

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ЮРИДИЧНА АКАДЕМІЯ»
КАФЕДРА КІБЕРБЕЗПЕКИ

Чепурна О.Є.
Черевко Є.В.
Баландіна Н.М.
Овчинников М.Ю.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЧАСТИНА 1
для підготовки бакалаврів
у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право»

ОДЕСА 2025

УДК 51:005.8:075.8
Ч 49

Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична
академія» (протокол № 6 від 29 квітня 2025 року)

Автори:

Чепурна Олена Євгенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-1432-0799

Черевко Євген Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-9574-1316

Баландіна Наталя Миколаївна – старший викладач кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-3121-4517

Овчинников Микола Юрійович – асистент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0009-0009-8221-7193

Рецензенти:

Логінова Наталія Іванівна – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія»

Гострик Олексій Маркович – кандидат економічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій Одеського національного економічного університету

Чепурна О. Є., Червеко Є. В., Баландіна Н. М., Овчинников М. Ю.

Вища математика : методичні вказівки. Ч. 1 : для підготовки бакалаврів у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право» / О. Є. Чепурна, Є. В. Червеко, Н. М. Баландіна, М. Ю. Овчинников. – Одеса : Нац. ун-т «Одеська юридична академія», 2025. 113 с.-Режим доступу:<https://hdl.handle.net/11300/30871>

Методичні вказівки з дисципліни «Вища математика» частина 1 спрямовані на розвиток фундаментальних компетенцій з математичних методах дослідження економічних явищ і процесів, їх застосування в реальних умовах, а також на розвиток навичок використання математики для підвищення ефективності управління. Практична частина методичних вказівок та приклади з економічною складовою дозволяє здобувачам не лише освоїти теоретичні основи вищої математики, але й отримати досвід застосування математичного апарату та практичний досвід у використанні аналітичних методів і технологій, які сприятимуть їхньому професійному зростанню та успішній реалізації в майбутній професійній діяльності.

УДК 51:005.8:075.8
Ч 49

© О.Є. Чепурна, Є.В. Черевко, Н.М. Баландіна, М.Ю.Овчинников
© Національний університет «Одеська юридична академія»

Зміст

Вступ	4
1. Основи лінійної алгебри	4
1.1. Поняття матриці	4
1.2. Дії над матрицями	5
1.3. Визначники	7
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)	10
2. Основи аналітичної геометрії	18
2.1. Метод координат	18
2.2. Елементи векторної алгебри	19
2.3. Найпростіші задачі аналітичної геометрії	29
2.4. Аналітична геометрія в просторі	30
2.4.1. Рівняння площини в просторі	30
2.4.2. Площина в просторі. Основні задачі	33
2.4.3. Рівняння прямої в просторі	35
2.4.4. Пряма лінія в просторі. Основні задачі	37
2.4.5. Пряма і площина в просторі. Основні задачі	38
2.5. Аналітична геометрія на площині	40
2.5.1. Лінії на площині	40
2.5.2. Пряма лінія на площині. Основні задачі	44
2.6. Криві і поверхні другого порядку	46
2.6.1. Криві другого порядку на площині	47
2.6.2. Поверхні другого порядку	51
3. Введення в математичний аналіз	56
3.1. Дійсні числа	57
3.2. Числові проміжки	59
3.3. Абсолютна величина та її властивості	59
3.4. Числові послідовності	60
3.5. Функції однієї змінної	60
3.5.1. Функціональна залежність	60
3.5.2. Характеристики поведінки функції	61
3.5.3. Обернена функція	62
3.5.4. Складна функція	63
3.5.5. Основні елементарні функції	63
3.5.6. Границя функції	64
3.5.7. Нескінченно малі функції та їх властивості	66
3.5.8. Нескінченно великі функції, їх властивості їх зв'язок з нескінченно малими	66
3.5.9. Основні теореми про границі	67
3.5.10. Дві визначні границі	69
3.5.11. Неперервність функції в точці і класифікація розривів	71
3.5.12. Властивості функції, неперервних на відрізку	74
4. Диференційне числення функції однієї змінної	78

4.1. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст	78
4.2. Основні правила диференціювання функції	80
4.3. Похідні вищих порядків	84
4.4. Диференціал функції	85
4.5. Наближенні обчислення за допомогою диференціала	86
4.6. Дослідження функції за допомогою похідних	87
Рекомендована література та інтернет ресурси	108

ВСТУП

Дисципліна «Вища математика» є базовою у підготовці фахівців у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право» та формує фундамент для вивчення спеціальних економічних і управлінських дисциплін. Перша частина методичних вказівок спрямована на засвоєння студентами основних понять і методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії та початків математичного аналізу, що забезпечують розвиток аналітичного мислення та здатності до формалізації прикладних задач.

У методичних вказівках розглядаються вектори та матриці, операції з ними, системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язання, елементи аналітичної геометрії, а також основи диференціювання функцій однієї змінної. Матеріал подано у логічній послідовності з акцентом на приклади, що відображають реальні завдання економіки, фінансів та менеджменту.

Запропоновані рекомендації покликані допомогти студентам оволодіти методами побудови математичних моделей, аналізу даних та розв'язання задач з використанням сучасних інформаційних технологій. Опанування змісту цієї частини курсу створює основу для подальшого вивчення складніших розділів вищої математики, представлених у другій частині методичних вказівок.

1. Основи лінійної алгебри

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. До таких систем зводяться багато задач математичного моделювання фізичних і технологічних процесів при їх дискретизації, тобто представлення відповідних диференціальних рівнянь через кінцеві різниці або кінцеві елементи. Використовуючи алгебру матриць, система лінійних рівнянь алгебри представляється в найбільш простий і компактній формі

$$A X = B, \quad (1.1)$$

де A – матриця коефіцієнтів системи рівнянь (основна матриця), X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів. Тому зручно проводити дослідження вирішень системи (2.1), використовуючи мову матриць.

1.1. Поняття матриці

Визначення 1.1. Матрицею називається прямокутна таблиця з $n \times m$ чисел, яка містить m рядків і n стовпців.

$$\text{Позначення: } A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Або коротко $[a_{ij}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). В цьому випадку мається на увазі, що матриця має розмірність $n \times m$. Матриці позначають заголовними латинськими буквами $A, B, C, D \dots$ Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де перший індекс i означає номер рядка, а другий j - номер стовпця.

Якщо в квадратній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші дорівнюють нулю, то її називають *одиничною матрицею*. Вона позначається буквою E і має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Визначення 1.2. Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають однакову кількість рядків і стовпців і відповідні елементи яких збігаються.

Матриця, в якій всі елементи дорівнюють нулю, називається *нуль-матрицею* або *нульовою*. Її позначають буквою O .

Якщо матриця складається лише з одного рядка, то вона називається *матрицею-рядком*. Матриця, що складається з одного стовпця називається *матрицею-стовпцем*.

Якщо в матриці A поміняти рядки на стовпці, а стовпці – на відповідні рядки, то отриману матрицю називають *транспонованою* і позначають A^T .

1.2. Дії над матрицями

Додавання.

Операція додавання матриць вводиться лише для матриць однакових розмірів.

Визначення 1.3. Сумою двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$ така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$)

Приклад

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається *різниця матриць*.

Множення на число

Визначення 1.4. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B_{m \times n} = (b_{ij})$ така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$)

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \quad A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Різницю матриць $A - B$ можна визначити так: $A - B = A + (-I) \cdot B$.

Операції додавання і множення матриці на число мають наступні *властивості*;

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
2. $A + O = A$;
3. $A - A = O$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
8. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$,

де A, B, C – матриці, α, β – числа.

Добуток матриць.

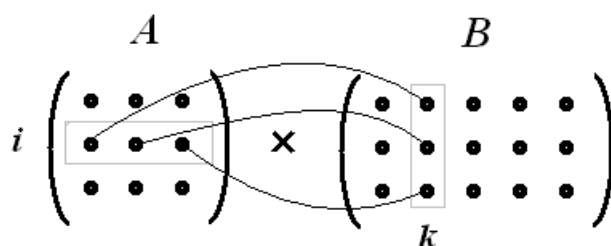
Операція множення двох матриць вводитьься тільки для випадку, коли *число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці*.

Визначення 1.5. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n \times p} = (b_{jk})$ називається матриця $C_{m \times p} = (c_{ik})$ така, що

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \quad (i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p),$$

тобто елемент i -ої рядка й k -го стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів i -ого рядка матриці A на відповідні елементи k -го стовпця матриці B .

Одержання елемента c_{ik} схематично зображується так:



Якщо матриці A і B квадратні одного розміру, то добуток $A B$ і $B A$ завжди існують. Легко показати, що $A E = E A = A$, де A - квадратна матриця, E - одинична матриця того ж розміру.

Приклад

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді добуток матриць $A \times B$ визначається в таким чином:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

При цьому добуток $B \times A$ не визначено, тому що число стовпців матриці $B(3)$ не збіжиться із числом рядків матриці $A(2)$.

Матриці A і B називаються переставними, якщо $AB = BA$.

Множення матриць має наступні властивості:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$,

якщо, звичайно, написані суми й добутки матриць мають сенс.

Для операції транспонування вірні властивості:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.

1.3. Визначники

Кожній квадратній матриці A порядку n ставиться у відповідність деяке число, яке називається *визначником* цієї матриці.

Позначення: $\det A$ (або $|A|$, або Δ_A).

Визначення 1.6. Визначником матриці 1-го порядку (тобто матриці, що складає з одного елемента, одного числа) називається саме число, що утворює задану матрицю.

Визначення 1.7. Визначником матриці 2-го порядку називається число, яке утримується за допомогою елементів квадратної матриці 2-го порядку наступним чином:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначення 1.8. Визначник третього порядку обчислюється по формулі:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

При обчисленні визначників 3-го порядку зручно користуватися *правилом трикутників*, що символічно можна представити так:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Приклади. Обчислити визначник третього порядку

$$1. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 - 14 = 0.$$

Для обчислення визначника матриць 4-го й більше високих порядків розглянемо додаткові поняття. Розглянемо визначник матриці A n -го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначення 1.9. Виділимо в ньому який-небудь елемент a_{ij} і викреслимо i -ий рядок й j -й стовпець, на перетинанні яких розташований цей елемент. Отриманий визначник $(n-1)$ -го порядку називається *мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n .

Визначення 1.10. Найбільший порядок мінорів матриці A , відмінних від нуля, називається *рангом* матриці.

Визначення 1.11. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ_n називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначення 1.12. Визначник n -го порядку Δ_n обчислюється сумою добутку елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}, \quad 1 \leq i, k \leq n. \quad (1.4)$$

Приклад. Обчислимо визначник 4-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ за допомогою

розкладання по 2-му стовпцю. Для цього знайдемо A_{32} і A_{42} :

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

Отже, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + (-1)(-15) = 30.$

Квадратична матриця A називається *невиродженою*, якщо визначник $\Delta = \det A \neq 0$. В протилежному випадку ($\Delta = 0$) матриця A називається *виродженою*.

Визначення 1.13. Матриця A^{-1} називається *зворотною* матриці A , якщо виконується умова

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E, \quad (1.5)$$

де E - одинична матриця того ж порядку, що й матриця A . Відзначимо, що для виродженої матриці зворотна матриця не існує.

Основні властивості визначників.

1. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець), дорівнює нулю.
2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник міняє знак.
3. Визначник, що має дві однакові рядки(однакові стовпці), дорівнює нулю.
4. Загальний множник будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

де, a_{ij} , b_i - числа, x_j - невідомі, n – число невідомих, m – число рівнянь.

Визначення 1.15. Розв'язок лінійної системи (2.6) називається набір чисел $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$, які при підстановці замість невідомих обертають кожне рівняння системи в тотожність.

Визначення 1.16. Якщо система має хоч би один розв'язок, то вона називається *спільною*. Якщо система не має жодного рішення, то вона називається *неспільною*.

Визначення 1.17. Система називається визначеною, якщо вона має лише одне рішення і невизначеною, якщо більш за одне.

Визначення 1.18. Для системи лінійних рівнянь вигляду (1.6) матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ називається матрицею системи, а матриця}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ називається розширеною матрицею системи}$$

Тереми Кронекера – Капеллі (критерій сумісності системи)

Система лінійних рівнянь спільна тоді і лише тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Визначення 1.19. Якщо $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система називається *однорідною*. Однорідна система завжди спільна.

Матричний метод вирішення систем лінійних рівнянь.

Нехай дана система рівнянь: (1.6)

Складемо матриці:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (1.6) можна записати в матричній формі:

1) Якщо $\Delta \neq 0$, система (1.3) має єдине рішення, визначається за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

2) Якщо $\Delta = \Delta_j = 0$, система має нескінченно багато рішень.

3) Якщо $\Delta = 0$, а хоч би один з $\Delta_j \neq 0$ система не має рішень.

Якщо система однорідна, тобто $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система має єдине нульове вирішення $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Приклад. Знайти вирішення системи рівнянь:
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30. \quad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60. \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90. \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Метод Гауса

На відміну від матричного методу і методу Крамера, метод Гауса може бути застосований до систем лінійних рівнянь з довільним числом рівнянь і невідомих. Суть методу полягає в послідовному виключенні невідомих.

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x + 4y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases} \\
4) \begin{cases} 5x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases} & 5) \begin{cases} 2x + y - 3z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} & 6) \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}
\end{array}$$

Приклади задач з економічним застосуванням

1. Відомості про продаж торгової фірми, що об'єднує три магазини, задані матрицями:

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} 17 & 4 & 12 \\ 6 & 4 & 13 \\ 11 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$B = \|b_{ik}\| = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 15 \\ 20 & 5 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$C = \|c_{ik}\| = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

де a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} – суми, виручені протягом i -го сезону від продажу k -го виду товарів за першим, другим та третім магазинами відповідно.

- Покажіть, що у кожен сезон I та III магазини, разом узяті, продали більше кожного виду товарів, ніж магазин II.
- Знайдіть загальну виручку від продажу однакових товарів трьома магазинами по кожному сезону.

2. Підприємство випускає три види продукції в кількості, які характеризуються матрицею-планом $X = [10 \ 7 \ 4]$. При випуску продукції використовують 5 видів сировини. Задано матрицю витрат сировини

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

де a_{ik} – витрата k -го виду сировини на 1 одиницю i -го виду продукції. Матриця $C = [7 \ 4 \ 5 \ 10 \ 2]$ задає вартість 1-ї одиниці кожного виду сировини.

Визначити: а) необхідну кількість одиниць сировини кожного виду для забезпечення плану; б) вартість сировини для одиниці кожного виду продукції; в) загальну вартість сировини під час виконання плану випуску X .

3. Підприємство виробляє три види продукції, витрачаючи два типи ресурсів. Норми витрат визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, елементи якої a_{ij} показують

кількість одиниць i -го ресурсу, який витрачається на виробництво однієї одиниці j -го виду продукції. План випуску (одиниць продукції) визначається матрицею $X = (10 \ 30 \ 20)$. Знайти: а) планові витрати типів ресурсів; б) повну вартість (в грн.) витрачених ресурсів, якщо ціни на одиницю першого та другого типу ресурсів відповідно становили 7 та 9 грн.

Розв'язування. Позначимо y_1 (од.) – витрати першого, а y_2 (од.) – другого ресур-

сів. Дістанемо матрицю $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – матрицю планових витрат ресурсів. Витрати

ресурсів на все виробництво знаходяться як сума добутків об'ємів випуску на норми витрат, тобто:

$$Y = A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виконання плану випуску потрібно буде витратити $y_1 = 220$ (од.) першого та $y_2 = 200$ (од.) другого ресурсу.

За умовою ціна одиниці першого ресурсу $p_1 = 7$ (грн), другого – $p_2 = 9$ (грн). Введемо матрицю цін ресурсів $P = (p_1 \ p_2)$. Тоді повна вартість C (грн) витрачених ресурсів дорівнюватиме добутку матриць (скалярному добутку векторів – матриць):

$$C = P \cdot Y = (7 \ 9) \cdot \begin{pmatrix} 220 \\ 200 \end{pmatrix} = (3340).$$

4. Підприємство виробляє два види продукції, витрачаючи два типи ресурсів. Норми витрат визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості одиниць i -го типу ресурсу, який витрачається на виробництво однієї одиниці j -го виду продукції. Наявні запаси ресурсів (в одиницях) визначаються матрицею $B = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \end{pmatrix}$. Знайти план випуску (одиниць продукції) при умові повного використання ресурсів.

Розв'язування. Нехай x_1 (од.) – план випуску першого виду продукції, а x_2 (од.) – другого виду. Тоді $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – матриця планових випусків. Витрати ресурсів на все виробництво знаходяться як сума добутків об'ємів випуску на норми витрат, тобто:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

За умови повного використання ресурсів повинна виконуватись рівність:

$$A \cdot X = B,$$

яка є матричною формою запису системи

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 110 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \end{cases}.$$

Розв'язуючи систему, дістаємо план випуску: $x_1 = 10$ (од.), $x_2 = 20$ (од.).

2. Основи аналітичної геометрії

Аналітична геометрія вивчає прості геометричні об'єкти (прямі, площини, лінії і поверхні другого порядку) засобами алгебри на основі методу координат.

2.1. Метод координат

Положення точки A в просторі відносно деякої точки O (полюса) можна визначити за допомогою вектору OA , кінець цього вектору вказує на розташування точки A в просторі відносно точки O .

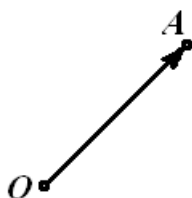


Рис. 2.1. Радіус - вектор точки A

Через точку O в просторі проведемо три взаємно перпендикулярні осі, і на кожній з них візьмемо одиничний вектор, спрямований по цій осі (орт осі). Вісь з початком відліку в точці O і одиницею довжини називається координатної віссю, а впорядкована система трьох взаємно перпендикулярних координатних осей із загальним початком відліку O і загальною одиницею довжини, називається прямокутною декартовою системою координат в просторі. У вибраній впорядкованій системі координатних осей першу вісь будемо називати віссю абсцис (чи віссю x), другу - віссю ординат (чи віссю y), третю - віссю аплікат (чи віссю z).

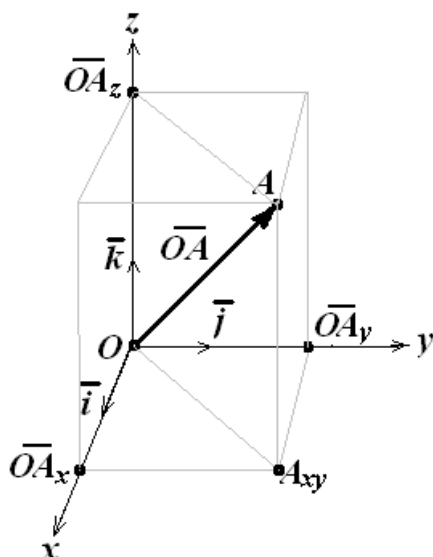


Рис. 2.2. Координатний метод завдання положення точки A в просторі.

Визначення 2.1. Координатами точки в заданій прямокутній Декартовій системі координат називаються проекції радіусу-вектору цієї точки на координатні осі.

Координати точки A в заданій прямокутній декартовій системі координат (рис. 3.2) записуються у виді (x, y, z) , де

$$x = OA_x = \text{Pr}_x OA, \quad y = OA_y = \text{Pr}_y OA, \quad z = OA_z = \text{Pr}_z OA, \quad (2.1)$$

і називаються відповідно абсцисою, ординатою і аплікатою точки A .

Довжина вектора OA визначається діагоналлю паралелограма із сторонами x , y , z , тобто

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.2)$$

2.2. Елементи векторної алгебри.

Геометричною моделлю векторної величини є прямолінійний відрізок з вибраним на ній напрямом.

Визначення 2.2. Вектор AB - спрямований відрізок прямої, у якого один кінець (точка A) називається початком вектору, а інший кінець (точка B) - кінцем вектора.

До векторів відноситься також і нульовий вектор, початок і кінець якого збігаються.

Використовуючи координатний метод всякий вектор в заданій впорядкованій декартовій системі координат представляється алгебраїчним об'єктом у вигляді впорядкованої трійки чисел (x, y, z) , де x, y, z - координати радіус-вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка A - початок координат), або координати кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$.

Визначення 2.3. Довжина (модулем) вектора називається відстань між початком і кінцем вектора.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

де координати точок $A(0,0,0)$ - початок координат, $B(x, y, z)$ (див. рис. 2.2)

Визначення 2.4. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. Нульовий вектор колінеарен будь-якому вектору.

Визначення 2.5. Вектори називаються *компланарними*, якщо існує площина, якій вони паралельні.

Визначення 2.6. Вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакові модулі.

Операції над векторами

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції складання і віднімання векторів, а також множення вектора на число.

Складання векторів

Визначення 2.7. Хай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ два довільні вектори. Візьмемо довільну точку O і побудуємо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Від точки A (кінець вектора $\vec{a}$) відкладемо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор, який сполучає початок першого вектору з кінцем другого, називається сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (див. рис. 2.3).

Це правило складання векторів називають *правилом трикутника*.

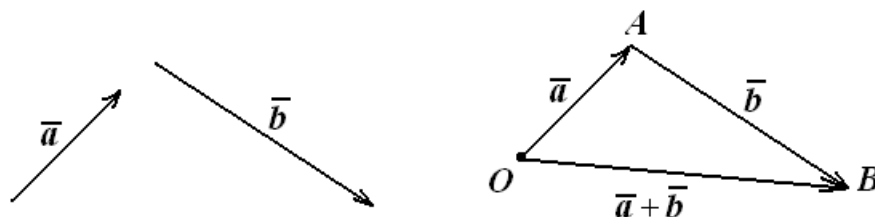


Рис. 2.3. Складання векторів за правилом трикутників

Суму двох векторів можна побудувати також за *правилом паралелограма*

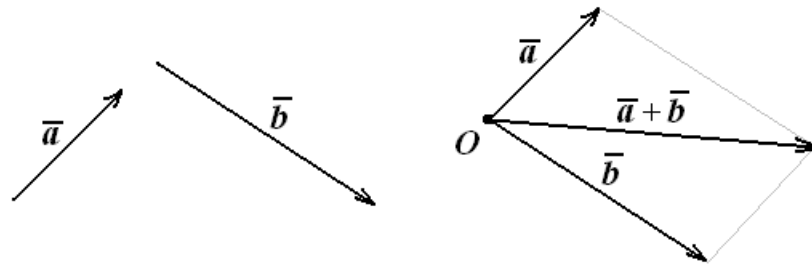


Рис. 2.4. Складання векторів за правилом паралелограма.

Тепер розглянемо складання будь-якого числа векторів. Нехай задані n векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. І вимагається знайти їх суму. Вибираємо довільну точку O (поліус) і з початком в цій точці відкладемо вектор $\vec{a}_1$, до кінця вектору $\vec{a}_1$ приставимо початок вектору $\vec{a}_2$, до кінця побудованого вектору $\vec{a}_2$ приставимо початок вектору $\vec{a}_3$ і так далі. Нарешті, до кінця вектору $\vec{a}_{n-1}$ приставимо початок вектору $\vec{a}_n$ (рис. 3.4). Тоді вектор $\vec{a}$, початком якого є початок вектору $\vec{a}_1$, а кінцем - кінець вектору $\vec{a}_n$, і буде сумою векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$. При цьому байдуже, в якому порядку нумеруються задані вектори.

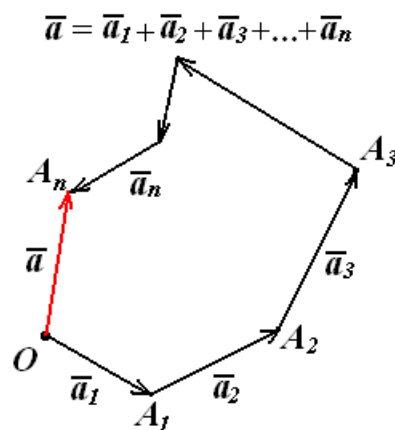


Рис. 2.5. Складання будь-якого числа векторів.

Якщо система векторів задана своїми координатами $(\vec{a}_i(x_i, y_i, z_i))$, то координати сумарного вектору $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ визначаються наступними співвідношеннями

$$a_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad a_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad a_z = \sum_{i=1}^n z_i. \quad (2.3)$$

Різниця векторів

Визначення 2.8. Під різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміється вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 2.5)

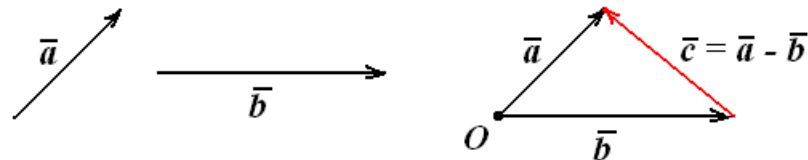


Рис. 2.6. Різниця векторів.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то координати *різниці* векторів визначаються по формулах

$$c_x = a_x - b_x, \quad c_y = a_y - b_y, \quad c_z = a_z - b_z. \quad (2.4)$$

Визначення 2.9. Добутком $k\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ на число k називається вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, модуль його рівний $|k||a|$, а напрям, співпадає з напрямом $\vec{a}$ при $k > 0$ і протилежний $\vec{a}$ при $k < 0$.

Властивості множення вектора на число:

- 1) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- 2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.
- 3) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$.

Властивості лінійних операцій над векторами:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - комутативність
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
- 5) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивність
- 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$$8) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Проекція вектора на вісь

Нехай задані вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь x . Розглянемо вектор A_1B_1 , початком якого є точка A_1 - проекція точки A на вісь x , а кінцем - точка B_1 - проекція точки B на ту ж вісь.

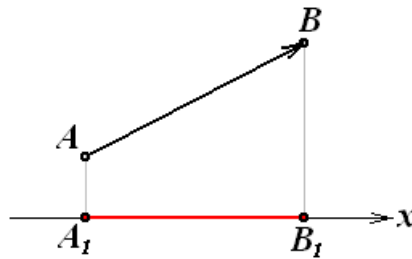


Рис. 2.7. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь x

Визначення 2.10. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь x називається довжина вектора A_1B_1 , узятая зі знаком "+", якщо напрям A_1B_1 співпадає з напрямом осі x , зі знаком "-", якщо напрям A_1B_1 протилежний напрямку осі x .

$$\text{Пр}_x \overrightarrow{AB} = \pm |A_1B_1|. \quad (2.5)$$

Властивості проєкцій:

- 1). $\text{Пр}_x \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \wedge x)$;
- 2). $\text{Пр}_x \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \text{Пр}_x \overrightarrow{AB}$;
- 3). $\text{Пр}_x (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \text{Пр}_x \vec{a} + \text{Пр}_x \vec{b} - \text{Пр}_x \vec{c}$.

Розкладання вектору по ортам координатних осей

Розглянемо прямокутну декартову систему координат (Охуz) з початком відліку в точці O (i, j, k - орты координатних осей). Нехай заданий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, початок якого співпадає з початком координат, тобто вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ є радіусом-вектором точки A .

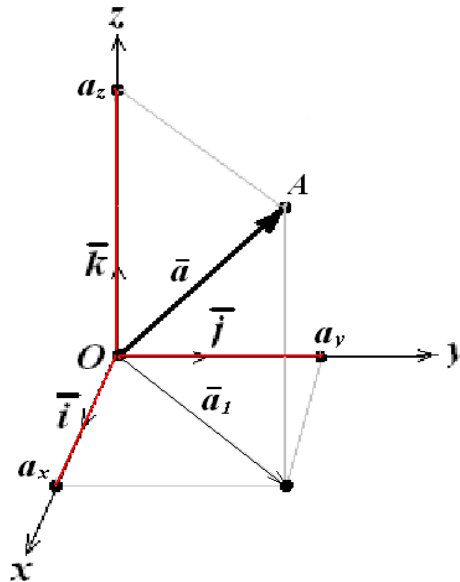


Рис. 2.8. Розкладання вектору по ортам осей координат.

Позначимо координати вектора $\bar{a}$ на осі координат

$$a_x = \text{Pr}_x \bar{a}, \quad a_y = \text{Pr}_y \bar{a}, \quad a_z = \text{Pr}_z \bar{a}. \quad (2.6)$$

Оскільки $\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z$ (див. рис. 3.7) и $\bar{a}_x = a_x \bar{i}$, $\bar{a}_y = a_y \bar{j}$, $\bar{a}_z = a_z \bar{k}$, те вектор $\bar{a}$ має єдине розкладання по ортам осей координат

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (2.7)$$

Скалярний добуток двох векторів

У фізичних і технічних додатках математики велике значення має рішення задачі про визначення роботи, яка здійснюється постійною силою $\mathbf{F}$ при переміщеннях матеріальної точки. Якщо точка переміщається прямолінійно, то, як відомо, робота дорівнює добутку величини сили на величину переміщення і на косинус кута між напрямом сили і напрямом переміщення. Позначивши силу F , а переміщення AB , отримуємо для обчислення роботи вираз: $A(F) = |F| \cdot |AB| \cdot \cos(F \wedge AB)$. Оскільки подібна "операція" з двома векторами зустрічається дуже часто, то для неї введено операція скалярного добутку.

Визначення 2.11. Скалярним добутком, двох векторів називається добуток їх довжин і косинуса кута між ними.

Скалярний твір двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ означаємо символом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Відповідно до визначення

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}). \quad (2.8)$$

Властивості скалярного добутку

- 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- 2) $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot (\beta \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot \beta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
- 3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$;
- 4) $\cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}}{|\bar{\mathbf{a}}| |\bar{\mathbf{b}}|}.$

Звідки витікає, що умова ортогональності двох векторів($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (2.9)$$

Обчислення скалярного добутку через координати векторів

Врахуємо, що орти прямокутної декартової системи координат мають наступну властивість:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Нехай задані вектори $\bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ і $\bar{\mathbf{b}} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. Визначимо скалярний добуток

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}),$$

враховуючи властивості ортів координатних осей, отримаємо

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.10)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів.

Умова ортогональності двох векторів($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (2.11)$$

Векторний добуток двох векторів

Одним з найважливіших понять фізики, механіки і електродинаміки являються поняття моменту сили, моменту кількості руху, індукційний струм та ін. Наприклад, механічний ефект дії сили - прямо ліній поступальний рух, а механічний ефект від дії моменту сили - обертальний рух навколо деякої осі. Обчислення вказаних моментів пов'язано з векторним добутком двох векторів.

Визначення 2.12. Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, модуль якого дорівнює добутку модулів векторів - співмножників, перпендикулярний площині цих векторів і спрямований так, що з його кінця видно поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ по найкоротшому шляху, проти ходу годинникової стрілки.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad (2.11)$$

1. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a} \wedge \vec{b})$;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3.

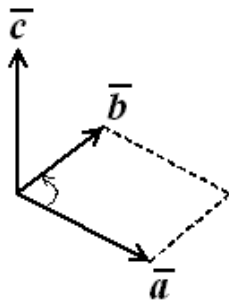


Рис. 2.9. Векторний добуток $[\vec{a} \times \vec{b}]$.

Зауваження. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на заданих векторах.

Властивості векторного добутку.

- 1). $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- 2). $(\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = (\alpha \beta) [\vec{a} \times \vec{b}]$;
- 3). $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Обчислення векторного твору через координати векторів

Врахуємо, що орти прямокутної декартової системи координат мають наступну властивість:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Нехай задані вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Визначимо скалярний твір

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}),$$

враховуючи властивості ортів координатних осей, отримаємо

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \quad (2.12)$$

або

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Важливим геометричним завданням, що вирішується за допомогою операції векторного добутку, є обчислення площі трикутника по координатах його вершин.

Нехай задані координати вершин трикутника A, B, C . Знаючи їх, знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Отже

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|. \quad (2.13)$$

Приклад. $A(1, -2, 0), B(2, 1, -1), C(0, 3, 1)$. Знайти S_{ABC} .

Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 5, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3 \cdot 1 - (-1) \cdot 5] \mathbf{i} + [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] \mathbf{j} + [1 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)] \mathbf{k} = 8 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 8 \mathbf{k},$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 8\sqrt{2}, \quad S_{ABC} = 4\sqrt{2}.$$

Мішаний добуток векторів.

Визначення 2.13. Скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Таким чином, мішаний добуток векторів, і є вираз

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \quad (2.14)$$

і є скаляр (число).

З'ясуємо геометричний зміст введеного поняття. Нехай точка O є загальний початок трьох не компланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Побудуємо на заданих векторах паралелепіпед (рис. 3.9) і знайдемо вектор $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$. З визначення скалярного добутку векторів, отримуємо $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{d} = |\bar{d}| \text{Пр}_d \bar{a}$. Але оскільки вектор $\bar{d}$ перпендикулярний площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, те проекція вектора $\bar{a}$ на вісь, спрямовану по вектору $\bar{d}$, або дорівнює висоті паралелепіпеда. За визначенням довжина вектора $\bar{d}$ дорівнює площі

паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Тому $\vec{a} \cdot \vec{d}$ є об'єм паралелепіпеда.

Отже, абсолютна величина змішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

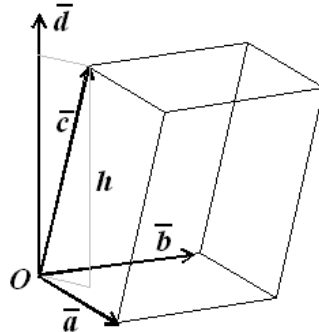


Рис. 2.10. Мішаний добуток векторів, $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Якщо в мішаному добутку трійки векторів їх переставляти, то паралелепіпед, побудований на вибраних векторах, очевидно, не зміниться. Значить, не зміниться і абсолютна величина мішаного добутку. Тому при круговій перестановці векторів мішаний добуток векторів не змінюється.

Отже

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}). \quad (2.15)$$

Якщо вектори задані своїми координатами в деякій декартовій прямо-кутній системі координат $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, тому вектор $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} = (b_y c_z - b_z c_y, b_z c_x - b_x c_z, b_x c_y - b_y c_x)$. В результаті

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \quad (2.16)$$

$$\text{або } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

якщо задані три вектори компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклади для самостійного розв'язання

Задані координати точок A(1,2,-3), B(-1,1,4), C(0,3,-5), D(2,-2,3). Знайти:

- 1) $\cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CA}))$, 2) $\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD})$, 3) $\text{орт} [2\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AD})]^0$,
- 4) $[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \times (\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AC})]$, 5) площа $\triangle DBC$, 6) $\text{пр}_{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD})$,

$$7) [\overline{AB} \times (2\overline{BD} - \overline{AC})], \quad 8) |[3\overline{BC} \times (-\overline{AD})]|, \quad 9) \overline{BC} \cdot [\overline{AD} \times 2\overline{CB}].$$

2.3. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Як відомо з шкільної математики метод координат дає можливість встановити відповідність між деякими геометричними об'єктами і рівняннями. У школі розглядалася прямокутна система координат на площині (Оху) і говорилося про рівняння прямих, про рівняння параболи і графіку функції $y = 1/x$ і так далі. Зараз, використовуючи координатний метод і елементи векторної алгебри, ми вивчимо геометричні об'єкти із загальніших позицій. Раніше розглянемо прості завдання аналітичної геометрії.

Відстань між двома точками

Вимагається знайти відстань між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ в просторі Охуз.

Розв'язок. Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$\text{тобто} \quad d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.18)$$

Ділення відрізка в заданому відношенні

Вимагається розділити відрізок АВ, що сполучає точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ в заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x, y, z)$ відрізка АВ так, що $AM/MB = \lambda$ (див. рис. 2.10).

Розв'язок. Введемо в розгляд вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$.

Точка M ділить відрізок АВ у відношенні λ тобто $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$. Але $\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ і

$\overline{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$, тому

$$(x - x_1) = \lambda(x_2 - x), \quad (y - y_1) = \lambda(y_2 - y) \quad \text{и} \quad (z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$$

$$\text{або} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.19)$$

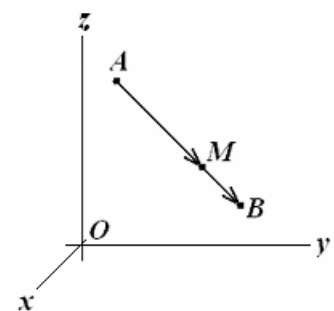


Рис. 2.11.

Формули (2.19) називаються формулами ділення відрізка в цьому відношенні. Зокрема, при $\lambda = 1$, тобто якщо $AM = MB$, то вони наберуть вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В цьому випадку точка $M(x, y, z)$ є серединою відрізка AB .

Зауваження. Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить поза відрізком AB - кажуть, що точка M ділить відрізок AB зовнішнім чином.

2.4. Аналітична геометрія в просторі

Як на площині, так і в просторі, будь-яка лінія може бути визначена як сукупність точок, координати яких в деякій вибраній в просторі системі координат задовольняють рівнянню :

$$F(x, y, z) = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням лінії в просторі.

Передусім, розглянемо геометричне місце, точок визначуване рівняннями першого ступеня. Такими є рівняння площини і прямої лінії в просторі.

2.4.1. Рівняння площини в просторі

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно даному вектору

Нехай в просторі $Oxyz$ площина π задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n}$ (A, B, C), перпендикулярним цій площині (рис. 2.11). Знайти рівняння площини π .

Візьмемо на цій площині довільну точку $M(x, y, z)$ і утворимо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

При будь-якому розміщенні точки M на площині π вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0, \text{ тобто}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.20)$$

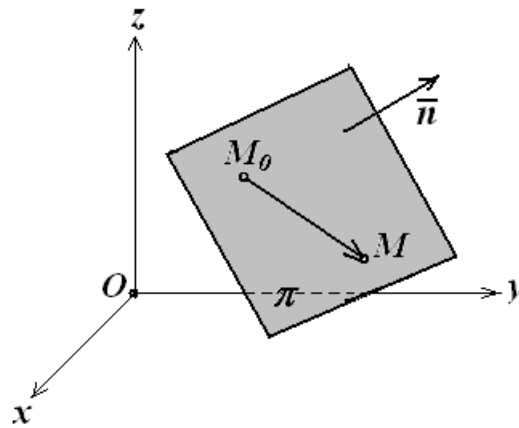


Рис. 2.12.

Рівняння (2.20) називається *рівнянням площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$.*

Воно є рівнянням першої степені відносно поточних координат x, y і z . Вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ називається *нормальним вектором площини*.

Надаючи коефіцієнтам A, B , і C рівняння (2.20) різні значення, можна отримати рівняння будь-якої площини, що проходить через точку M_0 . Сукупність площин, що проходять через цю точку, називається *зв'язкою площин*, а рівняння (2.20) - *рівнянням зв'язки площин*.

Загальне рівняння площини

Розглянемо загальне рівняння першого ступеня з трьома змінними x, y і z :

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.21)$$

Вважаючи, що принаймні один з коефіцієнтів A, B або C не дорівнює нулю, наприклад $B \neq 0$, перепишемо рівняння (2.21) у виді

$$A(x - 0) + B(y + D/B) + C(z - 0) = 0.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням (2.20), бачимо, що це рівняння є рівнянням площини з нормальним вектором $\bar{n} = (A, B, C)$, що проходить через точку $M_1(0, - (D/B), 0)$.

Отже, рівняння (3.21) визначає в системі координат Охуз деяку площину. Рівняння (3.21) називається *загальним рівнянням площини*.

Рівняння площини, що проходить через три ці точки

Три точки простору, що не лежать на одній прямій, визначають єдину площину. Знайдемо рівняння площини π , такою, що проходить через три ці точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій.

Візьмемо на площини довільну точку $M(x, y, z)$ і утворимо вектори $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Ці вектори лежать на площині π , отже, вони компланарні. Використаємо умову компланарності трьох векторів (їх змішаний добуток дорівнює нулю), отримаємо $\overline{M_1M} \cdot (\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

Рівняння (2.22) є рівняння площини, що проходить через три точки.

Рівняння площини у відрізках

Нехай площина відсікає на осях Ox , Oy і Oz відповідно відрізки a , b і c , тобто проходить через три точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ і $C(0, 0, c)$ (див. рис. 2.12)

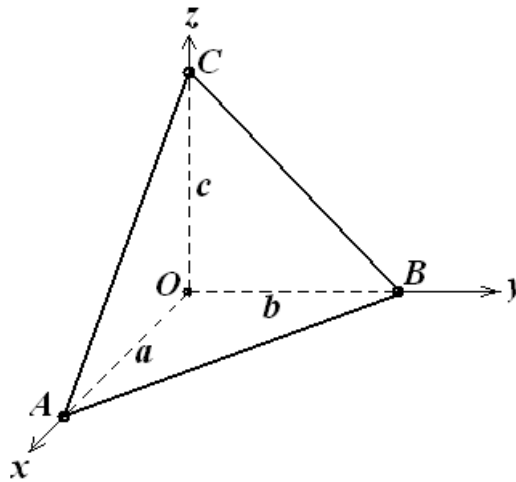


Рис. 2.13.

Підставляючи координати цих точок в рівняння (2.22), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вичисливши цей визначник, маємо $bcx - abc + abz + acy = 0$, т.е. $bcx + acy + abz = abc$ або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) називається *рівнянням площини у відрізках на осях*.

2.4.2. Площина в просторі. Основні задачі.

Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

Нехай задані дві площини π_1 і π_2 :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Кут φ між двома площинами π_1 і π_2 визначається кутом між нормальними векторами $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ площин π_1 і π_2 . Тому $\cos \varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$, або

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.24)$$

Для визначення гострого кута між двома площинами слід узяти модуль правої частини.

Якщо площини π_1 і π_2 перпендикулярно, то перпендикулярні і нормальні вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$, тобто $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$ або

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (2.25)$$

Отримана рівність (2.25) і є умова перпендикулярності двох площин.

Якщо площини π_1 і π_2 паралельні, то паралельні і нормальні вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$, тобто. $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$ або

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.26)$$

Це і є умова паралельності двох площин π_1 і π_2 .

Відстань від точки до площини.

Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина π своїм рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Вимагається знайти відстань від точки M_0 до площини π .

Відстань d від точки M_0 до площини π дорівнює модулю проекції вектору $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - довільна точка площини π , на напрям нормального вектору $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 2.13). Отже

$$d = |\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

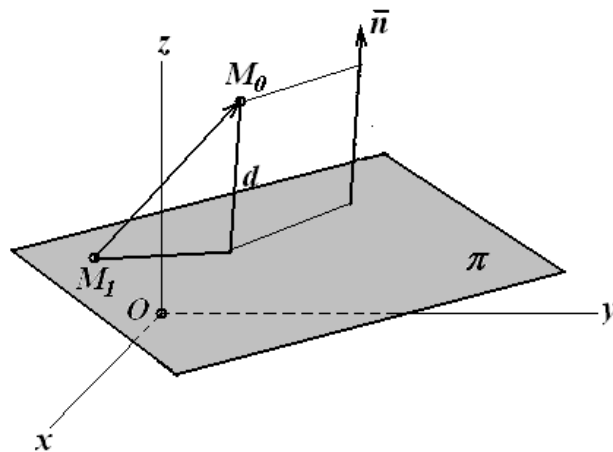


Рис. 2.14.

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині π , то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, тобто $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Тому

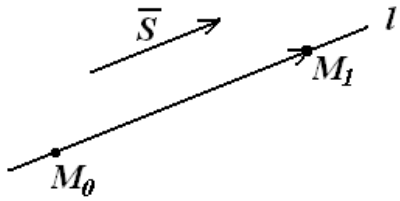
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.27)$$

Це і є шукана відстань d від точки M_0 до площини π .

2.4.3. Рівняння прямої в просторі

Положення прямої в просторі цілком визначене, якщо задані точка M на цій прямій і вектор, паралельний прямій. Вектор $\vec{S}$ називається *направляючим вектором* прямої.

Нехай в прямокутній системі координат задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить шуканій прямій, а також направляючий вектор $\vec{S}$ прямої l з координатами $\vec{S} = (m, n, p)$. Визначити рівняння прямої l .



Виділимо довільну поточну точку прямої $M(x, y, z)$ і розглянемо вектор $\overline{M_0M_1}$, цей вектор паралельний направляючому вектору $\vec{S}$ прямої.

Тому координати вектора $\overline{M_0M_1} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ Рис.

2.15

- $y_0, z - z_0$) і вектора $\vec{S} = (m, n, p)$ пропорційні

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2.28)$$

Рівняння (2.28) називається *канонічним рівнянням прямої у просторі*.

Зауваження. Звернення в нуль одного зі знаменників рівнянь (2.28) означає звернення в нуль відповідного чисельника.

Наприклад, рівняння $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{0} = \frac{z + 1}{2}$ задають пряму, що проходить через

точку $M(2, -4, -1)$ перпендикулярно осі Oy (проекція вектора $\vec{S}$ на вісь Oy дорівнює нулю). А це означає, що пряма лежить в площині $y = -4$ і для усіх точок прямої $y + 4 = 0$.

Параметричне рівняння прямої.

Кожне із співвідношень рівнянь (2.28) прирівняємо деякому параметру t

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

звідки слідують рівності

$$\begin{cases} x = x_0 + m t \\ y = y_0 + n t \\ z = z_0 + p t \end{cases} \quad (2.29)$$

Ці рівняння називаються *параметричними рівняннями прямої в просторі*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тоді в якості направляючого вектору шуканої прямої l можна узяти вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тобто $\overline{S} = \overline{M_1M_2}$ (див. рис. 2.15).

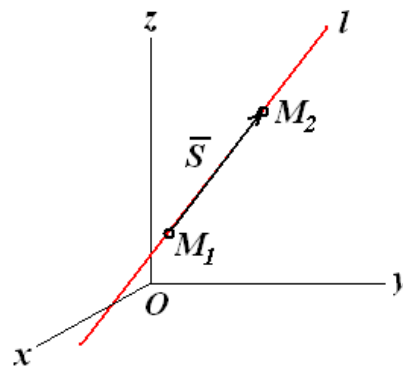


Рис. 2.16

Отже $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, а оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то шукане рівняння прямої згідно (2.43) має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.30)$$

Отримане рівняння називається *рівнянням прямої в просторі що проходить через дві точки*.

Загальне рівняння прямої

Пряму в просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Кожне з рівнянь (3.31) визначає площину. Якщо площини не паралельні (координати векторів $\vec{n}_1 (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 (A_2, B_2, C_2)$ не пропорційні), то система (2.31) визначає пряму l як геометричне місце точок, координати яких задовольняють

кожному з рівнянь системи (2.31). Рівняння (2.31) називають *загальними рівняннями прямої*.

2.4.4. Пряма лінія в просторі. Основні задачі

Кут між двома прямими. Умови паралельності перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (l_1),$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (l_2).$$

Під кутом між прямими l_1 і l_2 розуміють кут між направляючими векторами $\vec{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{S}_2(m_2, n_2, p_2)$. Тому по відомій формулі для косинуса кута між векторами

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} \quad \text{або} \quad \cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (2.32)$$

Для визначення гострого кута між прямими l_1 і l_2 чисельник правої частини (2.47) слід узяти по модулю.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\cos \varphi = 0$, або

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (2.33)$$

Це співвідношення є умовою *перпендикулярності* двох прямих.

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то паралельні також їх направляючі вектори $\vec{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{S}_2(m_2, n_2, p_2)$. Отже, координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.34)$$

Це співвідношення є умовою *паралельності* двох прямих.

Перетворення загальних рівнянь прямої до канонічної форми

Нехай задані рівняння прямої l в загальному вигляді (2.31), необхідно перетворити ці рівняння до канонічної форми

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

Координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій l отримуємо з системи (2.31), надавши одній з координат довільне значення (наприклад $z = 0$).

Оскільки пряма l перпендикулярна нормальним векторам $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, то в якості направляючого вектору прямої l можна узяти вектор, визначуваний векторним добутком $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, тобто

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

В результаті шукані канонічні рівняння прямої l мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (2.35)$$

2.4.5. Пряма і площина в просторі. Основні задачі

Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Нехай рівняння прямої l і площини π задані рівняннями

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad (l)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (\pi)$$

Кут між прямою і площиною визначатимемо як кут між прямою і її проекцією на площину. Позначимо через φ кут між площиною π і прямою l , а через θ кут між векторами $\bar{n}(A, B, C)$ і $\bar{S}(m, n, p)$ (див. рис. 2.14). Тоді $\cos \theta = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{S}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$

. Знайдемо синус кута φ , вважаючи, що $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

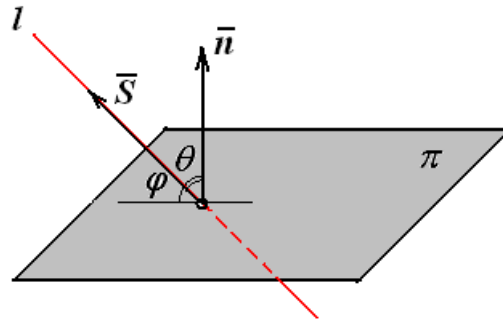


Рис. 2.17.

$\sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$, а оскільки $\sin \varphi \geq 0$, те отримаємо

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (2.36)$$

Якщо пряма l паралельна площині π , те вектори $\bar{n}$ і $\bar{S}$ перпендикулярні і $\bar{n} \cdot \bar{S} = 0$, тому

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (2.37)$$

Співвідношення (2.37) є умовою паралельності прямої і площини.

Якщо пряма l перпендикулярна площині π , те вектори $\bar{n}$ і $\bar{S}$ паралельні. Тому рівність

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (2.38)$$

є умовою перпендикулярності прямої і площини.

Перетин прямої з площиною.

Нехай вимагається знайти перетин прямої l

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (l)$$

з площиною π

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\pi).$$

Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь (l) + (п). Найпростіший розв'язок цієї системи можна отримати, якщо записати рівняння прямої l в параметричному виді

$$\begin{cases} x = x_0 + m t \\ y = y_0 + n t \\ z = z_0 + p t \end{cases}.$$

Підставляючи ці вирази для x, y і z в рівняння (π) для площини, отримаємо лінійне рівняння відносно параметра t

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Якщо пряма l не паралельна площині π , тобто якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то з попереднього виразу знаходимо значення параметра t :

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \quad (2.39)$$

В результаті з параметричних рівнянь прямої визначаємо координати точки перетину прямої l з площиною π .

Розглянемо тепер випадок, коли $Am + Bn + Cp = 0$ ($l \parallel \pi$):

- 1) якщо $G = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то пряма l паралельна площині π і її перетинати не може;
- 2) якщо $G = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, рівняння (3.39) відносно параметра t ($0 \cdot t + 0 = 0$) задовольняється при будь-якому значенні параметра, тобто будь-яка точка прямої є точкою перетину прямої і площини. Таким чином, одночасне виконання рівностей

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

є умовою приналежності прямої l площини π .

2.5 Аналітична геометрія на площині

2.5.1. Лінії на площині.

Рівняння лінії на площині

Лінія на площині зазвичай задається як *множина точок*, що володіють деяким тільки їм властивою геометричною властивістю. Координатний метод дозволяє розглядати рівняння лінії.

Визначення 2.14. Рівнянням лінії (чи кривій) на площині Oxy називається таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x і y кожної точки лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежать на цій лінії.

Змінні x і y в рівнянні лінії називаються поточними координатами точок лінії.

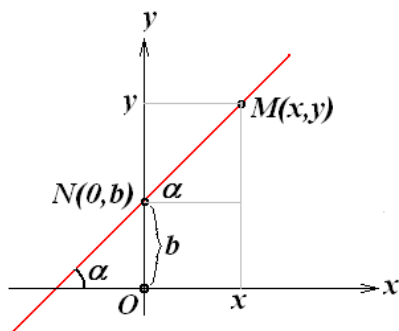
Рівняння лінії дозволяє вивчення геометричних властивостей ліній замінити дослідженням його рівняння.

Рівняння прямої на площині.

Вивчення геометричних об'єктів звичайно розпочати з простого образу - прямих. Покажемо, що цьому об'єкту відповідає рівняння 1-ої степені.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині Oxy задана довільна пряма, не паралельна осі Oy . Її положення цілком визначається координатою b точки $N(0, b)$ перетинання прямих з віссю Oy і кутом α між віссю Ox і прямою (див. рис. 2.15).



Під кутом α ($0 \leq \alpha < \pi$) нахилу прямої розуміється найменший кут, на який треба повернути навколо точки перетину прямої і осі Ox по ходу годинникової стрілки прямої до її збігу з віссю Ox . Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ (див. мал. 2.11). Вчислимо ординату y точки M , з рисунка видно, що

Рис. 2.18. $y = MN \sin \alpha + b$ и $x = MN \cos \alpha$.

В результаті, оскільки $MN = x / \cos \alpha$, маємо

$y = x \cdot \tan \alpha + b$. Введемо позначення $\tan \alpha = k$ отримаємо рівняння

$$y = k \cdot x + b, \quad (2.39)$$

якому задовольняють координати будь-якої точки $M(x, y)$ прямої.

Визначення 2.15. Число $k = \tan \alpha$ називається кутовим коефіцієнтом прямої, а рівняння (2.20) - рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо пряма паралельна осі Oy , те $\alpha = \pi/2$, рівняння (2.20) втрачає зміст, оскільки $k = \tan \pi/2$ не існує. В цьому випадку рівняння прямої матиме вигляд

$$x = a, \quad (2.40)$$

де a - абсциса точки перетину прямої з віссю O .

Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого ступеня відносно x і y в загальному вигляді

$$A x + B y + C = 0, \quad (2.41)$$

де A, B, C - довільні числа, причому A і B не дорівнюють нулю одночасно.

Покажемо, що рівняння (3.41) є рівняння прямої лінії. Якщо $B \neq 0$, то з рівняння (3.41) отримаємо $y = -(A/B) x - (C/B)$. А це - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg} \alpha = -(A/B)$. Отже, рівняння (2.41) - рівняння прямої лінії і воно називається *загальним рівнянням прямої*.

Розглянемо деякі частинні випадки загального рівняння прямої.

- 1) якщо $A = 0$, то рівняння зводиться до виду $y = -(C/B)$. Це є рівняння прямої, паралельної осі Ox ;
- 2) якщо $B = 0$, то пряма, паралельна осі Oy ;
- 3) якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Рівняння прямої, що проходить через цю точку в даному напрямі

Нехай пряма проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і її напрям характеризується кутовим коефіцієнтом k . Рівняння цієї прямої можна записати у виді $y = k x + b$, де b - доки невідома величина. Оскільки пряма проходить через точку $M(x_0, y_0)$, то координати точки задовольняють рівнянню прямої : $y_0 = k x_0 + b$. Звідки $b = y_0 - k x_0$. Підставляючи значення b в рівняння $y = k x + b$, отримаємо шукане рівняння прямої

$$y - y_0 = k (x - x_0). \quad (2.42)$$

Рівняння (3.42) з різними значеннями k називають також *рівняннями пучка прямих* з центром в точці $M(x_0, y_0)$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 , те координати цієї точки задовольняють рівнянню прямих (3.23) : $y - y_1 = k(x - x_1)$, де k доки невідомий коефіцієнт. Але ця пряма $y - y_1 = k(x - x_1)$ проходить також через точку $M_2(x_2, y_2)$, тому $y_2 - y_1 = k (x_2 - x_1)$. Звідси знаходимо $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Підставляючи знайдене значення k в рівняння y

$-y_1 = k(x - x_1)$, отримуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1 і M_2 :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.43)$$

Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма перетинає вісь Ox в точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy - в точці $M_2(0, b)$, b (див. рис. 2.16). В цьому випадку рівняння (2.43) набере вигляду

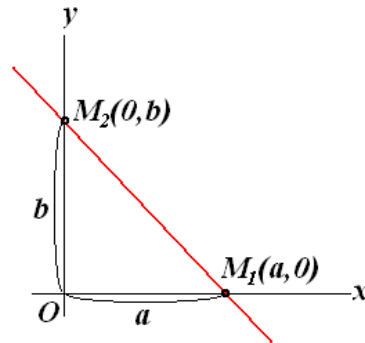


Рис. 2.19.

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \text{ тобто } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.44)$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої у відрізках*, оскільки числа a і b вказують, які відрізки відсікає пряма на осях координат.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно даному вектору $\vec{n}(A, B)$.

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і розглянемо вектор $\mathbf{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (див. рис. 2.17).

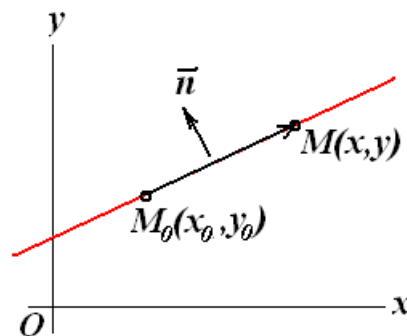


Рис. 2.20.

Оскільки вектори $\bar{n}$ і $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний твір дорівнює нулю: $\bar{n} \cdot \mathbf{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.45)$$

Рівняння (2.45) називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору*.

Вектор $\bar{n}(A, B)$, перпендикулярний прямій, називається *нормальним вектором* цієї прямої.

2.5.2. Пряма лінія на площині. Основні задачі.

Кут між двома прямими і умова паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1 (l_1)$ і $y = k_2 x + b_2 (l_2)$ (див. рис. 2.18). Вимагається знайти кут φ між прямими l_1 і l_2 .

Розв'язок. Маємо $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (по теоремі про зовнішній кут трикутника) або

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1. \text{ Якщо } \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Але, $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, тому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (2.46)$$

звідки легко отримати величину шуканого кута.

Якщо вимагається вичислити гострий кут між прямими, то права частина формули (2.46) береться по модулю $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg} \varphi = 0$. З формули (2.46) виходить $k_2 - k_1 = 0$, тобто $k_2 = k_1$.

- Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів $k_2 = k_1$.

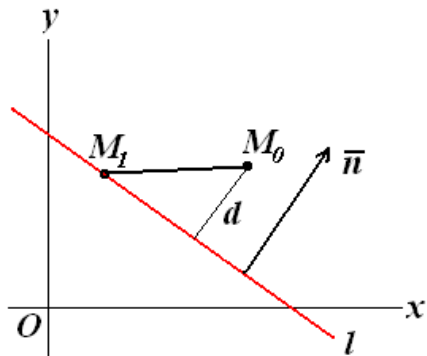
Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні $\varphi = \frac{\pi}{2}$. З формули (2.46) виходить

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0, \text{ тобто } k_1 \cdot k_2 = -1.$$

- Таким чином, умовою перпендикулярності двох прямих є рівність $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Відстань від точки до прямої

Нехай задані пряма l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$ (див. рис.



(2.21). Вимагається знайти відстань від точки M_0 до прямої l .

Розв'язок. Відстань d від точки M_0 до прямої l дорівнює модулю проекції вектору M_1M_0 , де $M_1(x_1, y_1)$ - довільна точка прямої l , на напрям

Рис. 2.21. нормального вектора $\bar{n} = (A, B)$.

$$\text{Отже } d = |Pr_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій l , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, тобто $C = -Ax_1 - By_1$. Тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.47)$$

Задачі для самостійного розв'язку

1. Задані координати трьох точок трикутника ABC . Скласти рівняння площини ABC .
2. Знайти відстань точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 1$.
3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$.
4. Знайти кут між площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a} \{ a_x ; a_y ; a_z \}$.

6. Знайти кут між прямими $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ та площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

7. Задані вершини трикутника ABC (координати точок A, B і C відомі), Знайти рівняння сторони AC цього трикутника.

8. Задані вершини трикутника ABC (координати точок A, B і C відомі), Знайти рівняння медіани, яка проведена з вершини C цього трикутника.

9. Побудувати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к прямій $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$.

10. Знайти кут між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{2} = z$ з площиною $Ax + By + Cz = D$.

12. Знайти рівняння прямої в канонічній формі, якщо її рівняння у загальному вигляді є
$$\begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 3x + y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

13. Знайти кут між двома прямими на площині $3x - 4y + 6 = 0$ і $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

2.6. Криві і поверхні другого порядку

Розглянувши прямі на площині, які визначаються рівняннями першої степені, звичайно перейти до вивчення геометричних об'єктів, яким відповідають рівнянням другої степені.

2.6.1. Криві другого порядку на площині

Найзагальніше рівняння 2-ої міри з двома невідомими має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.48)$$

при цьому передбачається, що хоч би один з коефіцієнтів A , B , C не дорівнює нулю. Лінії, що відповідають цьому рівнянню, називаються кривими 2-го порядку.

Простою такою кривою є коло. Нехай центр кола знаходиться в точці $M_0(a, b)$ і радіус кола рівний R . Оскільки коло є безліч точок, що знаходяться на заданій відстані від центру M_0 , то $|M_0M| = R$, або

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (2.49)$$

З кривими 2-го порядку ми частково знайомі з шкільного курсу математики, це еліпс, гіпербола і парабола. Тепер розглянемо теорію кривих 2-го порядку із загальніших позицій і на підставі їх рівнянь встановимо деякі властивість цих кривих. Передусім дамо визначення цих трьох основних кривих, виведемо їх прості рівняння і дослідимо їх форму.

Визначення 2.16. Еліпсом називається множина точок (на площині), сума відстаней від яких до двох даних точок постійна.

Виберемо систему прямокутних декартових координат так, щоб вісь абсцис проходила через обидві задані точки F_1 і F_2 , а початок координат знаходився в середині відрізка F_1F_2 (рис. 3.20).

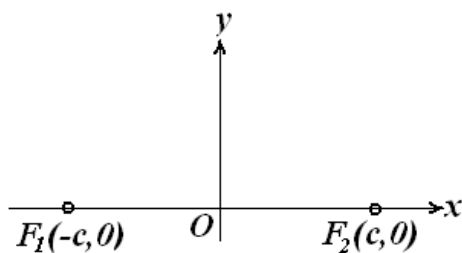


Рис. 2.22

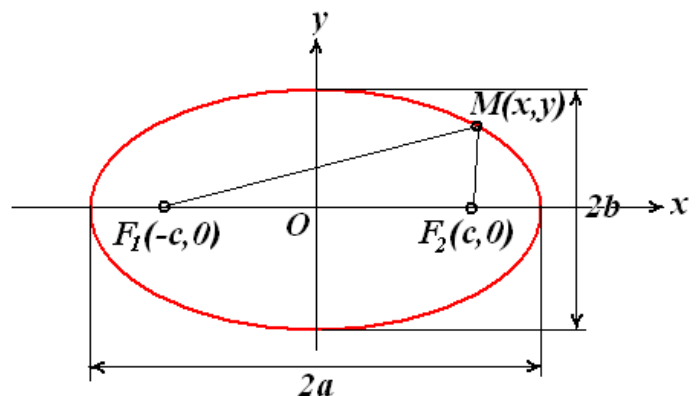


Рис. 2.23

Нехай $M(x, y)$ одна з точок даної множини. Позначимо через $2c$ відстань між заданими точками F_1 і F_2 і через $2a$ задану суму відстаней F_1M і F_2M . Очевидно, що точка F_1 має координати $(-c, 0)$, а точка F_2 координати $(c, 0)$.

За визначенням, маємо:

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \quad (2.50)$$

звідси отримуємо рівняння

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

По суті це рівняння вже і є рівняння множини точок, що розглядається, Але воно має незручний для дослідження вигляд; перетворимо його до простішої форми.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Оскільки $2a > 2c$ (сума двох сторін трикутника більше 3-ої його сторони), то $a^2 - c^2 > 0$. Покладемо

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Тоді остаточно у вибраній системі координат (див. рис. 2.23) отримаємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.51)$$

Вид цієї кривої представлений на рисунку 2.21. Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами еліпса*, числа a і b *півосями еліпса*, точки перетину еліпса з його осями симетрії - *вершинами еліпса*.

Зі зміною c змінюється і форма еліпса. Якщо c прагне до нуля, тобто фокуси еліпса збігаються, то b наближається до a і еліпс стає колом з рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$, тобто коло є частинний випадок еліпса, коли півосі еліпса рівні між собою.

Якщо ж c прагне до a , то $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ прагне до нуля і, отже, еліпс стискається уздовж осі ординат. Значить, відношення c/a може служити мірою стискування еліпса, мірою його відхилення від кола.

Число $e = c/a$ ($0 \leq e < 1$) називається *ексцентриситетом еліпса*.

Визначення 2.17. Гіперболою називається множина точок (на площині), абсолютне значення різниці відстаней від даних двох точок постійні (і відмінна від нуля).

Систему координат виберемо так само, як при виведенні рівняння еліпса (рис. 3.22). З визначення маємо:

$$\begin{aligned} \|F_1M\| - \|F_2M\| &= 2a, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

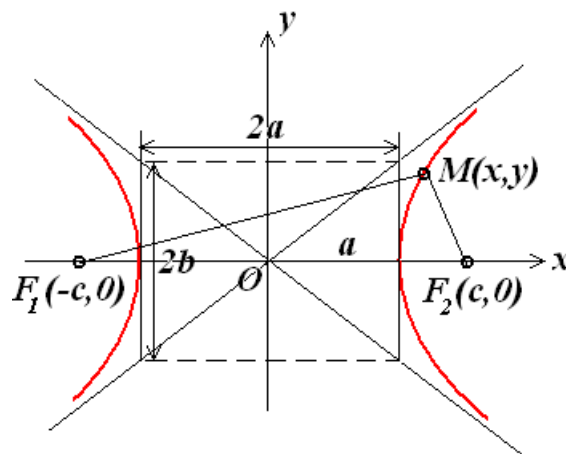


Рис. 2.24.

Оскільки різниця двох сторін трикутника менше третьої його сторони, $2a > 2c$. Покладемо $c^2 - a^2 = b^2$. Тоді остаточно отримуємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.52)$$

Відмітимо деякі властивості гіперболи. Ця лінія симетрична відносно осей координат і відносно початку координат.

Оскільки $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, то для усіх точок кривої $x \geq a$, тобто немає точок кривої в смужі $-a < x < a$. Отже, крива складається з двох окремих частин - віток гіперболи, одна з яких лежить в області $x \geq a$, а інша - в області $x \leq -a$ (права і ліва вітка гіперболи).

Число a називається *дійсною піввіссю* гіперболи, число b *уявною піввіссю*. Точки перетину гіперболи з її віссю симетрії називаються вершинами гіперболи, точки F_1 і F_2 - її *фокусами*.

Відмітимо ще одну особливість форми лінії, що вивчається. Розглянемо разом з гіперболою дві прямі: $y = \left(\pm \frac{b}{a} \right) x$, до яких як завгодно близько підходять точки віток гіперболи при $|x| \rightarrow \infty$. Ці прямі називаються *асимптотами гіперболи*. Легко бачити, що асимптоти гіперболи спрямовані по діагоналях прямокутника із сторонами $2a$ і $2b$.

Третьою основною кривою 2-го порядку є парабола.

Визначення 2.18. Параболою називається множина точок (на площині), рівновіддалених від заданої точки і заданої прямої.

Виберемо вісь абсцис прямокутної декартової системи координат так, щоб вона проходила через задану точку F перпендикулярно до заданої прямої l , початок координат нехай знаходиться в середині відрізка FK (рис. 2.25). Напрямок осі абсцис вказаний на малюнку.

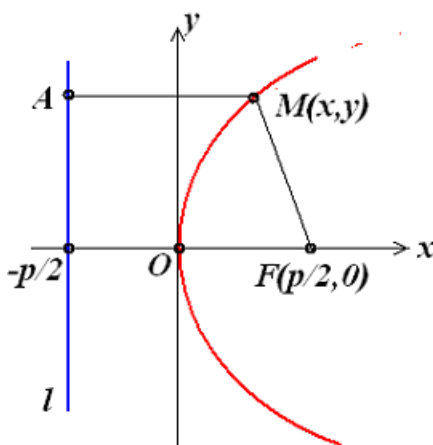


Рис. 2.25

Відстань від точки P та прямої l позначивши через p . Тоді точка F матиме координати: $(p/2, 0)$, а рівняння прямої $l : x = -p/2$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка, яка розташована на параболі і A – основа перпендикуляра, опущеного з M на l .

Оскільки точка A має координати $(-p/2, y)$ і за визначенням $|AM|=|FM|$, те $\sqrt{(x + p/2)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$, $(x + p/2)^2 = (x - p/2)^2 + y^2$, і остаточно

$$y^2 = 2px. \quad (2.53)$$

Відмітимо деякі властивості параболи. Оскільки $y^2 \geq 0$, то x не може бути від'ємним і усі точки кривої лежать в правій на півплощині. При зростанні x від 0 до $+\infty$ $|y|$ необмежено росте. Ясно також, що крива симетрична відносно осі абсцис.

Задана точка F називається *фокусом параболи*, точка перетину параболи з її віссю симетрії – *вершиною параболи*.

2.6.2. Поверхні другого порядку

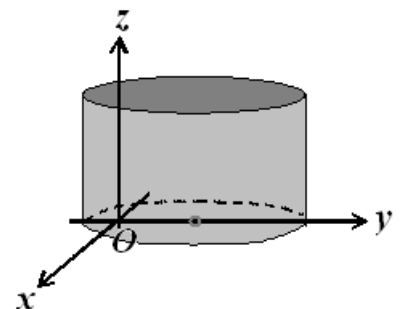
Поверхні другого порядку – це поверхні, рівняння яких в прямокутній системі координат є рівняннями другої степені.

Циліндричні поверхні

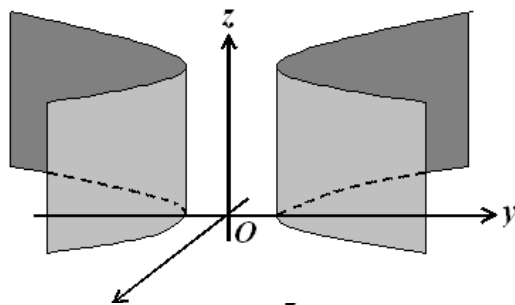
Циліндричними поверхнями називаються поверхні, які утворені лініями, паралельними будь-якої фіксованій прямій.

Розглянемо поверхні, в рівнянні яких відсутня складова z , тобто ті, у яких направляючі паралельні осі Oz . Тип лінії на площині Oxy (ця лінія називається направляючій поверхні) визначає характер циліндричної поверхні. Розглянемо деякі окремі часткові випадки залежно від рівняння направляючих ліній

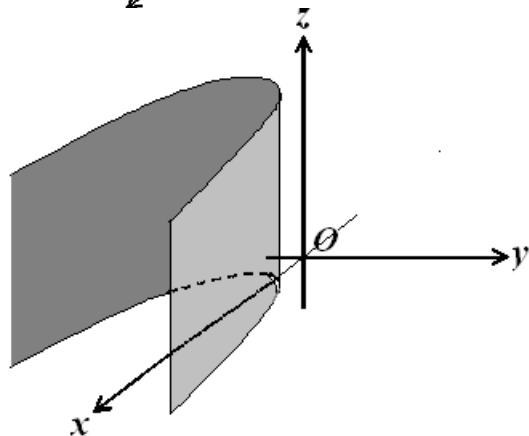
$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{еліптичний циліндр.}$$



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гіперболічний циліндр.



3) $x^2 = 2py$ - параболічний циліндр.



Поверхні обертання

Поверхня, що описується деякою лінією, яка обертається навколо нерухомої прямої d , називається *поверхнею обертання* з віссю обертання d .

Якщо рівняння поверхні в прямокутній системі координат має вигляд:

$F(x^2 + y^2, z) = 0$, то ця поверхня - поверхня обертання з віссю обертання Oz .

Аналогічно: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ - поверхня обертання з віссю обертання Oy .

$F(z^2 + y^2, x) = 0$ - поверхня обертання з віссю обертання Ox .

Запишемо рівняння поверхонь обертання для деяких окремих випадків:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - еліпсоїд обертання

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополий гіперболоїд обертання

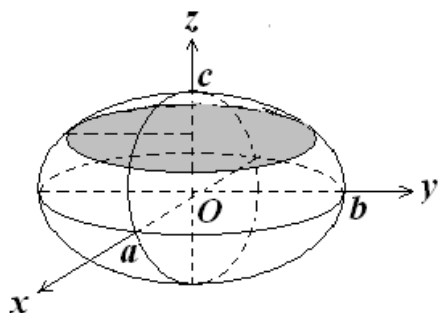
3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполий гіперболоїд обертання

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ - параболоїд обертання

Проте, перелічені вище поверхні є усього лише окремими випадками поверхонь другого порядку загального вигляду, деякі типи яких розглянуті нижче:

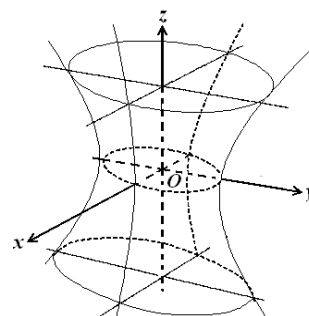
Сфера: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Тривісний еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

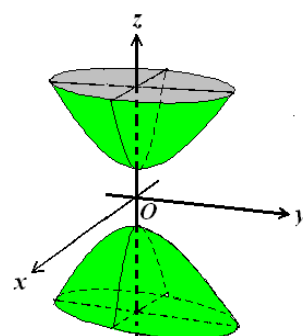


У перерізі еліпсоїда площинами, паралельними координатним площинам, виходять еліпси з різними осями.

Однополый гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

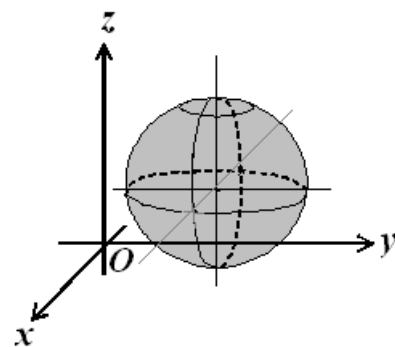
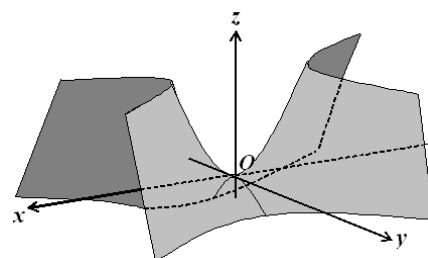


Двуполый гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

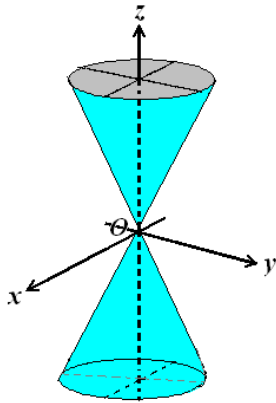
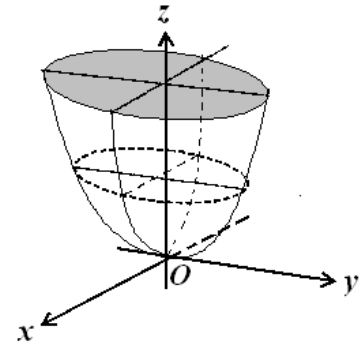


Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$

де $p > 0$, $q > 0$



Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$



Конус другого порядку: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Приклади задач з економічним застосуванням

Задача 1. Споживач має прибуток у розмірі 600 грн і хоче витратити його на придбання двох товарів. Ціна одиниці першого товару становить 20 грн, а другого – 30 грн. Записати аналітично та зобразити графічно бюджетне обмеження та бюджетну множину споживача. Вказати декілька допустимих наборів товарів.

Розв'язування. Нехай споживач бажає придбати x_1 (од.) першого товару і x_2 (од.) – другого, які, очевидно, можуть набувати лише невід'ємних значень. Тоді $X = (x_1 \ x_2)$ – вектор (матриця-рядок) із невід'ємними координатами можливих наборів товарів. Ці вектори можна інтерпретувати як точки першого октанта площини $x_1 O x_2$. Враховуючи ціни одиниці першого товару $p_1 = 20$ (грн) та другого $p_2 = 30$ (грн), можна записати витрати на придбання набору товарів: $p_1 \cdot x_1 + p_2 x_2 = 20x_1 + 30x_2$ (грн). Зрозуміло, що витрати не повинні перевищувати доходу споживача: $20x_1 + 30x_2 \leq 600$. Таким чином, бюджетна множина визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Графічний образ лінійної нерівності $p_1 \cdot x_1 + p_2 x_2 \leq C$ – це множина точок однієї із півплощин, на які поділяє всю координатну площину гранична пряма $p_1 \cdot x_1 + p_2 x_2 = C$ – бюджетне обмеження.

Зауваження. При зростанні доходу або зниженні цін бюджетне обмеження зсовується від початку координат і бюджетна множина збільшується (справедливою є і обернена ситуація).

Задача 2. Транспортні витрати (в грн) перевезення одиниці вантажу залізничним (y_1) та автомобільним (y_2) транспортом на відстань x (в десятках км) визначаються формулами: $y_1 = 0,5x + 10$, $y_2 = x + 5$. Який економічний сенс коефіцієнтів у цих формулах? Побудувати графіки транспортних витрат та з'ясувати економічну доцільність перевезень тим чи іншим видом транспорту.

Розв'язування. Залежність транспортних витрат від відстані має вигляд лінійної функції $y = kx + b$, в якій коефіцієнт k характеризує витрати перевезення однієї одиниці вантажу на один десяток км, а b – сталі витрати, які не залежать від відстані (витрати на зберігання, перевантаження тощо). Із економічного сенсу впливає невід'ємність змінних x та y , тому графіками залежностей будуть частини прямих, розташовані у першому октанті системи координат xOy (виконати креслення самостійно).

Із графічної ілюстрації буде видно, що на відстані до 100км дешевше перевозити автомобільним транспортом, а на відстані більше 100км – залізничним.

Задача 3. Наведемо приклади економічної інтерпретації лінійної залежності

$$y = kx + b$$

а) Нехай k – тариф перевезення вантажу на одиницю відстані, b витрати при перевезенні вантажу, що не залежать від відстані x , тоді загальна вартість перевезення вантажу на відстань x складе $y = kx + b$.

б) Відомо, що загальна сума y витрат підприємства протягом місяця при випуску x одиниць однорідної продукції складається з двох видів витрат: постійних ($y_{\text{пост.}}$) і змінних ($y_{\text{змін.}}$), тобто $y = y_{\text{пост.}} + y_{\text{змін.}}$, де $y_{\text{пост.}}$ – витрати підприємства протягом місяця, що не залежать від обсягу продукції, що випускається (витрати за рахунок амортизації будівлі, заробітної плати охорони, службовців і допоміжних робітників, опалення будівлі і т. п.), $y_{\text{змін.}}$ – витрати підприємства, залежні від об'єму x продукції, що випускається підприємством за місяць (витрати на сировину, оплату праці робітників, що працюють за способом простого прямого відрядження, електроенергії, транспортування готової продукції та ін). Позначивши через k витрати підприємства протягом місяця на одиницю продукції і вважаючи на $y_{\text{пост.}} = b$, отримаємо $y_{\text{змін.}} = kx$, $y = kx + b$

в) Нехай b – середня врожайність цієї культури в колгоспі в ц/га за умови, що добрив на полі не вносили.

Досвідченим шляхом встановлено, що середня врожайність цієї культури збільшується на k ц/га при внесенні 1 ц добрив на гектар посівів. Тоді середня врожайність культури при внесенні x ц добрив на кожний гектар посівів становитиме $y = kx + b$; $D(f) = [0; 5]$.

Зауваження. У кожному з випадків а) – в) рівняння $y = kx + b$ є результатом деякої схематизації реальності.

Задача 4. Витрати виробництва 10 одиниць деякого товару становлять 1000 гривень, а 50 одиниць 2000 гривень. Визначити витрати виробництва 30 одиниць товару за умови, що функція витрат обсягу продукції залежить лінійно.

3. Введення в математичний аналіз

Математичний аналіз (аналіз нескінченно малих) вивчає функції і їх узагальнення методом нескінченно малих величин.

У природі і техніці усюди спостерігаються рухи і процеси, що є проявом взаємодії між фізичними тілами або середовищами. Математичною моделлю рухів

(тобто змінних величин) є функції, які виражають зміни одних величин зі зміною інших. Звідси слідує важливість математичного аналізу в прикладній математиці.

Основними розділами математичного аналізу є: диференціальне і інтегральне числення.

3.1. Дійсні числа

Поняття дійсних чисел було розглянуте раннє в розділі "Узагальнення поняття величини".

Сукупність раціональних і ірраціональних чисел утворює множину *дійсних чисел*.

Ірраціональні числа представляються нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Наприклад, числа $\sqrt{2} = 1,414213..$, $\pi = 3,141592..$, $e = 2,718281..$ - є ірраціональними числами.

В той час, як раціональні числа, тобто числа виду $\left\{ \frac{m}{n}, \quad m \in Z, n \in N \right\}$ представляються нескінченним періодичним десятковим дробом. Наприклад, $2 = 2,(0) = 1,(9)$, $1/3 = 0,(3)$, $13/7 = 1,(857142)$.

Множина дійсних чисел або числова пряма позначаються як $\mathbf{R} = \{ r \}$. Відмітимо деякі властивості цієї нескінченної множини чисел.

Передусім, $\mathbf{R}$ усюди щільно і утворює числовий континуум. Числова пряма $\mathbf{R}$ "подібна" до геометричної прямої, тобто між числами з $\mathbf{R}$ і точками на прямій можна встановити взаємно однозначну відповідність зі збереженням впорядкованості. Найважливішою властивістю числової прямої є її *безперервність*. Саме ця безперервність лежить в основі математичного аналізу і складає основу теорії границь.

Відмітимо також і іншу особливість числової множини $\mathbf{R}$, яка взагалі характерна для багатьох нескінченних множин. Розглянемо поняття потужності нескінченної множини $\mathbf{R}$, це поняття еквівалентно поняттю кількості членів кінцевої множини. Потужності нескінченних множин можуть бути різними, наприклад, множина натуральних чисел $\mathbf{N}$, яка є підмножиною дійсних чисел ($\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$)

має потужність рахункової множини, тоді як $\mathbf{R}$ має потужність континуальної множини. Покажемо, що потужність числового відрізка від нуля до одиниці має таку ж потужність, як і уся пів нескінченна числова пряма (від нуля до плюс нескінченність), тобто частина по потужності дорівнює цілому. Проведемо наступні міркування. Виділимо на пів нескінченній числовій осі одиничний відрізок. Поставимо у взаємно однозначну відповідність точки одиничного відрізка OA з точками пів нескінченної прямої, таким чином (див. рис 3.1) :

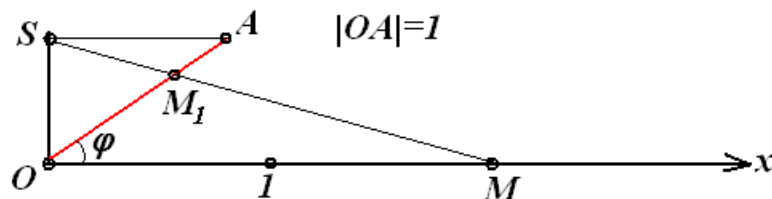


Рис.3.1.

- початковій точці O піввісі Ox побудуємо одиничний відрізок OA під деяким кутом φ до півосі;
- проведемо перпендикуляр до числової осі з точки O ;
- з кінця A одиничного відрізка OA проводиться лінія паралельна числовій осі;
- точку перетину цієї лінії з перпендикуляром позначимо як S і назовемо її проектором;
- проводиться промінь (довільним чином) з проектора S на числову піввісь. Він перетинає одиничний відрізок в точці M_I , а піввісь Ox в точці M .

Таким чином, встановлена взаємно-однозначна відповідність між точками одиничного відрізка OA і точками півосі Ox . Кожній точці M_I відрізка OA за допомогою променя проектора відповідає точка M осі x , і навпаки. Точці O відрізка відповідає точка O вісі, а точка A відрізка відповідає нескінченно видалена точка осі. Отже потужність числової множини півосі дорівнює потужності числової підмножини одиничного відрізка.

Ці дві властивості множин дійсних чисел (властивість безперервності і властивість континуальності) дозволяють надалі проводити математичний аналіз безперервних змінних величин на будь-якому проміжку.

Помітимо, що кінцевий числовий відрізок $x \in [a, b]$ ($b > a$) еквівалентний по потужності одиничному відрізку, якщо зробити заміну змінною $x_1 = \frac{x-a}{b-a}$, $x_1 \in [0, 1]$.

Розглянемо далі деякі, числові множини, які часто використовуються.

3.2. Числові проміжки

Нехай a і b - два числа, причому $a < b$. Числовими проміжками називаються множина усіх дійсних чисел, що задовольняють нерівності :

- 1) $a \leq x \leq b$ - відрізок (сегмент), позначення - $[a, b]$
різниця $b - a$ називається довжиною відрізка;
- 2) $a < x < b$ - інтервал, позначення - (a, b) ;
- 3) $a \leq x < b$ - півінтервал, позначення - $[a, b)$;
- 4) $a < x \leq b$ - півінтервал, позначення - $(a, b]$;
- 5) нескінченні інтервали
 $x \leq b$, $(-\infty, b]$; $x < b$, $(-\infty, b)$; $x \geq a$, $[a, +\infty)$; $x > a$, $(a, +\infty)$;
- 6) множина дійсних чисел $-\infty < x < +\infty$, $(-\infty, +\infty)$.

Числа a і b називаються відповідно *лівим і правим кінцями* цих проміжків.

Символи $-\infty$, $+\infty$ не числа, а символічні позначення нескінченно видалених точок числової осі від початку 0 вліво та управо.

3.3. Абсолютна величина числа і її властивості

Абсолютна величина дійсного числа визначається наступним співвідношенням:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

Властивості абсолютної величини

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| = |-a|$;
- 3) Нехай ε - позитивне число. Тоді нерівності $|a| \leq \varepsilon$ і $-\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$ рівносильні;

$$4) |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$5) |a - b| \geq |a| - |b|;$$

$$6) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

3.4. Числові послідовності

Визначення. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n , то говорять, що задана *послідовність*

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_n$$

Послідовність можна задати різними способами - головне, щоб був вказаний спосіб отримання будь-якого члена послідовності.

Наприклад: $x_n = (-1)^n$ або $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$

$$x_n = \sin(\pi n/2) \text{ або } \{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \dots$$

$$\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; \dots \text{ загальний член послідовності } x_n = \frac{n^2}{n+1}.$$

Визначення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого позитивного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для усіх $n > N$ виконується умова:

Послідовність, що має границю, називається

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*. Якщо a – границя послідовності, то це записується так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ або } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Послідовність, що не має границі, називається *розбіжною*.

3.5. Функції однієї змінної

3.5.1. Функціональна залежність

Визначення. Нехай X і Y - деяка безліч дійсних чисел. Запропонуємо, що кожному елементу x безлічі X за деяким законом або способом f поставлений у відповідність певний елемент y безлічі Y , то говорять, що на множині X задана *функціональна залежність (функція)* $y = f(x)$ (або відображення множини X на

множину Y). При цьому x називається *незалежною змінною (аргументом)*, y - *залежній змінній*, безліч X - *областю визначення (існування) функції f* , а елементи $y = f(x)$ утворюють *область значень функції - Y* .

Слід зазначити, що функціональна залежність є математичною моделлю будь-яких процесів і явищ для детермінованих подій, що відображають причинно-наслідкові взаємодії. Наприклад, велика частина фізичних законів представляються у вигляді функцій.

Візуалізація функціональної залежності була розглянута в розділі 3.7 (графічні можливості Maxima) цього навчального посібника.

Існують три способи завдання функцій :

а) *аналітичний спосіб*, якщо функція задана формулою виду $y = f(x)$.

Наприклад, 1) $y = x^2 + 1$. Областю визначення функції є множина

$$X = (-\infty, \infty), \text{ область значень являється множина } Y = [0, \infty);$$

$$2) f(x) = 3x^2 + x - 1. \text{ Область визначення функції - } X = (-\infty, \infty)$$

$$\text{а область значень - } Y = [-13/12, \infty);$$

б) *табличний спосіб* полягає в тому, що функція задається таблицею, що містить значення x і відповідні значення $f(x)$, наприклад, таблиця логарифмів.

в) *графічний спосіб*, полягає в зображенні графіку функції - множина точок (x, y) площини, абсциси яких є значення аргументу x , а ординати - значення функції, що відповідають їм, $y = f(x)$.

3.5.2. Характеристики поведінки функції

1. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X , називається *обмеженою* на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для усіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Звідси витікає, що графік обмеженої функції розташований між прямими $y = M$ і $y = -M$.

2. Нехай функція $y = f(x)$, визначена на множині X , тоді якщо для будь-яких двох значень $x_1, x_2 \in X$ аргументів з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою* на множині X (більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції);

- 2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадаючою* на множині X (більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції);
- 3) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається *не спадаючою* на множині X ;
- 4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається *не зростаючою* на множині X .

Зростаючі, не зростаючі, спадаючі і не спадаючі функції на множині X називаються *монотонними* на цій множині.

3. Нехай функція $y = f(x)$, визначена на множині X , тоді якщо для будь-якого $x \in X$ виконується умова:

- 1) $f(-x) = f(x)$, то функція називається *парною*.
- 2) $f(-x) = -f(x)$, то функція називається *непарною*.

Графік парної функції симетричний координатній осі Oy , а непарної - відносно початку координат O .

Наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \ln |x|$ - парні функції, $y = \sin x$, $y = x^3$ - непарні функції.

Якщо функція не є парною або непарною, то вона називається *функцією загального вигляду*. Наприклад, $y = x - 2$, $y = \sqrt{x}$ - функції загального вигляду.

4. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X , називається *періодичною* на цій множині, якщо існує таке число $T > 0$, що для усіх $x \in X$ виконуються умови $(x + T) \in X$ і $f(x + T) = f(x)$. При цьому число T називається *періодом* функції. Наприклад, функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ - періодичні з періодом $T = 2\pi$.

3.5.3. Обернена функція

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y . Якщо кожному значенню $y \in Y$ відповідає одно і тільки одно значення $x \in X$, то має місце функціональна залежність $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і безліччю значень X . Така функція $\varphi(y)$ називається *оберненою* до функції $f(x)$. Таким чином, функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ є *взаємно оберненими*. Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, зворотну до функції $y = f(x)$ необхідно розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно x .

Приклади: 1. Для функції $y = \frac{x+2}{3}$ оберненою функцією буде $x = 3y - 2$;

2. Для функції, $y = x^2$ заданої на відрізку $[-1, 1]$, оберненої функції не існує, тоді як для цієї ж функції заданої на відрізку $[0, 1]$ оберненою функцією є $x = \sqrt{y}$

З визначення оберненої функції виходить, що функція $y = f(x)$ має зворотну у тому випадку, якщо функція $f(x)$ задає взаємно однозначне відображення між областями X і Y . Очевидно, що будь-яка монотонно зростаюча (монотонно спадаюча) функція має обернену. Помітимо, що графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ симетричні відносно бісектриси першої і третьої чверті координатної площини.

3.5.3. Складна функція

Нехай функція $z = \varphi(x)$ з множиною значень Z , визначена на множині X і на множині Z також визначена функція $y = f(z)$ з множиною значень Y , тоді функція $y = f[\varphi(x)]$ називається *складною функцією* від аргументу x , а змінна z називається проміжною змінною складної функції.

Наприклад, $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ складна функція, визначена на множині $(-\infty, 0) \cup (-1, +\infty)$, оскільки $y = f(z) = \sqrt{z}$, $z = \varphi(x) = \frac{x}{x+1}$.

3.5.4. Основні елементарні функції

Елементарні функції, що вивчаються в шкільному курсі математики, є математичними моделями простих механічних, фізичних та ін. явищ. Наприклад, тригонометричні функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ добре описують коливальні рухи.

Основними елементарними функціями називають наступні функції.

1) *Степенева* функція $y = x^\alpha$, де α - дійсне число.

2) *Показникова* функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

3) Логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

4) Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5) Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

6) Алгебраїчною функцією називається функція в якій над аргументом робиться кінцеве число операцій (складання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, розв'язання алгебраїчних рівнянь) алгебри.

Всяка неалгебраїчна функція називається *трансцендентною*.

Прості типи алгебраїчних функцій :

1) Ціла функція (многочлен або поліном) -

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

над аргументом x виконуються дії складання, віднімання, множення і піднесення в цілу позитивну степінь.

2) Дробово-раціональна функція

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n},$$

над аргументом x робиться ще дія ділення.

3) Ірраціональна функція: над аргументом x виконується ще дія добування кореня. Наприклад, $y = 4 + x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^2 + 1}$.

3.5.5. Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій околиці точки $x = a$ (тобто в самій точці $x = a$ функція може бути і не визначеною)

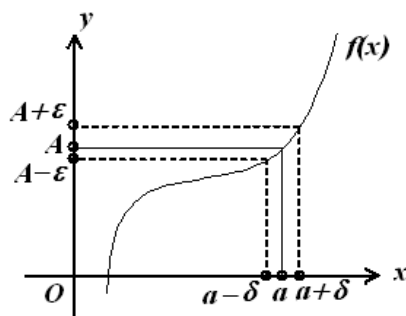


Рис. 3.2

Визначення. Число A називається *границею* функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-кого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для усіх x таких, що

$$0 < |x - a| < \delta$$

вірна нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Те ж визначення може бути записане в іншому виді:

якщо $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, то вірна нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Позначення границі функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

При визначенні границі функції $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ передбачається, що x прагне до a довільним чином: залишаючись менше, ніж a (зліва від a), більшим, ніж a (справа від a), або може коливатися біля точки a . Тому має зміст ввести поняття *односторонніх границь*.

Визначення. Якщо $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ тільки при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - називається *границею функції $f(x)$ в точці $x = a$ зліва*, а якщо $f(x) \rightarrow A_2$ при $x > a$ тільки при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ називається *границею функції $f(x)$ в точці $x = a$ справа* (рис. 3.3.).

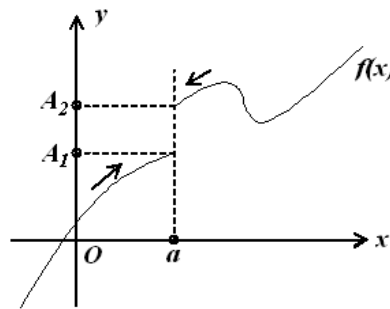


Рис. 3.3.

Таким чином, умова існування *границі* функції $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ зводиться до того, що при $x \rightarrow a$ для функції $f(x)$ повинні існувати лівостороння і правостороння границя і при цьому вони мають бути рівними.

3.5.6. Нескінченно малі функції і їх властивості

Визначення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \rightarrow a$, де a може бути числом або однією з величин ∞ , $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Теорема (про зв'язок між функцією, її межею і нескінченно малою функцією)

Для того, щоб функція $f(x)$ при $x \rightarrow a$ мала границю, яка дорівнює A , необхідно і достатньо, щоб поблизу точки $x = a$ виконувалася умова

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

Властивості нескінченно малих функцій:

- 1) Сума кінцевого числа нескінченно малих функцій при $x \rightarrow a$ теж нескінченно мала функція при $x \rightarrow a$.
- 2) Добуток кінцевого числа нескінченно малих функцій при $x \rightarrow a$ теж нескінченно мала функція при $x \rightarrow a$.
- 3) Добуток нескінченно малої функції на функцію, обмежену поблизу точки $x = a$ є нескінченно малою функцією при $x \rightarrow a$.
- 4) Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю - величина нескінченно мала.

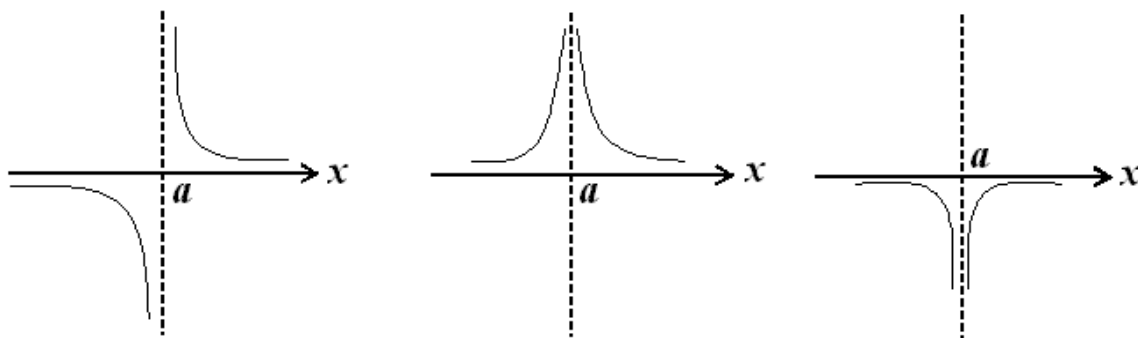
3.5.8. Нескінченно великі функції їх властивості і зв'язок з нескінченно малими.

Визначення. Якщо функція $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ є нескінченно малою функцією, то функція $f(x) = 1/\alpha(x)$ називається *нескінченно великою* функцією при $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Графічно поведінка нескінченно великих функцій в a при $x \rightarrow a$ можна проілюструвати таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$



Визначення. Функція називається *нескінченно великою* при $x \rightarrow a$, де a - число або одна з величин ∞ , $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, де A - число або одна з величин ∞ , $+\infty$ або $-\infty$.

Зв'язок нескінченно великих і нескінченно малих функцій здійснюється відповідно до наступної теореми.

Теорема. Якщо $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (якщо $x \rightarrow \infty$) і не звертається в нуль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty.$$

3.5.9. Основні теореми про границі

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, де $C = \text{const}$.

Наступні теореми справедливі при припущенні, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають кінцеві границі при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доведення теореми. Зобразимо $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, де $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

Тоді $f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – нескінченно мала, тому

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Теорема доведена.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доведення теореми. Зобразимо $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, де $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

$$\text{тоді } f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A \cdot B = \text{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – нескінченно малі, тому

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \text{ Теорема доведена.}$$

$$\text{Висновок. } \lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\text{Теорема 4. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Теорема 5. Якщо $f(x) > 0$ поблизу точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогічно визначається знак границі при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Якщо $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ поблизу точки $x = a$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Визначення. Функція $f(x)$ називається обмеженою поблизу точки $x = a$, якщо існує таке число $M > 0$, що $|f(x)| < M$ поблизу точки $x = a$.

Теорема 7. Якщо функція $f(x)$ має кінцеву границю при $x \rightarrow a$, то вона обмежена поблизу точки $x = a$.

Доведення. Нехай $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, тобто, $|f(x) - A| < \varepsilon$, тоді

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ або}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ тобто}$$

$$|f(x)| < M, \text{ де } M = \varepsilon + |A| \text{ Теорема доведена.}$$

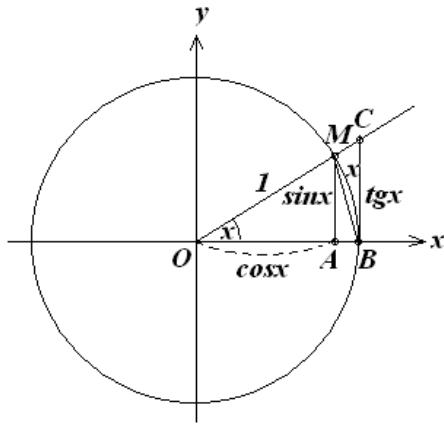
3.5.10. Дві визначні границі.

Перша особливо важлива границя.

При обчисленні границі тригонометричних виразів часто використовується границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доведення. Розглянемо в крузі радіусу 1 гострий кут x ($\angle MOB$), хорду MB і



дотичну BC до кола в точці B . На рисунку $|AM| = \sin x$, дуга кола MB чисельно дорівнює центральному куту x , а $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, що має місце нерівності площ відповідних фігур $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. Площа три-

кутника $\triangle MOB$ рівна $\frac{1}{2}OB \cdot AM$ або

$$S_{\triangle MOB} = \frac{1}{2}1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x. \quad \text{Площа сектора}$$

MOB рівна $S_{\text{сектора } MOB} = \frac{1}{2}1^2 \cdot x = \frac{1}{2}x$. Площа трикутника $\triangle COB$ рівна $\frac{1}{2}OB \cdot BC$

$$\text{або } S_{\triangle COB} = \frac{1}{2}1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

На підставі попередньої нерівності площ маємо

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \quad \text{Поділимо нерівності на } \frac{1}{2}\operatorname{tg} x > 0 \text{ (у припущенні, що}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}), \text{ отримаємо } \cos x < \frac{x}{\sin x} < 1. \quad \text{Тому що } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \text{ то по}$$

теоремі 6 існує границя

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Нехай тепер $x < 0$. Тоді $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x > 0$. Тому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В результаті
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3.1)$$

Ця границя називається *першою чудовою границею*.

Друга особливо важлива границя.

Розглянемо послідовність $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Можна показати, що ця послідовність є такою, що монотонно зростає і обмежена зверху, тобто має кінцеву межу. Цю границю прийнято означати буквою e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

число e ірраціональне і його значення дорівнює 2,71828...

Якщо розглянути нерівність $n \leq x \leq n+1$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

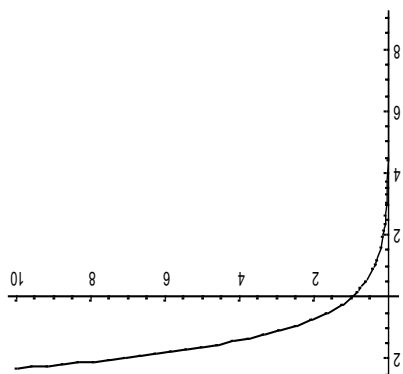
Знайдемо
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \cdot 1 = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e}{1} = e$$

або
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3.2)$$

Ця границя називається *другою чудовою границею*.

Число e є основою натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad \text{т.е.} \quad e^y = x.$$



Вище представлений графік функції $y = \ln x$.

Висновок 1. $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Ця границя виходить з (3.2), якщо зробити заміну змінною $t = \frac{1}{x}$.

Висновок 2. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$.

Дійсно, $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = \ln e = 1$.

3.5.11. Неперервність функції в точці і класифікація розривів

Визначення. Функція $f(x)$, визначена в околиці деякої точки x_0 , називається *безперервною* в точці x_0 , якщо межа функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Можливі також і інші визначення безперервності функції в точці:

1) функція $f(x)$ називається *безперервною* в точці x_0 , якщо для будь-якого позитивного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для будь-яких x , що задовольняють умові

$$|x - x_0| < \delta$$

вірна нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) функція $f(x)$ називається *безперервною* в точці $x = x_0$, якщо приріст функції в точці x_0 є нескінченно малою величиною.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$.

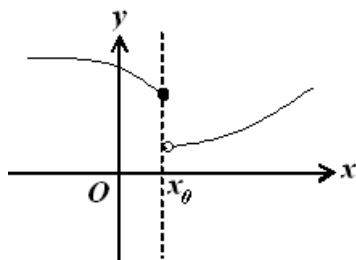
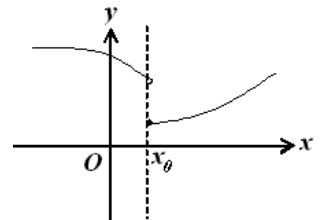
Визначення. Якщо функція $f(x)$ визначена в деякій околиці точки x_0 , але не є безперервною в самій точці x_0 , то вона називається *розривною* функцією, а точка x_0 - *точкою розриву*.

Класифікація точок розриву.

Розглянемо деяку функцію $f(x)$, безперервну в околиці точки x_0 , за виключенням може бути самої цієї точки. З визначення точки розриву функції виходить, що $x = x_0$ є точкою розриву, якщо функція не визначена в цій точці, або не є в ній безперервною.

Слід зазначити також, що безперервність функції може бути односторонньою.

Якщо існує одностороння границя $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається *безперервною справа*.



Якщо існує одностороння границя $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається *безперервною зліва*.

Визначення. Точка x_0 називається точкою розриву 1 - го роду, якщо в цій точці функція $f(x)$ має кінцеві, але не рівні один одному ліву і праву границі.

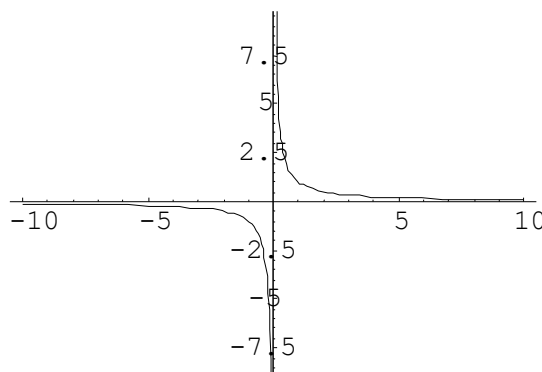
$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для здійсності умов цього визначення не потрібно, щоб функція була визначена в точці $x = x_0$, досить того, що вона була визначена зліва і справа від цієї точки.

З визначення можна зробити висновок, що в точці розриву 1 - го роду функція може мати тільки кінцевий стрибок. У деяких окремих випадках точку розриву 1 - го роду ще іноді називають *усувною точкою розриву*.

Визначення. Точка x_0 називається *точкою розриву 2 - го роду*, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має хоч би одну з односторонніх границь або хоч би один з них нескінченний.

Приклад 1. Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має в точці $x_0 = 0$ точку розриву 2 – го роду, тому що. $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$.

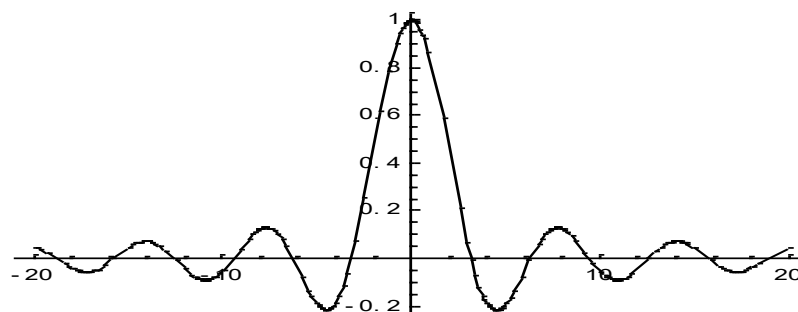


Приклад 2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

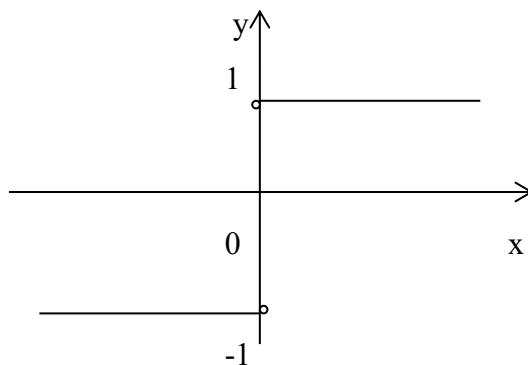
Функція не визначена в точці $x = 0$, але має в ній кінцеву границю $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, тобто в точці $x = 0$ функція має точку розриву 1 – го роду. Це – усувна точка розриву, тому що цю функцію можна до визначити як:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Графік цієї функції:



Приклад 3. $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



Ця функція також позначається $\text{sign}(x)$ - знак x . У точці $x = 0$ функція не визначена. Тому як ліва і права границі функції різні, то точка $x = 0$ є точкою розриву 1 - го роду. Якщо до визначити функцію в точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$, то функція буде безперервна справа, якщо покласти $f(0) = -1$, або функція буде безперервною зліва, якщо покласти значення $f(0)$ будь якого числа, відмінного від 1 або, - 1, то функція не буде безперервна ні зліва, ні справа, але в усіх випадках матуємо в точці $x = 0$ розрив 1 - го роду. В даному прикладі точка розриву 1 - го роду не є усувною.

3.5.12. Властивості функцій, безперервних на відрізку

Визначення. Функція $f(x)$ називається *безперервною на інтервалі (відрізку)*, якщо вона безперервна у будь-якій точці цього інтервалу (відрізку).

При цьому не потрібно безперервність функції на кінцях відрізка або інтервалу, потрібна тільки одностороння безперервність на кінцях відрізка або інтервалу.

Безперервні на відрізку $[a, b]$ функції мають ряд важливих властивостей.

Властивість 1. Функція, безперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку.

Властивість 2. Функція, безперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ній найбільше і найменше значення.

Властивість 3. Функція, безперервна на відрізку $[a, b]$ і що має на його кінцях нерівні значення $f(a) = A$ і $f(b) = B$, те на цьому відрізку вона набуває усіх проміжних значень між A і B .

Властивість 4. Якщо функція $f(x)$ - безперервна на відрізку $[a, b]$ і має на кінцях відрізка значення протилежних знаків, то існує така точка усередині цього відрізка, де $f(x) = 0$.

Задачі для самостійного розв'язку.

Зайти границі для функції цілочислового аргументу

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$. 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}$. 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$.
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} + \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[3]{n} - n}$. 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5 + 5}}$. 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$.
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$. 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$. 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$.
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}$. 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n - 3}{10n - 1} \right)^{5n}$. 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 7}{2n^2 + 5n + 3} \right)^n$.

Зайти границі для функції

- 13) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$. 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$. 15) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$.
- 16) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$. 17) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3 + x} - \sqrt{2x}}$. 18) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x}}$.
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$. 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x-1}}$. 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4\pi x} - 1}{\sqrt[3]{8+24x} - 2}$.

Приклади задач з економічним застосуванням

Задача 1. Побудувати числову послідовність знаходження грошових накопичень з урахуванням простих відсотків.

Рішення. Нехай початкова сума становить A гривень, відсоткова ставка дорівнює q відсотків річних. Величину $r = q/100$ назовемо питомою відсотковою ставкою. При накопиченні коштів з урахуванням простих відсотків у кожний часовий період на доданий відсоток нарахування не виробляється, і грошові накопичення становитимуть:

після першого року: $A_1 = A + A_r = A(1 + r)$;

після другого року: $A_2 = A + A_r + A_r = A(1 + 2r)$;;

.

після n -го року: $A_n = A + A_r + \dots + A_r = A(1 + nr)$;

Остання рівність визначає загальний член шуканої числової послідовності.

Задача 2. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень з урахуванням складних відсотків.

Рішення. У даному випадку відсоток (дохід від грошової суми) складається із сумою, яку він нараховувався, й у наступному періоді відсоток вже нараховується на всі грошові на накопичення, що утворилися на початок періоду. Нехай на початкові кошти A нараховується відсоток за питомою нормою r протягом n років, причому відсотки будуть складними. Грошові накопичення становитимуть:

після першого року: $A_1 = A + A_r = A(1 + r)$;

після другого року: $A_2 = A_1 + A_1 r = A_1(1 + r) = A(1 + r)^2$;

.

після n -го року: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} r = A_{n-1}(1 + r) = A(1 + r)^n$;

Отже, при нарахуванні складних відсотків протягом n років кінцева величина коштів складе $A_n = A(1 + r)^n$. Остання рівність визначає загальний член шуканої числової послідовності. Зауважимо, що число $s = 1 + r$ називають коефіцієнтом складного відсотка.

Задача 3. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень з урахуванням складних відсотків за умови, що відсотки нараховуються рівномірно m разів на рік, кожного разу по нормі $\frac{r}{m}$ на новий залишок вкладу (сума вкладу передбачається стабільною протягом усього розглянутого періоду).

Рішення. У цьому випадку відсотки на початкову суму по закінченні $\frac{1}{m}$ року становитимуть $A \cdot \frac{r}{m}$, а сума A гривень разом зі збільшенням становитиме після закінчення.

$\frac{1}{m}$ року: $A \left(1 + \frac{r}{m}\right)$;

$$\frac{2}{m} \text{ року: } A \left(1 + \frac{r}{m}\right);$$

.

$$1 \text{ року: } A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

.

$$n \text{ років: } A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

Загальний член шуканої числової послідовності має вигляд:

$$A_n = A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

Задача 4. Розв'язати задачу 3 у припущенні, що відсотки нараховуються безперервно.

Рішення. Якщо нарахування відсотків відбувається безперервно, тобто $m \rightarrow$

$$\infty, \text{ тоді } A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = A \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = A e^{\lim_{m \rightarrow \infty} mn \cdot \frac{r}{m}} = A e^{nr}.$$

Застосували відому формулу $\lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ v \rightarrow \infty}} u^v = e^{\lim_{u \rightarrow 1} (u-1)}$

Задача 5. Визначити залежність чисельності населення від часу, виходячи із середньорічного приросту 10 чол. на кожну 1000 осіб населення.

Рішення. (див. Завдання 3, 4). Позначимо чисельність населення початковий час через N_0 і зростання населення за рік в частках від цієї чисельності (коефіцієнт природного приросту) через k (очевидно, $k = 0,01$). Розбивши рік на n рівних періодів, отримаємо через t років: $N_t = N_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}$. Переходячи до межі при $n \rightarrow \infty$, знайдемо остаточно:

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} = N_0 e^{kt} = N_0 e^{0,01t}$$

Задача 6. Економічним підрозділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць деякої продукції щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою

$$V(x) = 30x + 10000 \quad (\text{грн}),$$

а доход, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції, — формулою

$$D(x) = 100x - 0,01x^2 \quad (\text{грн}).$$

Кожного кварталу завод виробляє 3000 одиниць продукції, але планує збільшити приріст доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції, якщо квартальний обсяг буде становити 3100 одиниць продукції.

Рішення. Запланований приріст продукції:

$$\Delta x = 3100 - 3000 = 100 \quad (\text{одиниць продукції}).$$

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(3100) - V(3000) = 103\,000 - 100\,000 = 3\,000 \quad (\text{грн}).$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(3100) - D(3000) = 213\,900 - 210\,000 = 3\,900 \quad (\text{грн}).$$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0,01x^2 - (30x + 10\,000) = -0,01x^2 + 70x - 10\,000$$

Приріст прибутку:

$$\Delta P(x) = P(3100) - P(3000) = 110\,900 - 110\,000 = 900 \quad (\text{грн}).$$

Таким чином, прибуток збільшиться на 900 гривень.

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції дорівнює

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{900}{100} = 9 \quad (\text{грн}).$$

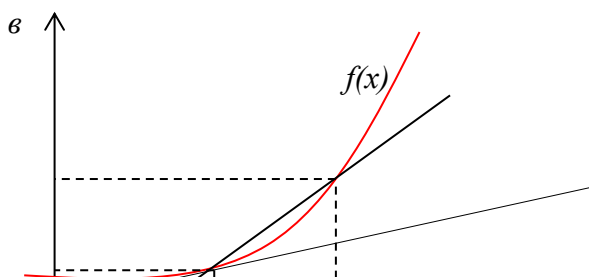
Отже, кожна одиниця додаткової продукції збільшує прибуток на 9 гривень.

4. Диференціальне числення функції однієї змінної.

4.1. Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст.

Визначення. Похідній функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, якщо він існує.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4.1)$$



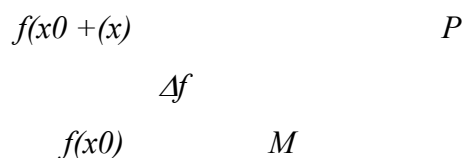


Рис. 4.1.

Хай $f(x)$ визначена на деякому проміжку (a, b) . Тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс кута нахилу січної MP до графіка функції.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де $(\alpha - \text{кут нахилу дотичної до графіка функції } f(x) \text{ в точці } (x_0, f(x_0)))$.

Кут між кривими може бути визначений як кут між дотичними, проведеними до цих кривих в якій - набудь точці.

$$\text{Рівняння дотичної до кривої: } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.2)$$

$$\text{Рівняння нормалі до кривої: } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (4.3)$$

Фактично похідна функції показує як би швидкість зміни функції, як змінюється функція при зміні змінній.

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де t - час, а $f(t)$ - закон руху – миттєва швидкість руху.

Відповідно, друга похідна функції - швидкість зміни швидкості, тобто прискорення.

Функція $y = f(x)$, що має похідну в кожній точці інтервалу (a, b) , називається такою, що диференціюється в цьому інтервалі. Відповідно операція знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Розглянемо основні властивості функцій, що диференціюються.

1. **Теорема 1** (необхідна умова існування похідної) *Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 , то вона безперервна в цій точці.*
2. **Теорема 2.** Якщо функція $y = f(x)$ на інтервалі (a, b) монотонна і має в довільній точці x цього інтервалу похідну $f'(x)$ не рівною нулю, то зворотна функція $x = \varphi(y)$ також має похідну $\varphi'(y)$ у відповідній точці і рівна

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (4.4)$$

Отже, похідна зворотної функції дорівнює зворотній величині похідної даної функції.

4.2. Основні правила диференціювання функцій

На практиці знаходження похідної функції часто пов'язане з певними труднощами, тому зручно користуватися надалі наступними правилами диференціювання.

Хай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовані в точці x . а C – постійна величина ($C = \text{const}$). Мають місце наступні правила:

- 1) $(C)' = 0$;
- 2) $(Cu)' = cu'$;
- 3) $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$;
- 4) $(u/v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, якщо $v \neq 0$.

Ці правила можуть бути легко доведені на основі теорем про границі.

Нижче наводиться таблиця похідних елементарних функцій:

1) $C' = 0$	9) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(x^m)' = m x^{m-1}$	10) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	12) $(\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5) $(e^x)' = e^x$	13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6) $(a^x)' = a^x \ln a$	14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15) $(\operatorname{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}$
8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	16) $(\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$

Похідна складної функції.

Теорема. Хай функції $y = f(u)$ і $u = g(x)$ диференційовані у відповідній точці, причому область значень функції $g(x)$ входить в область визначення функції f .

$$\text{Тоді} \quad y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x. \quad (4.5)$$

Доведення. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(з урахуванням того, що якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, тому $u = g(x)$ – безперервна функція)

$$\text{Тоді} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad \text{Теорема доведена.}$$

Приклади. Знайти похідну

$$1) \quad y = \ln^3(1 + \cos x)$$

$$y' = 3 \ln^2(1 + \cos x) \cdot \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = \frac{-3 \sin x \ln^2(1 + \cos x)}{1 + \cos x}.$$

$$2) \quad y = \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

$$y' = \frac{1}{40} \cdot \frac{2 \cdot 20 \cos 2x (-\sin 20x) \sin 40x - 40 \cos^2 20x \cos 40x}{\sin^2 40x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 40x + 2 \cos^2 20x \cos 40x}{2 \sin^2 40x}.$$

Логарифмічне диференціювання.

На практиці у ряді випадків для знаходження похідної функції зручно спочатку прологарифмувати цю функцію, а потім результат продиференціювати. Така подвійна процедура називається логарифмічним диференціюванням. Метод логарифмічного диференціювання зручно застосовувати для знаходження похідних складних, особливо показникових функцій, для яких безпосереднє обчислення похідної з використанням правил диференціювання представляється трудомістким.

Розглянемо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}.$

Тоді $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$. Враховуючи отри-

маний результат, можна записати $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Тут відношення $\frac{f'(x)}{f(x)}$ на-

зивається логарифмічній похідній функції $f(x)$.

В результаті $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$ (4.6)

Приклади. 1) Похідна степенево-показової функції

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \quad (4.7)$$

$$2) \quad y = x^{\sin x^3}, \quad y' = x^{\sin x^3} \left(3 \cos(x^3) \cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{\sin x^3}{x} \right).$$

$$3) \quad y = (\sin 3x)^{x^3-2},$$

$$y' = (\sin 3x)^{x^3-2} \cdot \ln \sin 3x \cdot 3x + (x^3 - 2)(\sin 3x)^{x^3-3} \cdot \cos 3x \cdot 3.$$

Функція, задана параметрично

Хай залежність між аргументом x і функцією y задана в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ де } t - \text{параметрична змінна.}$$

Знайдемо похідну, вважаючи, що функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні і крім того $x(t)$ має зворотну функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання зворотної функції (5.4)

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

За правилом диференціювання складної функції (5.5) маємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$, в резуль-

$$\text{таті, } y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \quad \text{тобто} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (4.8)$$

Отримана формула (4.8) дозволяє знаходити похідну y'_x якщо залежність y від x задана параметрично.

Приклад.
$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = t \operatorname{tg} \sqrt{1+t}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y'(t) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1+t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2\sqrt{1+t} \cos^2 \sqrt{1+t}}.$$

$$y'_x = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t\sqrt{1+t} \cos^2 \sqrt{1+t}}.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти похідну

$$1) y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}. \quad 2) y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}. \quad 3) y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}). \quad 4)$$

$$y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}.$$

$$5) y = \operatorname{Intg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right). \quad 6) y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}. \quad 7) y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}. \quad 8)$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

4.3. Похідні вищих порядків

Хай ми знайшли від функції $y = f(x)$ її похідну $y' = f'(x)$. Похідна від цієї похідної і називається *похідною другого порядку* від функції $f(x)$ і позначається y'' або $f''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Аналогічно визначаються і позначаються: похідна третього

$$\text{порядку } y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3};$$

$$\text{похідна четвертого порядку } y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}; \dots$$

$$\text{похідна } n\text{-ого порядку } y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Приклади. 1) $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 2$. Знайти y'' .

Розв'язок. Знаходимо на початку першу похідну: $y' = 20x^3 - 9x^2 + 2$, потім другу похідну: $y'' = 60x^2 - 18x$.

2) $y = x \sin x$. Знайти y''' .

Розв'язок. $y' = \sin x + x \cos x$

$$y'' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2\cos x - x \sin x$$

$$y''' = -2\sin x - \sin x - x \cos x = -3\sin x - x \cos x.$$

4.4. Диференціал функції

Хай функція $y = f(x)$ має похідну в точці x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тоді можна записати: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отже:
$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad . \quad (4.9)$$

Величина $\alpha \Delta x$ - нескінченно мала вищого порядку, ніж $f'(x) \Delta x$, тобто $f'(x) \Delta x$ - головна частина приросту Δy .

Визначення. Диференціалом функції $f(x)$ в точці x називається головна лінійна частина приросту функції.

Диференціал функції позначається як dy або $df(x)$.

З визначення диференціала виходить, що $\Delta y = f'(x) \Delta x$ або

$$dy = f'(x) dx. \quad (4.10)$$

Геометричний зміст диференціала

З'ясуємо геометричний зміст диференціала. Для цього проведемо до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x, y)$ дотичну MK і визначимо ординату цієї дотичної для точки $x + \Delta x$ (див. рис. 5.2). На рисунку $|LM| = \Delta x$, $|LN| = \Delta y$.

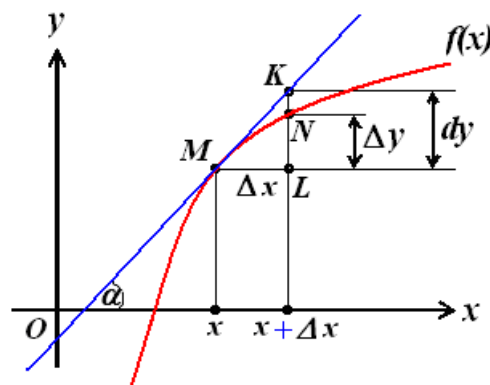


Рис. 4.2.

З прямокутного трикутника ΔMKL (рис 4.2): $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$, тобто диференціал функції $f(x)$ в точці x дорівнює приросту ординати дотичною до графіка цієї функції в даній точці.

Властивості диференціала.

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ - диференційовані функції в точці x , то безпосередньо з визначення диференціала виходять наступні властивості:

$$1) \quad d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = u' dx \cdot v + u \cdot v' dx = du \cdot v + u \cdot dv$$

- 2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + u'dv$
- 3) $d(Cu) = Cdu$
- 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u'dv}{v^2}$.

4.5. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Наближені обчислення із застосуванням диференціала функції засновані на наближеній заміні приросту функції в крапці на її диференціал

$$\Delta y \approx dy. \quad (4.11)$$

Абсолютна погрішність такої заміни є, як випливає з (5.9), має вищий порядок, ніж Δx . Ця рівність дозволяє з великою точністю обчислити наближений приріст будь-якої диференційованої функції. Зазвичай диференціал знаходиться значно простішим, ніж приріст цієї функції.

З рівності (4.11) виходить

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) використовується для обчислення наближеного значення функції.

Приклади. 1) Обчислити приблизно за допомогою диференціала

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$$

Виберемо $x_0 = 1$, отже $\Delta x = 0,21$.

$$y(x) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x.$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = \frac{1}{3}, \quad y = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,21 = 1,07.$$

2) Обчислити приблизно за допомогою диференціала

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x = 0,98.$$

Виберемо $x_0 = 1$, отже $\Delta x = -0,02$. Скористаємося формулою

$$(4.12)$$

$$y(x_0) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \quad y'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'(x_0) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2},$$

В результаті $\arctg 0,98$.

4.6. Дослідження функції за допомогою похідних

Основні теореми диференційного аналізу

При дослідженні поведінки диференційованої функції на деякому відрізку $[a, b]$, важливе значення мають наступні теореми диференційного аналізу.

Теорема (Роль). Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована на інтервалі (a, b) і значення функції на кінцях відрізка рівні $f(a) = f(b)$, то на інтервалі (a, b) існує точка c , $a < c < b$, в якій похідна $f'(x)$ рівна нулю, тобто $f'(c) = 0$.

Доведення. По властивості функцій, безперервних на відрізку функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ набуває найбільшого і найменшого значень. Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різні випадки $M = m$ і $M \neq m$.

Хай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ зберігає постійне значення і в будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. В цьому випадку в якості c можна прийняти будь-яку точку інтервалу.

Хай $M \neq m$. Оскільки значення на кінцях відрізка рівні, то функція приймає хоч би одне із значень M або m у внутрішній точці з інтервалу (a, b) . Хай, наприклад, функція набуває значення M в точці $x = c$ ($a < c < b$), тобто $f(c) = M$. Оскільки M - найбільше значення функції, то для всіх $x \in (a, b)$ виконується нерівність $f(c) \geq f(x)$.

Знайдемо похідну $f'(x)$ в точці $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Через попередню нерівність виконується умова $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, якщо

$$\Delta x > 0, \text{ тобто } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \text{ і тому } f'(c) \leq 0 \text{ .}$$

Якщо ж $\Delta x < 0$, тобто $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$, то $f'(c) \geq 0$.

Таким чином $f'(c) = 0$.

У разі, коли $f(c) = m$, доведення аналогічне.

Геометричний зміст теореми Ролля полягає в тому, що при виконанні умов теореми на інтервалі (a, b) існує принаймні одна крапка c , в якій дотична до графіка $y = f(x)$ паралельна осі Ox .

Теорема (Коши). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ безперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані на інтервалі (a, b) і $g'(x) \neq 0$ на інтервалі (a, b) , то існує принаймні одна точка c , $a < c < b$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню похідних в точці c .

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a, b]$ задовольняє умовам теореми Ролля. Легко бачити, що при $x = a$ і $x = b$ $F(a) = F(b) = 0$. Тоді по теоремі Ролля існує така точка c , $a < c < b$, така, що $F'(c) = 0$. Оскільки

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x), \text{ то}$$

$$F'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

Але $g'(c) \neq 0$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Теорема доведена.

Теорема (Лагранж). Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b) , то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна крапка c , така, що виконується рівність

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4.13)$$

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати, як окремий випадок теореми Коши. Дійсно, покладемо $g(x) = x$, тоді $g'(x)=1$, $g'(c)=1$. Підставляючи ці значення у формулу

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ отримуємо } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1} \text{ або}$$

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \text{ Теорема доведена.}$$

Отриманий вираз (4.13) називається формулою Лагранжа або формулою кінцевих приростів. Згідно цій формулі приріст диференційної функції на відрізку $[a, b]$ дорівнює приросту аргументу, помноженому на значення похідної функції в деякій внутрішній точці цього відрізка.

Розкриття невизначеностей (правило Лопітала)

До розряду невизначеностей, пов'язаних з обчисленням границь, прийнято відносити наступні співвідношення:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty.$$

Теорема (правило Лопітала) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в поблизу точки a , безперервні в точці a , $g'(x)$ відмінна від нуля поблизу a і $f(a) = g(a) = 0$, то границя відношення функцій при $x \rightarrow a$ дорівнює границі відношень їх похідних, якщо ця границя (кінцева або нескінченна) існує.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення. Застосувавши формулу Коши, отримаємо:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

де c - точка, що знаходиться між a і x . Враховуючи, що $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Хай при $x \rightarrow a$ відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ прагне до деякої границі. Оскільки точка

c лежить між точками a і x , то при $x \rightarrow a$ отримаємо $c \rightarrow a$, а отже і відношення

$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ прагне до той же границі. Таким чином, можна записати:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \text{Теорема доведена.}$$

Приклади. 1) Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3} = 0.$

2) Знайти границю: .

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x \right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

слід зауважити, що правило Лопітала – всього лише один із способів обчислення границі. Часто в конкретному прикладі разом з правилом Лопітала може бути використаний і який – набудь інший метод (заміна змінних, домноження та ін.).

3) Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ - знову вийшла невизначеність.}$$

Застосуємо правило Лопітала ще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \quad g''(x) = \sin x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ - застосовуємо правило Лопіталя ще раз.}$$

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; \quad g'''(x) = \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$$

Невизначеності вигляду 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можна розкрити за допомогою логарифмування. Такі невизначеності зустрічаються при знаходженні границь функцій вигляду, $y = [f(x)]^{g(x)}$ $f(x) > 0$ поблизу точки a при $x \rightarrow a$. Для знаходження границі такої функції досить знайти границю функції

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

$$4). \text{ Знайти границю } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x.$$

$$\text{Тут } y = x^x, \quad \ln y = x \ln x.$$

$$\text{Тоді } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0; \quad .$$

$$\text{Отже } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1.$$

$$5) \text{ Знайти межу } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}.$$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}; \text{ - отримали невизначеність.}$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти границю

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right). \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} \right). \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x\sqrt{1-x^2}}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-5x^2}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.
\end{aligned}$$

Зростання і спадання функцій.

При дослідженні функцій і побудові їх графіків важливим є з'ясування області монотонності (зростання і спадання) функції.

Теорема 1 (необхідні умови). Якщо функція $f(x)$ має похідну на відрізку $[a, b]$ і зростає (спадає) на цьому відрізку, то її похідна на цьому відрізку невід'ємна, тобто $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Теорема 2 (достатні умови). Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на проміжку (a, b) , причому $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то ця функція зростає (спадає) на відрізку $[a, b]$.

Доведення.

1) Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ і

$f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тоді:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \quad \text{і} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Хай $f'(x) > 0$ для будь-яких точок x_1 і x_2 , що належать відрізку $[a, b]$ причому $x_1 < x_2$.

Тоді по теоремі Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$.

За умовою $f'(c) > 0$, отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто функція $f(x)$ зростає.

Аналогічно можна зробити вивід про те, що якщо функція $f(x)$ спадає на відрізку $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на цьому відрізку. Якщо $f'(x) < 0$ на проміжку (a, b) , то $f(x)$ спадає на відрізку $[a, b]$. Теорема доведена.

Максимум і мінімум функцій

Визначення. Функція $f(x)$ має в точці x_1 *максимум*, якщо її значення в цій точці більше значень $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ в усіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_1 . Функція $f(x)$ має в точці x_2 *мінімум*, якщо $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при будь-якому Δx (Δx може бути і від'ємним).

Очевидно, що функція, яка визначена на відрізку може мати локальний максимум (локальний мінімум) лише в точках, що знаходяться усередині цього відрізка. Необхідно розрізняти максимум (мінімум) функції і її найбільше (найменше) значення на відрізку – це поняття принципово різні.

Визначення. Точки максимуму і мінімуму функції називаються *точками екстремуму*.

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці $x = x_1$ і точка x_1 є точкою екстремуму, то похідна функції дорівнює нулю в цій точці.

Доведення. Передбачимо, що функція $f(x)$ має в точці $x = x_1$ максимум. Тоді при досить малих позитивних $\Delta x > 0$ вірна нерівність:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \quad \text{тобто}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тоді

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

За визначенням:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1).$$

Тобто якщо $\Delta x \rightarrow 0$, але $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а якщо $\Delta x \rightarrow 0$, але $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А це можливо лише в тому випадку, якщо при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для випадку, якщо функція $f(x)$ має в точці x_2 мінімум теорема доводиться аналогічно. Теорема доведена.

Визначення. Критичними точками функції називаються точки, в яких похідна функції не існує або дорівнює нулю.

Теорема (достатні умови 1 існування екстремуму). *Хай функція $f(x)$ безперервна в інтервалі (a, b) , який містить критичну точку x_1 , і диференційована в усіх точках цього інтервалу (окрім, можливо, самої точки x_1). Тоді якщо під час переходу через точку x_1 зліва направо похідна функції $f'(x)$ міняє знак з “+” на “-”, то в точці $x = x_1$ функція $f(x)$ має максимум, а якщо похідна міняє знак з “-” на “+” - то функція має мінімум.*

Доведення. Хай
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$$

По теоремі Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1)$, де $x < c < x_1$.

Тоді: 1) якщо $x < x_1$, то $c < x_1$; $f'(c) > 0$; $f'(c)(x - x_1) < 0$, отже

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ або } f(x) < f(x_1).$$

2) якщо $x > x_1$, то $c > x_1$; $f'(c) < 0$; $f'(c)(x - x_1) < 0$, отже

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ або } f(x) < f(x_1).$$

Таким чином, значення функції $f(x)$ в точці x_1 є найбільшим на інтервалі, тобто $f(x) < f(x_1)$ в усіх точках поблизу x_1 . Це означає, що x_1 – точка максимуму.

Доведення теореми для точки мінімуму виробляється аналогічно.

Теорема (достатні умови 2 існування екстремуму). *Якщо в точці x_1 перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю ($f'(x_1) = 0$), а друга похідна в точці x_1 існує і відмінна від нуля ($f''(x_1) \neq 0$), то функція $f(x)$ в точці $x = x_1$ має максимум, якщо $f''(x_1) < 0$ і мінімум, якщо $f''(x_1) > 0$.*

Доведення. Хай $f'(x_1) = 0$ і $f''(x_1) < 0$. Оскільки функція $f(x)$ безперервна, то $f''(x_1)$ буде від'ємною і в деякій малій околиці точки x_1 .

Оскільки $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ спадає на відрізку, що містить точку x_1 , але $f'(x_1) = 0$, тобто $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Це і означає, що під час переходу через точку $x = x_1$ похідна $f'(x)$ міняє знак з “+” на “-”, тобто в цій точці функція $f(x)$ має максимум.

Для випадку мінімуму функції теорема доводиться аналогічно.

Якщо $f''(x) = 0$, то характер критичної точки невідомий. Для його визначення потрібне подальше дослідження.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Хай функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$. З властивостей безперервних функцій виходить, що ця функція у вказаній області досягає свого найбільшого і найменшого значень. Причому ці значення функція може набувати або у внутрішній точці відрізання, або на границі відрізу.

На основі вищесказаного правило знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку зводиться до наступних дій:

- 1) Знайти критичні точки функції.
- 2) Знайти значення функції в критичних точках.
- 3) Знайти значення функції на кінцях відрізу.
- 4) Вибрати серед набутих значень найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \text{ на відрізку } [-1, 3].$$

Розв'язок. Знаходимо критичні точки даної функції, визначимо похідну функції

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2);$$

звідки $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1$ і при $x_2 = 2$, обоє ці точки належать відрізку $[-1, 3]$. Знаходимо значення функції в критичних точках x_1, x_2 і на кінцях відрізу $-1, 3$: $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(-1) = -27$, $f(3) = 5$. Порівнюючи дані величини, знаходимо найбільше і найменше значення

$$f_{\text{ниб}} = 5 \text{ в точці } x = 3, f_{\text{ним}} = -27 \text{ в точці } x = -1.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти найменше і найбільше значення функції

$$1) y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5, \quad [-2; 1] . \quad 2) \quad [2; 4] .$$

$$3) y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15, \quad [-2; -0,5] . \quad 4) \quad [-2; 1] .$$

Опуклість (вигнутість) графіка функції. Точки перегину.

Визначення. Крива обернена опуклістю вгору на деякому інтервалі, якщо всі її точки лежать нижче за будь-яку її дотичну на цьому інтервалі. Крива, обернена опуклістю вгору, називається *опуклою*, а крива, обернена опуклістю вниз, – називається *вигнутою* (див. рис 5.3).

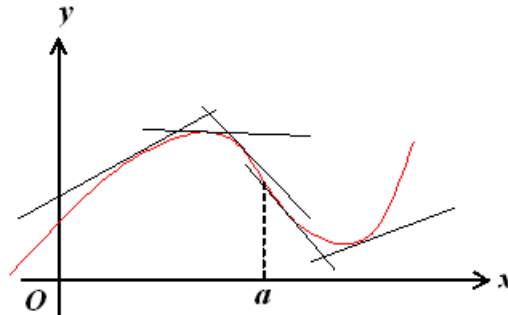


Рис. 4.3. Ілюстрація визначення опуклості і вигнутості графіка функції (при $x < a$ крива опукла, при $x > a$ крива вигнута при $x = a$ - точка перегину) .

Теорема. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна функції $f(x)$ ($f''(x) < 0$) від'ємна, то крива $y = f(x)$ опукла. Якщо ж $f''(x) > 0$ в будь-якій точці інтервалу (a, b) , то крива $y = f(x)$ вигнута.

Доведення. Хай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої в цій точці.

Рівняння кривої: $y = f(x)$; рівняння дотичної $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.:

Слід довести, що $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теоремі Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c < x.$$

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теоремі Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$$

Хай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$ і крім того по умові $f''(c_1) < 0$, отже $y - \bar{y} < 0$.

Хай $x < x_0$ тоді $x < c < c_1 < x_0$ і $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, то $y - y < 0$.

Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі (a, b) , то крива $y = f(x)$ вигнута на інтервалі (a, b) . Теорема доведена.

Визначення. Точка, що відділяє опуклу частину кривої від вигнутої, називається точкою *перегину*.

Очевидно, що в точці перегину дотична перетинає криву.

Теорема (достатня умова точок перегину). Хай крива визначається рівнянням $y = f(x)$. Якщо друга похідна $f''(a) = 0$ або $f''(a)$ не існує і під час переходу через точку $x = a$ $f''(x)$ міняє знак, то точка кривої з абсцисою $x = a$ є точкою перегину.

Доведення. 1) Хай $f''(x) < 0$ при $x < a$ і $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла, а при $x > a$ крива вигнута, тобто точка $x = a$ – точка перегину (див. рис. 5.3).

2) Хай $f''(x) > 0$ при $x < b$ і $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тоді при $x < b$ крива обернена опуклістю вниз, а при $x > b$ – опуклістю вверх. Тоді $x = b$ – точка перегину. Теорема доведена.

Приклад. Визначити точки перегину функції $y = x^3 + 2x^2 + x$. Знаходимо похідні

$$y' = 3x^2 + 4x + 1; \quad y'' = 6x + 4; \quad y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Визначимо поведінку функції $y''(x)$ при $x < -\frac{2}{3}$ і при $x > -\frac{2}{3}$. Результати дослідження представимо в таблиці

x	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, +\infty)$
$y''(x)$	$y''(x) < 0$	0	$y''(x) > 0$
$y(x)$	опукла 	точка перегину 	вигнута 

Асимптоти графіка функції

Часто виявляється, що графік функції при видаленні поточної точки кривою на нескінченність необмежено наближається до деякої прямої. Такі прямі називаються *асимптотами*. Дослідження функцій на наявність асимптот має велике значення при визначенні характеру поведінки графіка кривою. Слід зазначити, що не будь-яка крива має асимптоти. За наявності в кривій асимптот розрізняють три їх види: вертикальні, горизонтальні і похилі.

Визначення. Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Наприклад, для функції $f(x) = \frac{2}{x-5}$ пряма $x = 5$ є вертикальною асимптотою, оскільки $\lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5-0} f(x) = -\infty$.

Визначення. Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, якщо $f(x)$ можна представити у вигляді

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ де } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Це визначення відноситься також і до *горизонтальної асимптоти*, якщо $k = 0$.

Для точного визначення похилої асимптоти $y = kx + b$ необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b . Розділимо обоє частини попередньої рівності на x і переходячи до границі коли $x \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k, \text{ тобто}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4.14)$$

Потім з рівності $b + \alpha(x) = f(x) - kx$, переходячи до границі при $x \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [b + \alpha(x)] = b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx], \text{ тобто}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]. \quad (4.15)$$

Приклад. Знайти асимптоти функції $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Знайдемо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4.$$

Таким чином, пряма $y = x - 4$ є похилою асимптотою.

Схема дослідження графіка функції

Приведений в розділі 4.5 теоретичний огляд властивостей функцій дозволяє рекомендувати наступну схему проведення дослідження функцій і побудови їх графіків.

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.
2. Визначити можливого типа симетрії функції: парність або непарність функції.

За наявності симетрії досить побудувати графік функції на правій координатній напівплощині і потім відображувати його на ліву половину: дзеркально відносно осі Oy в разі парності $f(x)$ або з центральною симетрією при непарності $f(x)$.

3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат Ox і Oy
тобто вирішити відповідно рівняння $y = f(0)$ и $f(x) = 0$.
4. Знайти асимптоти.
5. Знайти точки можливого екстремуму.
6. Знайти критичні точки.
7. Досліджувати знаки першою і другою похідних, визначити ділянки монотонності функції, напрям опуклості графіка, точки екстремуму і перегину.
8. Визначити максимум і мінімум функції у області її визначення. Якщо областю визначення функції є відрізок $[a, b]$, необхідно обчислити значення функції на його кінцях і зіставити їх з локальними екстремумами.
9. Побудувати графік функції з врахуванням проведеного дослідження.

Приклад. Досліджувати функцію $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ і побудувати її графік.

1. Областю визначення функції є всі значення x , окрім $x = 0$.
2. Функція є функцією загального вигляду в сенсі парності і непарності.
3. Точки перетину з координатними осями:

з віссю Ox : $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$; з віссю Oy : $x = 0$; y – не існує.

4. Точка $x = 0$ є точкою розриву, отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

Похили асимптоти шукаємо у вигляді: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Похила асимптота $y = x$.

5. Знаходимо точки екстремуму функції.

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 2, \quad y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,

$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функція спадає,

$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функція зростає.

Таким чином, точка $(2, 3)$ є точкою мінімуму.

Для визначення характеру опуклості/вигнутості функції знаходимо другу похідну.

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція вигнута на всій області визначення.

6. Побудуємо графік функції.

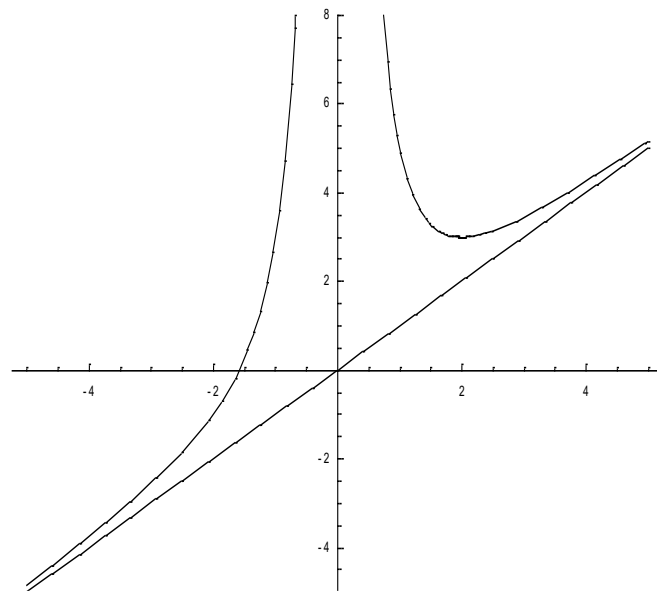


Рис. 4.4. Графік функції $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

Приклади задач з економічним застосуванням

Оскільки похідна характеризує швидкість (миттєву, тобто, в певний момент) зміни значень функції, то цілком природньо, що диференціальне числення застосовується при моделюванні динамічних процесів. Окрім того, методи диференціального числення використовуються у дослідженнях характеру поведінки функцій – моделей явищ, особливо, їх екстремальних (або оптимальних) значень. При моделюванні економічних явищ функції – моделі часто називають **кривими зростання**, першу похідну (що характеризує швидкість) називають **темпом росту**, а другу похідну (що характеризує прискорення) – **темпом приросту**.

В економіці широко використовуються поняття середніх та граничних (маржинальних) витрат, доходу тощо. Розберемо ці поняття. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює залежність витрат y від кількості x випущеної продукції. Тоді функція $M(x) = \frac{f(x)}{x}$ визначає величину середніх (або питомих)

витрат, тобто, визначає витрати на виробництво однієї одиниці продукції при даному об'ємові випуску x . Припустимо, що кількість випуску продукції

змінилось на Δx . Тоді витрати виробництва змінились на величину

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, а середні – на $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Якщо перейти до

границі, дістанемо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ - граничні витрати (або швидкість

зміни витрат). Відзначимо, що граничні витрати приблизно дорівнюють витратам на випуск наступної $(x + 1)$ -ої одиниці продукції. Аналогічно можна розглянути, наприклад, граничний дохід і т.і.

Задача 1. Економічним відділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції щотижневі витрати $V(x)$ визначаються залежністю $V(x) = 2000 + 40x$ (грн), а дохід $D(x)$ - залежністю $D(x) = 100x - 0,001x^2$ (грн). Щотижня завод випускає 3000 одиниць продукції, але бажає збільшити випуск до 3100 одиниць. Обчислити прирости витрат, доходу та прибутку. Знайти величину середнього приросту прибутку. Прокоментувати отримані результати.

Розв'язування. Обчислюємо прирости витрат та доходу при $\Delta x = 3100 - 3000 = 100$:

$$\Delta V = V(3100) - V(3000) = 2000 + 40 \cdot 3100 - 2000 - 40 \cdot 3000 = 4000 \text{ (грн)}.$$

$$\Delta D = D(3100) - D(3000) = 100 \cdot 3100 - 0,001(3100)^2 - 100 \cdot 3000 + 0,001(3000)^2 = 9390 \text{ (грн)}.$$

Приріст прибутку обчислюємо як різницю приростів доходу та витрат:

$$\Delta P = \Delta D - \Delta V = 9390 - 4000 = 5390 \text{ (грн)}.$$

Зауважимо, що цей приріст можна знайти, визначивши функцію прибутку:

$$P(x) = D(x) - V(x) = -2000 + 60x - 0,001x^2 \text{ (грн)}.$$

Величина середнього приросту прибутку становить $\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{5390}{100} = 53,9$

(грн).

Отже, при збільшенні випуску з 3000 до 3100 одиниць дохід зросте на 9390 грн, витрати – на 4000 грн, загальний дохід – на 5390 грн. Дохід від випуску кожної із наступних 100 одиниць продукції в середньому становить 53,9 грн.

Задача 2. Функція витрат V (грн) підприємства при виробництві x одиниць продукції має вигляд $V(x) = 50x - 0,01x^2$, $x \in [10; 2500]$. Знайти при виробництві $x_1 = 100$ та $x_2 = 1000$ одиниць продукції: а) середні витрати; б) додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції; в) граничні (маржинальні) витрати. Охарактеризувати отримані результати.

Розв'язування. а) Визначимо функцію середніх витрат:

$$M(x) = \frac{V(x)}{x} = 50 - 0,01x. \text{ Обчислюємо середні витрати при виро-}$$

бництва $x_1 = 100$ та $x_2 = 1000$ одиниць продукції:

$$M(100) = 50 - 0,01 \cdot 100 = 49 \text{ (гр.од);}$$

$$M(1000) = 50 - 0,01 \cdot 1000 = 40 \text{ (гр.од).}$$

б) Додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції:

$$\Delta V(100) = V(101) - V(100) = 50 \cdot 101 - 0,01(101)^2 - \\ - 50 \cdot 100 + 0,01(100)^2 = 47,99 \text{ (гр.од).}$$

$$\Delta V(1000) = V(1001) - V(1000) = 50 \cdot 1001 - 0,01(1001)^2 - \\ - 50 \cdot 1000 + 0,01(1000)^2 = 29,99 \text{ (гр.од).}$$

в) Для знаходження граничних (маржинальних) витрат спочатку знайдемо похідну функції витрат $V'(x) = 50 - 0,02x$, а потім їх відповідні значення:

$$V'(100) = 50 - 0,02 \cdot 100 = 48 \text{ (гр.од);}$$

$$V'(1000) = 50 - 0,02 \cdot 1000 = 30 \text{ (гр.од).}$$

Приклад показує, що при збільшенні випуску середні (питомі) витрати (або витрати на одиницю продукції) зменшуються. Окрім того, бачимо, що граничні витрати приблизно дорівнюють витратам на випуск наступної одиниці продукції.

Економісти часто оперують поняттям еластичності функції. Як відомо, еластичність функції $y = f(x)$ відносно змінної x є показник

$$E_x(y) = \frac{y'}{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x}, \text{ який приблизно дорівнює процентній}$$

зміні значень функції при зміні аргумента на 1%.

Задача 3. На ринку деякого товару залежності обсягів (в одиницях) попиту $D(\text{demand})$ та пропозиції $S(\text{supply})$ від ціни $p(\text{price})$ за одиницю товару визначаються формулами: $D(p) = 500 - 2p^2$, $S(p) = 200 + p^2$. Знайти еластичності попиту $E_p(D)$ та пропозиції $E_p(S)$ відносно рівноважної ціни p_0 . Охарактеризувати отримані результати.

Розв'язування. Спочатку знаходимо рівновжну ціну p_0 , розв'язуючи рівняння: $D(p) = S(p) \Leftrightarrow 500 - 2p^2 = 200 + p^2 \Leftrightarrow p^2 = 100$, допустимим розв'язком якого, очевидно, є $p_0 = 10$.

$$\text{Знаходимо еластичності: попиту } E_p(D) = \frac{D'}{(D/p)} = \frac{-4p}{\frac{500}{p} - 2p}; \text{ при}$$

$$p_0 = 10 \text{ дістанемо } E_{p_0}(D) = \frac{-4 \cdot 10}{\frac{500}{10} - 2 \cdot 10} = -\frac{4}{3};$$

пропозиції $E_p(S) = \frac{S'}{(S/p)} = \frac{2p}{\frac{200}{p} + p}$; при $p_o = 10$ дістанемо

$$E_{p_o}(S) = \frac{2 \cdot 10}{\frac{200}{10} + 10} = \frac{2}{3}.$$

Результати свідчать про те, що, наприклад, при зростанні ціни від рівноважної $p_o = 10$ на 1% попит зменшиться приблизно на 4/3%, а пропозиція зросте приблизно на 2/3%.

Розглянемо деякі оптимізаційні задачі (задачі пошуку екстремальних значень функцій).

Задача 4. Функція повних витрат має вигляд: $y = x^3 - 6x^2 + 15x$, де x - обсяг виробництва продукції. При якому обсязі виробництва середні витрати будуть мінімальними? Якими будуть граничні витрати при знайденому обсязі виробництва?

Розв'язування. Насамперед визначимо функцію середніх витрат:

$$M(x) = \frac{y(x)}{x} = x^2 - 6x + 15, \text{ область визначення якої (згідно з умовами задачі) } D(M) : x \in [0; +\infty).$$

Дослідимо функцію на екстремум. Похідна $M' = 2x - 6$ визначена для будь-яких x , тому серед критичних будуть лише точки, в яких похідна дорівнює нулю, тобто $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$ - критична точка. Оскільки похідна другого порядку $M'' = 2 > 0$, то за теоремою (друга достатня умова екстремума) $x_0 = 3$ - точка мінімуму функції середніх витрат, причому цей локальний мінімум є і глобальним (найменше значення функції на $[0; +\infty)$). Отже, мінімальні середні витрати становлять

$$M_{min} = M(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6 \text{ при випуску 3 одиниць продукції.}$$

Граничні витрати при даному обсязі випуску, очевидно, дорівнюють $y'(3) = 3(3)^2 - 12 \cdot 3 + 15 = 6$.

Задача 5. Компанія виготовляє і реалізує вироби по 2 грн за кожний. Дослідженнями встановлено, що сума y_B (грн) загальних щотижневих витрат на виробництво x (тисяч штук) визначається залежністю: $y_B = 1000 + 1300x + 100x^2$ (грн). Визначити та дослідити залежність щотижневого прибутку $P = y_D - y_B$ (грн), де y_D (грн) – доход від реалізації виробленої продукції. При яких об'ємах виробництва забезпечується: а) беззбитковість; б) максимальний прибуток?

Розв'язування. Визначаємо функцію щотижневого прибутку:

$$P(x) = 2 \cdot 1000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = -100x^2 + 700x - 1000$$

із областю визначення $D(P) : x \in [0; +\infty)$.

Для знаходження об'ємів виробництва, які б забезпечували беззбитковість, потрібно розв'язати рівняння

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow -100x^2 + 700x - 1000 = 0.$$

Таким чином, беззбитковість забезпечується при випуску від 2 до 5 тисяч одиниць продукції (оскільки при $x \in [2; 5]$ $P(x) \geq 0$).

Для знаходження максимального прибутку проведемо дослідження на екстремум. Похідна $P' = -200x + 700$ всюди визначена, тому для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $P' = 0 \Leftrightarrow -200x + 700 = 0$. Критична точка $x_0 = 3,5$ є точкою максимуму, оскільки $P'' = -200 < 0 \forall x$. Отже, максимальний прибуток

$$P_{\max} = P(3,5) = -100(3,5)^2 + 700 \cdot 3,5 - 1000 = 225 \text{ (грн)}$$

досягається при випуску 3500 одиниць продукції.

Задача 6. Продуктивність праці робітників цеху визначається функцією $y = 23,94x \cdot e^{-0,4x}$, де y - обсяг продукції, виготовленої за одиницю часу, x (год.) - час, що відраховується від початку роботи. Визначити момент часу, в який продуктивність праці максимальна, і знайти цю максимальну продуктивність.

Розв'язування. Знаходимо найбільше значення функції $y = 23,94x \cdot e^{-0,4x}$ на замкненому проміжку $x \in [0; 8]$. Знаходимо похідну та її критичні точки, що належать проміжку:

$y' = 23,94 \cdot e^{-0,4x} (1 - 0,4x)$. Оскільки показникова функція набуває лише додатних значень, то критична точка визначається із умови $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,4x = 0$. Критична точка $x_0 = 2,5 \in [0; 8]$. Серед значень $y(0) = 0$, $y(2,5) = 23,94 \cdot 2,5 \cdot e^{-1} \approx 22$, $y(8) = 23,94 \cdot 8 \cdot e^{-3,2} \approx 7,8$

очевидно, найбільшим є **22**. Отже, максимальна продуктивність становить $y_{\max} = y(2,5) \approx 22$ одиниць продукції за годину і досягається через 2,5 години після початку робочої зміни.

Рекомендована література:

1. Кирилашук С. А. Вища математика. Частина 1. Індивідуальні завдання : навч. посіб. / С. А. Кирилашук, З. В. Бондаренко, В. І. Ключко. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 93 с.
2. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами : навч. посіб. / Р. В. Скуратовський. – Київ : Нац. акад. управління, 2021. – 205 с.
3. Бондар О. П. Вища математика. Частина I : конспект лекцій / О. П. Бондар, І. Л. Якуніна. – Кропивницький : ЛА НАУ, 2021. – 83 с.
4. Кузьмін В. А. Вища математика : конспект лекцій. Ч. 1 / В. А. Кузьмін. – Мелітополь : ФОП Кузьмін, 2021. – 124 с.
5. Клепко В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. Клепко, В. Голєць. – Київ : Каравела, 2020. – 594 с.
6. Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / О. В. Доля, Л. І. Турчанінова. – Київ : Каравела, 2021. – 348 с.
7. Литвин І. І. Вища математика. Частина I : навч. посіб. / І. І. Литвин. – 2-ге вид. – Київ : ЦУЛ, 2019. – 368 с.
8. Зайцев Є. П. Вища математика : навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – Київ : ЦУЛ, 2022. – 412 с.
9. Барковський В. М. Вища математика : практикум / В. М. Барковський. – Київ : КНЕУ, 2023. – 536 с.
10. Бескровний О. І. Вища та прикладна математика : навч. посіб. / О. І. Бескровний, В. В. Фортуна. – Київ : КНЕУ, 2024. – 648 с.
11. Дахно Н. Б. Дискретна математика : навч. посіб. / Н. Б. Дахно, Ю. В. Кравченко, О. О. Лещенко, А. С. Дуднік. – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2025. – 312 с.
12. Кузьма О. В. Конспект лекцій з вищої математики / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та ін. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 97 с.
13. Strang G. Introduction to Linear Algebra / G. Strang. – 6th ed. – Wellesley : Wellesley-Cambridge Press, 2023. – 600 p. – ISBN 978-0980232776.

14. Axler S. Linear Algebra Done Right / S. Axler. – 4th ed. – Cham : Springer, 2024. – 500 p. – ISBN 978-3319910790.
15. Bartle R. G. Introduction to Real Analysis / R. G. Bartle, D. R. Sherbert. – 4th ed. – Hoboken : Wiley, 2011. – 512 p. – ISBN 978-0471433316.
16. Lay D. C. Linear Algebra and Its Applications / D. C. Lay. – 5th ed. – Boston : Pearson, 2015. – 576 p.
17. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals / J. Stewart. – 8th ed. – Boston : Cengage Learning, 2016. – 1368 p. – ISBN 978-1-305-13364-1.
18. Apostol T. M. Mathematical Analysis / T. M. Apostol. – 2nd ed. – Reading : Addison-Wesley, 1974. – 492 p.
19. Spivak M. Calculus / M. Spivak. – 4th ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008. – 670 p.
20. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis / W. Rudin. – 3rd ed. – New York : McGraw-Hill, 1976. – 342 p.

Інтернет-ресурси для вивчення вищої математики

1. Курс "Вища математика" [Електронний ресурс] // Prometheus. – Режим доступу: https://courses.prometheus.org.ua/courses/course-v1:NURE+MATH101+2021_T1/about.
2. Курс "Вища математика для технічних спеціальностей" [Електронний ресурс] // EdEra. – Режим доступу: https://courses.ed-era.com/courses/course-v1:EdEra+Math101+2018_T1/about.
3. Single Variable Calculus [Електронний ресурс] // MIT OpenCourseWare. – Режим доступу: <https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/>. – Дата звернення: 16.07.2025.
4. Paul's Online Math Notes [Електронний ресурс] // Paul's Online Math Notes. – Режим доступу: <https://tutorial.math.lamar.edu/>.
5. Математика [Електронний ресурс] // Khan Academy. – Режим доступу: <https://uk.khanacademy.org/math>. – Дата звернення: 16.07.2025.

6. Essence of Linear Algebra [Электронный ресурс] // 3Blue1Brown. – Режим доступа: <https://www.3blue1brown.com/essence-of-linear-algebra>. – Дата звенения: 16.07.2025.
7. Mathigon [Электронный ресурс] // Mathigon. – Режим доступа: <https://mathigon.org/>.
8. Calculus, Algebra, Statistics [Электронный ресурс] // OpenStax. – Режим доступа: <https://openstax.org/subjects/math>.
9. Advanced Mathematics [Электронный ресурс] // Coursera. – Режим доступа: <https://www.coursera.org/browse/math-and-logic>.
10. Mathematics Courses [Электронный ресурс] // Brilliant.org. – Режим доступа: <https://brilliant.org/courses/mathematics/>

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
частина 1
для підготовки бакалаврів
у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право»

Чепурна О.Є.

Черевко Є.В.

Баландіна Н.М.

Овчинников М.Ю.

© О.Є. Чепурна, Є.В. Черевко, Н.М. Баландіна, М.Ю.Овчинников

© Національний університет «Одеська юридична академія»