произвольные последовательности, то *суммой* этих последовательностей называется последовательность $\{a_n + b_n\}$, *разностью* – последовательность $\{a_n - b_n\}$, *произведением* – последовательность $\{a_n b_n\}$, а *частным* – последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, если $b_n \neq 0$, где a_n и b_n – элементы соответственно последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

1.2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

1.2.1 Понятие бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер N , зависящий от ε , что все элементы этой последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|a_n| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа A существует такой номер N , зависящий от A , что все элементы этой последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|a_n| > A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Под номером N имеется в виду натуральное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каждая бесконечно большая последовательность – неограничена, но не каждая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

1.2.2 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Рассмотрим некоторые свойства, присущие бесконечно малым и бесконечно большим последовательностям.

Теорема 1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей также бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем, что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Возьмем некоторое сколь угодно малое положительное число ε_1 . Тогда, согласно определению 1, существует такой номер N_1 , что для всех $n > N_1$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Возьмем некоторое сколь угодно малое положительное число ε_2 . Тогда существует такой номер N_2 , что для всех $n > N_2$ справедливо неравенство $|\beta_n| < \varepsilon_2$.

Возьмем теперь сколь угодно малое положительное число ε . К тому же, условимся, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$.

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{для всех } n > N.$$

Из этого следует, что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

С л е д с т в и е. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 2. Разность двух бесконечно малых последовательностей – также бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем, что последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ также бесконечно малая последовательность.

Очевидно, что когда $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то и $\{-\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Рассмотрим последовательность

$$\{\alpha_n - \beta_n\} = \{\alpha_n + (-\beta_n)\}.$$

На основании теоремы 1 можно утверждать, что последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Это означает, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , зависящий от ε , что все элементы последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|\alpha_n| < \varepsilon$. Запишем последовательность $\{\alpha_n\}$ в развернутом виде:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{N-2}, \alpha_{N-1}, \alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \dots$$

Все элементы последовательности, начиная с α_{N+1} , по модулю меньше чем ε .

Обозначим $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_N|\}$. Тогда можно утверждать, что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < A$, что и доказывает ограниченность последовательности $\{\alpha_n\}$.

Теорема 4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Следовательно, существует такое число $A > 0$, что для любого номера n выполняется условие $|x_n| < A$. Возьмем любое сколь угодно малое

положительное число ε и допустим, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$. Для выбранного числа ε_1 существует такой номер N , зависящий от ε_1 , что все элементы последовательности с номером $n > N$

удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Рассмотрим последовательность $\{x_n \alpha_n\}$.

Возьмем число $\varepsilon > 0$ и докажем, что $|x_n \alpha_n| < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| |\alpha_n| < A \varepsilon_1 = A \times \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon \quad \text{для } n > N.$$

Из этого следует, что последовательность $\{x_n \alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

С л е д с т в и е. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является также бесконечно малой последовательностью.

Теорема 5. 1) Если $\{\sigma_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то

последовательность $\left\{ \frac{1}{\sigma_n} \right\}$, начиная с некоторого номера n , является бесконечно малой последовательностью.

2) Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ отличаются

от нуля, то последовательность $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$ начиная с некоторого номера n , является бесконечно большой последовательностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) По условию $\{\sigma_n\}$ – бесконечно большая последовательность, тогда для любого сколь угодно большого положительного числа A существует такой номер N ,

что, начиная с $n > N$, выполняется неравенство $|\sigma_n| > A$. Возьмем за A число $A = \frac{1}{\varepsilon}$, где ε – любое сколь угодно малое положительное число. Начиная с некоторого номера N ,

все элементы последовательности $\{\sigma_n\}$ с номером $n > N$ удовлетворяют неравенству

$|\sigma_n| > A = \frac{1}{\varepsilon}$. Очевидно, что, поскольку все элементы этой последовательности, начиная с номера $n > N$, отличаются от нуля, можно говорить о последовательности

$\left\{ \frac{1}{\sigma_n} \right\}$ для любого $n > N$. Докажем, что эта последовательность является бесконечно

малой. Возьмем за ε положительное число $\varepsilon = \frac{1}{A}$. Уже известно, что $|\sigma_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$\left| \frac{1}{\sigma_n} \right| < \varepsilon$ для любого $n > N$, а это означает, что последовательность $\left\{ \frac{1}{\sigma_n} \right\}$ является бесконечно малой последовательностью.

Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

Задание для самостоятельной работы. Доказать второе утверждение теоремы 5.

1.3 Сходящиеся последовательности и их свойства

1.3.1 Понятие сходящейся последовательности

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся к числу a* , если последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой последовательностью.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся к числу a* , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер N , зависящий от ε , что все элементы последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|a_n - a| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся к числу a* , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер N , зависящий от ε , что все элементы последовательности с номером $n > N$ находятся в ε -окрестности числа a , то есть в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a , то число a называется *пределом последовательности*, когда $n \rightarrow \infty$, что символически обозначается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$
.

С л е д с т в и е. Определения 1...3 сходящейся последовательности являются эквивалентными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для сокращения записи иногда используют символы, называемые кванторами. Так, символ $\forall$ означает "для любого", "для каждого", а символ $\exists$ означает "существует".

1.3.2 Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, равный a , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$, что, начиная с некоторого номера N , все элементы последовательности $\{a_n\}$ с номером $n > N$ можно представить в виде

$$a_n = a + \alpha_n. \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный a , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (1.4)$$

Докажем, что $a_n = a + \alpha_n$, где α_n – элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Из определения 1 сходящейся последовательности следует, что $\{a_n - a\} = \{\alpha_n\}$, где α_n – элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Следовательно, $a_n - a = \alpha_n$, то есть $a_n = a + \alpha_n$, начиная с номера $n > N$.

Достаточность. Пусть справедливо равенство (1.3). Тогда $a_n - a = \alpha_n$. Следовательно, $\{a_n - a\} = \{\alpha_n\}$, согласно определению 1 сходящейся последовательности, приходим к выводу, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Теорема 2. Любая бесконечно малая последовательность сходится, а ее предел равен нулю.

Доказательство

Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Следовательно, для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер N , зависящий от ε , такой, что все элементы последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|\alpha_n| < \varepsilon$, из чего следует, что $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$. Тогда, согласно определению 2 сходящейся последовательности, можно утверждать, что $\{\alpha_n\}$ – сходящаяся последовательность и что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если последовательность $\{\sigma_n\}$ является бесконечно большой последовательностью, то символически ее предел обозначается как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$.

Следует иметь в виду, что бесконечно большая последовательность не является сходящейся и данная символическая запись говорит лишь о том, что последовательность $\{\sigma_n\}$ является бесконечно большой последовательностью, но это не означает, что она имеет конечный предел.

Если, начиная с некоторого номера N , элементы последовательности $\{\sigma_n\}$ являются положительными, то записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$, а если же элементы последовательности $\{\sigma_n\}$, начиная с некоторого номера N , являются отрицательными, то записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = -\infty$.

Теорема 3. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

Доказательство

Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Допустим, что

существует еще один предел, который равен b , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Тогда, согласно теореме 1, получим такие равенства:

$$a_n = a + \alpha_n \text{ для любого } n > N_1 \text{ и } a_n = b + \beta_n \text{ для любого } n > N_2,$$

где α_n и β_n – соответственно элементы бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Вычитая почленно эти равенства, получим

$$0 = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n),$$

откуда

$$a - b = \beta_n - \alpha_n.$$

Но, поскольку $\{\beta_n - \alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то и $\{a - b\}$ – бесконечно малая последовательность, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - b) = 0$. Поскольку $a - b$ является постоянной величиной, то для любого n имеем $a - b \equiv 0$, откуда $a \equiv b$.

Следовательно, сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 4. Сходящаяся последовательность является ограниченной.

Доказательство

Пусть $\{a_n\}$ – сходящаяся последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Согласно теореме 1 имеем

$$a_n = a + \alpha_n,$$

где α_n – элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$.

Это означает, что a_n является суммой двух чисел, одно из которых является постоянной, а другое – элемент бесконечно малой последовательности. Тогда можно утверждать, что и последовательность $\{a_n\}$ – ограничена.

Теорема 5. Сумма, разность, произведение и частное сходящихся последовательностей является также сходящейся последовательностью. При этом предел суммы, разности, произведения и частного соответственно равны сумме, разности, произведению и частному пределов (последнее утверждение является справедливым только при условии, что предел знаменателя отличается от нуля), то есть являются справедливыми такие равенства:

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \\ 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \\ 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \end{aligned}$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

Доказательство

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – сходящиеся последовательности и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.
Следовательно, справедливы равенства:

$$a_n = a + \alpha_n, \text{ при } n > N_1 \quad (1.5)$$

и

$$a_n = b + \beta_n, \text{ при } n > N_2, \quad (1.6)$$

где α_n и β_n – соответственно элементы бесконечно малых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

1. Сложим почленно равенства (1.5) и (1.6):

$$a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n), \text{ где } \alpha_n + \beta_n \text{ – элемент бесконечно малой последовательности, если } n > N = \max\{N_1; N_2\}.$$

По теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Из равенства (1.5) почленно вычтем равенство (1.6):

$$a_n - b_n = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n), \text{ где } \alpha_n - \beta_n \text{ – элемент бесконечно малой последовательности, если } n > N = \max\{N_1; N_2\}.$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= a - b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

3. Умножим почленно равенства (1.5) и (1.6):

$$a_n b_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n),$$

где $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ – элемент бесконечно малой последовательности

$$\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n\} \text{ и } n > N = \max\{N_1; N_2\}.$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

4. Будем считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$. Тогда

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 + b\beta_n}, \text{ где}$$

$$n > N = \max\{N_1; N_2\}.$$

Очевидно, что $\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 + b\beta_n}$ – элемент бесконечно малой последовательности $\left\{ \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 + b\beta_n} \right\}$, поскольку последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ является бесконечно малой, а последовательность $\left\{ \frac{1}{b^2 + b\beta_n} \right\}$ является ограниченной. Согласно теореме 1, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ где } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0. \quad (1.10)$$

1.4 Предельный переход в неравенствах

Теорема 1. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a и все ее элементы a_n удовлетворяют неравенству $m < a_n$, то ее предел a удовлетворяет неравенству $m \leq a$, то есть $m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Доказательство

Допустим, что $m > a$, тогда $m - a > 0$. Так как $\{a_n\}$ – сходящаяся последовательность, то для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , зависящий от ε , что $|a_n - a| < \varepsilon$ для любого $n > N$. Возьмем за ε число $\varepsilon = m - a > 0$. Следовательно, $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, $a - m < a_n - a < m - a$. Из неравенства $a_n - a < m - a$ следует, что $a_n < m$ для $n > N$, а это противоречит условию, то есть неравенство $a < m$ является невозможным. Следовательно, $m < a$, то есть $m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Теорема 2. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a и все ее элементы a_n удовлетворяют неравенству $a_n < M$, то ее предел a удовлетворяет неравенству $a \leq M$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теоремы 2.

Теорема 3. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – сходящиеся последовательности и,

начиная с некоторого номера n , $a_n < b_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теоремы 3.

Теорема 4 (теорема Гурьева). Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ сходятся, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$, то последовательность $\{b_n\}$, элементы которой удовлетворяют неравенству $a_n \leq b_n \leq c_n$, тоже сходится, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = k$.

Доказательство

По условию для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существуют соответственно такие номера N_1 и N_2 , зависящие от ε , что выполняются неравенства

$$|a_n - k| < \varepsilon \quad \text{для любого } n > N_1$$

и

$$|c_n - k| < \varepsilon \quad \text{для любого } n > N_2.$$

Отсюда

$$-\varepsilon < a_n - k < \varepsilon \quad \text{для любого } n > N_1, \quad (1.11)$$

$$-\varepsilon < c_n - k < \varepsilon \quad \text{для любого } n > N_2. \quad (1.12)$$

Рассмотрим неравенство $a_n \leq b_n \leq c_n$. Это неравенство является эквивалентным неравенству $a_n - k \leq b_n - k \leq c_n - k$. С учетом неравенств (1.11) и (1.12), имеем

$$-\varepsilon < a_n - k \leq b_n - k \leq c_n - k < \varepsilon \quad (1.13)$$

для любого $n > N = \max\{N_1, N_2\}$.

Из неравенства (1.13) следует, что $-\varepsilon < b_n - k < \varepsilon$ для любого $n > N$ или $|b_n - k| < \varepsilon$ для любого $n > N$. Это означает, что $\{b_n\}$ – сходящаяся последовательность, к тому же $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = k$.

1.5 Монотонные последовательности. Второй замечательный предел

Теорема (достаточное условие сходимости последовательности). Если последовательность ограничена и монотонна, то она является сходящейся.

Примем эту теорему без доказательства.

В дальнейшем нам придется пользоваться пределом последовательности

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}.$$

Покажем, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. С этой целью докажем, что

последовательность $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ монотонна и ограничена.

Рассмотрим выражение $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ и преобразуем его с помощью формулы бинома Ньютона.

$$\begin{aligned} a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \left(\frac{1}{n} \right)^4 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{n!} \left(\frac{1}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

После упрощения получим

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right). \quad (1.14)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Все слагаемые в правых частях равенств (1.14) и (1.15) положительны. Все слагаемые правой части равенства (1.14), начиная с третьего, меньше соответствующих слагаемых в равенстве (1.15). Следовательно, $a_{n+1} \geq a_n$.

Это говорит о том, что последовательность $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ является

возрастающей. Так как $a_1 = 2$, то последовательность $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ ограничена снизу.

Теперь докажем, что эта последовательность ограничена и сверху:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Принимая во внимание, что выражение $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ является суммой n членов геометрической прогрессии, знаменатель q которой равен $\frac{1}{2}$, приходим к выводу, что по формуле суммы n членов геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

Тогда $a_n < 1 + 2 = 3$. Следовательно, $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ для любого n , то есть

последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Из этого следует, что эта последовательность, как монотонная и ограниченная, имеет предел в соответствии с достаточным условием сходимости последовательности. Этим пределом является иррациональное число, которое обозначается символом e (в честь выдающегося математика Леонарда Ейлера): $e = 2,71828182845904523\dots$

Следовательно, имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (1.16)$$

которое называется вторым замечательным пределом.

Число e используют в инженерных расчетах. Логарифмы, основанием которых является число e , называют *натуральными*. Они обозначаются символом $\ln b = \log_e b$.

1.6 Неопределенные выражения

Условимся бесконечно малые последовательности (б. м. п.) и бесконечно большие последовательности (б. б. п.) символически обозначать соответственно 0 и ∞ , а постоянную величину будем

обозначать c . Тогда из рассмотренных ранее свойств бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей следует, что справедливы равенства

1. $0 + 0 = 0$;
2. $0 - 0 = 0$;
3. $c \cdot 0 = 0$;
4. $0 \cdot 0 = 0$;
5. $\frac{0}{c} = 0$;
6. $\frac{c}{0} = \infty$;
7. $\frac{\infty}{\infty} = ?$;
8. $c \cdot \infty = ?$;
9. $\frac{\infty}{c} = \infty$;
10. $\frac{c}{\infty} = 0$;
11. $\infty + \infty = ?$ (если обе б. б. п. одного знака).

ЗАМЕЧАНИЕ. Все эти выражения следует понимать в предельном значении.

Некоторые выражения, содержащие бесконечно малые последовательности, бесконечно большие последовательности или бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, не вошли в

этот перечень. Речь идет о выражениях: $\left[\frac{0}{0} \right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$; $[0 \times \infty]$; $[\infty \cdot 0]$; $[0^0]$; $[1^\infty]$ и $[\infty - \infty]$ (если обе б. б. п. одного знака). Такие выражения называются *неопределенностями*. Ответить, чему именно равна та или иная неопределенность сложно. В каждом конкретном случае приходится выяснять, чему именно равна данная неопределенность. Этот процесс называется *раскрытием неопределенности*.

1.7 Примеры к главе 1

Свойства последовательностей

Пример 1.1. Заданы первые члены последовательности $\{x_n\}$: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 12$, Найти формулу общего члена последовательности.

Решение

Члены последовательности создаются по определенному закону, а именно: каждый последующий член последовательности является больше предыдущего на 5, то есть имеем арифметическую прогрессию, где первый член прогрессии $a_1 = 2$, а разность прогрессии $d = 5$. Найдем n -й член прогрессии a_n . Как известно,

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

то есть

$$a_n = 2 + 5(n - 1) = 5n - 3.$$

Получим последовательность 2, 7, 12, 17, 22, ..., $5n - 3$, ..., то есть $\{5n - 3\}$.

О т в е т: $\{5n - 3\}$.

Пример 1.2. Доказать, что последовательность $\left\{ \frac{5 + (-1)^n n}{\sqrt{n^2 + 4}} \right\}$ является ограниченной.

Решение

Будем исходить из определения ограниченной последовательности. Рассмотрим общий член заданной последовательности

$$a_n = \frac{5 + (-1)^n n}{\sqrt{n^2 + 4}}$$

и оценим его модуль

$$|a_n| = \frac{|5 + (-1)^n n|}{\sqrt{n^2 + 4}} \leq \frac{5 + n}{n} = 1 + \frac{5}{n} \leq 6.$$

Следовательно, можно утверждать, что $|a_n| \leq 6$ для любого n , то есть заданная последовательность является ограниченной.

Пример 1.3. Доказать, что последовательность $\{(-1)^{3n} n^3\}$ является неограниченной.

Р е ш е н и е

Будем исходить из определения неограниченной последовательности. Запишем

последовательность в виде: $-1, 2^3, -3^3, 4^3, -5^3, \dots, (-1)^{3n} n^3, \dots$.

Пусть M – любое сколь угодно большое положительное число. Возможно ли

неравенство $\left| (-1)^{3n} n^3 \right| > M$?

Очевидно, что $\left| (-1)^{3n} n^3 \right| = \left| n^3 \right| = n^3$. Тогда, если $n^3 > M$, то, поскольку n – число

натуральное, получим решение $n > \sqrt[3]{M}$. Следовательно, заданная последовательность – неограничена.

Пример 1.4. Проверить, является ли неограниченной последовательность

$$\left\{ n + (-1)^n n \right\}.$$

Р е ш е н и е

Запишем последовательность в виде

$$0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, \dots, n + (-1)^n n, \dots$$

Пусть M – любое сколь угодно большое положительное число. Рассмотрим неравенство

$$\left| n + (-1)^n n \right| > M.$$

$$\left| n + (-1)^n n \right| = \begin{cases} 0, \\ 2n, \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{N}, \quad \text{если } n=2k,$$

В случае, когда $n = 2k$ имеем

$$\left| n + (-1)^n n \right| = \left| 4k \right| = 4k, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}.$$

Если $k > \frac{1}{4}M$, то $|4k| > M$. Отсюда следует, что последовательность неограничена.
 если $n=2k+1$; **О т в е т:** последовательность неограничена.

Пример 1.5. Выяснить, являются ли ограниченными последовательности

$$1) \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}; \quad 2) \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} n^2 \right\}.$$

Р е ш е н и е

1) Последовательность $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ является ограниченной, потому что

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2) Последовательность $\left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} n^2 \right\}$ задает множество чисел:

$$0, 4, 0, 16, 0, 36, 0, 64, \dots, \frac{1+(-1)^n}{2}n^2, \dots$$

Выберем сколь угодно большое положительное число A и выясним, возможно ли неравенство

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{2}n^2 \right| > A.$$

Это неравенство является тождественным неравенству $\frac{1+(-1)^n}{2}n^2 > A$. Для нечетных n данное неравенство решений не имеет. Если же n – четное число, то имеем неравенство $n^2 > A$, решением которого в области натуральных чисел являются значения $n > \sqrt{A}$, где $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Этим доказано, что последовательность является неограниченной. Приняв во внимание, что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству

$$\frac{1+(-1)^n}{2}n^2 \geq 0,$$

можно утверждать, что эта последовательность ограничена снизу и неограничена сверху.

О т в е т: 1) последовательность ограничена; 2) последовательность неограничена.

Пример 1.6. Доказать, что последовательность $\left\{ n^2 + (-1)^n n^2 \right\}$ не является монотонной.

Р е ш е н и е

Запишем заданную последовательность в развернутом виде.

$$0, 8, 0, 32, 0, \dots$$

Очевидно, что ни одно из условий монотонности последовательности не выполняется. Следовательно, заданная последовательность не монотонна.

Пример 1.7. Доказать, что последовательность $\left\{ \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \right\}$ является строго убывающей.

Р е ш е н и е

Исходя из определения строго убывающей последовательности, следует

доказать неравенство: $a_{n+1} - a_n < 0$.

В данном случае

$$a_n = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!}; \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+6}}{(n+6)!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5^{n+6}}{(n+6)!} - \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} = \frac{5^{n+5} \times 5}{1 \times 2 \times 3 \dots (n+5)(n+6)} - \frac{5^{n+5}}{1 \times 2 \times 3 \dots (n+5)} = \\ &= \frac{5^{n+5}}{1 \times 2 \times 3 \dots (n+5)} \left(\frac{5}{n+6} - 1 \right) = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \times \frac{5 - n - 6}{n+6} = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \times \frac{(-n-1)}{n+6} = - \frac{(1+n) \times 5^{n+5}}{(n+6)!} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, заданная последовательность действительно является строго убывающей.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Пример 1.8. Воспользовавшись определением бесконечно малой последовательности, доказать, что последовательность $\left\{ \frac{7}{2-3n} \right\}$ является бесконечно малой.

Р е ш е н и е

Исходя из определения бесконечно малой последовательности $\{ \alpha_n \}$, следует доказать, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что все элементы последовательности с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|\alpha_n| < \varepsilon$. Выберем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{7}{2-3n} \right| < \varepsilon.$$

Для того, чтобы решить неравенство, избавимся от модуля. Поскольку n – число натуральное, то для любого n имеем

$$\frac{7}{2-3n} < 0, \quad \text{откуда} \quad \left| \frac{7}{2-3n} \right| = - \frac{7}{2-3n} = \frac{7}{3n-2}.$$

Тогда

$$\frac{7}{3n-2} < \varepsilon, \quad \frac{3n-2}{7} > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$3n - 2 > \frac{7}{\varepsilon}, \quad 3n > 2 + \frac{7}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad n > \frac{2}{3} + \frac{7}{3\varepsilon}.$$

Неравенство решено.

Рассмотрим число $N = \left[\frac{2}{3} + \frac{7}{3\varepsilon} \right]$, где символом $\left[\frac{2}{3} + \frac{7}{3\varepsilon} \right]$ обозначена целая часть числа $\frac{2}{3} + \frac{7}{3\varepsilon}$. Следовательно, заданная последовательность является бесконечно малой, поскольку для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого

$$n > N \text{ выполняется неравенство } \left| \frac{7}{2 - 3n} \right| < \varepsilon.$$

Математической символикой, то есть с помощью кванторов, последнее утверждение можно записать таким образом:

$$\varepsilon > 0 \quad N = N(\varepsilon) > 0: n > N \Rightarrow \left| \frac{7}{2 - 3n} \right| < \varepsilon. \quad (*)$$

Рассмотрим частные случаи ε .

Допустим, что $\varepsilon = 0,1$, тогда

$$N = \left[\frac{7}{3 \times 0,1} + \frac{2}{3} \right] = 24.$$

Если же $\varepsilon = 0,01$, то

$$N = \left[\frac{7}{3 \times 0,01} + \frac{2}{3} \right] = 234.$$

Следовательно, для каждого ε существует свой номер N , начиная с которого, выполняется неравенство (*). Полученные результаты можно трактовать таким образом: если $\varepsilon = 0,1$, то все элементы последовательности, начиная с 25-го, попадают в интервал $(-0,1; 0,1)$, а если $\varepsilon = 0,01$, то все элементы последовательности, начиная с 235-го, находятся в интервале $(-0,01; 0,01)$.

Пример 1.9. Пользуясь определением бесконечно малой

последовательности, доказать, что последовательность $\left\{ \frac{4}{n+1} \right\}$ является бесконечно малой.

Решение

Выберем любое сколь угодно малое положительное число ε .
Рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{4}{n+1} \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, что $\frac{4}{n+1} \geq 0$. Тогда $\frac{4}{n+1} < \varepsilon$. Решим это неравенство относительно n . Имеем:

$$4 < \varepsilon (n+1); \quad 4 < \varepsilon n + \varepsilon; \quad \varepsilon n > 4 - \varepsilon; \quad n > \frac{4}{\varepsilon} - 1.$$

Следовательно, $N = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$.

В частности, если $\varepsilon = 0,1$, то $N = 39$, если $\varepsilon = 0,01$, то $N = 399$. Таким образом показано, что для любого ε можно найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, что все элементы a_n с номером $n > N$ удовлетворяют условию $|a_n| < \varepsilon$.

Следовательно, $\left\{ \frac{4}{n+1} \right\}$ – бесконечно малая последовательность.

Пример 1.10. Пользуясь определением бесконечно большой последовательности, доказать, что последовательность $\left\{ (-1)^n n^2 \right\}$ является бесконечно большой.

Решение

Используем определение бесконечно большой последовательности. Нужно доказать, что для любого сколь угодно большого положительного числа M существует такой номер N , что все элементы последовательности

с номером $n > N$ удовлетворяют условию $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$, то есть для любого $M > 0$ существует такой номер N , что для любого $n > N$

$$\left| (-1)^n n^2 \right| > M.$$

Выберем число $M > 0$ и рассмотрим неравенство $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$.

Тогда, поскольку n – число натуральное, получим решение $n^2 > M$, откуда $n > \sqrt{M}$. Пусть $N = \left[\sqrt{M} \right]$, откуда $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$, если $n > N$.

Таким образом пришли к выводу, что заданная последовательность является бесконечно большой.

Следует заметить, что для каждого M существует свой номер N .

Допустим, что $M = 100$, тогда $N = 10$, а если $M = 10000$, то $N = 100$. Полученный результат можно трактовать таким образом: если $M = 100$, то все элементы последовательности, начиная с 11-го, принадлежат одному из промежутков $(-, -100)$ и $(100, +)$, а когда $M = 10000$, то все элементы последовательности, начиная с 101-го, принадлежат одному из промежутков $(-, -10000)$ и $(10000, +)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует обратить внимание на то, что последовательность $\{(-1)^n n^2\}$ как бесконечно большая последовательность одновременно является и неограниченной.

Пример 1.11. Проверить, является ли бесконечно большой последовательность $\left\{ n + (-1)^n n \right\}$.

Р е ш е н и е

Как и в предыдущем примере будем исходить из определения бесконечно большой последовательности. Запишем последовательность таким образом:

$$\left\{ n + (-1)^n n \right\} = \begin{cases} 2n, & n=2k; \\ 0, & ; \end{cases} \quad \text{где } k \text{ натуральное число.}$$

Следовательно, для любого $M > 0$ должно существовать такое натуральное число $N = N(M)$, что все элементы последовательности с четными номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству

$$\left| n + (-1)^n n \right| > M.$$

На самом деле, для $n = 2k$ имеем $\left| n + (-1)^n n \right| = \left| 2k + (-1)^{2k} 2k \right| = \left| 4k \right| = \left| 2n \right| = 2n,$

откуда $2n > M, \quad n > \frac{1}{2}M$. Но элементы последовательности с нечетными номерами этому условию не удовлетворяют:

$$\left| 2k + 1 + (-1)^{2k+1} (2k + 1) \right| = \left| 2k + 1 - (2k + 1) \right| = 0 < M,$$

то есть заданная последовательность не является бесконечно большой, но она является неограниченной сверху последовательностью.

О т в е т: последовательность не является бесконечно большой.

Пример 1.12. Выяснить, являются ли 1) неограниченными, 2) бесконечно большими

заданные последовательности: 1) $\{n^3\}$; 2) $\{(-1)^n n^2\}$.

Р е ш е н и е

1) Рассмотрим последовательность $\{n^3\}$. Эта последовательность определяет множество чисел 1, 8, 27, 64, 125, ..., n^3 , ... Выберем сколь угодно большое

положительное число M и выясним, возможно ли неравенство $|n^3| > M$. Это неравенство можно записать в виде $n^3 > M$. Поскольку n – натуральное число, то $n > \sqrt[3]{M}$. Возьмем за $N = \left[\sqrt[3]{M} \right]$. Следовательно, если $n > N$, где $N = \left[\sqrt[3]{M} \right]$, то $n^3 > M$ и $|n^3| > M$. Тем самым доказано, что последовательность $\{n^3\}$ является бесконечно большой и неограниченной последовательностью. Принимая во внимание, что при любом номере n справедливо неравенство $1 \leq n^3$, можно утверждать, что эта последовательность является ограниченной снизу.

2) Последовательность $\left\{ (-1)^n n^2 \right\}$ определяет множество чисел $-1, 4, -9, 16, -25, \dots, (-1)^n n^2, \dots$. Выберем сколь угодно большое положительное число M . Выясним, возможно ли неравенство $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$. Это неравенство является эквивалентным неравенству $0 < M < n^2$ и в области натуральных чисел выполняется, когда $n > \sqrt{M}$. Следовательно, все элементы, номера которых $n > N$, где $N = \left[\sqrt{M} \right]$, удовлетворяют неравенству $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$, а это означает, что последовательность $\left\{ (-1)^n n^2 \right\}$ является бесконечно большой и при этом неограниченной.

О т в е т: 1) последовательность является неограниченной и бесконечно большой; 2) последовательность является неограниченной и бесконечно большой.

Пределы последовательностей

Пример 1.13. Пользуясь определением предела последовательности, доказать,

что число $a = \frac{3}{5}$ является пределом последовательности $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{3n-2}{4+5n} \right\}$.

Р е ш е н и е

Будем опираться на определение 1 сходящейся последовательности и попробуем доказать, что последовательность $\left\{ a_n - a \right\}$ является бесконечно малой. Если так, то

это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Выберем любое сколь угодно малое положительное число ε и оценим величину $|a_n - a|$.

$$\left| \frac{3n-2}{4+5n} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{5(3n-2) - 3(4+5n)}{5(4+5n)} \right| = \left| \frac{-22}{5(4+5n)} \right| = \frac{22}{5(4+5n)}.$$

Далее решим неравенство

$$\frac{22}{5(4+5n)} < \varepsilon.$$

После определенных преобразований получим решение:

$$4+5n > \frac{22}{5\varepsilon}, \quad 5n > \frac{22}{5\varepsilon} - 4, \quad n > \frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5}.$$

Пусть $N = \left\lceil \frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5} \right\rceil$. Следовательно, для выбранного числа найдено такой номер N ,

что когда $n > N$, то $|a_n - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\left\{ \frac{3n-2}{4+5n} - \frac{3}{5} \right\}$

является бесконечно малой, а последовательность $\left\{ \frac{3n-2}{4+5n} \right\}$ является сходящейся и

сходится к числу $a = \frac{3}{5}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{4+5n} = \frac{3}{5}$.

Проанализируем полученный результат, пользуясь определением 3 сходящейся последовательности.

Если $\varepsilon = 0,1$, то $N = \left\lceil \frac{22}{2,5} - \frac{4}{5} \right\rceil = 8$, а если $\varepsilon = 0,01$, то $N = \left\lceil \frac{22}{0,25} - \frac{4}{5} \right\rceil = 87$.

Следовательно, когда $\varepsilon = 0,1$, то все элементы последовательности, начиная с 9-го, входят в интервал $(0,5; 0,7)$, а когда $\varepsilon = 0,01$, то все элементы последовательности, начиная с 88-го, входят в интервал $(0,59; 0,61)$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{4+5n} = \frac{3}{5}$ и

заполнить таблицу для последовательности $\left\{ \frac{3n-2}{4+5n} \right\}$.

		(	0,	6x1	7)
N					
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$					

Пример 1.14. Пользуясь определением сходящейся последовательности,

доказать, что последовательность $\left\{ \frac{3n}{8n+4} \right\}$ сходится к числу $a = \frac{3}{8}$.

Решение

Рассмотрим последовательность $\left\{ \frac{3n}{8n+4} - \frac{3}{8} \right\}$ и убедимся в том, что она является бесконечно малой. Выберем любое сколь угодно малое положительное число

ε и рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{3n}{8n+4} - \frac{3}{8} \right| < \varepsilon.$$

Выполним упрощение:

$$\left| \frac{24n - 24n - 12}{8(8n+4)} \right| < \varepsilon, \quad \frac{3}{2(8n+4)} < \varepsilon.$$

Выясним, для какого n выполняется неравенство $\frac{3}{2(8n+4)} < \varepsilon$. Получим $\frac{3}{2\varepsilon} < 8n+4$

, откуда $n > \frac{3}{16\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Очевидно, что для выбранного числа $\varepsilon > 0$ существует такой

номер $N = \left[\frac{3}{16\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$, при котором все элементы последовательности с номером

$n > N$ удовлетворяют неравенству $\left| \frac{3n}{8n+4} - \frac{3}{8} \right| < \varepsilon$.

Например, если $\varepsilon = 0,1$, то $N = [1,375] = 1$, а если $\varepsilon = 0,01$, то

$N = [18,25] = 18$. По определению 2, заданная последовательность сходится. Можно прийти к тому же выводу другим способом. Из последнего неравенства следует, что

последовательность $\left\{ \frac{3n}{8n+4} - \frac{3}{8} \right\}$ является бесконечно малой. По определению 1

последовательность $\left\{ \frac{3n}{8n+4} \right\}$ – является сходящейся, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{8n+4} = \frac{3}{8}$.

Пример 1.15. Найти предел последовательности

$$\left\{ \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} \right\}.$$

Решение

По условию следует найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7}.$$

Для удобства обозначим предел заданной последовательности через A .

При нахождении предела последовательности подставим предельное значение n , то

есть, вместо n в выражение $\frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7}$. Опираясь на свойства бесконечно больших последовательностей, приходим к выводу, что, когда n стремится к бесконечности,

числитель и знаменатель также стремится к бесконечности. А выражение $\frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7}$,
 когда n , представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Символически это обозначают таким образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

$A =$

Для каждого вида неопределенности существуют специальные приемы ее раскрытия. Например, неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ можно раскрыть таким образом: числитель и знаменатель одновременно поделить на n в наибольшей степени. В данном случае их следует поделить на n^2 .

Следовательно, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 + 3n - 5}{n^2}}{\frac{5n^2 + 9n - 7}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{9n}{n^2} - \frac{7}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{9}{n} - \frac{7}{n^2}}.$$

$A =$

Переходим к анализу полученного результата. Согласно теореме 5 (п. 1.2.2),

приходим к выводу, что последовательности $\left\{ \frac{3}{n} \right\}$, $\left\{ \frac{5}{n^2} \right\}$, $\left\{ \frac{9}{n} \right\}$ и $\left\{ \frac{7}{n^2} \right\}$ являются бесконечно малыми как обратные к бесконечно большим последовательностям. Следовательно, согласно теореме 2 (п. 1.3.2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} = 0.$$

Далее, опираясь на теорему 5 (п. 1.3.2), получим такой результат:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 + \frac{3n}{n^2} - \frac{5}{n^2} \right)}{\left(5 + \frac{9n}{n^2} - \frac{7}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}} = \frac{4}{5}.$$

О т в е т: $\frac{4}{5}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Информацию о методах раскрытия неопределенностей можно получить в Приложении А.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условимся в дальнейшем арифметические операции над пределами последовательностей выполнять устно.

Пример 1.16. Найти предел последовательности

$$\left\{ \frac{4n^5 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} \right\}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим предел заданной последовательности через A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7}.$$

Подставив предельное значение n в заданное выражение, приходим к выводу,

что имеем дело с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Поделим числитель и знаменатель на n^5 . Получим

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n^4} - \frac{5}{n^5}}{\frac{5}{n^3} + \frac{9}{n^4} - \frac{7}{n^5}}.$$

Несложно заметить, что когда n , то предел числителя равен 4, а предел знаменателя равен 0. Следовательно, получена последовательность, обратная к бесконечно малой. Согласно теореме 5 (п. 1.2.2), можно утверждать, что получена бесконечно большая последовательность, то есть $A =$.

О т в е т: .

Пример 1.17. Найти предел последовательности

$$\left\{ \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7} \right\}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим предел заданной последовательности через A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7}.$$

Подставив предельное значение n , приходим к выводу, что

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Как и в предыдущих примерах, числитель и знаменатель поделим одновременно на n в наибольшей степени, то есть на n^7 :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n^5} + \frac{3}{n^6} - \frac{5}{n^7}}{5 + \frac{9}{n^6} - \frac{7}{n^7}}.$$

Когда n , предел знаменателя равен 5, а предел числителя – 0. В соответствии со свойствами бесконечно малых последовательностей, получим ответ: $A = 0$.

О т в е т: 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть общий член последовательности является отношением двух

многочленов соответственно степеней k и r , то есть $a_n = \frac{P_k(n)}{Q_r(n)}$. Тогда: 1) если старшие степени многочленов равны между собой, то есть $k = r$, то предел такой последовательности равен отношению коэффициентов при старших степенях (см. Пример 1.15); 2) если старшая степень числителя больше, чем у знаменателя, то есть $k > r$, то предел такой последовательности равен бесконечности (см. Пример 1.16); 3) если старшая степень числителя меньше, чем у знаменателя, то предел такой последовательности равен 0 (см. Пример 1.17).

Пример 1.18. Найти предел последовательности

$$\left\{ \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4} \right) \right\}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим предел заданной последовательности через A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4} \right).$$

Подставив предельное значение n в заданное выражение, приходим к выводу, что имеем дело с неопределенностью вида $[\infty - \infty]$. Следовательно,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4} \right) = [\infty - \infty].$$

Такую неопределенность можно раскрыть, умножив и разделив одновременно данное

выражение на выражение $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}$, которое является сопряженным

выражению $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4}$.

Тогда

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4} \right) \left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4} \right)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\left(\sqrt{n+3} \right)^2 - \left(\sqrt{n+4} \right)^2 \right)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (n+3 - n-4)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]. \end{aligned}$$

От неопределенности вида $[\infty / \infty]$ пришли к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Раскроем эту неопределенность, для чего поделим числитель и знаменатель на n в наибольшей

степени, то есть на $n^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{n}$:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+3}{n}} + \sqrt{\frac{n+4}{n}}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Пример 1.19. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n-6} \right)^{7n-8}.$$

Решение

Обозначим заданный предел последовательности через A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n-6} \right)^{7n-8}.$$

Подставим предельное значение n в заданное выражение. Тогда

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n-6} \right)^{7n-8} = [1^{\infty}],$$

то есть получили неопределенность вида $[1]$. Следует иметь в виду, что часто такую неопределенность можно раскрыть, опираясь на так называемый второй

замечательный предел, то есть на формулу (1.16): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$. Выполним такие преобразования, которые позволяли бы пользоваться этой формулой. К выражению в скобках прибавим и вычтем единицу. Имеем

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n-4}{3n-6} - 1 \right)^{7n-8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n-6} \right)^{7n-8}.$$

Вследствие проведенных преобразований, первое слагаемое равно единице, как и в формуле (1.16). Теперь обратим внимание на то, что в формуле (1.16) второе

слагаемое $\frac{1}{n}$ и показатель степени n являются взаимно обратными, к тому же, второе слагаемое стремится к нулю, а показатель степени стремится к бесконечности. Сделаем такое тождественное преобразование: умножим показатель степени на выражение

$\frac{3n-6}{2}$, являющееся обратным второму слагаемому, а потом поделим на это же выражение.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n-6} \right)^{\frac{3n-6}{2} \times \frac{2(7n-8)}{3n-6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{3n-6} \right)^{\frac{3n-6}{2}} \right)^{\frac{14n-16}{3n-6}}.$$

Обозначим $3n - 6 = 2t$. Тогда $n = \frac{2t+6}{3}$; $\frac{2}{3n-6} = \frac{1}{t}$; $\frac{3n-6}{2} = t$. Когда $n \rightarrow \infty$, то и $t \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\frac{14n-16}{3n-6} = \frac{2(7n-8)}{3n-6} = \frac{1}{t} \left(7 \times \frac{2t+6}{3} - 8 \right) = \frac{14t-18}{3t}.$$

Теперь имеем

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right)^{\frac{14t-18}{3t}} = e^{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{14t-18}{3t}} = e^{\frac{14}{3}}.$$

О т в е т: $e^{\frac{14}{3}}$.

Пример 1.20. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел последовательности через A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}} = [1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1.$$

О т в е т: 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Систематизировать методы раскрытия неопределенностей при нахождении пределов последовательностей поможет Приложение А.

Глава 2

ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

2.1 Функции. Основные понятия

2.1.1 Определение функции. Классификация функций

О п р е д е л е н и е 1. Множество X всех значений, которые может принимать переменная x , называется *областью изменения* этой переменной.

О п р е д е л е н и е 2. Если задан закон, по которому каждому значению независимой переменной $x \in X$ соответствует определенное значение переменной $y \in Y$, то переменная y называется *функцией переменной x* . При этом используется обозначение $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения функции $f(x)$* , множество Y – *областью значений функции $f(x)$* , а символ f – характеристикой функции.

О п р е д е л е н и е 3. Если каждому значению переменной x из области определения X соответствует одно значение переменной y из области значений Y , то функция $y = f(x)$ называется *однозначной*, в противном случае – *многозначной*.

В дальнейшем будем рассматривать только однозначные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Область определения функции, которая содержит все значения независимой переменной, при которых существует функция, иногда называется *естественной областью определения функции* или *областью существования функции*. В ряде случаев область определения функции сужают и такая область определения уже не может называться естественной областью определения функции.

Например, естественной областью определения функции $y = (\pi h x^2) / 3$ является множество значений $x \in (-\infty; +\infty)$. Но, если считать, что Y – это значение объема конуса, который изменяется в зависимости от радиуса x , то тогда областью определения функции следует считать множество значений $x \in [0; +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если областью определения функции является множество целых чисел, то функция называется *функцией целочисленного аргумента*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функция целочисленного аргумента, областью определения которой является множество натуральных чисел, является последовательностью.

Способы задания функций

1. *Табличный* способ задания функции – это такой способ, при котором с помощью таблицы значению аргумента ставят в соответствие значение функции. Например, таблицы квадратов, таблицы логарифмов и др.

2. *Графический* способ задания функции – это такой способ, при котором функции изображаются с помощью совокупности точек на плоскости xOy , абсциссы которых соответствуют значениям независимой переменной, а ординаты – соответствующим значениям функции.

3. *Аналитический* способ задания функции – это такой способ, при котором зависимость между x и y задается с помощью формулы.

Например, аналитически заданными являются такие функции:

$$y = 4x^2 + 5x - 6; \quad y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases} \quad x + e^y = 3.$$

Функция вида $y = f(x)$, называется *явно заданной функцией*, а функция $y = f(x)$, заданная в виде $F(x, y) = 0$, называется *неявно заданной функцией*.

О п р е д е л е н и е 1. Основными элементарными функциями называются такие аналитически заданные функции:

$$\begin{array}{lll} y = x^a, a \in R; & y = a^x, a > 0, a \neq 1; & y = \log_a x, a > 0, a \neq 1; \\ y = \sin x; & y = \cos x; & y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{ctg} x; \\ y = \arcsin x; & y = \arccos x; & y = \operatorname{arctg} x; \quad y = \operatorname{arcctg} x. \end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частным случаем функции $y = a^x$ является функция $y = e^x$, которая называется *экспоненциальной функцией (экспонентой)*. Для такой функции используется обозначение $y = \exp x$.

О п р е д е л е н и е 2. Элементарными функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических операций или конечного числа операций нахождения функции от функции.

Например, функция $y = \sin^2 x + x^2 \cos 2x$ является элементарной функцией, а функция

$$y = \begin{cases} 3, & \text{если } x > 0; \\ -3, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

не является элементарной функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Дополнительную информацию об основных элементарных функциях можно получить в Приложении Б.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Дополнительную информацию о некоторых элементарных функциях можно получить в Приложении В.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $y = f(x)$ называется *алгебраической функцией*, если ее значение можно получить, совершая над независимой переменной конечное количество алгебраических действий, таких как сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с рациональным показателем. Функция, которая не является алгебраической, называется *трансцендентной*.

О п р е д е л е н и е 4. Алгебраическая функция называется *рациональной*, если среди действий, которые выполняются над независимой переменной, отсутствует операция нахождения корня. Алгебраическая функция называется *иррациональной*, если она не является рациональной функцией.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной*, если она может быть образована с помощью функции $u = \varphi(x)$ с областью определения $x \in X$ и областью значений $u \in U$ и функции $y = f(u)$ с областью определения $u \in U$ и областью значений $y \in Y$. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется *внутренней*, а функция $y = f(u)$ – *внешней*.

2.1.2 Четные, нечетные функции и их свойства

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если:

1) ее область определения X симметрична относительно начала координат, то есть, если $x \in X$, то $-x \in X$;

2) для любого x из области определения X справедливо равенство $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

О п р е д е л е н и е 2. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

1) ее область определения X – симметрична относительно начала координат, то есть, если $x \in X$, то $-x \in X$;

2) для любого x из области определения X справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Основные свойства четных и нечетных функций

1. Алгебраическая сумма двух четных функций является четной функцией.
2. Алгебраическая сумма двух нечетных функций является нечетной функцией.
3. Произведение двух четных функций является четной функцией.
4. Произведение двух нечетных функций является четной функцией.
5. Произведение четной и нечетной функций является нечетной функцией.
6. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – нечетные функции, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также является нечетной.
7. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – четные функции, то сложная функция

$y = f(\varphi(x))$ также является четной.

8. Если $y = f(u)$ – четная функция, а $u = \varphi(x)$ – нечетная функция, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ является четной.

9. Если $y = f(x)$ – четная функция и $f(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ является четной.

10. Для четных и нечетных функций справедливо условие $|f(x)| = |f(-x)|$.

11. Каждую функцию $y = f(x)$, определенную на симметричном относительно начала координат множестве, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций таким образом:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

где первое слагаемое – четная функция, а второе – нечетная функция, причем такое представление является единственным.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость свойств четных и нечетных функций.

2.1.3 Периодические функции и их свойства

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое положительное число $T \neq 0$, что для любого x из области определения X справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется **периодом функции**, а наименьший из положительных периодов – **основным периодом**. Если число T является одним из периодов функции, то числа $\pm 2T, \pm 3T, \pm 4T, \dots$ также являются периодами этой функции.

График периодической функции повторяется на каждом промежутке длиной T .

Основные свойства периодических функций

1. Сумма и произведение двух функций с периодом T являются функциями с периодом T . При этом, если число T было наименьшим положительным периодом двух заданных функций, то после их сложения или умножения T может более не быть наименьшим из положительных периодов. Период алгебраической суммы периодических функций равен наименьшему общему кратному периодов всех слагаемых функций.

Иногда бывают полезными приведенные ниже формулы.

Период функции $f(x) = c_1 \sin \frac{\alpha_1}{\beta_1} x + c_2 \cos \frac{\alpha_2}{\beta_2} x$ находится по формуле

$$T = \frac{\text{НОК}(\beta_1; \beta_2)}{\text{НОД}(\alpha_1; \alpha_2)} \cdot 2\pi T = \frac{\text{НОК}(\beta_1; \beta_2)}{\text{НОД}(\alpha_1; \alpha_2)} \cdot 2\pi,$$

а период функции $f(x) = c_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{\beta_1} x + c_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{\beta_2} x$ – по формуле

$$T = \frac{\text{НОК}(\beta_1; \beta_2)}{\text{НОД}(\alpha_1; \alpha_2)} \cdot \pi T = \frac{\text{НОК}(\beta_1; \beta_2)}{\text{НОД}(\alpha_1; \alpha_2)} \cdot \pi,$$

где $\text{НОК}(\beta_1; \beta_2)$ – наименьшее общее кратное чисел β_1, β_2 ;
 $\text{НОД}(\alpha_1; \alpha_2)$ – наибольший общий делитель чисел α_1, α_2 .

2. Если функция $u = \varphi(x)$ является периодической, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также является периодической. Если же при этом функция $y = f(x)$ является монотонной, то периоды функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(\varphi(x))$ совпадают.

3. Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T , то функция $y = f(kx)$ также является периодической с периодом $t = \frac{T}{k}$, где k – любое действительное число, отличающееся от нуля, а значения x и kx входят в область определения функции.

4. Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T , то функция $y = f(kx + l)$ – также периодическая функция с периодом $t = \frac{T}{k}$, где k и l – любые действительные числа ($k \neq 0$).

5. Если график функции $y = f(x)$ с областью определения $(-;)$ является симметричным относительно прямых $x = a$ и $x = b$, где $b > a$, то функция $y = f(x)$ является периодической, а ее период $T = 2(b - a)$.

6. Если график функции $y = f(x)$ с областью определения $(-;)$ является симметричным относительно двух точек $A(a; c)$ и $B(b; c)$, где $b > a$, то функция $y = f(x)$ является периодической, а ее период $T = 2(b - a)$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость свойств периодических функций.

Среди периодических функций определенный интерес представляет функция Дирихле:

Область определения функции: $x \in (-; +)$.
 Область значений функции: $\{0; 1\}$.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное;} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

Функция Дирихле является периодической функцией с любым ненулевым рациональным периодом.

2.1.4 Монотонные функции и их свойства

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей в точке** x_0 , если существует такая окрестность точки x_0 , что для любого $x < x_0$ из этой окрестности справедливо неравенство

$$f(x) < f(x_0), \quad (2.1)$$

а для любого $x > x_0$ из этой окрестности справедливо неравенство

$$f(x_0) < f(x), \quad (2.2)$$

и **неубывающей**, если неравенства (1.17) и (1.18) приобретают соответственно вид

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (2.3)$$

и

$$f(x_0) \leq f(x). \quad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е 2. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей в точке** x_0 , если существует такая окрестность точки x_0 , что для любого $x < x_0$ из этой окрестности справедливо неравенство

$$f(x) > f(x_0), \quad (2.5)$$

а для любого $x > x_0$ из этой окрестности справедливо неравенство

$$f(x_0) > f(x), \quad (2.6)$$

и **невозрастающей**, если неравенства (2.1) и (2.2) приобретают соответственно вид

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (2.7)$$

и

$$f(x_0) \geq f(x). \quad (2.8)$$

О п р е д е л е н и е 3. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке I , если для любых значений x_1 и x_2 , принадлежащих данному промежутку I , таких, что $x_1 < x_2$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $f(x_1) < f(x_2)$, и **неубывающей**, если $f(x_1) \leq f(x_2)$ для любых значений x_1 и x_2 из промежутка I , таких, что $x_1 < x_2$.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на промежутке I , если для любых значений x_1 и x_2 , принадлежащих данному промежутку I , таких, что $x_1 < x_2$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $f(x_1) > f(x_2)$ и **невозрастающей**, если $f(x_1) \geq f(x_2)$ для любых значений x_1 и x_2 из промежутка I , таких, что $x_1 < x_2$.

О п р е д е л е н и е 5. Возрастающие, убывающие, неубывающие,

невозрастающие функции называются **монотонными**. При этом возрастающие и убывающие функции называются **строго монотонными**.

Основные свойства монотонных функций

1. Сумма двух возрастающих функций является возрастающей функцией.
2. Сумма двух убывающих функций является убывающей функцией.
3. Произведение двух возрастающих функций является возрастающей функцией.
4. Произведение двух убывающих функций является убывающей функцией.
5. Если функция $y = f(x)$ является возрастающей и $f(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является убывающей и наоборот.
6. Если функция $y = f(x)$ является возрастающей, то функция $y = -f(x)$ является убывающей и наоборот.
7. Если функция $u = \varphi(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, а функция $y = f(u)$ возрастает на сегменте $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то и сложная функция $y = f(\varphi(x))$ возрастает на сегменте $[a, b]$.
8. Если функция $u = \varphi(x)$ убывает на сегменте $[a, b]$, а функция $y = f(u)$ убывает на сегменте $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то и сложная функция $y = f(\varphi(x))$ убывает на сегменте $[a, b]$.
9. Если функция $u = \varphi(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, а функция $y = f(u)$ убывает на сегменте $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то и сложная функция $y = f(\varphi(x))$ убывает на сегменте $[a, b]$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать свойства монотонных функций.

2.1.5 Ограниченные функции и их свойства

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху**, если существует такое действительное число M , что для всех x из области определения X функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$f(x) \leq M. \quad (2.9)$$

График функции, ограниченной сверху, располагается не выше прямой $y = M$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое действительное число m , что для всех x из области определения X функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$m \leq f(x). \quad (2.10)$$

График функции, ограниченной снизу, располагается не ниже прямой $y = m$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной**, если существуют такие числа m и M , что для всех x из области определения X функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$m \leq f(x) \leq M. \quad (2.11)$$

График ограниченной функции не выходит за пределы горизонтальной полосы, ограниченной прямыми $y = m$ и $y = M$.

Основные свойства ограниченных функций

1. Сумма двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
2. Разность двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
3. Произведение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.

2.1.6 Обратные функции и их свойства

О п р е д е л е н и е. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется **обратной к** функции $y = f(x)$, если:

1) область определения функции $y = f(x)$ является областью значений функции $x = f^{-1}(y)$;

2) область значений функции $y = f(x)$ является областью определения функции $x = f^{-1}(y)$;

3) одному значению переменной y из области определения соответствует одно и только одно значение переменной x из области значений функции $x = f^{-1}(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $x = f^{-1}(y)$ является обратной относительно функции $y = f(x)$, то и функция $y = f(x)$ является обратной относительно функции $x = f^{-1}(y)$.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются **взаимно обратными**, при этом справедливы равенства: $f(f^{-1}(y)) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$ (рис. 2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ Если для обратной функции считать, что независимая переменная обозначается через x , а сама функция через y , то графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, то есть относительно прямой $y = x$.

Основные свойства обратных функций

1. Если функция $y = f(x)$ является строго возрастающей, то и функция $x = f^{-1}(y)$ является строго возрастающей.
2. Если функция $y = f(x)$ является строго убывающей, то и функция

$x = f^{-1}(y)$ является строго убывающей.

2.1.7 Функции, заданные в параметрическом виде

Аналитически заданные функции описываются формулой, которая устанавливает непосредственную связь между аргументом x и функцией y , то есть $y = y(x)$. В некоторых случаях аналитически заданные функции описываются двумя формулами, таким образом, что и x и y заданы как функции переменной t , называемой параметром:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \text{ где } t \in T, \quad T\text{-любой промежуток.} \quad (2.12)$$

Тогда равенства (2.12) называются параметрическими уравнениями кривой, которая является геометрическим местом точек $(x(t), y(t))$. Способ задания этой кривой равенствами (2.12) называется параметрическим.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, то функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ является функцией от x .

Таким образом уравнения (2.12) определяют функцию $y = y(x)$, которая называется параметрически заданной на промежутке T . Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, описывающее окружность, может быть задано в параметрическом виде таким образом:

$$\begin{cases} x = r \cos t; \\ y = r \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in R,$$

а уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, описывающее эллипс, в параметрическом виде может быть задано таким образом:

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in R.$$

Для того, чтобы от параметрически заданной функции перейти к функции, выраженной только через декартовы координаты, необходимо из параметрических уравнений функции удалить параметр t .

Для одной и той же функции может существовать множество ее параметрических заданий. Форма этих заданий зависит от того, что

именно выбрано в качестве параметра t .

Некоторые кривые в декартовых координатах описываются с помощью достаточно сложных функций, а в параметрической форме эти кривые описываются значительно проще.

ЗАМЕЧАНИЕ. С некоторыми важными кривыми, заданными в параметрической форме, можно ознакомиться в Приложении Г.

2.1.8 Полярная система координат

Расположение каждой точки на плоскости можно задать с помощью декартовой прямоугольной системы координат. Но наряду с указанной системой координат существуют и другие, наиболее распространенной среди которых является **полярная система координат**.

Зададим на плоскости ось, называемую **полярной осью** или **полярной** и на ней точку O , называемую **полюсом** (рис. 2.2 а).

Таким образом на плоскости введена полярная система координат.

Пусть M – произвольная точка на плоскости, которая не совпадает с полюсом O . Первой полярной координатой точки M или **полярным радиусом** называется расстояние от точки M до полюса O . Второй полярной координатой точки M или **полярным углом**, или **амплитудой** называется угол между полярной осью и лучом OM . Точку в полярной системе координат обозначают как $M(\rho; \varphi)$ (рис. 2.2 б). Для полюса O считают, что $\rho = 0$, а φ – неопределено. Полярный радиус измеряется в заданных единицах масштаба, а полярный угол – в радианах или в градусах.

Полярный радиус как расстояние может принимать только неотрицательные значения, то есть $\rho \geq 0$. Полярный угол считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении по часовой стрелке. Полярный угол может принимать любые значения, то есть $\varphi \in (-\infty; +\infty)$.

Точкам $(;)$, $(; + 2)$, $(; + 4)$, ..., $(; + 2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, на плоскости соответствует одна и та же точка $M(;)$, где $0 \leq \varphi < 2\pi$ или

– $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Значения полярного угла, удовлетворяющие условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ или

– $-\pi \leq \varphi < \pi$ называются **главными значениями** полярного угла.

Если в полярной системе координат считать, что на полярные координаты точки распространяются ограничения

$$\begin{cases} \rho \geq 0; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (2.13)$$

или

$$\begin{cases} \rho \geq 0; \\ -\pi \leq \varphi < \pi, \end{cases} \quad (2.14)$$

то между точками плоскости, за исключением полюса, и их полярными координатами $(;)$ существует взаимнооднозначное соответствие.

Для построения точки $M(;)$ в полярной системе координат необходимо:

- провести под углом φ к оси Ox луч OM ;
- на луче OM от точки O отложить отрезок длиной ρ , после чего получим точку M .

Достаточно часто пользуются другой полярной системой координат, где отсутствует ограничение $\rho \geq 0$. В таком случае полярные координаты удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} -\infty < \rho < +\infty; \\ -\infty < \varphi < +\infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

Полярная система координат, заданная таким образом, называется **обобщенной полярной системой координат**.

В дальнейшем будем пользоваться обобщенной полярной системой координат.

Построение точек в обобщенной полярной системе координат имеет определенные особенности. Если точка $M(;)$ имеет положительную первую полярную координату, то отрезок длиной ρ откладываем от точки O на луче, который следует из полюса O под углом φ , а если первая координата является отрицательной, то отрезок длиной $|\rho|$ следует отложить не на луче, который выходит из полюса O под углом φ к оси Ox (рис. 2.3 а), а на луче, который выходит из полюса O в противоположном направлении (рис. 2.3 б).



Следовательно, любая точка $M(;)$ может быть задана и таким образом:
 $M(-; +)$.

2.1.9 Связь между полярными и декартовыми координатами точек

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат xOy .

Построим также полярную систему координат таким образом, чтобы полярная ось совпадала с осью Ox , а полюс O – с началом декартовой системы координат (рис. 2.4). При этом луч, который следует из

полюса O под углом $= \frac{\pi}{2}$, должен совпадать с положительным направлением оси Oy .

Одна и та же точка M на плоскости может быть задана и в декартовой системе координат в виде $M(x; y)$ и в полярной системе координат в виде $M(;)$.

Найдем связь между декартовыми и полярными координатами точки. Рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1M (рис. 2.4). Зависимость между сторонами и углами треугольника позволяет установить формулы

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi; \\ y = \rho \sin \phi, \end{cases} \quad (2.16)$$

которые выражают декартовы координаты точки через ее полярные координаты.

Полярные координаты через декартовы координаты выражаются таким образом:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (2.17)$$

или

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Угол φ выбирается в зависимости от знаков x и y .

Если полярная система координат является обобщенной, то имеем

$$\begin{cases} \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin \varphi = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (2.19)$$

или

$$\begin{cases} \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2.20)$$

В формуле (1.36) угол φ выбирается в зависимости от знаков x и y .

Пользуясь формулами (1.35), выбираем любой из вариантов:

$$= -\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Знак, выбранный перед радикалом, сохраняем и в других формулах (2.19).

2.1.10 График функции, заданной в полярной системе координат

Пусть в полярной системе координат задана функция $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi \in \Phi$. Множество точек плоскости с полярными координатами $(\rho; \varphi)$ называется **графиком** функции $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах.

Некоторые функции в декартовых координатах описываются более громоздкими формулами чем в полярной системе координат. Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ является уравнением окружности в декартовой системе координат. Переходя к полярным координатам, получим уравнение окружности в виде $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = R^2$, то есть $\rho = R$.

В ряде случаев пользоваться полярными координатами более целесообразно, чем декартовыми координатами.

ЗАМЕЧАНИЕ. С некоторыми важными кривыми, заданными в полярной системе координат, можно ознакомиться в Приложении Д.

Построить график функции $\rho = f(\varphi)$ можно с помощью таблицы,

придавая аргументу значения из области определения функции. Над графиками функций в полярной системе координат можно выполнять элементарные преобразования в соответствии с такими свойствами.

1. График функции $y = -f(\rho)$ является симметричным относительно полюса O графику функции $y = f(\rho)$.
2. График функции $y = f(-\rho)$ является симметричным относительно полярной оси графику функции $y = f(\rho)$.
3. График функции $y = kf(\rho)$, где $k > 1$, выходит из графика функции $y = f(\rho)$ его растяжением вдоль полярной оси в k раз.
4. График функции $y = kf(\rho)$, где $0 < k < 1$, выходит из графика функции $y = f(\rho)$ его сжатием вдоль полярной оси в k раз.
5. График функции $y = f(\rho - \alpha)$ выходит из графика функции $y = f(\rho)$ его вращением вокруг полюса O на угол α .
6. График функции $y = f(\rho) + b$ выходит из графика функции $y = f(\rho)$ параллельным переносом этого графика вдоль полярной оси на величину b .

2.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

О п р е д е л е н и е 1 (по Коши). Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* или *бесконечно малой величиной*, когда $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x)| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 2 (по Гейне). Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* или *бесконечно малой величиной*, когда $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x ($x \neq x_0$), сходящейся к числу x_0 , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ является бесконечно малой.

О п р е д е л е н и е 3 (по Коши). Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 .

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* или *бесконечно большой величиной*, когда $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует такое положительное число $\delta(M)$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x)| > M$.

О п р е д е л е н и е 4 (по Гейне). Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* или *бесконечно большой величиной*, когда $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x ($x \neq x_0$), сходящейся к числу x_0 ($x \neq x_0$), соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ является бесконечно большой.

Определение 2 бесконечно малой величины и определение 4 бесконечно большой величины устанавливают связь между бесконечно малыми или бесконечно большими функциями и последовательностями, в связи с чем рассмотренные ранее свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей можно перенести на бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Основные теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях

Теорема 1. Сумма двух функций, являющихся бесконечно малыми, когда $x \rightarrow x_0$, является также бесконечно малой функцией, когда $x \rightarrow x_0$.

Теорема 2. Разность двух функций, являющихся бесконечно малыми, когда $x \rightarrow x_0$, является также бесконечно малой функцией, когда $x \rightarrow x_0$.

Теорема 3. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция, когда $x \rightarrow x_0$, то при x , достаточно близких к x_0 , функция $f(x)$ – ограничена.

Теорема 4. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию, когда $x \rightarrow x_0$, также является бесконечно малой функцией, когда $x \rightarrow x_0$.

С л е д с т в и е. Произведение двух бесконечно малых функций, когда $x \rightarrow x_0$, также является бесконечно малой функцией, когда $x \rightarrow x_0$.

Теорема 5. 1) Если функция $f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, является бесконечно малой и при этом $f(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0 , то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой функцией, когда $x \rightarrow x_0$;

2) если функция $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, является бесконечно большой, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой, когда $x \rightarrow x_0$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теорем 1...5.

2.3 Предел функции

2.3.1 Определение предела функции по Коши

О п р е д е л е н и е 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется **предельным значением функции** $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ или **пределом функции**, когда $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при всех значениях x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $0 < |x - x_0|$ означает что $x \neq x_0$. Введение этого условия нужно для того, чтобы охватить такие случаи, когда функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число A может быть как конечным, так и бесконечным. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, является бесконечно малой функцией, а если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, то $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, является бесконечно большой функцией.

Нахождение предела функции, определенной в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 , является одной из важнейших задач теории пределов.

Определение предела функции по Коши с помощью кванторов можно записать таким образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Наличие у функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, предела, равного A , геометрически иллюстрируется таким образом. Пусть на рис. 2.5 изображен график функции $y = f(x)$. Отложим на оси Oy точку A . Выберем любое сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Построим прямые $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$.

Две последние прямые образуют так называемую ε -полосу. В эту полосу попадает некоторая часть графика функции. Очевидно, что все точки графика

функции $y = f(x)$ в ε -полосе имеют такое свойство, что все их ординаты отличаются от значения A не более чем на ε , то есть справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Возьмем в качестве числа $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и рассмотрим интервал, симметричный относительно x_0 : $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то есть $0 < |x - x_0| < \delta$.

Таким образом установлено, что для любого сколь угодно малого положительного числа существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$, откуда следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в левой полуокрестности $(x_0 - \delta; x_0)$ точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется **левосторонним пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ слева, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех значениях x , удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в правой полуокрестности $(x_0; x_0 + \delta)$ точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется **правосторонним пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ справа, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех значениях x , удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; +\infty)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow +\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $M = M(\varepsilon)$, что для тех x из области определения функции $f(x)$, которые удовлетворяют условию $x > M$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(-\infty; a)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow -\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $M = M(\varepsilon)$, что для тех x из области определения функции $f(x)$, которые удовлетворяют условию $x < -M$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(-\infty; +\infty)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $M = M(\varepsilon)$, что для тех x , которые удовлетворяют условию $|x| > M$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Предел функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, равен бесконечности, если для любого, сколь угодно большого положительного числа M существует такое положительное число $\delta = \delta(M)$, что при всех значениях x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x)| > M$. При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

2.3.2 Определение предела функции по Гейне

О п р е д е л е н и е 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется **предельным значением функции** $y = f(x)$ в точке x_0 или **пределом функции**, когда $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , сходящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в левой полукрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется левосторонним пределом функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ слева, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , сходящейся к

x_0 слева, соответствующая последовательность значений функции

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в правой полукрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число A называется правосторонним пределом функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ справа, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , сходящейся к x_0 справа, соответствующая последовательность значений функции

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; +\infty)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow +\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , элементы которой, начиная с некоторого номера, являются положительными числами, соответствующая последовательность значений функции

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к A . При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(-\infty, a)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow -\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , элементы которой, начиная с некоторого номера, являются отрицательными числами, соответствующая последовательность значений функции

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A . При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(-\infty; +\infty)$. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$, когда $x \rightarrow \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A . При этом используется обозначение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Предел функции $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, равен бесконечности, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента, сходящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ стремится к бесконечности, при этом

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

используется обозначение

Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны. Определение предела функции по Гейне устанавливает связь между пределом последовательности и пределом функции, вследствие чего рассмотренные ранее свойства пределов последовательностей можно принять и для функций.

2.3.3 Необходимое и достаточное условие существования предела функции

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, имела предел A , необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовали односторонние пределы функции, каждый из которых равен A .

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Необходимость. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то есть для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при любом x , которое удовлетворяет условию $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Из этого утверждения следует, что, поскольку x стремится к x_0 справа и слева, то существуют односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

Достаточность. Пусть существуют односторонние равные между собой пределы функции: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$. Это означает, что для любого $x \rightarrow x_0$ и для любого сколь угодно малого положительного числа ε существуют такие положительные числа $\delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2(\varepsilon)$, что когда $0 < x_0 - x < \delta_1(\varepsilon)$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$, и когда $0 < x - x_0 < \delta_2(\varepsilon)$, то также $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для таких x , которые удовлетворяют условию $0 < |x_0 - x| < \delta$. Значит существует предел функции: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

2.3.4 Свойства пределов функций

Основные теоремы о пределах функций

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 , имела предел A , когда $x \rightarrow x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при значениях аргумента x достаточно

близких к x_0 , функцию $f(x)$ можно было представить в виде суммы постоянной A и соответствующего элемента бесконечно малой функции (x) , когда $x \rightarrow x_0$, то есть в виде $f(x) = A + (x)$.

Теорема 2. Предел любой бесконечно малой функции (x) , когда $x \rightarrow x_0$, равен нулю, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция (x) , когда $x \rightarrow x_0$, является бесконечно большой функцией, то символически это записывается таким образом: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = \infty$.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет предел, когда $x \rightarrow x_0$, то этот предел является единственным.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел, когда $x \rightarrow x_0$, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой функция $f(x)$ является ограниченной.

Теорема 5. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, имеют конечные пределы, то их сумма, разность, произведение и частное также имеют пределы и при этом справедливы такие утверждения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x); \quad (2.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x); \quad (2.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x); \quad (2.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0. \quad (2.24)$$

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теорем 1...5, опираясь на аналогичные теоремы о пределах последовательностей.

Теоремы о предельном переходе в неравенствах

Теорема 1. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то $A > 0$.

Теорема 2. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x) < 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то $A < 0$.

Теорема 3. Если в некоторой окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и (x) удовлетворяют условию $f(x) < (x)$ и имеют конечный предел, когда $x \rightarrow x_0$, то справедливо неравенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$

Теорема 4 (теорема Гурьева). Если в некоторой окрестности точки x_0 функции $f(x)$, $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq \psi(x) \leq \varphi(x)$ и при этом функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, имеют одинаковый конечный предел A , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A,$$

то и функция $f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, имеет предел, который равен A , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Теорема 5. Пусть заданы функции $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$ и $y = f(\varphi(x))$, такие, что области определения функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(\varphi(x))$ совпадают и совпадают области значений функций $y = f(u)$ и $y = f(\varphi(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b,$$

Если $x \rightarrow x_0$ где x_0 принадлежит области определения функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(\varphi(x))$, а b принадлежит области значений функции $u = \varphi(x)$ и области определения функции $y = f(u)$ и, к тому же, $f(b) = A$, то тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет предел,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = A$$

когда $x \rightarrow x_0$, и этот предел равен A , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = A$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теорем 1...5.

2.4 Классификация бесконечно малых и бесконечно больших функций

2.4.1 Сравнение бесконечно малых функций

О п р е д е л е н и е 1. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *сравнимыми*, если существует и отличается от нуля и

бесконечности хотя бы один из пределов: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

О п р е д е л е н и е 2. Бесконечно малая функция $\alpha(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называется *бесконечно малой более высокого порядка малости* чем

бесконечно малая функция $\beta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Бесконечно малая функция $\beta(x)$ при этом называется *бесконечно малой функцией низшего порядка малости* чем $\alpha(x)$.

О п р е д е л е н и е 3. Бесконечно малая функция $\alpha(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называется *бесконечно малой порядка малости r ($r > 0$)* относительно $\beta(x)$,

если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} = 0$.

Символически это обозначают таким образом: $(x) = o((\beta(x)))$, когда $x \rightarrow x_0$, $((x))$ - это „о малое” от $\beta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, где „о” называется *символом Ландау*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенства, которые содержат символ „о” являются условными. Например, равенство $x^3 = o(x)$, когда $x \rightarrow 0$, является верным, но равенство $o(x) = x^3$, когда $x \rightarrow 0$, является ошибочным, потому что символ $o(x)$ означает не какую-то конкретную бесконечно малую функцию, а множество функций, которые, когда $x \rightarrow 0$, представляют собой бесконечно малые более высокого порядка малости чем x . Следовательно, символическое равенство $(x) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$, читается только в одну сторону.

О п р е д е л е н и е 4. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *бесконечно малыми одного порядка малости*, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k,$$

где k – конечное число, отличающееся от нуля.

Символически это обозначают таким образом: $(x) \sim (\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

О п р е д е л е н и е 5. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *эквивалентными бесконечно малыми*, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Символически это обозначают таким образом: $(x) \sim (\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

Свойства символа Ландау „о малое”

1. Пусть ${}_1(x)$, ${}_2(x)$ и (x) являются бесконечно малыми функциями, когда $x \rightarrow x_0$, $c = \text{const}$. К тому же, ${}_1(x) = o(\beta(x))$, ${}_2(x) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$. Тогда ${}_1(x) + {}_2(x) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.
2. $o(\beta(x)) + o(\beta(x)) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.
3. $o(\beta(x)) - o(\beta(x)) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.
4. $o(c\beta(x)) = o(\beta(x))$, $c \neq 0$, когда $x \rightarrow x_0$.
5. $c \times o(\beta(x)) = o(\beta(x))$, $c \neq 0$, когда $x \rightarrow x_0$.
6. $o(\beta^n(x)) = o(\beta^k(x))$, $n \geq k$, где n – натуральное число, $k = 1, 2, \dots, n-1$, когда $x \rightarrow x_0$.

7. $(o(\beta(x)))^n = o(\beta^n(x))$, где n – натуральное число, когда $x \rightarrow x_0$.

8. $\beta^n(x) \times o(\beta(x)) = o(\beta^{n+1}(x))$, где n – натуральное число, когда $x \rightarrow x_0$.

9. $\frac{o(\beta^n(x))}{\beta(x)} = o(\beta^{n-1}(x))$, $n \geq 2$, где n – натуральное число, когда $x \rightarrow x_0$.

10. $o(o(\beta(x))) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

11. $o(\beta(x) + o(\beta(x))) = o(\beta(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

12. $\alpha_1(x)\alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$ и $\alpha_1(x)\alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

13. $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$ и $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$, когда $x \rightarrow x_0$, если $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

14. $o(\alpha_1(x)) \times o(\alpha_2(x)) = o(\alpha_1(x)\alpha_2(x))$, когда $x \rightarrow x_0$.

15. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$, если $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$, когда $x \rightarrow x_0$.

16. Если $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_3(x)$, то $\alpha_1(x) \sim \alpha_3(x)$, когда $x \rightarrow x_0$.

Формулы вида $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + o(\alpha_1(x))$ или $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + o(\alpha_2(x))$ называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическим разложением* $\alpha_1(x)$ и при этом $o(\alpha_1(x))$ и $o(\alpha_2(x))$ называются *остаточными членами асимптотической формулы*.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость свойств 1...16.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, когда $x \rightarrow x_0$. Тогда справедливы такие приближенные равенства:

1. $\sin(x) \sim (x)$.

7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim (x) \ln a$ ($a > 0$).

2. $\operatorname{tg}(x) \sim (x)$.

8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim (x)$.

3. $1 - \cos(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$.

9. $1 - \frac{1}{1 + \alpha(x)} \sim (x)$.

4. $\arcsin(x) \sim (x)$.

10. $(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p(x)$.

5. $\operatorname{arctg}(x) \sim (x)$.

11. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$.

6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim (x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждую из этих формул можно представить в виде асимптотической формулы таким образом:

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\alpha(x)) \quad \text{или} \quad \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad \text{когда } x \rightarrow x_0,$$

где $\alpha(x)$ – левая часть формулы, а $\beta(x)$ – правая часть.

Например, формулу 1 можно представить в виде

$$\sin(x) = (x) + o((x)),$$

когда $x \rightarrow x_0$.

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость формул 1...11.

2.4.2. Сравнение бесконечно больших функций

О п р е д е л е н и е 1. Бесконечно большие функции $\sigma(x)$ и $\theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *сравнимыми*, если существует и отличается от нуля

хотя бы один из пределов: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)}{\theta(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta(x)}{\sigma(x)}$.

О п р е д е л е н и е 2. Бесконечно большая функция $\sigma(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называется *бесконечно большой более высокого порядка возрастания* чем бесконечно большая функция $\theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = \infty$.

Символически это обозначается так $\sigma(x) = O(\theta(x))$ (читается $\sigma(x)$ – это « O большое» от $\theta(x)$), когда $x \rightarrow x_0$, где « O » – символ Ландау.)

Бесконечно большая функция $\theta(x)$ при этом называется *бесконечно большой функцией низшего порядка возрастания* чем $\sigma(x)$.

О п р е д е л е н и е 3. Бесконечно большая функция $\sigma(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называется *бесконечно большой функцией с порядком возрастания r* ($r > 0$) относительно бесконечно большой функции $\theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)}{\theta^r(x)} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 4. Бесконечно большие функции $\sigma(x)$ и $\theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *бесконечно большими функциями одного порядка возрастания*, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = k$, где k – конечное число, которое отличается от нуля. Символически это обозначается таким образом: $\sigma(x) \asymp \theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$.

О п р е д е л е н и е 5. Бесконечно большие функции $\sigma(x)$ и $\theta(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, называются *эквивалентными бесконечно большими функциями*,

если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = 1$.

Символически это обозначают таким образом: $\sigma(x) \sim \theta(x)$ когда $x \rightarrow x_0$.

2.5 Замечательные пределы

2.5.1 Первый замечательный предел

Доказать, что справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ определена в промежутке $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симметричном относительно начала координат, и, кроме того,

справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, поскольку $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.

Из приведенного следует, что функция $f(x)$ является четной. Это означает, что когда в точке $x = 0$ существуют односторонние пределы, то они одинаковы, то есть

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Рассмотрим предел функции в точке $x = 0$ справа и докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Построим в первой четверти системы координат xOy (рис. 2.6) дугу окружности с центром в точке O и радиусом $R = 1$. Будем считать, что радианная мера угла AOC равна значению аргумента функции x . Находим площади ΔAOC , сектора AOC , ΔOAB . Для этих площадей справедливо соотношение:

$$S_{\Delta AOC} < S_{\text{сект. } AOC} < S_{\Delta OAB}.$$

Поскольку

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} |OA| |OC| \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{сект. } AOC} = \frac{1}{2} x |OA|^2 = \frac{1}{2} x, \quad S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

то

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{где } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Поделив последнее неравенство на $\sin x > 0$, получим неравенство

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Предположим, что $x \rightarrow 0$ справа и перейдем к пределу, когда $x \rightarrow +0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +0} 1.$$

Отсюда

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Согласно теореме Гурьева, имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

В силу четности функции $f(x)$ приходим к выводу, что

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.25)$$

Равенство (1.41) называется *первым замечательным пределом*. Из формулы (1.41) можно получить формулы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \quad (2.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad (2.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1. \quad (2.28)$$

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость формул (1.41)...(1.44).

Рассмотрим еще некоторые следствия формулы (2.25).

Найдем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$. Обозначим $\arcsin x = t$, тогда $x = \sin t$. когда $x \rightarrow 0$, то и $t \rightarrow 0$. Значит

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Следовательно, получили формулу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \quad (2.29)$$

Из формулы (1.45) следует формула

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1. \quad (2.30)$$

Аналогично можно доказать еще две формулы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad (2.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1, \quad (2.32)$$

что предлагаем сделать самостоятельно.

2.5.2 Второй замечательный предел

В п. 1.5 гл. 1 для последовательности $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ была доказана формула (1.16):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

где n – натуральное число.

Покажем, что для функции $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$, когда $x \rightarrow \infty$, является справедливой аналогичная формула

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \quad (2.33)$$

Для любого $x > 1$ имеем: $n \leq x < n+1$, где n – натуральное число, $n = [x]$, и

$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Учитывая, что $n+1 > x \geq n$, получим зависимость

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n.$$

Пусть n стремится к бесконечности. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e,$$

то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e. \quad (2.34)$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \times 1^{-1} = e,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e. \quad (2.35)$$

Согласно теореме Гурьева, если справедливы равенства (1.50) и (1.51), то справедливо и равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.36)$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (2.37)$$

когда x – и при этом $x < -1$.

Сделаем замену $t = -(x+1)$. Поскольку $x < -1$, то $t > 0$. Если $x \rightarrow -\infty$, то $t \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \times \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \times 1 = e. \end{aligned}$$

Следовательно, из равенств (2.36) и (2.37) следует равенство (2.33)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

С л е д с т в и е 1. При $x \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha. \quad (2.38)$$

Пусть $x = \alpha t$, тогда если $x \rightarrow \infty$, то и $t \rightarrow \infty$. Следовательно, имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha t}\right)^{\alpha t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^\alpha = e^\alpha.$$

Получили формулу (1.54).

С л е д с т в и е 2. При $x \rightarrow 0$, справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (2.39)$$

Воспользуемся формулой (2.33) и допустим, что $\frac{1}{x} = t$. Тогда, очевидно, что когда $x \rightarrow \infty$, то $t \rightarrow 0$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Обозначив t через x , получим формулу (2.39).

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы (2.33) и (2.39) называются *вторым замечательным пределом*.

Примеры к главе 2

Функции. Основные понятия

Пример 2.1. Найти область определения функции

$$y = 4x - \frac{9}{x^2 + 11x - 12}.$$

Р е ш е н и е

В состав функции входит дробь, поэтому ее знаменатель не должен равняться нулю. Следовательно, имеем ограничение:

$$x^2 + 11x - 12 \neq 0,$$

откуда $x \neq -12$ и $x \neq 1$.

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; -12) \cup (-12; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$\text{О т в е т: } x \in (-\infty; -12) \cup (-12; 1) \cup (1; +\infty).$$

Пример 2.2. Найти область определения функции

$$y = 5x^2 + 6x - 2\sqrt[4]{1 + 2x - 3x^2}.$$

Р е ш е н и е

В состав функции входит корень четной степени, поэтому подкоренное выражение не должно быть отрицательным. Следовательно, имеем ограничение:

$$1 + 2x - 3x^2 \geq 0. \quad (2.40)$$

Решим квадратное неравенство (1.56) методом интервалов. Поскольку корнями квадратного уравнения $1 + 2x - 3x^2 = 0$ или $3x^2 - 2x - 1 = 0$ являются числа $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$, то неравенство (1.56) эквивалентно неравенству

$$-3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) \geq 0 \quad \text{или} \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) \leq 0.$$

Следовательно, область определения функции является такой:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$$

$$\text{О т в е т: } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$$

Пример 2.3. Найти область определения функции

$$y = x^2 \ln \frac{4x-1}{5-6x}.$$

Р е ш е н и е

В состав функции входит логарифм, а его аргумент должен быть положительным. К тому же, не должен равняться нулю знаменатель аргумента логарифмической функции. Следовательно, имеем ограничения:

$$\begin{cases} \frac{4x-1}{5-6x} > 0; \\ 5-6x \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов:

Область определения функции: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{5}{6} \right)$.

О т в е т: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{5}{6} \right)$.

Пример 2.4. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[6]{\sin^2 x - 3\sin x + 2}.$$

Р е ш е н и е

Для x должно выполняться условие $\sin^2 x - 3\sin x + 2 \geq 0$, поскольку это выражение находится под корнем четной степени. Обозначим $\sin x = t$, где $t \in [-1, 1]$. Решим неравенство $t^2 - 3t + 2 \geq 0$. Поскольку корнями квадратного уравнения $t^2 - 3t + 2 = 0$ являются числа $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$, то получим эквивалентное неравенство

$$(t-1)(t-2) \geq 0.$$

Решим это неравенство, учитывая то, что $t \in [-1, 1]$.

Очевидно, что $t-2 < 0$, откуда $t-1 \geq 0$. Тогда $-1 \leq t \leq 1$. Отсюда следует, что $-1 \leq \sin x \leq 1$. Такое неравенство выполняется при любом значении x .

Область определения функции является такой: $x \in (-\infty; +\infty)$.

О т в е т: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 2.5. Найти область определения функции

$$y = 5\lg 3x + 7\arccos 8x.$$

Р е ш е н и е

Каждое из слагаемых, входящих в состав функции, дает определенные ограничения относительно области определения функции.

Так, аргумент тангенса должен удовлетворять условию $3x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, где $n \in \mathbb{Z}$,

а аргумент арккосинуса должен удовлетворять условию $-1 \leq 8x \leq 1$. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \\ -1 \leq 8x \leq 1; \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \\ -\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{8}, \end{cases} \quad \text{где}$$

Поскольку в промежуток $\left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$ не входит ни одно из значений $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$, то решением системы, а следовательно, и областью определения функции являются значения $x \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$.

О т в е т: $x \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$.

Пример 2.6. Найти область определения функции $y = \log_{0,5} \log_2 \log_9 x$.

Р е ш е н и е

Будем исходить из ограничений, которых требует логарифмическая функция:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \log_9 x > 0; \\ \log_2(\log_9 x) > 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств, опираясь на свойства логарифмической функции:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x > 1; \\ \log_9 x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1; \\ x > 9. \end{cases}$$

Значит областью определения функции являются значения $x \in (9; +\infty)$.

О т в е т: $x \in (9; +\infty)$.

Пример 2.7. Найти область определения функции

$$y = x^2 + \sqrt{3x} + \operatorname{tg}^2 4x - \frac{2}{1 + \cos 8x}.$$

Р е ш е н и е

Область определения найдем, исходя из того, что должны

выполняться условия: $3x \geq 0$; $4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $1 + \cos 8x \neq 0$.

Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} 3x \geq 0; \\ 4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \cos 8x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \\ 2 \cos^2 4x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \\ \cos 4x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т: } \begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заданную функцию можно было упростить таким образом:

$$y = x^2 + \sqrt{3x} + \operatorname{tg}^2 4x - \frac{2}{1 + \cos 8x}; \quad y = x^2 + \sqrt{3x} + \frac{1}{\cos^2 4x} - 1 - \frac{1}{\cos^2 4x};$$

$$y = x^2 + \sqrt{3x} - 1.$$

Областью определения такой функции являются значения $x \geq 0$. Но учитывая то, что были выполнены тождественные преобразования, области определения заданной и упрощенной функций не совпадают.

Пример 2.8. Найти область определения функции $y = \sqrt{x-4}$ и область ее значений.

Р е ш е н и е

Область определения получим из условия $x-4 \geq 0$. Следовательно $x \in [4; +\infty)$. Область значений: $y \in [0; +\infty)$.

О т в е т: $x \in [4; +\infty)$; $y \in [0; +\infty)$.

Пример 2.9. Выяснить вид функции:

$$1) y = \frac{3x-2}{4x^2+5x-1}; \quad 2) y = x \times 2^x.$$

Р е ш е н и е

$$y = \frac{3x-2}{4x^2+5x-1}$$

1) Функция является результатом таких алгебраических действий, как умножение, возведение в степень с рациональным показателем, сложение, вычитание, деление, то есть эта функция является алгебраической.

2) Функция $y = x \times 2^x$ получена вследствие возведения в

произвольную степень (и в иррациональную также) и умножения. Это трансцендентная функция.

О т в е т: 1) функция является алгебраической; 2) функция является трансцендентной.

Пример 2.10. Создать сложные функции:

$$1) y = f(\phi(x)) \text{ и } 2) y = \phi(f(x)), \text{ если } \phi(x) = 3x + 2; f(x) = x^2 - 1.$$

Р е ш е н и е

$$1) y = f(\phi(x)) = (3x + 2)^2 - 1.$$

$$2) y = \phi(f(x)) = 3(x^2 - 1) + 2.$$

$$\text{О т в е т: } 1) y = (3x + 2)^2 - 1; 2) y = 3(x^2 - 1) + 2.$$

Пример 2.11. Сложную функцию

$$y = \sqrt{\log_5^7(x^3 + 3x + 1)}$$

разложить на составляющие.

Р е ш е н и е

$$y = \sqrt{u}; u = v^7; v = \log_5; = x^3 + 3x + 1.$$

$$\text{О т в е т: } y = \sqrt{u}; u = v^7; v = \log_5; = x^3 + 3x + 1.$$

Пример 2.12. Сложную функцию

$$y = e^{\arcsin(5 - x^2)}$$

разложить на составляющие.

Р е ш е н и е

$$y = e^u; u = \arcsin v; v = 5 - x^2.$$

$$\text{О т в е т: } y = e^u; u = \arcsin v; v = 5 - x^2.$$

Пример 2.13. Доказать, что функция $f(x) = x^2 - 5x \sin x$ является четной.

Р е ш е н и е

Область определения X функции $f(x)$: $x \in (-; +)$. Следовательно, если $x \in X$, то и $-x \in X$.

Имеем

$$f(-x) = (-x)^2 - (-5x) \sin(-x) = x^2 - 5x \sin x = f(x),$$

Следовательно, заданная функция является четной.

Пример 2.14. Выяснить, является ли четной или нечетной функция

$$f(x) = 2^x - 3x + 1.$$

Р е ш е н и е

Областью определения X функции $f(x)$ является промежуток $(-;)$, поэтому, если $x \in X$, то и $-x \in X$.

$$f(-x) = 2^{-x} - 3(-x) + 1 = 2^{-x} + 3x + 1.$$

Очевидно, что $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$.

Следовательно, функция $f(x) = 2^x - 3x + 1$ является функцией общего вида.

О т в е т: функция общего вида.

Пример 2.15. Исследовать функцию

$$f(x) = x^5 \ln \frac{1+x}{1-x}$$

на четность и нечетность.

Р е ш е н и е

Найдем область определения функции из условия $\frac{1+x}{1-x} > 0$. По методу интервалов получим: $x \in (-1; 1)$.

|

Следовательно, область определения является симметричной относительно начала координат.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 \ln \frac{1+x}{1-x}; & f(-x) &= (-x)^5 \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = -x^5 \ln \frac{1-x}{1+x} = -x^5 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = \\ &= x^5 \ln \frac{1+x}{1-x} = f(x). \end{aligned}$$

Пришли к выводу, что $f(x) = f(-x)$, то есть заданная функция является четной.

О т в е т: функция является четной.

Пример 2.16. Найти такую функцию $u(x)$, чтобы функция $f(x)$ была:
1) четной; 2) нечетной:

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Записать $f(x)$ в каждом из случаев.

Р е ш е н и е

1) Пусть $u(x) = \exp(-x^3 - 4x)$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Проверим, является ли эта функция четной:

$$f(x) = \exp(x^3 + 4x), \quad 0 < x < \infty;$$

$$f(-x) = \exp(-(-x)^3 - 4(-x)) = \exp(x^3 + 4x), \quad -\infty < x \leq 0.$$

Значит функция

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

определенная на симметричном относительно точки 0 промежутке, является четной.

2) Пусть $u(x) = -\exp(-x^3 - 4x)$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} -\exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Проверим, является ли такая функция нечетной:

$$f(x) = \exp(x^3 + 4x), \quad \text{если } 0 < x < \infty;$$

$$f(-x) = -\exp(-(-x)^3 - 4(-x)) = -\exp(x^3 + 4x), \quad \text{если } -\infty < x \leq 0.$$

Значит функция

$$f(x) = \begin{cases} -\exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

определенная на симметричном относительно начала координат промежутке, является нечетной.

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty; \end{cases}$$

О т в е т: 1)

$$f(x) = \begin{cases} -\exp(-x^3 - 4x), & \text{где } -\infty < x \leq 0; \\ \exp(x^3 + 4x), & \text{где } 0 < x < \infty. \end{cases}$$

2)

Пример 2.17. Функцию $f(x) = (3 + x)^{26}$ представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Р е ш е н и е

Областью определения функции $f(x)$ является промежуток $(-\infty; \infty)$,

то есть x и $(-x)$ принадлежат интервалу $(-\infty; \infty)$. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{(3+x)^{26} + (3-x)^{26}}{2} + \frac{(3+x)^{26} - (3-x)^{26}}{2}. \quad (2.41)$$

Пусть $f_1(x) = \frac{(3+x)^{26} + (3-x)^{26}}{2}$; $f_2(x) = \frac{(3+x)^{26} - (3-x)^{26}}{2}$. Проверим, какими являются функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Рассмотрим $f_1(-x)$ и $f_2(-x)$.

$$f_1(-x) = \frac{(3-x)^{26} + (3+x)^{26}}{2} = f_1(x),$$

значит функция $f_1(x)$ является четной.

$$f_2(-x) = \frac{(3-x)^{26} - (3+x)^{26}}{2} = -\frac{(3+x)^{26} - (3-x)^{26}}{2} = -f_2(x),$$

то есть функция $f_2(x)$ является нечетной.

Действительно, функция $f(x)$, записанная в форме (1.57), является суммой четной и нечетной функций.

$$\text{О т в е т: } f(x) = \frac{(3+x)^{26} + (3-x)^{26}}{2} + \frac{(3+x)^{26} - (3-x)^{26}}{2}.$$

Пример 2.18. Выяснить, является ли заданная функция

$$f(x) = (8\sin 11x - 5\sin 8x)^4 \operatorname{tg}^5 6x$$

четной или нечетной.

Р е ш е н и е

Функция $\operatorname{tg} 6x$ является нечетной функцией, тогда функция $\operatorname{tg}^5 6x$ также является нечетной функцией.

Функции $\sin 11x$, $\sin 8x$ – нечетные функции, функция $8\sin 11x - 5\sin 8x$ также является нечетной функцией, а функция $(8\sin 11x - 5\sin 8x)^4$ – четная функция.

Заданная функция $f(x)$ является произведением нечетной и четной функций, следовательно, $f(x)$ – нечетная функция.

О т в е т: функция является нечетной.

Пример 2.19. Доказать, что функция $f(x) = \sin 3x$ является периодической с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$.

Р е ш е н и е

$$\text{Имеем: } f(x) = \sin 3x; \quad f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x,$$

откуда и следует периодичность функции с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$.

Пример 2.20. Найти наименьший период функций: 1) $f_1(x) = 3\sin x + 2$; 2) $f_2(x) = -3\sin x + 2$; 3) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Р е ш е н и е

Наименьшим положительным периодом, то есть основным периодом функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, является число $T = 2\pi$.

Функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (3\sin x + 2) + (-3\sin x + 2) = 4$ является периодической функцией с любым периодом $T \in \mathbb{R}$, но наименьшего периода не имеет.

О т в е т: 1) $T = 2$; 2) $T = 2$; 3) наименьшего периода не существует.

Пример 2.21. Определить основной период функции

$$y = \operatorname{ctg}\left(16x + \frac{\pi}{7}\right).$$

Р е ш е н и е

Функция $\operatorname{ctg} x$ является периодической с основным периодом $T = \pi$. Согласно свойству 4 периодических функций (п. 2.1.3), для функции

$$y = \operatorname{ctg}\left(16x + \frac{\pi}{7}\right) \text{ имеем } T = \frac{\pi}{16}.$$

О т в е т: $T = \frac{\pi}{16}$.

Пример 2.22. Определить основной период функции

$$f(x) = 4\operatorname{tg}^3 3x - 7\operatorname{ctg}^5 3x.$$

Р е ш е н и е

Функции $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{ctg} 3x$, согласно свойству 3 (п. 2.1.3) периодических функций, имеют основной период $T = \frac{\pi}{3}$. Каждая из этих функций является периодической, а следовательно, в соответствии со свойством 2 (п. 2.1.3) периодических функций, период сложных функций $\operatorname{tg}^3 3x$ и $\operatorname{ctg}^5 3x$ также будет равен $T = \frac{\pi}{3}$.

Период функции $f(x)$, согласно свойству 1 (п. 2.1.3) периодических функций, также равен $T = \frac{\pi}{3}$.

О т в е т: $T = \frac{\pi}{3}$.

Пример 2.23. Найти основной период функции

$$f(x) = 4\operatorname{tg}\frac{3x}{2} + 9\operatorname{ctg}\frac{9x}{8} - 7\operatorname{ctg}\frac{27x}{4}.$$

Р е ш е н и е

Обратимся к свойству 1 (п. 2.1.3) периодических функций.

В данном случае $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4$; $\text{НОК}(2, 8, 4) = 8$; $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$;

$\text{НОД}(3, 9, 27) = 3$. Тогда $T = \frac{8}{3}$.

О т в е т: $T = \frac{8}{3}$.

Пример 2.24. Выяснить, является ли монотонной функция $f(x) = 4^{\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е

Заданная функция определена на промежутке $x \in [0; +\infty)$. Функция $f(x)$ является сложной функцией и ее можно разложить на составляющие: $f(x) = 4^u$, $u = \sqrt{x}$.

Внутренняя функция определена на промежутке $x \in [0; +\infty)$, где она является возрастающей. Ее область значений $u \in [0; +\infty)$.

Внешняя функция на промежутке $u \in [0; +\infty)$ является возрастающей.

Согласно свойству 7 (п. 2.1.4) монотонных функций, заданная функция может быть возрастающей функцией.

О т в е т: функция возрастает в области определения.

Пример 2.25. Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{x+2}{3}$, и построить графики прямой и обратной функций.

Р е ш е н и е

Если $y = \frac{x+2}{3}$, то $x = 3y - 2$ и обратная функция имеет вид $y = 3x - 2$.

Графиком прямой и обратной функций являются прямые, заданные

уравнениями $y = \frac{x+2}{3}$ и $y = 3x - 2$ (рис. 2.7). Эти прямые симметричны относительно биссектрисы, заданной уравнением $y = x$.

О т в е т: $y = 3x - 2$.

Пример 2.26. Найти функцию, обратную к функции

$$y = \frac{x-1}{x}.$$

Построить графики прямой и обратной функций.

Р е ш е н и е

Область определения заданной функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область значений функции: $y \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Найдем x как функцию от y .

$$y = \frac{x-1}{x}; \quad xy = x-1; \quad xy - x = -1; \quad x(1-y) = 1; \quad x = \frac{1}{1-y}.$$

Функция $x = \frac{1}{1-y}$ описывает ту же зависимость, что и функция $y = \frac{x-1}{x}$. Если перейти к стандартным обозначениям аргумента и функции, то из функции $x = \frac{1}{1-y}$ получим функцию $y = \frac{1}{1-x}$, которая является обратной к функции $y = \frac{x-1}{x}$.

Областью определения этой функции являются значения $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а областью значений функции являются значения $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Следовательно, функции $y = \frac{x-1}{x}$ и $y = \frac{1}{1-x}$ являются взаимно обратными. Построим графики этих функций (рис. 2.8).

Запишем функцию $y = \frac{x-1}{x}$ таким образом: $y = 1 - \frac{1}{x}$ или $y - 1 = -\frac{1}{x}$. Графиком такой функции является гипербола с центром в точке $O_1(0, 1)$, а асимптотами этой гиперболы являются прямые $x = 0$ и $y = 1$.

Функцию $y = \frac{1}{1-x}$ запишем в виде $y = -\frac{1}{x-1}$. Графиком такой функции является гипербола, центр которой находится в точке $O_2(1; 0)$, а асимптотами гиперболы являются прямые $x = 1$ и $y = 0$.

$$\text{О т в е т: } y = \frac{1}{1-x}.$$

Пример 2.27. Выяснить, какие из функций

$$1) y = 9 \sin 2x - 4; \quad 2) y = \operatorname{tg} 5x; \quad 3) y = 2 - \arcsin x; \quad 4) y = 2 \cdot 3^x$$

ограничены.

Р е ш е н и е

$$1) -13 \leq 9 \sin 2x - 4 \leq 5, \text{ значит функция } y = 9 \sin 2x - 4 \text{ является ограниченной.}$$

$$2) -\infty < \operatorname{tg} 5x < +\infty, \text{ значит функция } y = \operatorname{tg} 5x \text{ является неограниченной.}$$

$$3) 2 - \frac{\pi}{2} \leq 2 - \arcsin x \leq 2 + \frac{\pi}{2}, \text{ значит функция } y = 2 - \arcsin x \text{ является ограниченной.}$$

$$4) 0 < 2 \cdot 3^x < \infty, \text{ значит функция } y = 2 \cdot 3^x \text{ является неограниченной (или ограниченной снизу).}$$

О т в е т: 1) функция ограничена; 2) функция неограничена; 3) функция ограничена; 4) функция неограничена.

Пример 2.28. Построить график функции $\rho = -4 \cos 3\varphi$, исходя из графика

функции $\rho = 4\cos 3\varphi$.

Р е ш е н и е

Построим график функции $\rho = 4\cos 3\varphi$. Заданная функция определяет трехлепестковую розу. Кривая состоит из трех лепестков, которые описываются, когда аргумент φ пробегает значения от 0 до 2π .

Составим вспомогательную таблицу:

/п	φ (град.)	3φ (град.)	$\cos$	$\rho = 4\cos$
1	0	0	1	4
2	15	45	0,707	2,828
3	30	90	0	0
4	45	135	-0,707	-2,828
5	60	180	-1	-4
6	75	225	-0,707	-2,828
7	90	270	0	0
8	105	315	0,707	2,828
9	120	360	1	4
10	135	405	0,707	2,828
11	150	450	0	0
12	165	495	-0,707	-2,828
13	180	540	-1	-4
14	195	585	-0,707	-2,828
15	210	630	0	0
16	225	675	0,707	2,828
17	240	720	1	4
18	255	765	0,707	2,828
19	270	810	0	0
20	285	855	-0,707	-2,828
21	300	900	-1	-4
22	315	945	-0,707	-2,828
23	330	990	0	0
24	345	1035	0,707	2,828
25	360	1080	1	4
—	—	—	—	—

На основании таблицы построим кривую (рис. 2.9).

График функции $\rho = -4\cos\varphi$ строим, исходя из свойства 1 (п. 2.1.10), симметрично графику функции $\rho = 4\cos\varphi$ относительно полюса O (рис. 2.10).

Пример 2.25. Построить график функции $\rho = 3\sin(-2\varphi)$, исходя из графика функции $\rho = 3\sin 2\varphi$.

Р е ш е н и е

Построим график функции $\rho = 3\sin 2\varphi$. Заданная функция определяет четырехлепестковую розу. Кривая состоит из четырех лепестков, которые описываются, когда аргумент φ пробегает значения от 0 до 2π . Составим вспомогательную таблицу:

№ п/п	φ (град.)	2φ (град.)	$\sin 2\varphi$	$\rho = 3\sin 2\varphi$
1	0	0	0	0
2	15	30	0,5	1,5
3	30	60	0,866	2,598
4	45	90	1	3
5	60	120	0,866	2,598
6	75	150	0,5	1,5
7	90	180	0	0
8	105	210	-0,5	-1,5
9	120	240	-0,866	-2,598
10	135	270	-1	-3
11	150	300	-0,866	-2,598
12	165	330	-0,5	-1,5
13	180	360	0	0
14	195	390	0,5	1,5
15	210	420	0,866	2,598
16	225	450	1	3
17	240	480	0,866	2,598
18	255	510	0,5	1,5
19	270	540	0	0
20	285	570	-0,5	-1,5
21	300	600	-0,866	-2,598
22	315	630	-1	-3
23	330	660	-0,866	-2,598
24	345	690	-0,5	-1,5
25	360	720	0	0
—	—	—	—	—

Значения функций в таблице являются приближенными.

На основании таблицы построим кривую (рис. 2.11).

График функции $\rho = 3\sin(-2\varphi)$ строим, исходя из свойства 2 (п. 2.1.10), симметрично графику функции $\rho = 3\sin 2\varphi$ относительно полярной оси (рис. 2.12).

Пример 2.30. Построить график функции $\rho = 4\cos\varphi$, исходя из графика функции $\rho = \cos\varphi$.

Р е ш е н и е

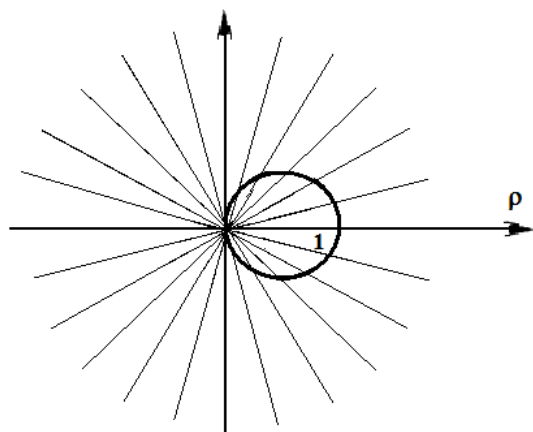
Построим график функции $\rho = \cos \varphi$. Заданная функция определяет окружность, которая описывается, когда аргумент φ пробегает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Составим вспомогательную таблицу:

№ п/п	φ (град.)	$\rho = \cos \varphi$	№ п/п	φ (град.)	$\rho = \cos \varphi$
1	-90	0	8	15	0,966
2	-75	0,259	9	30	0,866
3	-60	0,5	10	45	0,707
4	-45	0,707	11	60	0,5
5	-30	0,866	12	75	0,259
6	-15	0,966	13	90	0
7	0	1	—	—	—

Значения функции в таблице являются приближенными.

На основании таблицы строим кривую (рис. 2.13). График функции $\rho = 4 \cos \varphi$ строим, исходя из свойства 3 (п. 2.1.10), растяжением графика функции $\rho = \cos \varphi$ в четыре раза вдоль полярной оси (рис. 2.14).



$\rho = \cos \varphi$

Рисунок 1.13

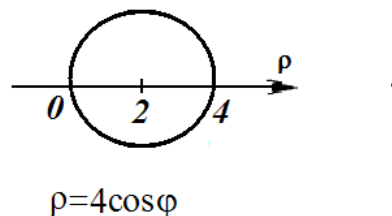


Рисунок 1.14

.14

Пример 2.31. Построить график функции $\rho = \frac{1}{3} \sin \varphi$, исходя из графика функции $\rho = \sin \varphi$.

Решение

Построим график функции $\rho = \sin \varphi$. Заданная функция определяет окружность, которая описывается, когда аргумент φ пробегает значения от 0 до π . Составим вспомогательную таблицу:

№ п/п	φ (град.)	$\rho = \sin \varphi$	№ п/п	φ (град.)	$\rho = \sin \varphi$
1	0	0	8	105	0,965
2	15	0,259	9	120	0,866
3	30	0,5	10	135	0,707
4	45	0,707	11	150	0,5
5	60	0,866	12	165	0,259
6	75	0,965	13	180	0
7	90	1	—	—	—

Значения функции в таблице являются приближенными.

На основании таблицы построим кривую (рис. 2.15). График функции $\rho = \frac{1}{3} \sin \varphi$ строим, исходя из свойства 4 (п. 2.1.10), сжатием графика функции $\rho = \sin \varphi$ втрое вдоль полярной оси (рис. 2.16).

$$\rho = 1 + 2 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right), \text{ исходя из}$$

Пример 2.32. Построить график функции графика функции $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$.

Решение

Построим график функции $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$. Заданная функция определяет улитку Паскаля, которая описывается, когда аргумент φ пробегает значения от 0 до 2π .

Составим вспомогательную таблицу:

№ п/п	φ (град.)	$\cos \varphi$	$2 \cos \varphi$	$\rho = 1 + 2 \cos \varphi$
1	0	1	2	3
2	15	0,966	1,932	2,932
3	30	0,866	1,732	2,732
4	45	0,707	1,414	2,414
5	60	0,5	1	2
6	75	0,259	0,518	1,518
7	90	0	0	1
8	105	-0,259	-0,518	0,482
9	120	-0,5	-1	0
10	135	-0,707	-1,414	-0,414
11	150	-0,866	-1,732	-0,732
12	165	-0,966	-1,932	-0,932
13	180	-1	-2	-1
14	195	-0,966	-1,932	-0,932
15	210	-0,866	-1,732	-0,732
16	225	-0,707	-1,414	-0,414
17	240	-0,5	-1	0
18	255	-0,259	-0,518	0,482

19	270	0	0	1
20	285	0,259	0,518	1,518
21	300	0,5	1	2
22	315	0,707	1,414	2,414
23	330	0,866	1,732	2,732
24	345	0,966	1,932	2,932
25	360	1	2	3
—	—	—	—	—

Значения функции в таблице являются приближенными.
На основании таблицы построим кривую (рис. 2.17).

$$\rho = 1 + 2 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right)$$

График функции строим, исходя из свойства 5 (п.

2.1.10), поворотом графика функции $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$, вокруг полюса на угол $\frac{\pi}{3}$ (рис. 2.18).

$$\rho = \frac{2}{\varphi} + 5$$

Пример 2.33. Построить график функции , исходя из графика функции

$$\rho = \frac{2}{\varphi}.$$

Решение

$$\rho = \frac{2}{\varphi}.$$

Построим график функции . Заданная функция определяет гиперболическую спираль, которая описывается, когда аргумент φ пробегает значения от 0 до ∞ . Ограничимся той частью бесконечной гиперболической спирали, которая соответствует значениям φ от 0 до 2π .

Составим вспомогательную таблицу, пользуясь радианной мерой угла.

№ п/п	φ (рад.)	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{2}{\varphi}$	№ п/п	φ (рад.)	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{2}{\varphi}$
1	0	—	—	14	$\frac{13\pi}{12}$	0,2936	0,587199
2	$\frac{\pi}{12}$	3,816794	7,633588	15	$\frac{7\pi}{6}$	0,272628	0,545256
3	$\frac{\pi}{6}$	1,908397	3,816794	16	$\frac{5\pi}{4}$	0,254453	0,508906
4	$\frac{\pi}{4}$	1,272265	2,544529	17	$\frac{4\pi}{3}$	0,23855	0,477099
5	$\frac{\pi}{3}$	0,954198	1,908397	18	$\frac{17\pi}{12}$	0,224517	0,449035
6	$\frac{5\pi}{12}$	0,763359	1,526718	19	$\frac{3\pi}{2}$	0,212044	0,424088

7	$\frac{\pi}{2}$	0,636132	1,272265	20	$\frac{19\pi}{12}$	0,200884	0,401768
8	$\frac{7\pi}{12}$	0,545256	1,090513	21	$\frac{5\pi}{3}$	0,19084	0,381679
9	$\frac{2\pi}{3}$	0,477099	0,954198	22	$\frac{7\pi}{4}$	0,181752	0,363504
10	$\frac{3\pi}{4}$	0,424088	0,848176	23	$\frac{11\pi}{6}$	0,173491	0,346981
11	$\frac{5\pi}{6}$	0,381679	0,763359	24	$\frac{23\pi}{12}$	0,165948	0,331895
12	$\frac{11\pi}{12}$	0,346981	0,693963	25	π	0,159033	0,318066
13	π	0,318066	0,636132				

Значения функции в таблице являются приближенными.
На основании таблицы построим кривую (рис. 2.19).

График функции $\rho = \frac{2}{\varphi} + 5$ строится, исходя из свойства 6 (п. 2.1.10),
параллельным переносом графика функции $\rho = \frac{2}{\varphi}$ вдоль полярной оси на величину 5 (рис. 2.20).

Предел функции

Пример 2.34. Записать с помощью кванторов определение 2 (п. 2.3.1.).

Р е ш е н и е

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ х: } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\text{О т в е т: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ х: } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример 2.35. Доказать, что предельное значение функции $y = 23x - 3$ в точке $x = 1$ равно 20.

Р е ш е н и е

Возьмем любое сколь угодно малое положительное число ε и рассмотрим неравенство $|(23x - 3) - 20| < \varepsilon$ или $23|x - 1| < \varepsilon$. Очевидно, что неравенство $|(23x - 3) - 20| < \varepsilon$

выполняется для значений x , которые удовлетворяют условию $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{23}$, то есть

можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{23}$. Тогда имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{23} > 0 \quad \forall x: |x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |(23x - 3) - 20| < \varepsilon.$$

Пример 2.36. Доказать, что когда $x \rightarrow 4$, то предел функции $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ равен 2.

Решение

Будем опираться на определение 1 предела функции по Коши (п. 2.3.1). Предстоит доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для тех x , которые удовлетворяют условию $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть, что

$$x_0 = 4; f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}; A = 2.$$

В данном случае

Выбираем любое положительное

число. Найдем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что будет выполняться условие $\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \varepsilon$.

Отсюда имеем

$$\left| \frac{(x - 4)(x + 4)}{x(x - 4)} - 2 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{(x + 4)}{x} - 2 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{(x + 4) - 2x}{x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{4 - x}{x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{4}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$-\varepsilon < \frac{4}{x} - 1 < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < \frac{4}{x} < 1 + \varepsilon, \quad \frac{1 - \varepsilon}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1 + \varepsilon}{4}. \quad (*)$$

Это условие должно выполняться для тех x , которые удовлетворяют неравенству $0 < |x - 4| < \delta$.

Отсюда имеем

$$-\delta < x - 4 < \delta, \quad 4 - \delta < x < 4 + \delta.$$

Тогда

$$\frac{1}{4 + \delta} < \frac{1}{x} < \frac{1}{4 - \delta}. \quad (**)$$

Сравнивая неравенства (*) и (**) получим ограничения для δ .

$$\begin{cases} \frac{1}{4 - \delta} = \frac{1 + \varepsilon}{4}; \\ \frac{1}{4 + \delta} = \frac{1 - \varepsilon}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - \delta = \frac{4}{1 + \varepsilon}; \\ 4 + \delta = \frac{4}{1 - \varepsilon}, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon}; \\ \delta_2 = \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Пусть

$$\delta = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

Таким образом показано, что для выбранного $\varepsilon > 0$ найдено такое δ , что для x ,

которые удовлетворяют условию $0 < |x - 4| < \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, соответствующие значения функции удовлетворяют условию $\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \varepsilon$.

Пример 2.37. Выяснить, существует ли предел функции $y = 4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + 5$, когда $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Решение

Пусть $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ слева. В этом случае $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty$,
то есть $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2}$, а $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + 5) = 2\pi + 5$.
Если $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ справа, то $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = -\frac{\pi}{2}$, а $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + 5) = -2\pi + 5$.

Следовательно, односторонние пределы функции хоть и существуют, но они не равны между собой, то есть заданная функция $y = 4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + 5$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ предела не имеет.

О т в е т: в точке $x = \frac{\pi}{2}$ предел не существует.

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Пример 2.38 Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 6x - 7}{7x^3 - 3x^2 - 5x + 4}$.

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

Решение начинаем с того, что предельное значение x , то есть ∞ , подставляем в заданное выражение:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 6x - 7}{7x^3 - 3x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Очевидно, речь идет о неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Целесообразно помнить о

схожести свойств бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей и бесконечно малых и бесконечно больших функций в заданной точке, о связи между сходящимися последовательностями и пределами функций. Методы раскрытия неопределенностей для последовательностей можно распространить и на функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Информация о методах раскрытия неопределенностей при нахождении пределов функций содержится в Приложении Е.

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ целесообразно пользоваться таким приемом. Числитель и знаменатель одновременно поделим на x в наибольшей степени. В данном случае следует делить на x^3 . Тогда

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{7 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 7 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3}} = \frac{5 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{7 - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}.$$

По условию $x \rightarrow \infty$. Это означает, что x является бесконечно большой величиной, а

величина, обратная к ней, является бесконечно малой, то есть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Окончательно

получим $A = \frac{5}{7}$.

О т в е т: $\frac{5}{7}$.

Пример 2.39. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 - 2x^2 + 6x + 8}{3x^4 - 2x^3 + x - 1}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

При подстановке предельного значения x в функцию видим, что снова имеем дело с

неопределенностью $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 - 2x^2 + 6x + 8}{3x^4 - 2x^3 + x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^7}{x^7} - \frac{2x^2}{x^7} + \frac{6x}{x^7} + \frac{8}{x^7}}{\frac{3x^4}{x^7} - \frac{2x^3}{x^7} + \frac{x}{x^7} - \frac{1}{x^7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x^5} + \frac{6}{x^6} + \frac{8}{x^7}}{\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^7}} = \infty.$$

Полученный результат обусловлен тем, что когда x , числитель равен 5, то есть является постоянной, а знаменатель является бесконечно малой величиной. Следовательно, дробь как величина, обратная к бесконечно малой, является бесконечно большой величиной, когда x .

О т в е т: .

Пример 2.40. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 3x + 11}{9x^8 - 3x^3 + 8x^2 - 1}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 3x + 11}{9x^8 - 3x^3 + 8x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^8} - \frac{2x^2}{x^8} + \frac{3x}{x^8} + \frac{11}{x^8}}{\frac{9x^8}{x^8} - \frac{3x^3}{x^8} + \frac{8x^2}{x^8} - \frac{1}{x^8}} =$$

$A =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^6} + \frac{3}{x^7} + \frac{11}{x^8}}{9 - \frac{3}{x^5} + \frac{8}{x^6} - \frac{1}{x^8}} = 0.$$

О т в е т: 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализируя рассмотренные примеры, можем сделать вывод, что, если при нахождении предела частного функций, которые представляют собой

многочлены, имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, то этот предел равен:

1) отношению коэффициентов при старших степенях, если старшие степени числителя и знаменателя одинаковы;

2) 0, когда старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя;

3) ∞ , когда старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя.

Раскрытие неопределенностей вида $[\infty - \infty]$

Пример 2.41. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2} \right).$$

Р е ш е н и е: Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2} \right) = [\infty - \infty].$$

Целесообразным в данном случае является такой прием. Умножим и поделим данное выражение на сопряженное выражение:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2} \right) \left(\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2} \right)}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}}.$$

Пользуясь формулой разности квадратов $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, получим

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} \right)^2 - \left(\sqrt{x^4 + x^2} \right)^2}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 8x^2 + 3) - (x^4 + x^2)}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 8x^2 + 3 - x^4 - x^2}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]. \end{aligned}$$

После проведенных преобразований снова пришли к неопределенности, но уже другого типа. Известно, что в таком случае можно числитель и знаменатель поделить на x в наибольшей степени. В числителе наибольшая степень равна 2, в знаменателе корни из бесконечно больших величин.

Для того, чтобы оценить, чему равна наибольшая степень x в знаменателе, можем пренебречь слагаемыми $8x^2$ и 3 в первом корне и x^2 – во втором, тогда $\sqrt{x^4} = x^2$. Следовательно, наибольшая степень x в знаменателе равна 2. Опираясь на метод, используемый в предыдущих примерах, поделим числитель и знаменатель на x^2 .

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3}}{x^2} + \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4 + 8x^2 + 3}{x^4}} + \sqrt{\frac{x^4 + x^2}{x^4}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

О т в е т: $\frac{7}{2}$.

Раскрытие неопределенностей вида $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Пример 2.42. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 + x^2 + 4x + 44}{2x^3 - x^2 - 3x + 14}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

Как всегда, решение начинается с подстановки предельного значения $x_0 = -2$ под знак предела.

Рассмотрим

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 + x^2 + 4x + 44}{2x^3 - x^2 - 3x + 14} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Если переменная x стремится к конечному значению x_0 , а сама функция, предел которой следует найти, является отношением двух многочленов, которые в точке x_0 равны нулю, то целесообразно числитель и знаменатель разложить на множители определенным способом. В частности, поскольку x_0 – корень многочленов в числителе и знаменателе, то, как известно, такие многочлены делятся нацело на $x - x_0$. Эта информация может помочь в разложении многочленов на множители. Поделим числитель и знаменатель на выражение $x + 2$:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + x^2 + 4x + 44 & x + 2 \\ \hline 5x^3 + 10x^2 & 5x^2 - 9x + 22 \\ \hline -9x^2 + 4x & \\ \hline -9x^2 - 18x & \\ \hline 22x + 44 & \\ \hline 22x + 44 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 3x + 14 & x + 2 \\ \hline 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - 5x + 7 \\ \hline -5x^2 - 3x & \\ \hline -5x^2 - 10x & \\ \hline 7x + 14 & \\ \hline 7x + 14 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Тогда

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x^2 - 9x + 22)}{(x+2)(2x^2 - 5x + 7)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 - 9x + 22}{2x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5(-2)^2 - 9(-2) + 22}{2(-2)^2 - 5(-2) + 7} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}.$$

О т в е т: $\frac{12}{5}$.

Пример 2.43. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10x-13} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{9x-20}}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10x-13} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{9x-20}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Если переменная x стремится к конечному значению x_0 , а в числителе или в знаменателе или и в числителе и в знаменателе переменная находится под корнем

$$\left[\frac{0}{0} \right]$$

квадратным и к тому же имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, то целесообразным является такой прием. Числитель и знаменатель следует умножить на выражение, сопряженное заданному иррациональному выражению:

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{10x-13} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{9x-20}} \times \frac{\sqrt{10x-13} + \sqrt{2x+11}}{\sqrt{10x-13} + \sqrt{2x+11}} \times \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{9x+20}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{9x+20}} \right).$$

Пользуясь формулой разности квадратов $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, получим

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{10x-13})^2 - (\sqrt{2x+11})^2}{(\sqrt{1+2x})^2 - (\sqrt{9x-20})^2} \times \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{9x+20}}{\sqrt{10x-13} + \sqrt{2x+11}} \right).$$

Согласно теореме о пределе произведения двух функций, имеем

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(10x-13) - (2x+11)}{(1+2x) - (9x-20)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{9x+20}}{\sqrt{10x-13} + \sqrt{2x+11}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10x-13-2x-11}{1+2x-9x+20} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{7} + \sqrt{7}}{\sqrt{17} + \sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{17}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x-24}{-7x+21} = \\ &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{8(x-3)}{-7(x-3)} = -\frac{8}{7} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{\sqrt{119}}. \end{aligned}$$

О т в е т: $-\frac{8}{\sqrt{119}}$.

Пример 2.44. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{\sqrt{3x+19} - \sqrt{49-12x}}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{\sqrt{3x+19} - \sqrt{49-12x}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Решение примера выполним двумя способами.

1 способ

К знаменателю можно применить метод умножения и деления на сопряженное знаменателю выражение $\sqrt{3x+19} + \sqrt{49-12x}$. Для упрощения числителя целесообразно умножить числитель, а следовательно, и знаменатель на неполный

квадрат суммы выражений $\sqrt[3]{8x+11}$ и 3 , то есть на $\left(\left(\sqrt[3]{8x+11} \right)^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 3^2 \right)$.
Следовательно:

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{\sqrt{3x+19} - \sqrt{49-12x}} \times \frac{\sqrt{3x+19} + \sqrt{49-12x}}{\sqrt{3x+19} + \sqrt{49-12x}} \times \frac{\left(\sqrt[3]{8x+11} \right)^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 3^2}{\left(\sqrt[3]{8x+11} \right)^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 3^2} \right)$$

По формуле разности кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, получим:

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{8x+11} \right)^3 - 3^3}{\left(\sqrt{3x+19} \right)^2 - \left(\sqrt{49-12x} \right)^2} \times \frac{\sqrt{3x+19} + \sqrt{49-12x}}{\left(\sqrt[3]{8x+11} \right)^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9} \right)$$

Воспользовавшись теоремой о пределе произведения, имеем

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x - 16}{15x - 30} \times \frac{\sqrt{25} + \sqrt{25}}{\left(\sqrt[3]{27} \right)^2 + 3\sqrt[3]{27} + 9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8(x-2)}{15(x-2)} \times \frac{10}{27} = \frac{8}{5} \times \frac{10}{27} = \frac{16}{81}$$

II способ

Предел заданной функции уже найден при решении I способом. Рассмотрим еще один способ избавиться от корня кубического. Допустим, что $8x+11 = t^3$, тогда

$x = \frac{1}{8}(t^3 - 11)$. Если $x \rightarrow 2$, то $t \rightarrow \sqrt[3]{27}$ или $t \rightarrow 3$. Отсюда

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 3}{\sqrt{\frac{3}{8}(t^3 - 11) + 19} - \sqrt{49 - \frac{3}{2}(t^3 - 11)}} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t - 3}{\sqrt{\frac{3}{8}t^3 - \frac{33}{8} + 19} - \sqrt{49 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{33}{2}}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t - 3}{\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} - \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t - 3}{\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} - \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}}} \times \frac{\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}}}{\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t - 3) \left(\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}} \right)}{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8} - \frac{131}{2} + \frac{3t^3}{2}} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t - 3) \left(\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}} \right)}{\frac{15}{8}t^3 - \frac{405}{8}} = \\ &= \frac{8}{15} \times \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t - 3) \left(\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}} \right)}{t^3 - 27} = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{15} \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3) \left(\sqrt{\frac{3t^3}{8} + \frac{119}{8}} + \sqrt{\frac{131}{2} - \frac{3t^3}{2}} \right)}{(t-3)(t^2 + 3t + 9)} = \frac{8}{15} \frac{\sqrt{25} + \sqrt{25}}{9 + 9 + 9} = \frac{16}{81}.$$

О т в е т: $\frac{16}{81}$.

Нахождение пределов функций с помощью первого замечательного предела

Пример 2.45. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$, где α – некоторое число.

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

При нахождении пределов функций, в состав которых входят тригонометрические

функции в случае неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, целесообразно пользоваться первым замечательным пределом и следствиями из него (формулы 2.25 – 2.32).

Допустим, что $\alpha x = t$. Тогда $x = \frac{1}{\alpha} t$. Если $x \rightarrow 0$, то и $t \rightarrow 0$.

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{1}{\alpha} t} = \alpha \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \alpha.$$

О т в е т: α .

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем будем считать следствием первого замечательного предела формулу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha. \quad (2.42)$$

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость формул:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{x} = ; \quad (2.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha x}{x} = ; \quad (2.44)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x} = . \quad (2.45)$$

Пример 2.46. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 7x}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 7x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ и наличие в условии тригонометрических функций позволяют сделать допущение относительно возможности применения первого замечательного предела или следствий из него.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 8x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{tg} 7x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 7x} = 8 \times \frac{1}{7} = \frac{8}{7}.$$

О т в е т: $\frac{8}{7}$.

Пример 2.47. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 14x \times (\sin 9x - \sin 5x)}{\operatorname{tg}^2 8x \times (1 - \cos 12x)}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 14x (\sin 9x - \sin 5x)}{\operatorname{tg}^2 8x (1 - \cos 12x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Для преобразования функции воспользуемся тригонометрическими формулами:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 14x \times 2 \sin 2x \times \cos 7x}{\operatorname{tg}^2 8x \times 2 \sin^2 6x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{14x \arcsin 14x}{14x} \right)^3 \times \frac{2x \sin 2x}{2x} \times \left(\frac{8x}{8x \operatorname{tg} 8x} \right)^2 \times \left(\frac{6x}{6x \sin 6x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \cos 7x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(14x)^3 \times 2x}{(8x)^2 (6x)^2} = \frac{14^3 \times 2}{64 \times 36} = \frac{343}{144}. \end{aligned}$$

О т в е т: $\frac{343}{144}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Восстановить информацию о тригонометрических и гиперболических функциях поможет Приложение Ж.

Пример 2.48. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = [0 \times \infty] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

$A =$

Допустим, что $x = \frac{\pi}{4} - y$. Тогда $y = \frac{\pi}{4} - x$. Если $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, то $y \rightarrow 0$.

$$A = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - 2y \right)}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2y}{\operatorname{tg} y} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2y \operatorname{tg} 2y}{2y} \times \frac{y}{y \operatorname{tg} y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{y} = 2.$$

О т в е т: 2.

Раскрытие неопределенностей вида $[1^\infty]$

Пример 2.49. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta x} \right)^x$, где α и β – некоторые числа.

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta x} \right)^x = [1^\infty].$$

Неопределенность вида $[1^\infty]$ во многих случаях может быть раскрыта с помощью второго замечательного предела. Будем опираться на формулы (1.49) и (1.55).

Допустим, что $x = \frac{\alpha y}{\beta}$. Тогда, если $x \rightarrow \infty$, то и $y \rightarrow \infty$.

$$A = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta \alpha}{\beta \alpha y} \right)^{\frac{\alpha y}{\beta}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = e^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta x} \right)^x = e^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

(2.46)

Получили результат, который в дальнейшем можно считать за формулу.

О т в е т: $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Пример 2.50. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = [\infty \times 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$A = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (2.47)$$

В частности, если $a = e$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (2.48)$$

О т в е т: $\frac{1}{\ln a}$.

Пример 2.51. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Допустим, что $a^x - 1 = y$. Тогда $a^x = 1 + y$ и $x = \log_a(1+y)$. Если $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$.
Имеем

$$A = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (2.49)$$

В частности, если $a = e$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (2.50)$$

О т в е т: $\ln a$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты, полученные в примерах 2.50 и 2.51, являются следствиями второго замечательного предела. В дальнейшем будем считать их формулами.

Пример 2.52. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{2x-1}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{2x-1} = [1^\infty].$$

Это следует из того, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 8x + 3} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1) = \infty.$$

Сделаем такие преобразования, которые помогут воспользоваться вторым замечательным пределом.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 8x + 3} - 1 \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x^2 + 3x + 1 - (4x^2 + 8x + 3)}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5x - 2}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{\frac{4x^2 + 8x + 3}{-5x - 2} \times \frac{-5x - 2}{4x^2 + 8x + 3} \times \frac{2x-1}{1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-5x - 2}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{\frac{4x^2 + 8x + 3}{-5x - 2}} \right)^{\frac{-(5x+2)(2x-1)}{4x^2 + 8x + 3}} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5x - 2}{4x^2 + 8x + 3} \right)^{\frac{4x^2 + 8x + 3}{-5x - 2}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 + x + 2}{4x^2 + 8x + 3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 + x + 2}{4x^2 + 8x + 3}} = e^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

О т в е т: $e^{-\frac{5}{2}}$.

Нахождение пределов степенно-показательной функции

Пример 2.53. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}} = [1^\infty].$$

Рассмотрим равенство $A = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$ и прологарифмируем его по основанию e .

$$\ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \ln (1 - 2x^3) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - 2x^3)}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Пусть $y = -2x^3$. Тогда, если $x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. Имеем

$$\ln A = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{-\frac{1}{2}y} = -2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = -2$$

(см. формулу 1.64).

Из того, что $\ln A = -2$, следует, что $A = e^{-2}$.

Окончательно имеем,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^3}} = e^{-2}.$$

О т в е т: e^{-2} .

Пример 2.54. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Решение

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty].$$

Прологарифмируем равенство $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ по основанию e . Тогда

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + \cos x - 1)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}. \end{aligned}$$

Пусть $\cos x - 1 = y$, тогда, если $x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. По формуле (1.35) имеем

$$\ln A = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -1 \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \times \frac{x}{2}} \right)^2 = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}, \quad A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

О т в е т: $e^{-\frac{1}{2}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При решении примеров 2.58 и 2.54 можно вместо логарифмирования пользоваться формулой $u(x) = e^{\ln u(x)}$, где $u(x) > 0$.

Нахождение пределов функций с помощью сравнения бесконечно малых функций

Пример 2.55. Определить порядок r малости бесконечно малой функции $\alpha(x)$, когда $x \rightarrow 0$:

1) $\alpha(x) = 5 \sin^4 x^3$; 2) $\alpha(x) = 8x^6$.

Р е ш е н и е

Будем исходить из свойств бесконечно малых функций.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x^3}{x^{12}} = 0, \quad \text{тогда } \sin^4 x^3 = o(x^{12}), \text{ когда } x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x^3}{(x^{12})^6} = 1, \quad \sin^4 x^3 \sim x^{12}, \text{ когда } x \rightarrow 0, \text{ поэтому } 5 \sin^4 x^3 \asymp x^{12}, \text{ когда } x \rightarrow 0, \quad r = 12;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1, \quad \text{тогда } x^6 = o(x), \text{ когда } x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{(x^6)^6} = 1, \quad x^6 \sim (x^6)^6, \text{ когда } x \rightarrow 0, \text{ поэтому } 8x^6 \asymp x^6, \text{ когда } x \rightarrow 0, \quad r = 6.$$

О т в е т: 1) $r = 12$; 2) $r = 6$.

Пример 2.56. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x) = 3x^2 + x^3$ и $\beta(x) = 2x^2$, когда $x \rightarrow 0$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{3x^2 + x^3}{2x^2} = \frac{3}{2} + \frac{x}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2} \right) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Значит $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции одного порядка малости.

О т в е т: $3x^2 + x^3 - 2x^2$, когда $x \rightarrow 0$.

Сравнение бесконечно малых функций часто используют для нахождения пределов функций.

Пример 2.57. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2} - 1 \right) x}{1 - \cos 7x}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2} - 1 \right) x}{1 - \cos 7x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Числитель и знаменатель, когда $x \rightarrow 0$, являются бесконечно малыми функциями. Из таблицы эквивалентности бесконечно малых (п. 2.4) следует, что, когда $x \rightarrow 0$,

бесконечно малую функцию $\sqrt[8]{1+x+9x^2} - 1$ можно заменить эквивалентной

$$\frac{x+9x^2}{8}$$

бесконечно малой функцией $\frac{x+9x^2}{8}$, а бесконечно малую функцию $1 - \cos 7x$ – на эквивалентную бесконечно малую функцию $\frac{(7x)^2}{2}$.

Получим:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2} - 1 \right) x}{1 - \cos 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(x+9x^2)x}{\frac{1}{2}(7x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+9x)}{196x^2} = \frac{1}{196} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+9x}{1} = \frac{1}{196}.$$

О т в е т: $\frac{1}{196}$.

Пример 2.58. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\sin \left(\operatorname{tg} \frac{x^2}{2} \right) \right)}{\ln(\cos 3x)}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg} \frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln(\cos 3x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Для решения воспользуемся асимптотическими формулами (п. 2.4):

$$\begin{aligned} \sin\left(\sin\left(\operatorname{tg} \frac{x^2}{2}\right)\right) &= \sin\left(\sin \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right) = \\ &= \sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)\right) = \sin\left(\frac{x^2}{2} + 2o(x^2)\right) = \sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2); \\ \ln \cos 3x &= \ln(1 + \cos 3x - 1) = \ln\left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2)\right) = \ln\left(1 + \left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \\ &= \left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = \\ &= -\frac{9x^2}{2} + 2o(x^2) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg} \frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln(\cos 3x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{9}.$$

О т в е т: $-\frac{1}{9}$.

Пример 2.59. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + x e^x}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + x e^x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Будем пользоваться методом сравнения бесконечно малых (п. 2.4).

Если $x \rightarrow 0$, то

$$1) \sin x = x + o(x) \Rightarrow \sin 2x = 2x + o(2x);$$

$$2) \operatorname{arctg} x = x + o(x) \Rightarrow \operatorname{arctg} 3x = 3x + o(3x);$$

$$3) \ln(1 + x) = x + o(x) \Rightarrow \ln(1 + (3x + \sin^2 x)) = 3x + \sin^2 x + o(3x + \sin^2 x) =$$

$$= 3x + \sin^2 x + o(x) = 3x + o(x).$$

Следовательно,

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6x + 3x^2 + o(x) + o(2x) + o(3x)}{3x + x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + o(x)}{4x + o(x)} = 2.$$

О т в е т: 2.

Пример 2.60. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^2\right)^{\operatorname{ctg} 4x}.$$

Р е ш е н и е

Обозначим заданный предел функции через A .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^2\right)^{\operatorname{ctg} 4x} = \left[1^\infty\right].$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+3x^2)^{\operatorname{ctg} 4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{ctg} 4x \ln(1+3x^2)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\operatorname{tg} 4x}}.$$

Учитывая то, что $\ln(1+3x^2) = 3x^2 + o(3x^2)$, $\operatorname{tg} 4x = 4x + o(4x)$, получим

$$A = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + o(3x^2)}{4x + o(4x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \frac{o(3x^2)}{x}}{4 + \frac{o(4x)}{x}}} = e^0 = 1.$$

О т в е т: 1.

Г л а в а 3

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

3.1 Определение непрерывной функции

О п р е д е л е н и е 1 (по Коши). Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке x_0* , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке x_0* , если ее предельное значение в этой точке равняется $f(x_0)$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

С л е д с т в и е. Если функция непрерывна, то знак предела и знак функции можно поменять местами.

Действительно, $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.

О п р е д е л е н и е 3. Приращением Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется разность между значением функции в точке $x_0 + \Delta x$ и значением функции в точке x_0 , то есть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Величина Δx при этом называется *приращением аргумента*.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке x_0* , если бесконечно малому приращению Δx аргумента x соответствует бесконечно малое приращение Δy функции y , то есть, если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

О п р е д е л е н и е 5 (по Гейне). Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке x_0* , если для любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x ,

сходящейся к числу x_0 , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к $f(x_0)$.

О п р е д е л е н и е 6. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и ее левой полуокрестности, называется *непрерывной в точке x_0 слева*, если соответствующий левосторонний предел функции равняется значению функции в точке x_0 , то есть, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

О п р е д е л е н и е 7. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и ее правой полуокрестности, называется *непрерывной в точке x_0 справа*, если соответствующий правосторонний предел функции равняется значению функции в точке x_0 , то есть, если $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

3.2 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1. Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке x_0 функций является также функцией, непрерывной в точке x_0 (для частного теорема является справедливой, если знаменатель отличен от нуля).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$.

Теперь рассмотрим функцию $y = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0), \text{ что}$$

свидетельствует о непрерывности функции $y = f_1(x) + f_2(x)$ в точке x_0 .

Задание для самостоятельной работы. Доказать справедливость теоремы 1 для разности, произведения и частного непрерывных функций.

Теорема 2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ – непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из непрерывности функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ следуют равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0).$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right) = f(\varphi(x_0))$, откуда следует непрерывность функции $y = f(\varphi(x))$ в точке x_0 .

3.3 Свойства функций, непрерывных в интервале

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(a; b)$, если она является непрерывной в каждой точке этого интервала.

Теорема 1. Основные элементарные функции являются непрерывными в своей области определения.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Докажем, например, непрерывность функции $y = \sin x$ в любой точке x . Найдем приращение функции в точке x .

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Допустим, что $\Delta x \rightarrow 0$, и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

В соответствии с определением 4 непрерывной функции можно утверждать, что функция $y = \sin x$ является непрерывной в своей области определения.

Задание для самостоятельной работы. Доказать непрерывность других основных элементарных функций.

Теорема 2 (о сохранении знака непрерывной функции). Если функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0 и значение $f(x_0)$ отлично от нуля, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой функция $f(x)$ имеет такой же знак, как и в точке x_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о

Допустим для определенности, что $f(x_0) < 0$. По условию теоремы $f(x)$ в точке x_0 – непрерывна. Возьмем любое положительное число ε . Тогда

найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

то есть

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

откуда

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \quad (3.1)$$

Поскольку ε мы выбирали как любое положительное число, то допустим,

что $0 < \varepsilon < -\frac{f(x_0)}{2}$ (из условия что $f(x_0) < 0$, следует что $\left(-\frac{f(x_0)}{2}\right) > 0$).

Из неравенства (3.1) следует, что

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}, \text{ то есть } f(x) < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Поскольку $\frac{f(x_0)}{2} < 0$, то и $f(x) < 0$. Значит, функция $f(x)$, при $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ сохраняет отрицательный знак.

Задание для самостоятельной работы. Доказать теорему 2 считая, что $f(x_0) > 0$.

Теорема 3 (о непрерывности монотонной функции). Если функция $y = f(x)$ с областью определения $(a; b)$ и областью значений $(c; d)$ является строго монотонной и значения функции заполняют весь интервал $(c; d)$, то функция $y = f(x)$ является непрерывной в интервале $(a; b)$.

Теорема 4 (о непрерывности обратной функции). Если функция $y = f(x)$ с областью определения $(a; b)$ и областью значений $(c; d)$ является строго монотонной, то существует строго монотонная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная и непрерывная в интервале $(c; d)$, с областью значений $(a; b)$.

Примем теоремы 3 и 4 без доказательства.

3.4 Точки разрыва функции и их классификация

О п р е д е л е н и е 1. Точка x_0 называется точкой *разрыва функции*

$f(x)$, если в этой точке не выполняются условия непрерывности функции.

О п р е д е л е н и е 2. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если существуют и равны между собой односторонние пределы функции в точке x_0 , но эти пределы отличаются от значения функции в точке x_0 , если оно существует, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0).$$

О п р е д е л е н и е 3. Скачком h функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется разность между односторонними пределами функции в этой точке, то есть величина

$$h = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

О п р е д е л е н и е 4. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода* функции $y = f(x)$ или *точкой устранимого разрыва*, если ее скачок в точке x_0 является конечной величиной, которая отлична от нуля, то есть если

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = h, \text{ где } h \neq 0.$$

О п р е д е л е н и е 5. Точка x_0 называется *точкой разрыва II рода* функции $y = f(x)$ или *точкой бесконечного разрыва*, если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 не существует или равняется бесконечности.

3.5 Свойства функций, непрерывных на сегменте

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a; b]$, если она непрерывна во всех его внутренних точках, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

Теорема 1 (об ограниченности функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Примем теорему 1 без доказательства.

О п р е д е л е н и е 2. *Колебанием непрерывной функции на сегменте* называется разность между ее наименьшим и наибольшим значениями.

Теорема 2 (о корне функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и на концах этого сегмента имеет противоположные по знаку значения, то на сегменте $[a; b]$ существует хотя бы одна точка $x = c$, в которой значение функции равняется нулю.

x
 x

Рисунок 3.1

Рисунок 3.2

Рис. 3.1 иллюстрирует теорему 2 для непрерывной функции. Для разрывной функции (рис. 3.2) теорема 2 не всегда верна.

Примем теорему 2 без доказательства.

Теорема 3 (о промежуточном значении функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, m и M – соответственно ее наименьшее и наибольшее значения, а μ – некоторое число, удовлетворяющее условию $m \leq \mu \leq M$, то на сегменте $[a; b]$ существует хотя бы одна точка $x = c$, в которой значение функции равняется μ .

a

Рис 1.23 иллюстрирует теорему 3. Для разрывной функции (рис. 1.24) теорема 3 не всегда верна.

Примем теорему 3 без доказательства.

Теорема 4 (о наименьшем и наибольшем значении функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она достигает на этом

сегменте наименьшего и наибольшего значений.

Рис. 3.5 иллюстрирует теорему 4. Для разрывной функции (рис. 3.6) теорема 4 не всегда верна.

Примем теорему 4 без доказательства.

3.6 Равномерная непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале $(a; b)$. Такая функция является непрерывной в каждой внутренней точке этого интервала. Рассмотрим любые две точки $x_1 \in (a; b)$ и $x_2 \in (a; b)$. Возьмем любое сколь угодно малое положительное число ϵ . Тогда, вследствие непрерывности функции в точках x_1 и x_2 , можно утверждать, что существует такое положительное число $\delta = \delta(\epsilon, x_1, x_2)$, зависящее от ϵ , от x_1 , и от x_2 , которое удовлетворяет условию $|x_1 - x_2| < \delta$, а соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Но есть такие функции, что для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ существует такое положительное число δ , которое зависит только от ϵ , и не зависит от точек интервала.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* в интервале $(a; b)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ существует такое положительное число $\delta = \delta(\epsilon)$, зависящее только от ϵ , что для любых значений x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$, удовлетворяющих условию $|x_2 - x_1| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$.

Если функция является равномерно непрерывной в интервале $(a; b)$, то она и непрерывна в этом интервале. Но из непрерывности функции в интервале не следует ее равномерная непрерывность в этом интервале.

Теорема (Кантора). Если функция непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.

3.7 Некоторые специальные функции, которые используются в теории аналоговых и дискретных цепей

Сигнал, математической моделью которого является функция непрерывного аргумента, называют *аналоговым* сигналом.

Сигнал, математической моделью которого является функция дискретного аргумента, называют *дискретным* сигналом.

Исследования дискретных сигналов проще по сравнению с исследованиями аналоговых сигналов. Поэтому аналоговые сигналы иногда переводят в дискретные сигналы, то есть в том или ином виде осуществляют так называемую *дискретизацию* сигнала.

Аналоговые и дискретные сигналы рассматриваются соответственно в теории аналоговых цепей и в теории дискретных цепей.

За аналоговые цепи принимают любые устройства, которые аналоговый сигнал $x(t)$ переводят в аналоговый сигнал $y(t)$, а дискретные цепи – устройства, которые дискретный сигнал $x(n)$ переводят в дискретный сигнал $y(n)$. Математической моделью таких цепей можно считать определенные операторы $y(t) = A(x(t))$ или $y(n) = A(x(n))$.

При исследовании аналоговых и дискретных сигналов значительную роль играют определенные специальные функции. Рассмотрим некоторые из них.

Дельта-функция Дирака

Рассмотрим функцию непрерывного аргумента:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t < 0; \\ \frac{1}{h}, & \text{если } 0 \leq t < h; \\ 0, & \text{если } h < t < +\infty. \end{cases}$$

Если $h \rightarrow 0$, получим функцию

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t < 0; \\ +\infty, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Функция $\delta(t)$ называется *импульсной функцией нулевого порядка* или *-функцией Дирака*.

Эта функция используется при исследовании тех или иных кратковременных, но мощных воздействий. Из-за кратковременности воздействий во время исследований их можно считать моментными и бесконечно большими.

Суммарный эффект от воздействия δ -функции в своей области определения равняется единице, что будет показано при дальнейшем изучении высшей математики. Такая функция используется для исследования аналоговых сигналов.

Единичный импульс

Единичным импульсом называется функция целочисленного аргумента

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ 0, & \text{если } n \neq 0, \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

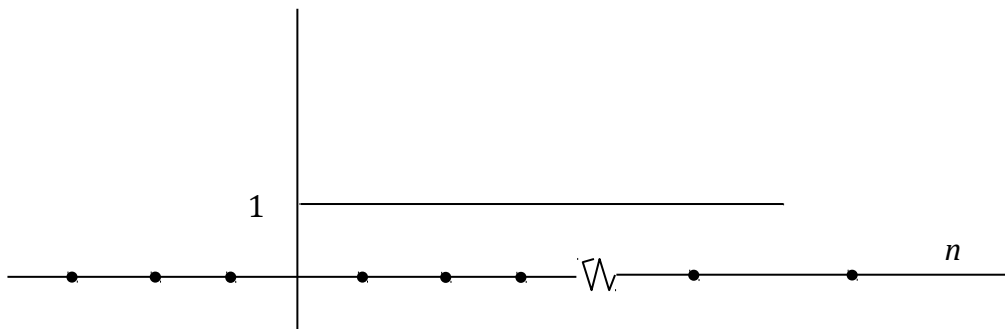
Функция $\delta(n)$ является дискретным аналогом функции $\delta(t)$.

Графическое изображение функции $\delta(n)$ представлено на рис. 3.7.

Наряду с функцией $\delta(n)$ используется функция $\delta(n - i)$, график которой получается из графика функции $\delta(n)$ вследствие параллельного переноса вдоль оси n на i единиц в положительном направлении:

$$\delta(n - i) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = i \\ 0, & \text{если } n \neq i \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Графическое изображение функции $\delta(n - i)$ представлено на рис. 3.8.



Одно из свойств функции $\delta(n - i)$ заключается в том, что с ее помощью можно описывать дискретные сигналы. Например, если $x(n)$ – определенный дискретный сигнал, то его можно представить в виде

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \delta(n - i),$$

где

$$x(i) \delta(n-i) = \begin{cases} x(n), & \text{если } n = i \\ 0, & \text{если } n \neq i \end{cases}$$

Единичная функция непрерывного аргумента

Единичной функцией непрерывного аргумента называется функция

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } t = 0; \\ 1, & \text{если } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Такая единичная функция является *симметричной* единичной функцией.

Наравне с симметричной функцией рассматриваются также *асимметричные* единичные функции

$$u_{-}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t < 0; \\ 1, & \text{если } 0 \leq t < +\infty \end{cases} \quad \text{и} \quad u_{+}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t \leq 0; \\ 1, & \text{если } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Графики этих функций представлены на рис. 3.9.

Рассмотренные функции используются в математике, физике, в теоретической радиотехнике, теории электрических цепей для исследования аналоговых сигналов.

Например, с помощью функции $u(t)$ удобно описывать включение электрической цепи с постоянным напряжением в момент $t = 0$.

Единичная функция дискретного аргумента

Единичной функцией дискретного аргумента называется функция

$$u(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n < 0; \\ 1, & \text{если } n \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Графическое изображение функции $u(n)$ представлено на рис. 3.10.

Наряду с функцией $u(n)$ используется функция $u(n - i)$, график которой получается из графика функции $u(n)$ вследствие параллельного переноса вдоль оси n на i единиц вправо:

$$u(n - i) = \begin{cases} 0, & \text{если } n < i \\ 1, & \text{если } n \geq i \end{cases}$$

Графическое изображение функции $u(n - i)$ представлено на рис. 3.11.

С помощью единичных функций дискретного аргумента удобно исследовать дискретные сигналы.

Синусоидные функции непрерывного аргумента

Рассмотрим такие функции непрерывного аргумента как $x(t) = \sin t$; $x(t) = \cos t$, где $x(t)$ – определенный аналоговый сигнал, – угловая частота.

График функции $x(t) = \sin t$ представлен на рис. 3.12 а), а график функции $x(t) = \cos t$ представлен на рис. 3.12 б).

С помощью данных функций исследуют определенные характеристики электрических цепей.

Синусоидные функции дискретного аргумента

Синусоидными функциями дискретного аргумента являются функции

$$x(n) = \sin n; \quad x(n) = \cos n,$$

где $x(n)$ – некоторый дискретный сигнал.

Дискретные синусоидные функции получают из аналоговых синусоидных функций с помощью дискретизации последних.

При специальном выборе шага дискретизации дискретные синусоидные функции могут быть периодическими.

Примеры к главе 3

Пример 3.1. Записать определение 1 непрерывной функции (п. 3.1) с помощью кванторов.

Р е ш е н и е

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

О т в е т: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 3.2. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

и определить их тип.

Р е ш е н и е

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

1. Функция не определена в точке $x = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$, а $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва I рода.

О т в е т: $x = 0$ – точка разрыва первого рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренную функцию часто обозначают $\text{sign } x$ (сигнум x , то есть знак x).

Пример 3.3. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

и определить их тип.

Р е ш е н и е

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

Функция не определена в точке $x = 0$. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3,$$

то $x = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Рассмотрим функцию $f(x)$, предполагая, что она определена в точке $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 3, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Полученная функция является непрерывной в точке $x = 0$. Такая процедура доопределения функции называется *продолжением по непрерывности*.

О т в е т: $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

Пример 3.4. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

и определить их тип.

Р е ш е н и е

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$, а $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$, то $x = 0$ является точкой разрыва II рода.

О т в е т: $x = 0$ – точка разрыва II рода.

Пример 3.5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 10, & \text{если } x \in (-\infty; -9); \\ 1, & \text{если } x \in [-9; -1]; \\ x^2, & \text{если } x \in (-1; 0); \\ \sin x, & \text{если } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right); \\ 4, & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

Построить график функции.

Р е ш е н и е

На каждом из промежутков задана элементарная функция, которая является непрерывной. Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва, то ими могут быть только те точки, в которых одна функция меняется на другую.

Итак, проверим, является ли непрерывной данная функция в точках $x = -9$; $x = -1$; $x = 0$; $x = \pi/2$.

Будем исходить из утверждения: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -9-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -9-0} (x + 10) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -9+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -9+0} 1 = 1; \quad f(-9) = 1;$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} 1 = 1; & \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 = 1; & f(-1) &= 1; \\
\lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0; & \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0; & f(0) &= 0; \\
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin x = 1; & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 4 = 4.
\end{aligned}$$

Следовательно, в точках $x = -9$, $x = -1$, $x = 0$ функция непрерывна, а в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция разрывна и точка $x = \frac{\pi}{2}$ является точкой разрыва I рода.

График функции $f(x)$ представлен на рис. 3.13.

О т в е т: $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва I рода.

Пример 3.6. Построить график функции $\varphi(x) = \sqrt[3]{x} - 3$, исходя из графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Р е ш е н и е

Области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. В обоих случаях $x \in (-\infty; +\infty)$. Соответствующие ординаты функции $\varphi(x)$ на три единицы меньше чем ординаты функции $f(x)$. Следовательно, график функции $\varphi(x)$ получим из графика функции $f(x)$ параллельным переносом его вдоль оси Oy .

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.14.

О т в е т: рисунок 3.14.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дополнительную информацию о построении графиков функций с помощью элементарных преобразований можно найти в Приложении И.

Пример 3.7. Построить график функции $\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 3$, исходя из графика функции $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Р е ш е н и е

Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $\varphi(x)$ можно получить из графика функции $f(x)$ паралельным переносом ее графика вправо на 3 единицы. Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.15.

О т в е т: рисунок 3.15.

Пример 3.8. Построить график функции $\varphi(x) = \frac{1}{2} \log_3 x$, исходя из графика функции $f(x) = \log_3 x$.

Р е ш е н и е

Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $x \in (0; \infty)$. График функции $\varphi(x)$ можно получить из графика функции $f(x)$ уменьшением модулей его ординат вдвое.

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.16.

О т в е т: рисунок 3.16.

Пример 3.9. Построить график функции $\varphi(x) = \log_3(-x)$, исходя из графика функции $f(x) = \log_3 x$.

Р е ш е н и е

Область определения функции $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$.

Область определения функции $\varphi(x)$: $x \in (-\infty; 0)$.

График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ как зеркальное отображение относительно оси Oy .

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.17.

О т в е т: рисунок 3.17.

Пример 3.10. Построить график функции $\varphi(x) = -\sin x$, исходя из графика функции $f(x) = \sin x$.

Р е ш е н и е

Области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ как зеркальное отображение относительно оси Ox .

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.18.

О т в е т: рисунок 3.18.

Пример 3.11. Построить график функции $\varphi(x) = \cos 3x$, исходя из графика функции $f(x) = \cos x$.

Р е ш е н и е

Области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ его сжатием втрое вдоль оси Ox , потому что основной период функции $f(x)$ равняется 2π , а основной период функции $\varphi(x)$ равняется $\frac{2\pi}{3}$.

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.19.

О т в е т: рисунок 3.19.

Пример 3.12. Построить график функции $\varphi(x) = |\arctg x|$, исходя из графика функции $f(x) = \arctg x$.

Р е ш е н и е

Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ как зеркальное отображение относительно оси Ox той части графика, которая находится под осью Ox . Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.20. и 3.21.

О т в е т: рисунок 2.31.

Пример 3.13. Построить график функции $\varphi(x) = \operatorname{tg}|x|$, исходя из графика функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е

Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x) : x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$. График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ как зеркальное отображение относительно оси Oy той части графика, которая находится справа от оси Oy вместо той части графика, которая находится слева от оси Oy .

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.22. и 3.23.

О т в е т: рисунок 3.23.

Пример 3.14. Построить график функции $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3$, исходя из графика функции $f(x) = x^2$.

Р е ш е н и е: Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x) : x \in (-\infty; +\infty)$

Запишем функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = x^2 - 4x + 4 - 1$ или $\varphi(x) = (x - 2)^2 - 1$.

Построим график функции $\varphi_1(x) = (x - 2)^2$, исходя из графика функции $f(x) = x^2$ его паралельным переносом на две единицы вправо

вдоль оси Ox . График функции $\varphi(x) = (x - 2)^2 - 1$ получим из графика функции $\varphi_1(x) = (x - 2)^2$ его параллельным переносом вдоль оси Oy на одну единицу вниз.

Графики функций $f(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.24.

О т в е т: рисунок 3.24.

Пример 3.15. Построить график функции $\varphi(x) = |x^2 - 4x + 3|$, исходя из графика функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Р е ш е н и е: Область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x): x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $\varphi(x)$ получается из графика функции $f(x)$ как зеркальное отображение относительно оси Ox той части графика функции $f(x)$, которая находится под осью Ox .

Графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 3.25 и 3.26.

О т в е т: рисунок 3.26.

Пример 3.16. Построить в одной системе координат графики функций $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = x + \cos x$.

Р е ш е н и е

Область определения функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x): x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функций $f_1(x)$, $f_3(x): y \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функции $f_2(x): y \in [-1; 1]$.

Построим графики функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \cos x$. Для построения графика функции $f_3(x) = x + \cos x$ целесообразно найти несколько точек, которые принадлежат графику функции $f_3(x)$. Ординаты этих точек равняются сумме ординат точек, которые принадлежат графикам функций

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ при одном и том же значении x .

Найденные значения функций представлены в таблицах:

x	6	5	4	3	2	1
$f_1(x)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_2(x)$	0,96	0,28	-0,65	-0,98	-0,41	0,54
$f_3(x)$	-5,04	-4,72	-4,65	-3,98	-2,41	-0,46

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	-0,41	-0,98	-0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	1	1,54	1,59	2,02	3,35	5,28	6,96

Значения функций в таблице являются приближенными.

График функции изображен на рис. 3.27.

О т в е т: рисунок 3.27.

ЗАМЕЧАНИЕ. График функции $f_3(x)$ можно построить, не составляя дополнительную таблицу. Достаточно построить графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. С помощью этих графиков геометрически строится график функции $f_3(x)$, ординатам точек графика которой отвечают отрезки, равны сумме отрезков, отвечающих ординатам точек графика функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если эти ординаты одного знака, и их разности в противоположном случае.

Пример 3.17. Построить в одной системе координат графики функций

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x - \cos x.$$

Р е ш е н и е: Область определения функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функций $f_1(x)$, $f_3(x)$: $y \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функции $f_2(x)$: $y \in [-1; 1]$.

Построим графики функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \cos x$. Для построения графика функции $f_3(x) = x - \cos x$ составим вспомогательную таблицу:

x	6	5	4	3	2	1
$f_1(x)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_2(x)$	0,96	0,28	-0,65	-0,98	-0,41	0,54
$f_3(x)$	-6,96	-5,28	-3,35	-2,02	-1,59	-1,54

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	-0,41	-0,98	-0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	-1	0,46	2,41	3,98	4,65	4,72	5,04

Значения функций в таблице являются приближенными. График функции изображен на рис. 3.28.

О т в е т: рисунок 3.28.

ЗАМЕЧАНИЕ. График функции $f_3(x)$ можно построить, не составляя вспомогательную таблицу. Достаточно построить графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. С помощью этих графиков геометрически строится график функции $f_3(x)$, ординатам точек графика которой отвечают отрезки, равные разности отрезков, отвечающих разности ординат точек графика функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если эти ординаты одного знака, и их сумме в противоположном случае.

Пример 3.18. Построить в одной системе координат графики функций

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = x \cos x.$$

Р е ш е н и е

Область определения функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Область значений функций $f_1(x)$, $f_3(x)$: $y \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функции $f_2(x)$: $y \in [-1; 1]$.

Построим графики функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \cos x$. Для построения графика функции $f_3(x) = x \cos x$ составим вспомогательную таблицу:

x	—	—	—	—	—	—	—
-----	---	---	---	---	---	---	---

	6	5	4	3	2	1
f	6	5	4	3	2	1
$f_2(x)$	0,96	0,28	-0,65	-0,98	-0,41	0,54
$f_3(x)$	-5,76	-1,4	-2,6	-2,94	-0,82	-0,54

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	-0,41	-0,98	-0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	0	0,54	-0,82	-2,94	-2,6	1,4	5,76

Значения функций в таблице являются приближенными.
График функции изображен на рис. 3.29.

Рисунок 3.29

О т в е т: рисунок 3.29.

ЗАМЕЧАНИЕ. График функции $f_3(x)$ можно построить, не составляя вспомогательную таблицу. Достаточно построить графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. С помощью этих графиков геометрически строится график функции $f_3(x)$, ординатам точек графика которой отвечают отрезки, величины которых равняются произведениям величин отрезков, которые отвечают ординатам функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. При этом, если ординаты точек графика функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ одного знака, то соответствующий отрезок, который определяет ординаты точек графика $f_3(x)$, размещается над осью Ox и под осью Ox в противоположном случае.

Пример 3.19. Построить график функции $y = \left[\frac{1}{4}x^2 \right]$ и исследовать эту функцию на непрерывность.

Р е ш е н и е

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in [0; +\infty)$. Интервалы непрерывности: $x \in ([x]; [x] + 1)$.

Точки разрыва функции: $x = k$, где $k \in Z$. Все точки разрыва являются точками устранимого разрыва.

График функции $y = \left[\frac{1}{4}x^2 \right]$ представлен на рис. 3.30.

Рисунок 3.30

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $y = [x]$ называется *антье* x и определяет целую часть от x , где $x \in (-\infty; +\infty)$. Соответственно функция $y = [f(x)]$ называется *антье* $f(x)$. Иногда для этой функции используют такое обозначение: $y = E(x)$.

Функция $y = \{x\}$ определяет *дробную часть* x , где: $x \in (-\infty; +\infty)$. При этом $\{x\} = x - E(x)$.

О т в е т: $x = k$, где $k \in Z$ – точки разрыва I рода, рисунок 3.30.

Задание для самостоятельной работы. Построить график функции

$$y = \{ x \}.$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t| > \frac{\tau}{2}; \\ h \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{если } |t| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Пример 3.20. Функцией задан импульс, называемый косинусоидным импульсом. Этот импульс характеризуется функцией

$$S(\omega) = \frac{2\pi h}{\tau} \times \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2},$$

которая называется *спектральной плотностью*, а ее модуль $|S(\omega)|$ – *спектром сигнала*. Построить графики функций $f(t)$ и $|S(\omega)|$.

Решение

При $h = 2$ и $\tau = 1$ график функции $f(t)$ представлен на рис. 3.31.

Для построения графика функции $|S(\omega)|$ найдем вспомогательные точки

$$S(0) = \frac{2\pi h}{\tau} \frac{1}{\frac{\pi^2}{\tau^2}} = \frac{2h\tau}{\pi}.$$

Найдем нули функции:

$$\frac{2\pi h}{\tau} \times \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2} = 0.$$

Тогда $\cos \frac{\omega \tau}{2} = 0$, откуда $\frac{\omega \tau}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Если $n = 0$, то $\frac{\omega \tau}{2} = -\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\omega \tau}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда $\omega = -\frac{\pi}{\tau}$ и $\omega = \frac{\pi}{\tau}$.

Если $n = 1$, то $\frac{\omega \tau}{2} = \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\omega \tau}{2} = \frac{5\pi}{2}$, откуда $\omega = \frac{3\pi}{\tau}$ и $\omega = \frac{5\pi}{\tau}$.

Если $n = -1$, то $\frac{\omega \tau}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\omega \tau}{2} = -\frac{5\pi}{2}$, откуда $\omega = -\frac{3\pi}{\tau}$ и $\omega = -\frac{5\pi}{\tau}$, и так далее.

Знаменатель функции $|S(\omega)|$ равняется нулю в точках $\omega = -\frac{\pi}{\tau}$ и $\omega = \frac{\pi}{\tau}$

, то есть, найденные ранее такие нули функции $\cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$, как $\omega = -\frac{\pi}{\tau}$ и $\omega = \frac{\pi}{\tau}$, нельзя считать нулями функции $|S(\omega)|$. Остальные нули этой функции с корнями знаменателя не совпадают.

Найдем значение функции $S(\omega)$ в точках $\omega = -\frac{\pi}{\tau}$ и $\omega = \frac{\pi}{\tau}$.

$$S(\omega) = \frac{2\pi h}{\tau} \times \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2} \quad \Phi(\omega) = \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2} \quad S(\omega) = \frac{2\pi h}{\tau} \Phi(\omega).$$

. Обозначим . Тогда

Пусть

$$A = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{\tau}} \Phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{\tau}} \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau} - \omega\right)\left(\frac{\pi}{\tau} + \omega\right)} = \frac{\tau}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{\tau}} \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau} - \omega\right)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сделаем замену $\frac{\pi}{\tau} - \omega = z$, тогда $\omega = \frac{\pi}{\tau} - z$, $\frac{\omega \tau}{2} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\pi}{\tau} - z\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\tau z}{2}$.

$$\cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\tau z}{2}\right) = \sin\left(\frac{\tau z}{2}\right).$$

Если $\omega \rightarrow \frac{\pi}{\tau}$, то $z \rightarrow 0$. Тогда $A = \frac{\tau}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\tau z}{2}}{z} = \frac{\tau}{2\pi} \times \frac{\tau}{2} = \frac{\tau^2}{4\pi}$.

Теперь имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{\tau}} S(\omega) = \frac{2\pi h}{\tau} \times \frac{\tau^2}{4\pi} = \frac{h\tau}{2}.$$

Учитывая то, что функция $S(\omega)$ является четной функцией относительно ω , получим графики функций $S(\omega)$ и $|S(\omega)|$ (при $h = 2$, $\tau = 1$) (рис. 3.32 и 3.33).

О т в е т: рисунки 3.32; 3.33.

Пример 3.21. Доказать, что функция $y = \sin x$ является равномерно непрерывной в своей области определения.

Доказательство

Область определения функции $y = \sin x : x \in (-\infty ; +\infty)$.

Возьмем любые значения x_1 и x_2 и оценим модуль разности:

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \cdot 1 = |x_2 - x_1|.$$

Выберем любое сколь угодно малое положительное число ε .

Допустим, что $\delta = \varepsilon$. Тогда из условия $|x_2 - x_1| < \delta$ следует, что $|\sin x_2 - \sin x_1| < \varepsilon$. То есть, функция $y = \sin x$ является равномерно непрерывной в своей области определения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется последовательностью?
2. Какая последовательность называется возрастающей?
3. Какая последовательность называется ограниченной?
4. Какая последовательность называется бесконечно малой?
5. Какая последовательность называется бесконечно большой?
6. Сформулируйте свойства бесконечно малых последовательностей?
7. Сформулируйте свойства бесконечно больших последовательностей?
8. Существует ли связь между неограниченной и бесконечно большой последовательностями?
9. Какая последовательность называется сходящейся?
10. Сформулируйте свойства сходящихся последовательностей.
11. Сформулируйте теорему Гурьева для последовательностей.
12. Сформулируйте определение предела функции по Коши.
13. Сформулируйте определение предела функции по Гейне.
14. Что называется односторонним пределом функции?
15. Сформулируйте арифметические теоремы о пределах функций.
16. Запишите формулу, называемую первым замечательным пределом, и следствия из этой формулы.
17. В каком случае бесконечно малые функции называются сравнимыми?
18. Что называется порядком малости бесконечно малой функции?
19. Непрерывна ли функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (-\infty; 0] \\ 0, & \text{если } x \in (0; +\infty) \end{cases}$?
20. Непрерывна ли функция $f(x) = \frac{x}{|x|}$?
21. Непрерывна ли функция $f(x) = [x]$?
22. Может ли график функции быть окружностью?
23. Может ли функция быть непрерывной в точке, в которой она не определена?
24. Может ли функция быть непрерывной в точке $x = x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует?
25. Если функция $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то обязательно ли эта функция является непрерывной в точке x_0 ?

ПРОВЕРОЧНЫЕ ТЕСТЫ

1. Задана последовательность $\left\{ n + \frac{4}{n} \right\}$. Какое из утверждений справедливо:
- 1) последовательность является ограниченной снизу;
 - 2) последовательность является ограниченной сверху;
 - 3) последовательность является неограниченной;
 - 4) другой ответ?

2. Задана последовательность $\left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$. Какое из утверждений справедливо:
- 1) последовательность является возрастающей;
 - 2) последовательность является невозрастающей;
 - 3) последовательность является неубывающей;
 - 4) другой ответ?

3. Задана последовательность $\left\{ \frac{4n+1}{5n^2-1} \right\}$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{5n^2-1} = \frac{4}{5}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{5n^2-1} = 0$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{5n^2-1} = \infty$;
4) другой ответ?

4. Задана последовательность $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right\}$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = -e$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$;
4) другой ответ?

5. Задана функция $y = 5x - 7$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) функцией, обратной к заданной, является функция $x = 5y - 7$;
- 2) функцией, обратной к заданной, является функция $y = \frac{1}{5x - 7}$;
- 3) функцией, обратной к заданной, является функция $x = \frac{1}{5}(y + 7)$;
- 4) другой ответ?

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - x - 1} = A$. Какое из утверждений справедливо:

$$1) A = \frac{1}{5}; 2) A = 0; 3) A = \frac{16}{41}; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - x - 1} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{1}{5}; 2) A = 0; 3) A = \frac{16}{41}; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 5x} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{4}{5}; 2) A = \frac{5}{4}; 3) A = 0; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4x}{\sin 5x} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{4}{5}; 2) A = \frac{5}{4}; 3) A = 0; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{3}{4}; 2) A = \frac{4}{3}; 3) A = 0; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{2}{3}; 2) A = \frac{3}{2}; 3) A = 0; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$12. \text{ Заданы функции } y = \sin^3 5x; y = x. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) \sin^3 5x = o(x), \text{ при } x \rightarrow 0; \quad 2) \sin^3 5x = O(x), \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$3) x = o(\sin^3 5x), \text{ при } x \rightarrow 0; \quad 4) \text{ другой ответ?}$$

$$13. \text{ Задана функция } y = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{x-1}}. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) \text{ функция является непрерывной в точке } x = 1;$$

$$2) \text{ функция имеет устранимый разрыв в точке } x = 1;$$

$$3) \text{ функция имеет разрыв I рода в точке } x = 1;$$

$$4) \text{ другой ответ?}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x). \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) \text{ функция в точке } x = x_0 \text{ является непрерывной;}$$

$$2) \text{ функция в точке } x = x_0 \text{ имеет устранимый разрыв;}$$

$$3) \text{ недостаточно информации;}$$

$$4) \text{ другой ответ?}$$

$$15. \text{ Задана функция } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

- 1) функция в точке $x = 0$ является непрерывной;
- 2) функция в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв;
- 3) функция в точке $x = 0$ имеет разрыв I рода;
- 4) другой ответ?

16. Задана функция $f(x) = \frac{|2x - 5|}{2x - 5}$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) скачок функции в точке $x_0 = \frac{5}{2}$ равняется 0;
- 2) скачок функции в точке $x_0 = \frac{5}{2}$ равняется 1;
- 3) скачок функции в точке $x_0 = \frac{5}{2}$ равняется -1;
- 4) другой ответ?

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k} = A$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $A = \frac{a_0}{b_0}$, если $n > k$;
- 2) $A = \frac{a_n}{b_k}$, если $n > k$;
- 3) $A =$, если $n > k$;
- 4) другой ответ?

18. Заданы бесконечно малые функции $f_1(x) = \arcsin x^2$ и $f_2(x) = \arctg^2 x$, при $x \rightarrow 0$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются несравнимыми бесконечно малыми;
- 2) $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми;
- 3) $\arcsin x^2 = o(\arctg^2 x)$;
- 4) другой ответ?

19. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = +\infty$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 4$;
- 4) другой ответ?

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 3x}{3x - \sin 3x} = A$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $A = 3$;
- 2) $A = 1$;
- 3) $A =$;
- 4) другой ответ?

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 8}{x^6 - 6} = A$. Какое из утверждений справедливо:

- 1) $A = \frac{4}{3}$;
- 2) $A = \frac{3}{4}$;
- 3) $A = 0$;
- 4) другой ответ?

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\cos 7x - 1} = A$. Какое из утверждений справедливо:

$$1) A = -\frac{6}{7}; 2) A = -\frac{36}{49}; 3) A = 0; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{\sin 6x} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = \frac{2}{3}; 2) A = -\frac{1}{24}; 3) A = -24; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 9x - \sin 8x} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = 7; 2) A = \frac{1}{7}; 3) A = ; 4) \text{ другой ответ?}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = A. \text{ Какое из утверждений справедливо:}$$

$$1) A = ; 2) A = 3; 3) A = \frac{1}{4}; 4) \text{ другой ответ?}$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь определением сходящейся последовательности, доказать справедливость заданных равенств.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+9}{4n+132} = \frac{5}{4} \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-40+11n}{7n-27648} = \frac{1}{7} \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+10}{4n+143} = \frac{5}{4}$$

$$01. \quad . \quad .02. \quad . \quad .03. \quad .$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-42+11n}{7n-30000} = \frac{11}{7} \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+11}{4n+154} = \frac{5}{4} \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19n+56}{59-19n} = -1$$

$$04. \quad . \quad .05. \quad . \quad .06. \quad .$$

$$1.07. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+12}{4n+165} = \frac{5}{4} \quad 1.08. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19n+58}{61-19n} = -1 \quad 1.09. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{60n+900}{n} = 60$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19n+60}{63-19n} = -1 \quad 1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35+4n}{4096+96n} = \frac{1}{24} \quad 1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19n+62}{65-19n} = -1$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{37+4n}{4624+102n} = \frac{2}{51} \quad 1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{52n+676}{n} = 52 \quad 1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{39+4n}{4900+108n} = \frac{1}{27}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{54n+739}{n} = 54 \quad 1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{41+4n}{5776+114n} = \frac{2}{57} \quad 1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{56n+784}{n} = 56$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{43+4n}{6400+120n} = \frac{1}{30} \quad 1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{58n+841}{n} = 58 \quad 1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-34+11n}{7n-21168} = \frac{11}{7}$$

$$\mathbf{1.22.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{62n + 961}{n} = 62.$$

$$\mathbf{1.23.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-36 + 11n}{7n - 232} = \frac{11}{7}.$$

$$\mathbf{1.24.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36 + 4n}{4356 + 99n} = \frac{4}{99}.$$

$$\mathbf{1.25.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-38 + 11n}{7n - 25392} = \frac{11}{7}.$$

2. Найти пределы функций при заданных значениях α и β

2.01. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^\alpha + 4x^2 + 7x - 11}{3x^\beta - 5x^2 + x - 7}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 7; \beta = 3;$

3) $\alpha = 5; \beta = 7.$

2.03. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha + x^2 + x + 9}{6x^\beta - 3x^2 + 15x - 3}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 5;$

3) $\alpha = 3; \beta = 9.$

2.05. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha + x^2 + x + 24}{x^\beta - x^2 + 3x - 25}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 4; \beta = 3;$

3) $\alpha = 4; \beta = 5.$

2.07. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^\alpha + x^2 + 35}{x^\beta - 14x^2 + 15x - 13}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 8; \beta = 4;$

3) $\alpha = 3; \beta = 8.$

2.09. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^\alpha + 6x^2 + x - 7}{x^\beta - x^2 + x - 1}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 7; \beta = 6;$

3) $\alpha = 6; \beta = 9.$

2.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^\alpha + 15x^2 + 10x - 12}{8x^\beta - 9x^2 + 7x + 13}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 9; \beta = 4;$

3) $\alpha = 8; \beta = 9.$

2.02. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^\alpha + 4x^2 - 21}{3x^\beta - 5x^2 + 2x + 4}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 5; \beta = 4;$

3) $\alpha = 8; \beta = 10.$

2.04. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^\alpha + 3x^2 + 2x - 7}{3x^\beta - x^2 + 7x + 11}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 6;$

3) $\alpha = 7; \beta = 10.$

2.06. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^\alpha + 8x^2 + 2x - 11}{5x^\beta - 3x^2 + 2x + 3}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 5; \beta = 4;$

3) $\alpha = 9; \beta = 10.$

2.08. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^\alpha + 4x^2 + 2x - 3}{2x^\beta - 5x^2 + x - 7}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 6;$

3) $\alpha = 4; \beta = 5.$

2.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^\alpha + 3x^2 + 7x - 3}{4x^\beta - 6x^2 + 2x + 7}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 9; \beta = 8;$

3) $\alpha = 3; \beta = 10.$

2.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^\alpha + 5x^2 + 7x + 2}{7x^\beta - 7x^2 + x - 6}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 8; \beta = 3;$

3) $\alpha = 5; \beta = 6.$

2.13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha + 2x^2 + 7x - 11}{3x^\beta - 11x^2 + x + 6}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 6;$

3) $\alpha = 7; \beta = 8.$

2.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^\alpha + 9x^2 - 5x - 4}{4x^\beta + 2x^2 - 9x + 1}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 8; \beta = 5;$

3) $\alpha = 4; \beta = 8.$

2.19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^\alpha - 3x^2 + 9x + 2}{2x^\beta + 3x^2 + x - 8}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 8; \beta = 7;$

3) $\alpha = 5; \beta = 6.$

2.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 9x + 4x - 2}{x - 5x + x + 6}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 6; \beta = 4;$

3) $\alpha = 5; \beta = 7.$

2.23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^\alpha + x^2 - 7x + 2}{11x^\beta - x^2 + x - 4}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 8;$

3) $\alpha = 6; \beta = 9.$

2.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^\alpha + 8x^2 + 3x + 5}{6x^\beta - 5x^2 + 8x + 7}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 5; \beta = 4;$

3) $\alpha = 4; \beta = 6.$

2.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^\alpha + 3x^2 + x - 3}{9x^\beta - 4x^2 + 9x + 7}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 8;$

3) $\alpha = 3; \beta = 4.$

2.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha + 4x^2 + 4x - 2}{4x^\beta - 4x^2 + 2x - 3}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 5; \beta = 3;$

3) $\alpha = 9; \beta = 10.$

2.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^\alpha + 3x^2 + 5x + 5}{7x^\beta - 11x^2 + 5x - 9}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 5; \beta = 4;$

3) $\alpha = 7; \beta = 10.$

2.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^\alpha + 11x^2 + 7x + 4}{3x^\beta - 5x^2 + 4x - 5}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 8; \beta = 3;$

3) $\alpha = 8; \beta = 10.$

2.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^\alpha + 7x^2 + 11x + 7}{5x^\beta - 7x^2 + 7x - 5}$

1) $\alpha = 3; \beta = 3;$

2) $\alpha = 10; \beta = 5;$

3) $\alpha = 3; \beta = 8.$

3. Найти пределы последовательностей.

- 3.0. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5 + n^2} + \sqrt{4n + 12}}{\sqrt[6]{9n^5 + 4}}.$
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7 + 5}}{\sqrt[6]{n^6 + 9} + \sqrt[3]{n^2 + 24}}.$
- 3.03. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{15 + n^7 + 4n^6 + n}}{n^2 + \sqrt{n^2 + 25}}.$
- 3.05. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{8n^8 + 7n^7 + 6n^6 + 5n^5 + 4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}}{\sqrt[4]{2401 + n^4} + \sqrt{n^3 + 343}}.$
- 3.07. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{59049n^5 + 1}}{\sqrt[6]{9n^3 + 729} + \sqrt[3]{n^6 + 1}}.$
- 3.09. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{6 + n^4} + n\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^9 + 1}}.$
- 3.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + n + \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt[4]{3 + n^5}}.$
- 3.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{25 + n^2} + \sqrt{25 + n^2}}{\sqrt[6]{n^6 + 5n^5 + 10n^4}}.$
- 3.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^3 + 2n^2 + n + 1}}{\sqrt{49 + n^2} + \sqrt[6]{n^6 + 1}}.$
- 3.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 1} + \sqrt[3]{n^2 + 2} + \sqrt[4]{n^3 + 3}}{\sqrt[5]{n^4 + 9}}.$
- 3.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7 + 3}}{\sqrt[6]{n^6 + 1} + \sqrt[3]{n^2 + 8}}.$
- 3.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{9 + n^7 + 4n^6 + n}}{n^2 + \sqrt{n^2 + 9}}.$
- 3.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{8n^8 + 7n^7 + 6n^6 + 5n^5 + 4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}}{\sqrt[4]{625 + n^4} + \sqrt{n^3 + 125}}.$
- 3.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{7 + 4n^4} + n\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^9 + 2}}.$
- 3.0. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{7 + 4n^4} + n\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^9 + 2}}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 + n + \sqrt{16n^2 + 1}}{\sqrt[4]{4 + n^5}}.$
- 3.04. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{36 + n^2} + \sqrt{n^2 + 36}}{\sqrt[6]{n^6 + 6n^5 + 12n^4}}.$
- 3.06. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^3 + 2n^2 + n + 1}}{\sqrt{64 + n^2} + \sqrt[6]{n^6 + 1}}.$
- 3.08. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n + 1} + \sqrt[3]{n^2 + 2} + \sqrt[4]{n^3 + 3}}{\sqrt[5]{n^4 + 10}}.$
- 3.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7 + 7}}{\sqrt[6]{n^6 + 4} + \sqrt[3]{n^2 + 16}}.$
- 3.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{12 + n^7 + 4n^6 + n}}{n^2 + \sqrt{n^2 + 16}}.$
- 3.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{8n^8 + 7n^7 + 6n^6 + 5n^5 + 4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}}{\sqrt[4]{1296 + n^4} + \sqrt{n^3 + 216}}.$
- 3.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32768n^5 + 1}}{\sqrt[6]{n^3 + 512} + \sqrt[3]{n^6 + 1}}.$
- 3.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{50 + n^2} + \sqrt{40n + 21}}{\sqrt[6]{9n^5 + 13}}.$
- 3.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + n + \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt[4]{2 + n^5}}.$
- 3.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16 + n^2} + \sqrt[3]{16 + n^2}}{\sqrt[6]{n^6 + 4n^5 + 8n^4}}.$
- 3.24.

4. Найти предельное значение функции в точке x_0 .

4.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^3 + 3x^2 - 3x - 4}{4x^3 - 3x^2 + 9x - 10}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^3 + 9x^2 - 3x - 12}{7x^3 - 3x^2 + 3x - 7}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{2x^3 + x^2 + x + 2}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{12x^3 + x^2 + x + 12}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^3 + 5x^2 + 10x - 21}{8x^3 + x^2 + 7x - 16}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4x - 3}{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.7. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{14x^3 - 3x^2 + 2x + 19}{3x^3 - x^2 + 4x + 8}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.8. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 - 5x^2 - 7x + 10}{5x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.9. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 12}{x^3 - 3x^2 - x + 51}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -3$.

4.10. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{10x^3 + 3x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 - 2x}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.11. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{3x^3 - x^2 - 2x}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.12. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{11x^3 + 9x^2 - 7x - 13}{9x^3 - 7x^2 + 5x - 7}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.13. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 2}{5x^3 - 4x^2 + 3x - 4}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.15. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^3 + 7x^2 - 2x - 9}{12x^3 - 8x^2 + 4x - 8}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.17. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 + 4x^2 + 7x + 14}{3x^3 - 5x^2 + x + 46}$
 1) $x_0 = 3$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -2$.

4.19. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + x^2 + x + 6}{6x^3 - 3x^2 + 15x + 90}$
 1) $x_0 = 3$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -2$.

4.21. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 - x^2 - 3x - 1}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.23. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^3 - 3x^2 + 15x + 19}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.25. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^3 + 6x^2 + x - 10}{x^3 - x^2 + x - 1}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.14. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^3 + 4x^2 - 2x - 3}{7x^3 - 4x^2 + 5x + 16}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.16. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{3x^3 - 11x^2 + x + 15}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.18. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{7x^3 - 5x^2 - 2x + 10}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = -1$.

4.20. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^3 + 3x^2 + 2x - 48}{3x^3 - x^2 + 7x - 34}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 3$; 4) $x_0 = 2$.

4.22. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^3 + 8x^2 + 2x - 15}{5x^3 - 3x^2 + 2x - 4}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

4.24. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^3 + 4x^2 + 2x - 12}{2x^3 - 5x^2 + x + 2}$
 1) $x_0 = -2$; 2) $x_0 = 0$;
 3) $x_0 = 2$; 4) $x_0 = 1$.

5. Найти предельное значение функции в точке x_0 .

- .01.** 5 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{4x+14} - \sqrt{12+3x}}{\sqrt{20x+47} - \sqrt{3-2x}}$ **.02.** 5 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{10x+28} - \sqrt{26+11x}}{\sqrt{20x+9} - \sqrt{11+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = -2$ 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 4$.
- 5.03.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{4x+15} - \sqrt{13+3x}}{\sqrt{20x+47} - \sqrt{3-2x}}$ **5.04.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{11x+28} - \sqrt{26+12x}}{\sqrt{30x+4} - \sqrt{26+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = -2$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 2$.
- 5.05.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{6x+16} - \sqrt{14+5x}}{\sqrt{20x+47} - \sqrt{3-2x}}$ **5.06.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{11x+30} - \sqrt{28+12x}}{\sqrt{30x+10} - \sqrt{32+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = -1$; 3) $x_0 = -2$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 6$.
- 5.07.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{5x+20} - \sqrt{18+4x}}{\sqrt{1-5x} - \sqrt{3-4x}}$ **5.08.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{11x+30} - \sqrt{26+12x}}{\sqrt{30x+10} - \sqrt{54+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = -1$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 4$.
- 5.09.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{6x+20} - \sqrt{18+5x}}{\sqrt{35x+72} - \sqrt{6+2x}}$ **5.10.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{21x+30} - \sqrt{66+12x}}{\sqrt{30x+10} - \sqrt{54+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = -2$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 4$.
- 5.11.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{5x+26} - \sqrt{28+6x}}{\sqrt{10x+40} - \sqrt{15x+50}}$ **5.12.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{31x+30} - \sqrt{106+12x}}{\sqrt{20x+10} - \sqrt{14+19x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 2$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 3$; 3) $x_0 = 4$.
- 5.13.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{10x+28} - \sqrt{26+11x}}{\sqrt{10x+16} - \sqrt{15x+6}}$ **5.14.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{41x+30} - \sqrt{146+12x}}{\sqrt{10x+10} - \sqrt{6+11x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 2$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 4$; 3) $x_0 = 5$.
- 5.15.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{51x+30} - \sqrt{186+12x}}{\sqrt{15x+10} - \sqrt{26+11x}}$ **5.16.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{4x+6} - \sqrt{9+3x}}{\sqrt{10x+50} - \sqrt{59+7x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 3$; 3) $x_0 = 4$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 3$.
- 5.17.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{5x+40} - \sqrt{16+8x}}{\sqrt{15x+10} - \sqrt{18+14x}}$ **5.18.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{6x+12} - \sqrt{9+7x}}{\sqrt{10x+55} - \sqrt{64+7x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 8$. 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 3$.

5.19. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{2x+44} - \sqrt{4+7x}}{\sqrt{15x+10} - \sqrt{18+14x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 8$.

5.21. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{3x+36} - \sqrt{4+7x}}{\sqrt{15x+20} - \sqrt{28+14x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 2$; 3) $x_0 = 8$.

5.23. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{36x+36} - \sqrt{4+40x}}{\sqrt{18x+20} - \sqrt{28+17x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 4$; 3) $x_0 = 8$.

5.25. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{36x+56} - \sqrt{24+40x}}{\sqrt{18x+40} - \sqrt{48+17x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 5$; 3) $x_0 = 8$.

5.20. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{7x+12} - \sqrt{9+8x}}{\sqrt{10x+60} - \sqrt{69+7x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 3$; 3) $x_0 = 4$.

5.22. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{12x+17} - \sqrt{14+13x}}{\sqrt{15x+60} - \sqrt{69+12x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 3$; 3) $x_0 = 5$.

5.24. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{12x+28} - \sqrt{22+13x}}{\sqrt{15x+10} - \sqrt{46+9x}}$
 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 3$; 3) $x_0 = 6$.

6. Найти пределы функций.

01. 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x \operatorname{arctg} 3x}{\sin 4x \operatorname{tg} 4x}$.

.02. 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{x \cos x}$.

6.03. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x$.

6.04. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$.

6.05. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x \operatorname{arctg} x}{x \operatorname{tg}^2 3x}$.

6.06. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x}$.

6.07. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 3x \arccos 4x}{\operatorname{arctg} 5x}$.

6.08. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 7x}{\cos 8x - \cos 9x}$.

6.09. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

6.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x \sin^2 x}{\operatorname{tg} x}$.

6.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \sin 5x}$.

6.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} 2x)^2}{x \sin 5x}$.

6.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{arctg} x}{7(\arcsin x)^2}$.

6.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 8x}{3 - \sqrt{9 - x^2}}$.

$$6.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 9x}{\sin 5x - \sin 9x}.$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \cos 11x)^2}{1 - \cos 11x}.$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \arcsin 7x}{\sin 6x \operatorname{arctg} 8x}.$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x - \sin 5x}{x \sin^2 5x}.$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x \cos x \operatorname{arctg} 2x}{\sin x}.$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x \operatorname{tg}^3 6x}{\arcsin^5 7x}.$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 25x}{(7 - \sqrt{49 - x^2})}.$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{7x \sin x}.$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{11 - \sqrt{121 - x^2}}.$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cos 5x \cos 6x}{x \operatorname{ctg} 3x}.$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}.$$

7. Найти пределы последовательностей и функций.

$$7.01. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 12}{n^2 - 2} \right)^{\frac{2n+1}{n}}.$$

$$7.02. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 3}{3n^2 + 8n - 12} \right)^{\frac{4n+2}{n}}.$$

$$7.03. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 4n + 3}{5n^2 + 21n + 1} \right)^{\frac{9n^2 + 4n + 3}{n}}.$$

$$7.04. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n + 11}{8n + 18} \right)^{\frac{n^2 + 8n + 4}{n}}.$$

$$7.05. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n + 12}{7n + 5} \right)^{\frac{n^2 - 25}{n}}.$$

$$7.06. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n - 42n^2}{96 - 42n^2} \right)^{\frac{4n^2 + 36}{n}}.$$

$$7.07. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{49 - n^2}{3 - n^2 + n} \right)^{\frac{2n+7}{n}}.$$

$$7.08. \lim_{x \rightarrow 0} (8x + 9x^2 + 1)^{\frac{8}{x^3 + 4x}}.$$

$$7.09. \lim_{x \rightarrow 0} (9x^2 + 14x + 1)^{\frac{7(x+9)}{x^2 + 8x}}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow 0} (80x^2 + 9x + 1)^{\frac{16(10-3x)}{5x+4x^2}}.$$

$$7.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 4}{3n^2 + 8n - 12} \right)^{\frac{4n+1}{n}}.$$

$$7.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 4n + 2}{5n^2 + 14n + 1} \right)^{\frac{9n^2 + 4n + 2}{n}}.$$

$$7.13. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+11}{6n+18} \right)^{\frac{n^2+8n+3}{n}}.$$

$$7.14. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+12}{7n+4} \right)^{\frac{n^2-16}{n}}.$$

$$7.15. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n-35n^2}{80-35n^2} \right)^{\frac{4n^2+5}{n}}.$$

$$7.16. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{36+5n^2}{3+n+5n^2} \right)^{\frac{2n+6}{n}}.$$

$$7.17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(7x+9x^2+1 \right)^{\frac{7}{x^3-5x}}.$$

$$7.18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(8x^2+14x+1 \right)^{\frac{7(x+8)}{9x^2}}.$$

$$7.19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(72x^2+9x+1 \right)^{\frac{16(9+3x^2)}{5+x}}.$$

$$7.20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(5x^2-9x+1 \right)^{\frac{15(9-13x)}{5+8x+30x^2}}.$$

$$7.21. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+4n+1}{5n^2+7n+1} \right)^{\frac{9n^2+4n+1}{n}}.$$

$$7.22. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+11}{4n+18} \right)^{\frac{n^2+8n+2}{n}}.$$

$$7.23. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+12}{7n+3} \right)^{\frac{n^2-9}{n}}.$$

$$7.24. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n-28n^2}{64-28n^2} \right)^{\frac{4n^2+16}{n}}.$$

$$7.25. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{25-n^2}{3+n-n^2} \right)^{\frac{2n+5}{n}}.$$

8. Найти пределы функций

$$8.01. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \pi x \right)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}.$$

$$8.02. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$8.03. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$8.04. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos 2x}{1 + \sin x \cos 3x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.05. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.06. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$8.07. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \right)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}.$$

$$8.08. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$8.09. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$8.10. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$8.11. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(3-2x \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$8.12. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}.$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} \cos 5x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}.$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - 2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}.$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}.$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x} - 1}}.$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

9. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и определить тип точек разрыва. Построить схематический график функции $f(x)$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0; \quad x < \\ -\cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + x, & \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}}.$$

$$9.02. \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leq -2; \\ 2-x, & \text{если } -2 < x < 0; \\ x^2+2, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

$$9.03. \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } -1 < x \leq \frac{\pi}{6}; \\ \sin x, & \text{если } x > \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x+2}}}.$$

$$9.04. \quad f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{если } x \leq -3; \\ 3x, & \text{если } -3 < x \leq 1; \\ 5, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 1 - \frac{1}{2^x}.$$

$$9.05. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -1; \\ 2-2x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ \ln x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 1.$$

$$9.06. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{если } x < -2; \\ x, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 1-x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x-1}} + 1}{2^{\frac{1}{x-1}} - 1}.$$

$$9.07. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{4-x}, & \text{если } x < 0; \\ \cos 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ -x, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}.$$

$$9.08. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq -\pi; \\ -1, & \text{если } -\pi < x \leq 0; \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}} + 1.$$

$$9.09. \quad f(x) = \begin{cases} x+\pi, & \text{если } x \leq -\pi; \\ \sin x, & \text{если } -\pi < x < 0; \\ 3-2x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 7^{\frac{1}{2-x}} - 2.$$

$$9.10. \quad f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{если } x \leq -2; \\ 3x+2, & \text{если } -2 < x \leq 2; \\ 12-x^2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = \frac{2}{3+6^{\frac{1}{x+2}}}.$$

$$9.11. \quad f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < -1; \\ 1, & \text{если } x = -1; \\ x-1, & \text{если } x \leq 4; \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 2 - \frac{|x|}{x}.$$

$$9.12. \quad f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 4 - 2x, & \text{если } 1 < x \leq 5; \\ 2x - 7, & \text{если } 5 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

а)

$$9.13. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{если } x = \frac{\pi}{4} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

а)

$$9.14. \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ \cos x, & \text{если } 1 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а)

$$9.15. \quad f(x) = \begin{cases} 0,5x^2, & \text{если } |x| \leq 2 \\ 2,5, & \text{если } |x| = 2 \\ 3, & \text{если } |x| > 2 \end{cases}$$

а)

$$9.16. \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < -1 \\ 3 - x, & \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

а)

$$9.17. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 2, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

а)

$$9.18. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{если } 1 \leq x < 4 \\ 1, & \text{если } x \geq 4 \end{cases}$$

а)

$$9.19. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 1 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2, & \text{если } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

а)

$$9.20. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x < 1 \\ 3x, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

а)

$$9.21. \quad f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x < 1 \\ x + 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}} + 1.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2-x}} + 1}.$$

$$б) \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + 2.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{\frac{1}{2^x} + 2}{2^x + 1}.$$

$$б) \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}} + 1.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{5}{2 + 7^{\frac{4}{5-x}}}.$$

$$б) \quad f(x) = 1 + 3^{\frac{1}{x}}.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^x + 1}.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^x + 1}.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{3}{2^x - 1}.$$

$$9.22. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x, & \text{если } 0 < x < \pi \\ x - 2, & \text{если } x \geq \pi \end{cases}$$

а)

$$9.23. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \text{если } 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а)

$$9.24. \quad f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \leq -1 \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & \text{если } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

а)

$$9.25. \quad f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } |x| \leq 2 \\ 4, & \text{если } |x| > 2 \end{cases}$$

а)

$$б) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x-1}} - 1.$$

$$б) \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$б) \quad f(x) = 8^{\frac{1}{5-x}} - 2.$$

$$б) \quad f(x) = \frac{x^3 + x}{2|x|}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{3 - (-1)^n}{n^2 + 1} \right\}.$$

Задача 1. Задана последовательность

Найти $A = a_5 + a_6$.

$$\{a_n\} = \left\{ 4 + \frac{2}{n^2} \right\}$$

Задача 2. Доказать, что последовательность является ограниченной.

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{5 + n}{n^2} \right\}$$

Задача 3. Доказать, что последовательность убывающей.

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n^3 + 1}{n} \right\}$$

Задача 4. Доказать, что последовательность монотонной.

Задача 5. Пользуясь определением бесконечно малой

$$\{\alpha_n\} = \left\{ \frac{n + 4}{n^2} \right\}$$

последовательности, доказать, что последовательность является бесконечно малой.

Задача 6. Пользуясь определением бесконечно большой

$$\{\sigma_n\} = \left\{ (-1)^n n \right\}$$

последовательности, доказать, что последовательность является бесконечно большой.

Задача 7. Пользуясь определением бесконечно малой

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n + 1}{n + 2} \right\}$$

последовательности, доказать, что последовательность не является бесконечно малой.

Задача 8. Пользуясь определением бесконечно большой

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n + 1}{n + 2} \right\}$$

последовательности, доказать, что последовательность не является бесконечно большой.

Задача 9. Записать текст определения, заданного языком кванторов: последовательность $\{n\}$ называется бесконечно большой последовательностью, если $M > 0 \quad N = N(), \quad n > N: |n| > M$.

Задача 10. Пользуясь определением сходящейся

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n + 2} = 1$$

последовательности, доказать, что

Задача 11. Пользуясь определением сходящейся

последовательности, доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-8}{6-5n} = -\frac{3}{5}$.

Задача 12. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \frac{5n^2 + 4n + 1}{6n^2 - 4n + 1} \right\}$.

Задача 13. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \frac{5n^3 + 4n + 1}{6n^2 - 4n + 1} \right\}$.

Задача 14. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \frac{5n^2 + 4n + 1}{6n^3 - 4n + 1} \right\}$.

Задача 15. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right\}$.

Задача 16. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n+3}{n-4} \right)^n \right\}$.

Задача 17. Найти предел последовательности $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n^3 + 3n + 4}{n^2 - 5n + 2} \right)^n \right\}$.

Задача 18. Найти область определения функции $f(x) = \frac{x+4}{x^2 - 8x + 7}$.

Задача 19. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$.

Задача 20. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{8x - 7 - x^2}$.

Задача 21. Найти область определения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8x - 7 - x^2}}$.

Задача 22. Найти область определения функции $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 7)$.

Задача 23. Найти область определения функции $f(x) = \ln(8x - 7 - x^2)$.

Задача 24. Найти область определения функции $f(x) = \arcsin^2 \frac{x}{x+1}$.

Задача 25. Найти область определения функции $f(x) =$

$$\left(5 \operatorname{ctg} x + 8 \arccos \frac{x-1}{6} \right)^4.$$

Задача 26. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 7}$.

Задача 27. Найти область определения функции $f(x) = 5 \sin x + 4$.

Задача 28. Найти область определения функции $f(x) = 5 |\sin x| + 4$.

Задача 29. Найти область определения функции $f(x) = 8 \arcsin \frac{x}{5}$.

Задача 30. Найти область определения функции $f(x) = 5 \arccos 3x$.

Задача 31. Найти область определения функции $f(x) = 8^{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$.

Задача 32. Найти область определения функции $f(x) = 8^{\operatorname{arctg}(x+1)}$.

Задача 33. Исследовать на четность и нечетность функцию

$$f(x) = 5 \arccos^4 x.$$

Задача 34. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 \arcsin^4 x$.

Задача 35. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 \arcsin^3 x$.

Задача 36. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 \arcsin |x|$.

Задача 37. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 |\arcsin x|$.

Задача 38. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 |\arcsin |x||$.

Задача 39. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 \ln^7 x$.

Задача 40. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 \ln |x|$.

Задача 41. Исследовать на четность и нечетность функцию $f(x) = 5 |\ln x|$.

Задача 42. Исследовать на четность и нечетность функцию

$$f(x) = 9x^8 + \frac{5 \sin^3 x \cos^3 2x}{\sin^7 x} + 16.$$

Задача 43. Исследовать на четность и нечетность функцию

$$f(x) = 9x^7 + \frac{5 \sin^4 x \cos^3 2x}{\sin^7 x} + 16x.$$

Задача 44. Найти основной период функции $f(x) = 6 \sin \left(\frac{2}{5}x - 1 \right) + 8$, если он существует.

Задача 45. Найти основной период функции $f(x) = 9 - 7 \operatorname{tg} 11x$, если он существует.

Задача 46. Найти основной период функции $f(x) = \operatorname{ctg} 4x + \operatorname{tg} 3x + \cos 2x$, если он существует.

Задача 47. Найти основной период функции $f(x) = 5 \sin^6 x - 9 \cos^4 x$, если он существует.

Задача 48. Найти основной период функции $f(x) = 8^{|\sin 4x|}$, если он существует.

Задача 49. Найти основной период функции $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\cos 5x \sin 3x}$, если он существует.

Задача 50. Найти основной период функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, если он существует.

Задача 51. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^3 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 52. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^3 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 53. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^6 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 54. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{6 + x^2} + \sqrt{4x + 8}}{\sqrt[7]{9x^5 + 11}}$.

Задача 55. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 4})$.

Задача 56. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 3x - 4}{4x^3 - 3x^2 + 9x - 10}$.

Задача 57. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 3x^2 - 3x - 4}{4x^3 - 3x^2 + 9x - 10}$.

Задача 58. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 3x - 4}{4x^3 - 3x^2 + 9x - 10}$.

Задача 59. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 3x - 4}{4x^3 - 3x^2 + 9x - 10}$.

Задача 60. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4x + 14} - \sqrt{12 + 3x}}{\sqrt{20x + 47} - \sqrt{3 - 2x}}$.

Задача 61. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{8 + 2x}}{x^2 - 9x + 20}$.

Задача 62. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x \operatorname{tg} 5x}{\arcsin 6x \arccos 7x \operatorname{actg} 8x}$.

Задача 63. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \arccos 8x}{(1 - \cos 12x) \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) \right)}$.

Задача 64. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 4}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}$.

Задача 65. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + \sin \frac{\pi}{7}}{x^2}$.

Задача 66. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Задача 67. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Задача 68. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

Задача 69. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Задача 70. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Задача 71. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Задача 72. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

Задача 73. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$$

с помощью сравнения бесконечно малых функций.

Задача 74. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\ln \left(\frac{x}{2} + 1 \right) - \ln \frac{x}{2} \right) \right)$$

с помощью сравнения бесконечно малых функций.

Задача 75. Найти интервалы непрерывности функции

$$f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 9x + 8}.$$

Задача 76. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x \leq -3; \\ 5, & \text{если } -3 < x \leq 0; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

и определить, к какому типу они принадлежат.

Задача 77. Найти точки разрыва функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$ и определить их тип.

Задача 78. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{4^{\frac{1}{x^2}}}{x+7}$ и определить их тип.

Задача 79. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и определить их тип.

Задача 80. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ и определить их тип.

Задача 81. в Окружность радиуса R вписана в правильный n -угольник. При условии, что его периметр P_n определяется по формуле $P_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$, а площадь S_n – по формуле $S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$, доказать, что длина окружности C определяется по формуле $C = 2\pi R$, а площадь S круга, ограниченного этой окружностью, – по формуле $S = \pi R^2$.

Задача 82. Построить графики функций $f(t)$ и $|S(\omega)|$, которые задают соответственно импульс и его спектр:

1) прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{\tau}{2}; \\ h, & |t| \leq \frac{\tau}{2}; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}.$$

2) экспоненциальный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ B e^{-\beta t}, & t \geq 0; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{B}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}.$$

3) единичный импульс

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{1}{\omega}.$$

4) колокольный импульс

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}; \quad S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

5) волновой цуг

$$S(\omega) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\pi \omega}{\omega_0}.$$

$$f(t) = \begin{cases} h \sin \omega_0 t, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0}; \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0}; \end{cases}$$

$$6) \quad f(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & |t| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{2 \cos \pi \omega}{\pi (1 - 4\omega^2)}.$$

7) треугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \leq t < 0; \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & |t| > 1; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{\sin^2 \pi \omega}{\pi \omega^2}.$$

8) прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 2; \\ 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty); \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{2 \sin 2\pi \omega}{\pi \omega}.$$

9) трапециевидальный импульс

$$f(t) = \begin{cases} t+2,5, & -2,5 \leq t \leq -1,5; \\ 1, & -1,5 \leq t \leq 1,5; \\ 2,5-t, & 1,5 \leq t \leq 2,5; \\ 0, & |t| > 2,5; \end{cases} \quad S(\omega) = \frac{4 \sin 2\omega \sin \frac{\omega}{2}}{\omega^2}.$$

$$10) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0, & t \in (-\infty; 0] \cup (1; \infty); \end{cases} \quad S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} e^{-\frac{j\omega}{2}}.$$

Задача 83. Динамическая самоиндукция антенны при продлении волны вычисляется по формуле

$$L = L_0 \frac{\lambda}{2\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{\lambda},$$

где L_0 – статистическая самоиндукция; l – действительная длина

антенны; λ – длина волны. Найти $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L$, если $L_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} N^{\frac{x}{2x+N}}$, где N – некоторое заданное число, $N > 1$.

Задача 84. В теории ламповых генераторов доказывается, что коэффициент ς полезного действия генератора определяется по формуле

$$\varsigma = \xi \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4(\sin \theta - \theta \cos \theta)}, \quad \text{где } \xi \text{ – коэффициент использования напряжения.}$$

Найти $\lim_{\theta \rightarrow 0} \zeta$, если $\zeta = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^N - 1}{x^{2N-1} - 1}$, где N – некоторое заданное число, $N > 1$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

137

Задача 1. $\frac{481}{5}$. **Задача 9.** Последовательность $\{n\}$ называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует такой номер $N = N()$, что для всех элементов последовательности с номером $n > N$ справедливо неравенство $|n| > M_0$.

5

Задача 12. $\frac{6}{5}$. **Задача 13.** **Задача 14.** 0. **Задача 15.** .

Задача 16. e^7 . **Задача 17.** e^8 . **Задача 18.** $x \in (-; 1) \cup (1; 7) \cup (7; +)$.

Задача 19. $x \in (-; 1] \cup [7; +)$. **Задача 20.** $x \in [1; 7]$.

Задача 21. $x \in (1; 7)$. **Задача 22.** $x \in (-; 1) \cup (7; +)$. **Задача 23.** $x \in (1; 7)$. **Задача**

24. $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **Задача 25.** $x \in \{-5; -\} \cup (-; 0) \cup (0;) \cup (; 2) \cup (2; 7]$. **Задача 26.** $x \in (-; +)$. **Задача 27.** $y \in [-1; 9]$. **Задача 28.** $y \in [4; 9]$. **Задача 29.** $y \in [-4; 4]$. **Задача 30.** $y \in [0; 5]$. **Задача 31.** $y \in (-; +)$. **Задача**

32. $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **Задача 33.** Функция не является четной, не является нечетной. **Задача 34.** Функция является четной. **Задача 35.** Функция является нечетной. **Задача 36.** Функция является четной. **Задача 37.** Функция является четной.

Задача 38. Функция является четной. **Задача 39.** Функция не является четной, не является нечетной. **Задача 40.** Функция является четной. **Задача 41.** Функция не является четной, не является нечетной. **Задача 42.** Функция является четной. **Задача 43.** Функция является нечетной. **Задача 44.** $T = 5$. **Задача 45.** $T = 11$. **Задача 46.** $T =$. **Задача**

$\frac{\pi}{2}$

47. $T =$. **Задача 48.** $T = \frac{\pi}{2}$. **Задача 49.** $T =$. **Задача 50.** Функция является

$\frac{2}{3}$

непериодичной. **Задача 51.** $\frac{2}{3}$. **Задача 52.** . **Задача 53.** 0. **Задача 54.** 0.

$\frac{1}{4}$

$\frac{2}{5}$

Задача 55. 0. **Задача 56.** $\frac{1}{4}$. **Задача 57.** $\frac{2}{5}$. **Задача 58.** 1. **Задача 59.** 1. **Задача**

$\frac{\sqrt{42}}{108}$

$-\frac{1}{8}$

$\frac{5}{24\pi}$

$\frac{\pi}{288}$

60. $\frac{\sqrt{42}}{108}$. **Задача 61.** $-\frac{1}{8}$. **Задача 62.** $\frac{5}{24\pi}$. **Задача 63.** $\frac{\pi}{288}$. **Задача 64.** $\cos^2$.

$\frac{\pi}{7}$

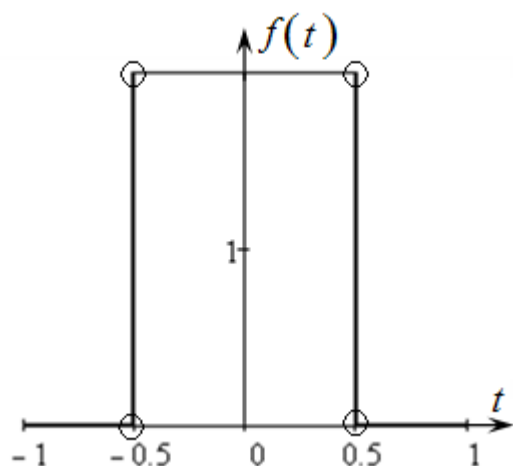
$\frac{2}{\pi}$

Задача 65. $-\sin \frac{\pi}{7}$. **Задача 66.** 2. **Задача 67.** $\frac{2}{\pi}$.

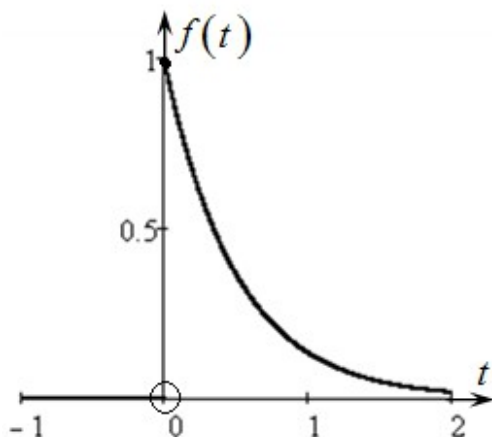
Задача 68. 0. Задача 69. 1. Задача 70. 1. Задача 71. $\frac{1}{e^2}$. Задача 72. 1. Задача 73. $-\frac{1}{2}$. Задача 74. 2. Задача 75. $x \in (-; 1) \cup (1; 8) \cup (8; +)$. Задача 76. $x = -3$ – точка разрыва I рода; $x = 0$ – точка разрыва II рода. Задача 77. $x = 3$ – точка разрыва II рода. Задача 78. $x = 0$ и $x = -7$ – точки разрыва II рода. Задача 79. $x = 0$ – точка разрыва II рода. Задача 80. $x = n$, где $n \in \mathbb{Z}$ – точки разрыва II рода.

Задача 82.

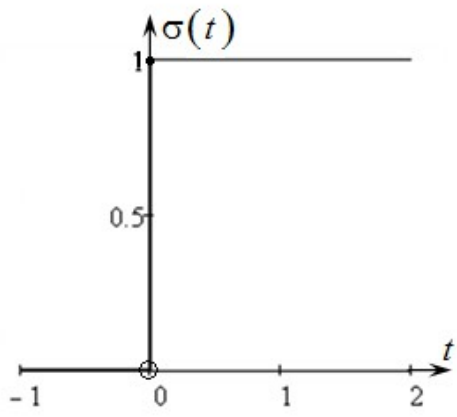
1) $h = 2, \tau = 1$



2) $B = 1, \beta = 2$



3)



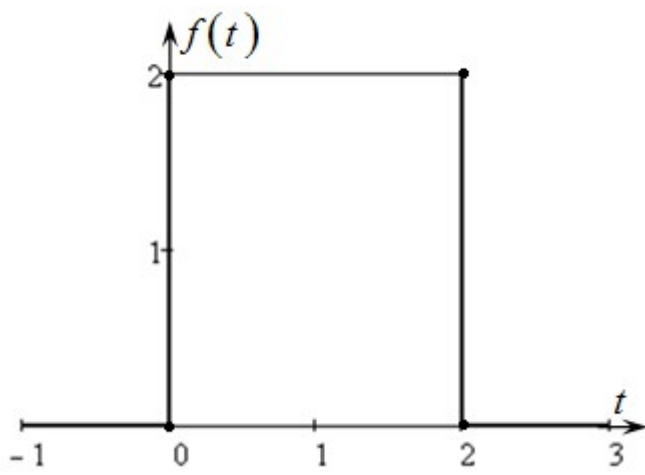
$$4) \beta = 2$$

$$5) h = 1, {}^0_0 = 2$$

$$6) h = 1$$

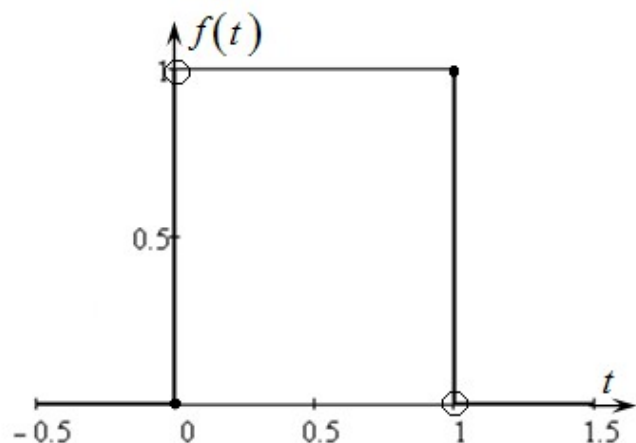
7)

8)



9)

10)



Задача 83. $\frac{\sqrt{N}}{2}$. Задача 84. $\frac{N}{2N-1}$.

Приложение А

Методы нахождения предела последовательности

Таблица А.1

№ п/п	Тип неопределенности	Особенности условия	
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_r n^r} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$	$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k$, $b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_r n^r$ – многочлены степени k и r – соответственно	Числитель и знаменатель одновременно стремятся к $m = \infty$ выполняются условия
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) = [\infty - \infty]$	$\{a_n\}, \{b_n\}$ – последовательности	Заданные последовательности умножаются на выражение, стремящееся к нулю, используя пользуясь формулой квadrата разности
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = [1^\infty]$	$\{a_n\}, \{b_n\}$ – последовательности	Попытка применения тождества которое не работает второй э

Приложение Б

Основные элементарные функции

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

Таблица Б.1

Значения α	Область определения функций	Область значений функций
Натуральное четное число	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Натуральное нечетное число	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Целое отрицательное четное число	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Целое отрицательное нечетное число	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$\alpha = \frac{1}{n}$, где n – натуральное четное число; $n > 1$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$\alpha = \frac{1}{n}$, где n – натуральное нечетное число; $n > 1$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа; m – число четное, n – число нечетное	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа; m – число нечетное, n – число четное	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$

$\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n - взаимно простые натуральные числа; n - число нечетное, m - число четное	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, где m и n - взаимно простые натуральные числа; n - число четное	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, где m и n - взаимно простые натуральные числа; n - число нечетное, m - число четное	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, где m и n - взаимно простые натуральные числа; n - число нечетное, m - число нечетное	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Графики некоторых степенных функций

y

2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений функции: $y \in (0; +\infty)$ (рис. Б.12 и Б.13).

Частным случаем показательной функции является экспоненциальная функция $y = e^x$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Область определения функции: $x \in (0; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$ (рис. Б.14 и Б.15).

Частным случаем логарифмической функции является функция
 $y = \ln x$, где $\ln x = \log_e x$.

4. Тригонометрические функции

1. Функция $y = \sin x$

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

Область значений функции:

$$y \in [-1; 1] .$$

Наименьший положительный период функции:

$$T = 2\pi$$

(рис. Б.16).

2. **Функция $y = \cos x$**

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in [-1; 1]$.

Наименьший положительный период функции: $T = 2\pi$ (рис. Б.17).

3. **Функция $y = \operatorname{tg} x$**

Область определения функции:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \text{ где } k \in Z.$$

Область значений функции: $y \in (-\infty, +\infty)$.

Наименьший положительный период функции:

$T =$ (рис. Б.18).

4. **Функция** $y = \operatorname{ctg} x$

Область определения функции:

$$x \in (\pi k; \pi + \pi k), \text{ где } k \in Z.$$

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$.

Наименьший положительный период функции: $T = \pi$

(рис. Б.19).

5. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$

Область определения функции: $x \in [-1; 1]$.

Область значений функции: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. Б.20).

2. Функция $y = \arccos x$

Область определения функции: $x \in [-1; 1]$.

Область значений функции: $y \in [0; \pi]$ (рис. Б.21).

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
(рис. Б.22).

4. **Функция $y = \operatorname{arcctg} x$**

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (0; \pi)$ (рис. Б.23).

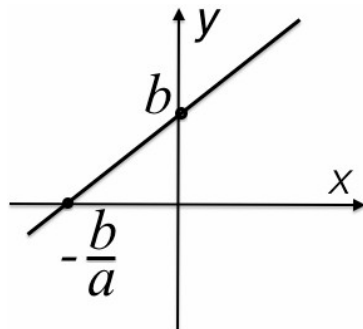
Приложение В

Некоторые элементарные функции

1. Линейная функция $y = ax + b, (a, b \in R)$

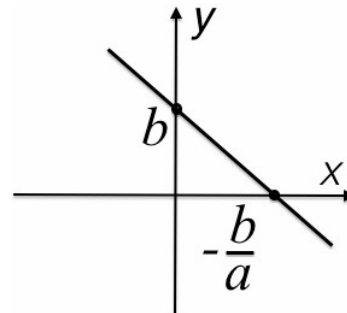
Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$, если $a \neq 0$. (рис. В.1 та В.2).



$$y = ax + b, a > 0$$

Рисунок В.1



$$y = ax + b, a < 0$$

2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in R, a \neq 0)$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; +\infty \right)$, если $a > 0$; $y \in \left(-\infty; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$, если $a < 0$ (рис. В.3 и В.4).

3. Целая рациональная функция

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, где n – натуральное число

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$, если n – число нечетное.

4. Дробно-линейная функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Область определения функции: $x \in \left(-\infty; \frac{d}{c} \right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$.

Область значений функции: $y \in \left(-\infty; \frac{a}{c}\right) \cup \left(\frac{a}{c}; +\infty\right)$ (рис. В.5 и В.6).

5. Гиперболические функции

Гиперболический синус

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right)$$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$

(рис. В.7).

Гиперболический косинус

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in [1; +\infty)$ (рис. В.8).

Гиперболический тангенс

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-1; 1)$

(рис. В.9).

Гиперболический котангенс

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Область значений функции:

$$y \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

(рис. В.10).

6. Обратные гиперболические функции

1. Ареасинус $y = \operatorname{Arsh} x$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$

(рис. В.11).

2. Ареакосинус $y = \operatorname{Arch} x$

Область определения функции: $x \in [1; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in [0; +\infty)$ или $y \in (-\infty; 0]$ (выбирается только одна ветка графика) (рис. В.12).

3. Ареатангенс $y = \operatorname{Arth} x$

Область определения функции: $x \in (-1; 1)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$

(рис. В.13).

4. **Ареакотангенс** $y = \operatorname{Arcth} x$

Область определения функции:

$$y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Область значений функции:

$$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \quad (\text{рис. В.14}).$$

5. **Функция** $y = \arcsin (\sin x)$

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Область значений функции:
(рис. В.15).

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

6. **Функция** $y = \arccos (\cos x)$

Область определения функции:

$$x \in [-\infty; +\infty] .$$

Область значений функции: $y \in [0; \pi]$

(рис. В.16).

7. Функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Область определения функции: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, где $k \in Z$.

Область значений функции: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$
(рис. В.17).

8. Функция $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

Область определения функции:

$$x \in (\pi k; \pi + \pi k), \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Область значений функции: $y \in (0; \pi)$

(рис. В.18).

9. Функция $y = \sin (\arcsin x)$

Область определения функции: $x \in [-1; 1]$

Область значений функции: $y \in [-1; 1]$

(рис. В.19).

10. Функция $y = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$

(рис. В.20).

11. Функція $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

Область определения функции:

$$x \in (\pi k; \pi + \pi k), \text{ где } k \in Z.$$

Область значений функции:

$$y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

(рис. В.21).

12. Функция $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

Область определения функции:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \text{ где } k \in Z.$$

Область значений функции:

$$y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

(рис. В.22).

13. Функция гиперболический косеканс

$$y = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Область значений функции:

$$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

(рис. В.23).

14. Функция гиперболический секанс

$$y = \operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений функции: $y \in (0, 1]$

(рис. В.24).

Приложение Г

Некоторые важные кривые, заданные в параметрической форме

Таблица Г.1 Кривые второго порядка

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
1	Окружность: $x^2 + y^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R \cos t; \\ y = R \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in [0, 2\pi)$		$(0, 0)$ – центр окружности; R – радиус окружности
2	Окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t; \\ y = y_0 + R \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in [0, 2\pi)$		(x_0, y_0) – центр окружности; R – радиус окружности

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
3	Окружность: $(x - R)^2 + y^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R + R \cos t; \\ y = R \sin t, \end{cases}$ где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$		$(R, 0)$ – центр окружности; R – радиус окружности
4	Окружность: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R \cos t; \\ y = R + R \sin t, \end{cases}$ где $t \in [0, \pi)$		$(0, R)$ – центр окружности; R – радиус окружности

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
5	Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in [0, 2\pi)$ или $x = \frac{ab \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}};$ $y = \frac{ab \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}$ где $t \in [0, 2\pi)$		$O(0, 0)$ – центр эллипса; a – большая полуось эллипса; b – малая полуось эллипса
6	Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t; \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \text{ где } t \in (-\infty; \infty)$ Или $\begin{cases} x = a \frac{1}{\cos t}; \\ y = b \operatorname{tg}(t), \end{cases} \text{ где } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ для}$ левой ветки гиперболы; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ для правой ветки}$ гиперболы.		$O(0, 0)$ – центр гиперболы; a – действительная полуось гиперболы; b – мнимая полуось гиперболы

7	Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} \frac{ab \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}}; \\ \frac{ab \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}}, \end{cases}$ где $t \in \left(-\arctg \frac{b}{a}; \arctg \frac{b}{a} \right)$ для правой ветки гиперболы; $t \in \left(\pi - \arctg \frac{b}{a}; \pi + \arctg \frac{b}{a} \right)$ для левой ветки гиперболы.		$O(0, 0)$ – центр гиперболы; a – действительная полуось гиперболы; b – мнимая полуось гиперболы
8	Парабола: $y^2 = 2px$	$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}; \\ y = t, \end{cases}$ где $t \in (-\infty, \infty)$ или $\begin{cases} x = 2p \times \text{ctg}^2 t; \\ y = 2p \times \text{ctg} t, \end{cases}$ где $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ для верхней ветки; $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$ для нижней ветки.		p – параметр параболы; $O(0, 0)$ – вершина параболы

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
	Парабола: $y = 2px$	$\begin{cases} x = 2p \times \operatorname{ctg} t; \\ y = 2p \times \operatorname{ctg}^2 t, \end{cases}$ где $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для левой ветви, $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ для правой ветви.		– параметр параболы; $(0, 0)$ – вершина параболы

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задания кривой	Изображение кривой	Приме- чания
1	Циссоида Диокла: $y^2 = \frac{x^3}{a-x},$ где $a > 0$.	$\begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2}; \\ y = \frac{at^3}{1+t^2}, \end{cases}$ где $t \in (-\infty, +\infty)$		
2	Декартов лист: $x^3 + y^3 - 3axy = 0,$ де $a > 0$.	$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}; \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$ где $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$		$A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ – вершина
3.	Строфоида: $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right),$ где $a > 0$.	$\begin{cases} x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}; \\ y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}, \end{cases}$		$A(-a, 0)$ – вершина

		где $t \in (-\infty, +\infty)$		
--	--	--------------------------------	--	--

№ п/п	Название кривой	Параметри- ческое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
1	Улитка Паскаля $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$ где $a > 0, l > 0$.	$\begin{cases} x = a \cos^2 t + l \cos t; \\ y = a \cos t \sin t + l \sin t \end{cases}$ где $t \in [0, 2\pi)$		$A(a - l, 0)$ и $B(a + l, 0)$; O – полюс; заданное урав- нение определяет совокупность кри- вой и полюса O
				O – полюс, являющийся изолированной точкой; $A(a - l, 0)$ и $B(a + l, 0)$ – вершины. В этом случае заданное уравнение опреде- ляет лишь кривую без точки $O(0, 0)$

				$A(a - l, 0)$ и $B(a + l, 0)$ — вершины. Заданное уравнение опреде- ляет совокупность кривой и точки $O(0;0)$, принадле- жащих кривой. Площадь S фигу- ры ограниченной улиткой Паскаля когда $l < a$ состоит из суммы площади фигуры S_1 ограни- ченной внешней петель улитки и площади фигуры S_2 ограниченной внутренней петель, то есть. $S = S_1 + S_2$
--	--	--	--	---

2	Кардиоида (частный случай улитки Паскаля, когда $l = a$) $x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = \begin{cases} x = a(1 + \cos t) \cos t \\ y = a(1 + \cos t) \sin t \end{cases}$ или $x^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + y^2) - a^2y^2 = \text{ где } t \in [0, 2\pi)$ где $a > 0$.			$A(0, 0), B(2a, 0)$ – вершины
---	---	--	--	---

Циклоидальные кривые

Циклоидальные кривые – это кривые, описывающие траекторию точки, принадлежащей окружности или плоскости круга радиуса r , которая без скольжения катится вдоль второй неподвижной окружности радиуса R . Форма кривой зависит от соотношения между радиусами R и r и от взаимного расположения окружностей.

Таблица Г4. Циклоидальные кривые

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
1	Эпициклоида	$\begin{cases} x = (R + r) \cos t - r \cos \left(\frac{R + r}{r} t \right); \\ y = (R + r) \sin t - r \sin \left(\frac{R + r}{r} t \right), \end{cases}$ где $-\infty < t < +\infty$		Окружность радиуса r касается окружности радиуса R внешним образом. $\frac{R}{r} = n$, где $n \in N$, то $t \in [0, 2\pi)$. $\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$, где $m \in N, n \in N$, и НСД($m; n$) = 1, то $t \in [0, 2\pi n)$, где НСД($m; n$) – наибольший общий делитель чисел m и n

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
	Кардиоида (частный случай эллипсоиды, когда $R = r$): $(x^2 + y^2)^2 - 2rx(x^2 + y^2) = r^2y^2$	или $\begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos 2t; \\ y = 2r \sin t - r \sin 2t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = r(1 + \cos t) \cos t; \\ y = r(1 + \cos t) \sin t, \end{cases}$ где $t \in [0, 2\pi)$		$R = r$ – радиусы внешней и внутренней окружности
2	Гипоциклоида	$\begin{cases} x = (R - r) \cos t + r \cos\left(\frac{R - r}{r}t\right); \\ y = (R - r) \sin t - r \sin\left(\frac{R - r}{r}t\right), \end{cases}$ где $-\infty < t < +\infty$		Окружность радиуса r касается окружности радиуса R изнутри

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
	Астроида (частный случай гипоциклоиды, когда $R = 4r$): $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ или $(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27x^2y^2R^2 = 0$	$\begin{cases} x = 3r \cos t + 3 \cos 3t; \\ y = 4r \sin t - r \sin 3t \end{cases}$ или $\begin{cases} x = R \cos^3 t; \\ y = R \sin^3 t, \text{ где } t \in [0, 2\pi) \end{cases}$		
3	Циклоида: $r \cos \left(x + \sqrt{\frac{y(2r - y)}{r}} \right) = r - x$ где $r > 0$	$\begin{cases} x = r(t - \sin t); \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$ где $t \in (-\infty, +\infty)$		Циклоида – это траектория точки на окружности радиуса r которая без скольжения катится вдоль оси Ox

Приложение Д
Некоторые важные кривые, заданные в полярной системе координат

Таблица Д.1 **Кривые второго порядка**

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
1	Окружность: $x^2 + y^2 = R^2$	$\rho = R$		$O(0, 0)$ – центр окружности и полюс; R – радиус окружности
2	Окружность: $(x - R)^2 + y^2 = R^2$	$\rho = 2R \cos \varphi$, где $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		$O(0, 0)$ – центр окружности и полюс; R – радиус окружности
3	Окружность: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$	$\rho = 2R \sin \varphi$, где $\varphi \in [0, \pi]$		$O(0, 0)$ – центр окружности и полюс; R – радиус окружности

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
4	Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi};$ $0 \leq \varphi < 2\pi$		A_1, A_2 – вершины эллипса; – большая полуось эллипса; – малая полуось эллипса; $\sqrt{a^2 - b^2}$; $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса; $O(0, 0)$ – полюс; полярная ось ρ направлена от фокуса F_2 до ближайшей вершины A_2; – параметр эллипса, $p = \frac{b^2}{a}$; – эксцентриситет эллипса, $\varepsilon < 1$.

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
	гипербола: $\frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ Для левой ветви φ принимает значения, для которых $\cos \varphi < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ или } \cos \varphi < \frac{1}{\varepsilon}, \text{ или } \varphi < \cos \alpha,$ где α – острый угол между асимптотой и осью F_1F_2. Для правой ветки $\varphi < 2\pi - \alpha$.		$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ – вершины гиперболы; – действительная полуось гиперболы; – мнимая полуось гиперболы; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокусы; $(c, 0)$ – полюс; полярная ось ρ направлена от фокуса F_2 к удаленной вершине A_1 ; – параметр гиперболы; $\frac{b^2}{a}$; – эксцентриситет гиперболы, $\frac{c}{a} > 1$.

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
6	Парабола $y^2 = 2px$	$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$ или $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$ где $\varphi \in (0, 2\pi)$		$O(0, 0)$ – вершина параболы; $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы; $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – полюс; полярная ось направлена от полюса до вершины параболы; $\varepsilon = 1$; p – параметр параболы

Таблица Д.2 Кривые третьего порядка

Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
Циссоида Диокла: $y^2 = \frac{x^3}{a-x},$ где $a > 0$	$\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$ где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O – полюс
Декартов лист: $x^3 + y^3 - 3axy = 0,$ где $a > 0$	$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi},$ где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O – полюс; $A\left(\frac{3a}{2}\right)$ – вершина
Строфоида: $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right),$ где $a > 0$	$\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi},$ где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O – полюс; $A(-a)$ – вершина

Таблица Д.3 Кривые четвертого порядка

№ п/п	Название кривой	Параметрическое задание кривой	Изображение кривой	Примечания
1	Улитка Паскаля: $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0,$ где $a > 0, l > 0$	$\rho = a \cos \varphi + l$		$A(-l, 0), B(a + l, 0)$ – вершины; – полюс. Заданное уравнение определяет совокупность кривой и полюса O
				– полюс который, является изолированной точкой; $A(-l, 0), B(a + l, 0)$ – вершины. В этом случае заданное уравнение определяет лишь кривую без полюса
				– полюс; $A(-l, 0)$ и $B(a + l, 0)$ – вершины. Заданное уравнение определяет совокупность кривой и точки $O(0;0)$, принадлежащих кривой. Площадь S фигуры, ограниченной улиткой Паскаля, когда $l < a$ состоит из суммы площади S_1 , ограниченной внешней петлей улитки и площади фигуры S_2 ограниченной внутренней

				петлей, то есть. $S = S_1 + S_2$
--	--	--	--	----------------------------------

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
2	Кардиоида (частный случай улитки Паскаля, когда $l = a$) $(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ или $(x^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0,$ где $a > 0$.	$\rho = a(1 + \cos \varphi),$ где $\varphi \in [0, 2\pi)$		O – полюс; $B(2a, 0)$ – вершина

Таблица Д.4

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
1	Синусоидаль- ные спирали	$\rho^k = a^k \sin k\varphi$ или $\rho^k = a^k \cos k\varphi,$ где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		Если k – число нечетное, то розы состоят из k лепестков, если k – четное, то розы состоят из $2k$ лепестков. $\rho \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right]$. Для одного лепестка
	Частные случаи 1) $k = 1$ Окруж- ность	$\rho = a \cos \varphi,$ $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ где		O – полюс

		2) $k = 1$ Окруж- ность	$\rho = a \sin \varphi$, где $\varphi \in [0, \pi]$		O – полюс
--	--	-------------------------------	---	--	-------------

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
2	Розы или кривые Гвидо	$\rho = a \sin k\varphi$, или $\rho = a \cos k\varphi$, где $\varphi \in [0, \pi]$		Если k – число нечетное, то розы состоят из k лепестков, если k – четное, то розы состоят из $2k$ лепестков. Для одного лепестка $\rho \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right]$.
	Частные случаи 1) $k = 3$	$\rho = a \cos 3\varphi$		O – полюс

		2) $k = 2$	$\rho = a \sin 2\varphi$		O – полюс
--	--	------------	--------------------------	--	-------------

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
2	Частные случаи 3) $k = 2$	$\rho = a \cos 2\varphi$		O – полюс
3	Архимедова спираль	$\rho = a\varphi$, где $a > 0, \varphi \in (-\infty, +\infty)$		Сплошная линия соответствует значениям $\varphi \in [0, +\infty)$, пунктирная – значениям $\varphi \in (-\infty, 0]$. O – полюс
4	Гиперболическая спираль	$\rho = \frac{a}{ \varphi - \pi }$, где $\varphi \in (-\infty, \pi)$ и $\rho = \frac{a}{\varphi}$, для $\varphi \in (0, +\infty)$		Сплошная линия соответствует значениям $\varphi \in (0, +\infty)$, пунктирная – значениям $\varphi \in (-\infty, \pi)$. O – полюс

№ п/п	Название кривой	Задание кривой в полярной системе координат	Изображение кривой	Примечания
5	Логарифмическая спираль	$\rho = a e^{k\varphi},$ где $a > 0, \varphi \in (-\infty, \infty)$		O – полюс

Приложение Е

Методы нахождения пределов функции

Таблица Е.1

№ п/п	Тип неопределенности	Особенности условия	Методы раскрытия неопределенности
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$	$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлены степени k и r соответственно	Числитель и знаменатель одновременно разделить на x^m , где $m = \max\{k; r\}$; выполнить упрощение
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}) = [\infty - \infty]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции	Заданное выражение одновременно умножить и разделить на выражение $(\sqrt{f_1(x)} + \sqrt{f_2(x)}) \neq 0$, сопряжённое заданному, и упростить, пользуясь формулой разности квадратов $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
3	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлены степени k и r соответственно	Многочлены $P_k(x)$ и $Q_r(x)$ разложить на множители, разделив их на $(x - x_0)$, выполнить упрощение
4	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции; $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлен	Числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение, $(\sqrt{f_1(x)} + \sqrt{f_2(x)}) \neq 0$, сопряжённое числителю, а многочлен $Q_r(x)$ разложить на множители, разделив его на $(x - x_0)$

5	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}{\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции; $P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ – многочлен степени k	Многочлен $P_k(x)$ разложить на множители, разделив его на $(x - x_0)$ и числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение $(\sqrt{f_1(x)} + \sqrt{f_2(x)}) \neq 0$, сопряженное знаменателю; выполнить упрощение
6	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{f_3(x)} - \sqrt{f_4(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ – функции	Числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение $(\sqrt{f_1(x)} + \sqrt{f_2(x)})(\sqrt{f_3(x)} + \sqrt{f_4(x)}) \neq 0$; выполнить упрощение (см. пп. 4, 5)
7	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_r x^r} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции; $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_r x^r$ – многочлен степени r	Числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение $\sqrt[3]{f_1^2(x)} \mp \sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)} + \sqrt[3]{f_2^2(x)} \neq 0$ и упростить, пользуясь соответственно формулой суммы или разности кубов: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$; многочлен $Q_r(x)$ разложить на множители, разделив его на $x - x_0$; выполнить упрощение
8	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции; $P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ – многочлен степени k	Многочлен $P_k(x)$ разложить на множители, разделив его на $x - x_0$, а числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение $\sqrt[3]{f_1^2(x)} \mp \sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)} + \sqrt[3]{f_2^2(x)} \neq 0$ и упростить, пользуясь соответственно формулой суммы или разности кубов: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$; выполнить упрощение

№ п/п	Тип неопределенности	Особенности условия	Методы раскрытия неопределенности
9	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{f_3(x)} \pm \sqrt[3]{f_4(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ – функции	Числитель и знаменатель одновременно умножить на выражение $\left(\sqrt[3]{f_1^2(x)} \mp \sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)} + \sqrt[3]{f_2^2(x)} \right) \neq 0$ и $\left(\sqrt[3]{f_3^2(x)} \mp \sqrt[3]{f_3(x)}\sqrt[3]{f_4(x)} + \sqrt[3]{f_4^2(x)} \right) \neq 0$; упростить, пользуясь соответственно формулой суммы или разности кубов: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$; выполнить упрощения (см. пп. 7, 8)
10	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$	$f_1(x), f_2(x)$ – функции, в состав хотя бы одной из которых входят тригонометрические функции или обратные тригонометрические функции	Попытаться упростить заданные функции таким образом, чтобы можно было применить первый замечательный предел или следствия из него
11	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = \left[1^\infty \right]$	$f(x), \varphi(x)$ – функции	Попытаться упростить заданные функции таким образом, чтобы можно было применить второй замечательный предел или следствия из него

Приложение Ж
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ
О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

I Тригонометрические функции

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Рисунок Ж.1

Таблица Ж. 1 **Знаки тригонометрических функций**

Четверть	Величина угла	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad (90^\circ < \alpha < 180^\circ)$	+	−	−	−
III	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad (180^\circ < \alpha < 270^\circ)$	−	−	+	+
IV	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad (270^\circ < \alpha < 360^\circ)$	−	+	−	−

Периодичность тригонометрических функций

Таблица Ж.2 **Периоды тригонометрических функций**

Тригонометрическая функция	Период
$\sin \alpha$	2π
$\cos \alpha$	2π
$\operatorname{tg} \alpha$	π

$\operatorname{ctg} \alpha$	π
-----------------------------	-------

Четность и нечетность тригонометрических функций

1. Функция $\sin \alpha$ – нечетная: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
2. Функция $\cos \alpha$ – четная: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
3. Функция $\operatorname{tg} \alpha$ – нечетная: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.
4. Функция $\operatorname{ctg} \alpha$ – нечетная: $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Таблица Ж.3 Отдельные значения тригонометрических функций

φ°	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Формулы перехода от градусной меры φ угла к радианной мере α угла и наоборот:

$$\alpha = \frac{\varphi}{180^\circ} \pi; \quad \varphi = \frac{\alpha}{\pi} \times 180^\circ.$$

Основные тригонометрические тождества между функциями одного аргумента

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

2. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha .$

3. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha .$

4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z.$

5. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z .$

6. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z.$

7. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$

8. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$

9. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$

10. $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$

Таблица Ж.4 Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$	—	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	—	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	—	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	—

В представленных формулах из двух возможных знаков "плюс" или "минус" перед радикалом выбирается тот, который соответствует знаку искомой величины в соответствующей четверти.

Формулы сложения и вычитания аргументов

тригонометрических функций

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad 2. \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$3. \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad 4. \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}; \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}; \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}; \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in Z$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}; \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \pi n, n \in Z$$

Формулы приведения

Формулы приведения называются такие формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов $-\alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha; \pi \pm \alpha; \frac{3\pi}{2} \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha$ через функции от аргумента α , где α - любое допустимое значение аргумента.

Таблица Ж.5 Формулы приведения

№ пп.	Аргумент радианы (градусы)	Функции				Геометричес- кое преобразование
		sin	cos	tg	ctg	
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	
2	$\frac{\pi}{2} + \alpha; \left(90^\circ + \alpha\right)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	
3	$\frac{\pi}{2} - \alpha; \left(90^\circ - \alpha\right)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	
4	$\pi + \alpha; \left(180^\circ + \alpha\right)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	
5	$\pi - \alpha; \left(180^\circ - \alpha\right)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	

№	Аргумент	Функции	Геометричес- кое
---	----------	---------	---------------------

6	$\frac{3}{2}\pi + \alpha; (270^\circ + \alpha)$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi - \alpha; (270^\circ - \alpha)$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
8	$2\pi + \alpha; (360^\circ + \alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
9	$2\pi - \alpha; (360^\circ - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	

Формулы сведения можно распространить на любой угол, представленный в виде $\frac{\pi n}{2} + \alpha$.

Любая тригонометрическая функция угла $\frac{\pi n}{2} + \alpha$ по модулю равна той же функции угла α , если n – число четное, и кофункцию, если n – число нечетное. При этом, если задана функция угла имеет положительное значение, то и

полученная функция положительной, а если заданная функция угла $\frac{\pi n}{2} + \alpha$ имеет отрицательное значение, то перед полученной функцией следует поставить знак "минус".

Таблица Ж.6 Кофункции

Функция	Кофункция
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Можно пользоваться формулами:

$$1. \quad \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \sin \alpha, & \text{если } n = 4k; \\ \cos \alpha, & \text{если } n = 4k + 1; \\ -\sin \alpha, & \text{если } n = 4k + 2; \\ -\cos \alpha, & \text{если } n = 4k + 3; \end{cases}$$

$$2. \quad \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \cos \alpha, & \text{если } n = 4k; \\ -\sin \alpha, & \text{если } n = 4k + 1; \\ -\cos \alpha, & \text{если } n = 4k + 2; \\ \sin \alpha, & \text{если } n = 4k + 3; \end{cases}$$

$$3. \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{tg} \alpha, & \text{если } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$$4. \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{tg} \alpha, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Формулы двойного аргумента

$$1. \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha. \quad 2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

$$3. \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

$$4. \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.$$

Формулы тройного аргумента

$$1. \quad \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha. \quad 2. \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

$$3. \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in Z, \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$4. \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z, \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Формулы половинного аргумента

$$1. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$2. \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$$3. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad 4. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

$$5. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad 6. \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, \quad \text{где } \alpha \neq 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$7. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 8. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы понижения степени

$$1. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad 2. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 4. \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

$$5. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 6. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha).$$

$$7. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha).$$

$$8. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n - 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n - 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta},$$

$$13. \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta},$$

$$14. \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2 \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

$$15. \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$16. \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$18. \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$20. \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$21. \quad 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$22. \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$23. \quad 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$24. \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1 = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \beta \neq \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \beta \neq \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$17. \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$19. \quad 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{где } \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z.$$

$$25. \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1 = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

где $\alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z$.

$$26. \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

где $\alpha \neq \pi n, n \in Z$.

$$27. \quad 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

где $\alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z$.

где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$29. \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta},$$

где $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$30. \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

где $\alpha \neq \pi n, n \in Z$.

$$31. \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha,$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$32. \quad a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

где φ — угол, для которого,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$28. \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta},$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$1. \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$2. \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$3. \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$4. \quad \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$5. \quad \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$6. \quad \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$7. \quad \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$8. \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in Z; \alpha, \beta \neq \pi k, k \in Z; \alpha \neq -\beta.$$

$$9. \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in Z; \alpha, \beta \neq \pi k, k \in Z; \alpha \neq -\beta.$$

$$10. \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in Z; \alpha, \beta \neq \pi k, k \in Z.$$

Преобразование степеней синуса и косинуса

$$1. \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

$$2. \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$3. \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha).$$

$$4. \quad \sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha).$$

$$5. \quad \sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha).$$

$$6. \quad \cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha).$$

Тригонометрические функции, выраженные через тангенс половинного угла

$$\begin{array}{ll}
 \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z & \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z \\
 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi n, n \in Z
 \end{array}$$

Тригонометрические функции числового аргумента

1. $y = \sin x$

Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$. Область значений: $y \in [-1, 1]$.

2. $y = \cos x$

Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$. Область значений: $y \in [-1, 1]$.

3. $y = \operatorname{tg} x$

Область определения: действительные значения x , за исключением $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Область значений: $y \in (-\infty, +\infty)$.

4. $y = \operatorname{ctg} x$

Область определения: действительные значения x , за исключением πn , $n \in Z$. Область значений: $y \in (-\infty, +\infty)$.

Графическое изображение тригонометрических функций

Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \text{Arcsin } x$ – обратная функции, $y = \sin x$, имеет область определения $x \in [-1, 1]$ и область значений $y \in (-\infty, +\infty)$, является многозначной.

Функция $y = \arcsin x$ – обратная функции, $y = \sin x$, имеет область определения $x \in [-1, 1]$ и область значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, является однозначной, называется *главным значением* функции $y = \text{Arcsin } x$.

$$\text{Arcsin } x = (-1)^n \arcsin x + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Функция $y = \text{Arccos } x$ – обратная функции $y = \cos x$, имеет область определения $x \in [-1, 1]$ и область значений $y \in (-\infty, +\infty)$ и является многозначной.

Функция $y = \arccos x$ обернена до функції $y = \cos x$, имеет область определения $x \in [-1, 1]$ и область значений $y \in [0, \pi]$, является однозначной, называется *главным значением* функции $y = \text{Arccos } x$.

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

3. Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ — обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, имеет область определения $x \in (-\infty, +\infty)$ и область значений, включающую все значения $y \in R$, за исключением значений $y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$, и является многозначной.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, имеет область определения $y \in (-\infty, +\infty)$ и область значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, является однозначной, называется *главным значением* функции $y = \operatorname{Arctg} x$.

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n, \quad n \in Z.$$

4. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$ — обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, имеет область определения $x \in (-\infty, +\infty)$ и область значений, включающую все значения $y \in R$, за исключением значений $y = \pi n, \quad n \in Z$, и является многозначной.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ — обратная функции, $y = \operatorname{ctg} x$, имеет область определения $x \in (-\infty, +\infty)$ и область значений $[0; \pi]$ является однозначной, называется *главным значением* функции. $y = \operatorname{Arcctg} x$.

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \quad n \in Z.$$

Графическое изображение обратных тригонометрических функций

Тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями

$$1. \sin(\arcsin x) = x, |x| \leq 1, \quad 2. \cos(\arccos x) = x, |x| \leq 1,$$

$$3. \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, |x| \leq 1, \quad 4. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, |x| \leq 1,$$

$$5. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, |x| \leq 1, \quad 6. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, |x| \leq 1,$$

$$7. \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, |x| \leq 1, \quad 8. \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, |x| \leq 1,$$

$$9. \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| \leq 1, \quad 10. \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, |x| \leq 1,$$

$$11. \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, |x| \leq 1, \quad 12. \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| \leq 1,$$

$$13. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, |x| \leq 1, \quad 14. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, |x| \leq 1,$$

$$15. \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, |x| \leq 1, \quad 16. \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, |x| \leq 1.$$

Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями

1. $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi$, если $2n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ где $n \in Z$
2. $\arcsin(\sin x) = -x + (2n+1)\pi$, если $2(n+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ где $n \in Z$
3. $\arccos(\cos x) = x - 2n\pi$, если $2n\pi \leq x \leq 2(n+1)\pi$ где $n \in Z$
4. $\arccos(\cos x) = -x + (2n+1)\pi$, если $(2n+1)\pi \leq x \leq 2(n+1)\pi$ где $n \in Z$
5. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi$, если $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ где $n \in Z$
6. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi$, если $n\pi < x < (n+1)\pi$ где $n \in Z$

Четность и нечетность обратных тригонометрических функций

- | | |
|--|---|
| 1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x.$ | 2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$ |
| 3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$ | 4. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$ |

Связь между обратными тригонометрическими функциями

1. $\arcsin x = \operatorname{sign} x \times \arccos \sqrt{1 - x^2}.$
2. $\arcsin x = \operatorname{sign} x \times \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - x^2} \right).$

3. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$
если $-1 < x < 1.$
4. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi,$
если $-1 < x < 0.$
5. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$
если $0 < x < 1.$
6. $\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2},$
если $-1 \leq x \leq 0.$
7. $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2},$
если $0 \leq x \leq 1.$
8. $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$
если $-1 \leq x \leq 0.$
9. $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$
если $0 < x < -1.$
10. $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$
если $-1 \leq x \leq 1.$
11. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$
если $-\infty \leq x \leq \infty.$
12. $\operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$
если $x \leq 0.$

$$13. \quad \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{если } x \geq 0.$$

$$14. \quad \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \pi, \quad \text{если } x < 0.$$

$$15. \quad \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}, \quad \text{если } x > 0.$$

$$16. \quad \operatorname{arctg} x = \operatorname{sign} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} \right).$$

$$17. \quad \operatorname{arccotg} x = \pi - \arcsin \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{если } x < 0.$$

$$18. \quad \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{если } x > 0.$$

$$19. \quad \operatorname{arccotg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$20. \quad \operatorname{arccotg} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \text{если } x < 0.$$

$$21. \quad \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \text{если } x > 0.$$

$$22. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } x < 0.$$

$$23. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } x > 0.$$

$$24. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{если } x < -1.$$

$$25. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{если } -1 < x.$$

Формулы сложения и вычитания обратных тригонометрических функций

$$1. \quad \arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$2. \quad \arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } xy \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & \text{если } x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$3. \quad \arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), & \text{если } x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), & \text{если } x + y < 0. \end{cases}$$

$$4. \quad \arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos \left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), & \text{если } x \geq y; \\ \arccos \left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \right), & \text{если } x < y. \end{cases}$$

$$5. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{если } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x > 0 \text{ и } xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x < 0 \text{ и } xy > 1. \end{cases}$$

$$\text{arctg } x - \text{arctg } y = \begin{cases} \text{arctg } \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } xy > -1; \\ \pi + \text{arctg } \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x > 0 \text{ и } xy < -1; \\ -\pi + \text{arctg } \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x < 0 \text{ и } xy < -1. \end{cases}$$

6.

**Формулы удвоения аргумента
для обратных тригонометрических функций**

$$2\arcsin x = \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{если } |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{если } \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1; \\ -\pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{если } -1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

1.

$$2\arccos x = \begin{cases} 2\pi - \arccos(2x^2 - 1), & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ \arccos(2x^2 - 1), & \text{если } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2.

$$2 \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x < -1; \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}, & \text{если } |x| < 1. \end{cases}$$

3.

**Формулы деления аргумента
для обратных тригонометрических функций**

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \begin{cases} -\arcsin \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ \arcsin \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1.

$$\frac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \text{ если } -1 \leq x \leq 1.$$

2.

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

3.

Простейшие тригонометрические уравнения

$$1. \sin x = m. \quad x = \begin{cases} (-1)^n \arcsin m + n\pi, & n \in Z, \quad |m| \leq 1; \\ \emptyset, & |m| > 1. \end{cases}$$

$$2. \cos x = m. \quad x = \begin{cases} \pm \arccos m + 2\pi n, & n \in Z, \quad |m| \leq 1; \\ \emptyset, & |m| > 1. \end{cases}$$

$$3. \operatorname{tg} x = m. \quad x = \operatorname{arctg} m + n\pi, \quad n \in Z.$$

$$4. \operatorname{ctg} x = m. \quad x = \operatorname{arcctg} m + n\pi, \quad n \in Z.$$

Простейшие тригонометрические неравенства

$$1. \sin x > m.$$

Если $m < -1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если $-1 \leq m < 1$, то

$$2\pi n + \arcsin m < x < \pi(2n+1) - \arcsin m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если $m \geq 1$, то $x \in \emptyset$.

$$2. \sin x < m.$$

Если $m \leq -1$, то $x \in \emptyset$.

Если $-1 < m \leq 1$, то

$$\pi(2n+1) - \arcsin m < x < 2\pi(n+1) + \arcsin m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если $m > 1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $\cos x > m$.

Если $m < -1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если $-1 \leq m < 1$, то

$$2\pi n - \arccos m < x < 2\pi n + \arccos m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если $m \geq 1$, то $x \in \emptyset$.

4. $\cos x < m$.

Если $m \leq -1$, то $x \in \emptyset$.

Если $-1 < m \leq 1$, то

$$2\pi n + \arccos m < x < 2\pi(n+1) - \arccos m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если $m > 1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

5. $\operatorname{tg} x > m$.

$$2\pi n + \arctg m < x < \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad \text{при любом } m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

6. $\operatorname{tg} x < m$.

$$\frac{\pi}{2}(2n-1) < x < \arctg m + \pi n \quad \text{при любом } m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

7. $\operatorname{ctg} x > m$.

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} m + \pi n \quad \text{при любом } m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

8. $\operatorname{ctg} x < m$.

$$\pi n + \operatorname{arccctg} m < x < \pi(n+1) \quad \text{при любом } m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

II. Гиперболические функции

Определение гиперболических функций

1. Гиперболический синус:
$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}.$$

2. Гиперболический косинус:
$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

3. Гиперболический тангенс:
$$\operatorname{th} \alpha = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}.$$

4. Гиперболический котангенс:
$$\operatorname{cth} \alpha = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}.$$

5. Гиперболический секанс:
$$\operatorname{sch} \alpha = \frac{2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}.$$

6. Гиперболический косеканс:
$$\operatorname{csch} \alpha = \frac{2}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}.$$

Четность и нечетность гиперболических функций

1. Функция $\operatorname{sh} \alpha$ — нечетная $\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh} \alpha.$

2. Функция $\operatorname{ch} \alpha$ – четная $\operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{ch} \alpha$.
3. Функция $\operatorname{th} \alpha$ – нечетная $\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th} \alpha$.
4. Функция $\operatorname{cth} \alpha$ – нечетная $\operatorname{cth}(-\alpha) = -\operatorname{cth} \alpha$.

Основные соотношения между гиперболическими функциями

1. $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$.
2. $\operatorname{th} \alpha \operatorname{cth} \alpha = 1$.
3. $\operatorname{sh} \alpha = \frac{\operatorname{th} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 \alpha - 1}}$.
4. $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{cth} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 \alpha - 1}}$.
5. $\operatorname{th} \alpha = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{ch} \alpha}$.
6. $\operatorname{cth} \alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \alpha}}{\operatorname{sh} \alpha} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - 1}}$.
7. $\operatorname{sch} \alpha = \frac{\operatorname{th} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha}$.
8. $\operatorname{csch} \alpha = \frac{\operatorname{cth} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$.
9. $\operatorname{sch}^2 \alpha + \operatorname{th}^2 \alpha = 1$.
10. $\operatorname{sth}^2 \alpha + \operatorname{csch}^2 \alpha = 1$.

Формулы сложения аргументов

1. $\operatorname{sh}(u + v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$.
2. $\operatorname{sh}(u - v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v - \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$.
3. $\operatorname{ch}(u + v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$.
4. $\operatorname{ch}(u - v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$.
5. $\operatorname{th}(u + v) = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$.
6. $\operatorname{th}(u - v) = \frac{\operatorname{th} u - \operatorname{th} v}{1 - \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$.
7. $\operatorname{cth}(u + v) = \frac{\operatorname{cth} u + \operatorname{cth} v}{1 + \operatorname{sch} u \operatorname{sch} v}$.
8. $\operatorname{cth}(u - v) = \frac{\operatorname{cth} u - \operatorname{cth} v}{1 - \operatorname{sch} u \operatorname{sch} v}$.

Формулы двойного угла

$$1. \frac{\operatorname{sh} 2\alpha - 2\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{1 + \operatorname{th}^2 \alpha} .$$

$$2. \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \alpha}{2\operatorname{sh} \alpha} .$$

Формулы половинного угла

$$1. \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} \alpha + 1}} = \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} .$$

$$2. \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} \alpha - 1}} = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} .$$

Формулы преобразования суммы гиперболических функций на произведение

$$1. \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{th} \alpha .$$

$$2. \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ch} \alpha .$$

Формулы преобразования произведения гиперболических функций на сумму

$$1. \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta} = \operatorname{th}(\alpha + \beta) .$$

$$2. \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta} = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) .$$

Гиперболические функции, поданные через гиперболический тангенс половинного угла

$$1. \operatorname{sh} \alpha = \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

$$2. \operatorname{ch} \alpha = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

$$3. \operatorname{th} \alpha = \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Формулы преобразования степеней

$$1. \operatorname{sh}^2 \alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha - 1) .$$

$$2. \operatorname{ch}^2 \alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha + 1) .$$

$$3. \operatorname{th}^2 \alpha = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - 1}{\operatorname{ch} 2\alpha + 1} .$$

$$4. (\operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha)^n = \operatorname{sh} n\alpha + \operatorname{ch} n\alpha .$$

Соотношение между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\begin{array}{llll} 1. \cos \alpha = \operatorname{ch} i\alpha & 2. \sin \alpha = -i \operatorname{sh} i\alpha & 3. \operatorname{tg} \alpha = -i \operatorname{th} i\alpha & 4. \operatorname{ctg} \alpha = i \operatorname{cth} i\alpha \\ 5. \operatorname{ch} \alpha = \cos i\alpha & 6. \operatorname{sh} \alpha = -i \sin i\alpha & 7. \operatorname{th} \alpha = -i \operatorname{tg} i\alpha & 8. \operatorname{cth} \alpha = i \operatorname{ctg} i\alpha \end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Символом i обозначена мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$, если $i^2 = -1$.

Гиперболические функции числового аргумента

1. Функция гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$

Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значений: $y \in (-\infty, +\infty)$.

2. Функция гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$

Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значений: $y \in [1, +\infty)$.

3. Функция гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x$

Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значений: $y \in (-1, 1)$.

4. Функция гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x$

Область определения: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Область значений: $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Графическое изображение гиперболических функций числового аргумента

Обратные гиперболические функции

Функции, обратные гиперболическим функциям, называются *Ареафункциями*.

1. **Функция Ареасинус** $y = \operatorname{arcsinh} x$
2. Область определения:
 $x \in (-\infty, +\infty)$.
Область значений:
 $y \in (-\infty, +\infty)$.
3. **Функция Ареакосинус** $y = \operatorname{arccosh} x$

4. Область определения:
 $x \in [1, +\infty)$.

Область значений: $y \in [-\infty, 0)$ или $0 \leq y < +\infty$, поскольку берется только одна ветка графика.

Функция $y = \text{Arch } x$ двужанная, но обычно используют лишь одну из ветвей этой функции, где функция принимает только неотрицательные значения. Такуу ветку называют **главной**. При таких условиях функция $y = \text{Arch } x$ становится однозначной с областью определения $x \in [1, +\infty)$ и областью значений $y \in [0, \infty)$.

5. **Функция Аретангенс** $y = \text{Arth } x$

Область определения: $x \in (-1, 1)$

Область значений: $y \in (-\infty, +\infty)$.

6. **Функция Ареакотангенс** $y = \text{Arcth } x$

Область определения: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Область значений: $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Четность и нечетность обратных гиперболических функций

1. Функция $\text{Arsh } x$ – нечетная: $\text{Arsh}(-x) = -\text{Arsh } x$.
2. Функция $\text{Arth } x$ – нечетная: $\text{Arth}(-x) = -\text{Arth } x$.
3. Функция $\text{Arcth } x$ – нечетная: $\text{Arcth}(-x) = -\text{Arcth } x$.

Графическое изображение обратных гиперболических функций

Основные соотношения между обратными гиперболическими функциями

1. $\operatorname{Arsh} \alpha + \operatorname{Arsh} \beta = \operatorname{arsh} \left(\alpha \sqrt{\beta^2 + 1} + \beta \sqrt{\alpha^2 + 1} \right).$
2. $\operatorname{Arsh} \alpha + \operatorname{Arsh} \beta = \operatorname{arch} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} \sqrt{\beta^2 + 1} + \alpha \beta \right).$

$$3. \quad \operatorname{Arsh} \alpha - \operatorname{Arsh} \beta = \operatorname{arsh} \left(\alpha \sqrt{\beta^2 + 1} - \beta \sqrt{\alpha^2 + 1} \right).$$

$$4. \quad \operatorname{Arsh} \alpha - \operatorname{Arsh} \beta = \operatorname{arch} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} \sqrt{\beta^2 + 1} - \alpha \beta \right).$$

$$5. \quad \operatorname{Arch} \alpha + \operatorname{Arch} \beta = \operatorname{arch} \left(\alpha \beta + \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1} \right).$$

$$6. \quad \operatorname{Arch} \alpha + \operatorname{Arch} \beta = \operatorname{arsh} \left(\beta \sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha \sqrt{\beta^2 - 1} \right).$$

$$7. \quad \operatorname{Arch} \alpha - \operatorname{Arch} \beta = \operatorname{arch} \left(\alpha \beta - \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1} \right).$$

$$8. \quad \operatorname{Arch} \alpha - \operatorname{Arch} \beta = \operatorname{arsh} \left(\beta \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha \sqrt{\beta^2 - 1} \right).$$

$$9. \quad \operatorname{Arth} \alpha + \operatorname{Arth} \beta = \operatorname{arth} \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha \beta}.$$

$$10. \quad \operatorname{Arth} \alpha - \operatorname{Arth} \beta = \operatorname{arth} \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha \beta}.$$

Связь между обратными гиперболическими и элементарными функциями

$$1. \quad \operatorname{Arsh} x = \left(\ln x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

$$2. \quad \operatorname{Arch} x = \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad \text{если } x \geq 1 \text{ и } -\infty < y \leq 0.$$

$$3. \quad \operatorname{Arch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad \text{если } x \geq 1 \text{ и } -\infty \leq y < 0.$$

$$4. \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1.$$

$$5. \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Формула 3 соответствует главной ветке графика функции $\operatorname{Arch} x$, а формула 4 - нижней ветке графика функции $\operatorname{Arch} x$.

Соотношения между обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями

$$1. \arccos \alpha = i \operatorname{Arch} \alpha.$$

$$2. \arcsin \alpha = -i \operatorname{Arsh} i\alpha.$$

$$3. \operatorname{arctg} \alpha = -i \operatorname{Arth} i\alpha.$$

$$4. \operatorname{arcctg} \alpha = i \operatorname{Arcth} i\alpha.$$

$$5. \operatorname{Arch} \alpha = i \arccos \alpha.$$

$$6. \operatorname{Arsh} \alpha = -i \arcsin i\alpha.$$

$$7. \operatorname{Arth} \alpha = -i \operatorname{arctg} i\alpha.$$

$$8. \operatorname{Arcth} \alpha = i \operatorname{arcctg} i\alpha.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Символом i обозначена мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$, если $i^2 = -1$.

Связь между обратными гиперболическими и обратными тригонометрическими функциями

$$1. \operatorname{Arsh} x = \pm \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 + 1}.$$

2. $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$
3. $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arcth} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$
4. $\operatorname{Arch} x = \pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1},$ где $1 < x < \infty.$
5. $\operatorname{Arch} x = \pm \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$ где $1 < x < \infty.$
6. $\operatorname{Arch} x = \pm \operatorname{Arcth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$ где $1 < x < \infty.$
7. $\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$ где $|x| < 1.$
8. $\operatorname{Arth} x = \pm \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$ где $|x| < 1.$
9. $\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x},$ где $-1 < x < 0$ и $0 < x < 1.$
10. $\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$ где $|x| > 1.$
11. $\operatorname{Arcth} x = \pm \operatorname{Arch} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$ где $|x| > 1.$
12. $\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arth} \frac{1}{x},$ где $|x| > 1.$

Приложение И

Построение графиков функций в декартовой системе координат с помощью элементарных преобразований

Обозначения: $f(x)$ – функция, график которой берется за основу; k – постоянная

№ п /п	Заданная функция	Элементарные преобразования графика функции $f(x)$ в график заданной функции
1	$y = f(x) + k$	Выполняется параллельный перенос графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy на $ k $ единиц в положительном направлении оси Oy , если $k > 0$ и на $ k $ единиц в отрицательном направлении оси Oy , если $k < 0$
2	$y = f(x + k)$	Выполняется параллельный перенос графика функции $f(x)$ вдоль оси Ox на $ k $ единиц в положительном направлении оси Ox , если $k < 0$ и на $ k $ единиц в отрицательном направлении оси Ox , если $k > 0$
3	$y = -f(x)$	Выполняется зеркальное отображение графика функции $f(x)$ относительно оси Ox
4	$y = kf(x)$, где $k > 1$	Выполняется растяжение графика $f(x)$ в k раз вдоль оси Oy
5	$y = kf(x)$, где $0 < k < 1$	Выполняется сжатие графика $f(x)$ в k раз вдоль оси Oy
6	$y = kf(x)$, где $k < 0$	Выполняются последовательно преобразования 3 и 4, если $ k > 1$ или преобразования 3 и 5, если $ k < 1$
7	$y = f(-x)$	Выполняется зеркальное отображение графика

		функции $f(x)$ относительно оси Oy
8	$y = f(kx),$ где $k > 1$	Выполняется сжатие графика $f(x)$ в k раз вдоль оси Ox .
9	$y = f(kx),$ где $0 < k < 1$	Выполняется растяжение графика $f(x)$ в k раз вдоль оси Ox
10	$y = f(kx),$ где $k < 0$	Выполняются последовательно преобразования 7 и 8, если $ k > 1$ или преобразования 7 и 9, если $ k < 1$
11	$y = f(x) $	Остаются без изменений те части графика, для которых $y \geq 0$, и выполняется зеркальное отображение относительно оси Ox тех частей графика, для которых $y < 0$
12	$y = f(x)$	Остаются без изменений те части графика, для которых $x \geq 0$, а те части графика, для которых $x < 0$, заменяются на зеркальное отображение относительно оси Oy тех частей графика, для которых $x \geq 0$

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Аксенов А.П.** Математический анализ: в 2-х частях / Аксенов А.П. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2004. – Ч.1. – 614 с.; Ч.2. – 759 с.
2. **Баврин И.И.** Курс высшей математики / Баврин И.И. – М.: Владос, 2004. – 560 с.
- 3 **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Берман Г.Н. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 443 с.
5. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Берман Г.Н. – СПб.: Профессия, 2007. – 432 с.
6. **Бермант А.Ф.** Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
7. **Богомолов М.В.** Практические занятия по математике / Богомолов М.В. – [3-е изд.]. – перераб. и доп. – К.: Высш. шк., 1990. – 495 с.
8. **Богомолов М.В.** Практические занятия по математике / Богомолов М.В. – М.: Высш. шк., 2008. – 495 с.
9. **Бутузов В.Ф.** Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов и др. – М.: Высш. шк., 1988. – 288 с.
10. **Виленкин Н.Я.** Задачник по курсу математического анализа / Н.Я. Виленкин и др. – М.: Просвещение, 1971. – Ч.1. – 350 с.
11. **Виноградова И.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу / Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.; под ред. В.А. Садовни-чего. – М.: Изд-во Моск. ун-и, 1988. – 416 с.
12. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1977. – 872 с.
13. **Глаголев А.А.** Курс высшей математики / А.А. Глаголев, Т.В. Солнцева. – М.: Высш. шк., 1971. – 650 с.
14. **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: Высш. шк., 1986. – Ч.1. – 304 с.; Ч.2. – 416 с.
15. **Демидович Б.П.** Сборник задач по высшей математике / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
16. **Демидович Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Демидович Б.П. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
17. **Дороговцев А.Я.** Математический анализ / Дороговцев А.Я. – К.: Лыбидь, 1993. – Ч.1. – 320 с.; Ч.2. – 304 с.
18. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов; под ред. **Б.П. Демидовича**. – М.: Изд-во: Астрель,

АСТ, 2001. – 496 с.

19. **Запорожец Г.И.** Руководство к решению задач по математическому анализу / Запорожец Г.И. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
20. **Зорич В.А.** Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 544 с.; 1984. – Т.2. – 640 с.
21. **Ильин В.А.** Математический анализ / Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Изд-во Моск. Ун-и, 1985. – Т.1. – 664 с.; 2007. – Т.2. – 353 с.
22. **Ильин В.А.** Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1971. – Т.1. – 599 с.; 1973. – Т.2. – 447 с.
23. **Картавов С.А.** Математические термины / С.А. Картавов. – К.: Вища школа. 1988. – 295 с.
24. **Клепко В.Ю.** Вища математика в прикладах і задачах / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 592 с.
25. **Кудрявцев В.А.** Курс математического анализа / В.А. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
26. **Кудрявцев В.А.** Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
27. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа: в 3-х томах / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 2003. – Т.1. – 704 с.; 2004. – Т.2. – 720 с.; 2006. – Т.3. – 351 с.
28. **Кудрявцев Л.Д.** Краткий курс математического анализа: в 2-х томах / Кудрявцев Л.Д. – М.: Наука, 2005. – Т.1. – 400 с.; Т.2. – 424 с.
29. **Литвин І.І.** Вища математика / Литвин І.І., Конанчук Г.О., Желєзняк Г.О. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 368 с.
30. **Лунгу К.Н.** Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу и др. – М.: Абрис Пресс, 2004. – 591 с.
31. **Ляшко И.И.** Основы классического и современного математического анализа / Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. – К.: Вища школа, 1988. – 591 с.
32. **Никольский С.М.** Курс математического анализа / Никольский С.М. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.
33. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 2001. – Т.1. – 576 с.; Т.2. – 544 с.
34. **Поддубный Г.В.** Математический анализ для радиоинженеров / Г.В. Поддубный, Р.К. Романовский. – М.: Воениздат, 1976. – 344 с.
35. **Решетняк Ю.Г.** Курс математического анализа / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск: Изд-во Ин-и математики, 1999. – Ч.1, кн. 2. – 512 с.
36. Сборник задач по курсу высшей математики / Кручкович Г.И., Гутарин Н.И., Дюбюк П.Е.; под ред. Г.И. Кручковича. –

М.: Высш. шк. – 1973. – 576 с.

37. Сборник задач по математике. Линейная алгебра и основы математического анализа; под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1986. – 462 с.
38. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / [Ляшко С.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н. и др.]. – Изд-во: Вильямс, 2001. – Ч.1. – 432 с.
39. Справочное пособие по математическому анализу / [И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач]. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 224 с.
40. **Стрелковська І.В.** Вища математика в телекомунікаціях / Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Паскаленко В.М. – Частина I – Одеса: ВМВ, 2009. – 620 с.
41. **Стрелковська І.В.** Вища математика для фахівців в галузі зв'язку / Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Паскаленко В.М. – Частина I – Одеса: ВМВ, 2010. – 620 с.
42. **Толстов Г.П.** Элементы математического анализа / Толстов Г.П. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – 516 с.; 1976. – Т.2. – 464 с.
43. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616 с.; Т.2. – 810 с.; Т.3. – 662 с.
44. **Фролов С.В.** Курс высшей математики / С.В. Фролов, Р.Я. Шостак. – М.: Высш. шк., 1973. – 400 с.
45. **Шведов И.А.** Компактный курс математического анализа / И.А. Шведов; под ред. К.В. Сторожука. – Новосибирск: НГУ, 2001. – Ч.1. – 112 с.; 2003. – Ч.2. – 88 с.
46. **Шварц Л.** Анализ / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 824 с.; – Т.2. – 528 с.
47. **Шипачев В.С.** Курс высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Велби; Проспект, 2004. – 600 с.
48. **Шипачев В.С.** Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1997. – 479 с.

Учебное издание

*Стрелковская Ирина Викторовна
Паскаленко Виктория Николаевна*

Введение в математический анализ

Учебное пособие
для иностранных студентов
технических специальностей

Редактор – *Кодрул Л.А.*

Компьютернок макетирование – *Кирдогло Т.В.*