

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний гуманітарний університет
Кафедра комп'ютерних наук

Розенвассер Д.М.

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Конспект лекцій

Одеса 2025

Затверджено Вченою Радою Міжнародного гуманітарного університету.
Протокол № 5 від 20 січня 2025 р.

Розенвассер Д.М. Цифрова обробка сигналів. Конспект лекцій [Електронне видання].
Кафедра комп'ютерних наук Міжнародного гуманітарного університету. Одеса, 2025. 37 с.

Навчальна дисципліна «Цифрова обробка сигналів» знайомить здобувачів із принципами дискретизації та квантування аналогових сигналів, спектрального аналізу за допомогою перетворень Фур'є, вейвлетів та інших, методами цифрової фільтрації (лінійної та нелінійної), кореляційного аналізу, модуляції/демодуляції сигналів, обробки кольорових зображень, алгоритмами передискретизації, а також практичними аспектами реалізації алгоритмів ЦОС у середовищах GNU Octave/Python/OpenCV для задач зв'язку, мультимедіа, комп'ютерного зору та вбудованих систем.

ЗМІСТ

Тема 1. Класифікація та основи цифрового представлення сигналів	4
Тема 2. Інтегральні перетворення сигналів	13
Тема 3. Модуляція сигналів	22
Тема 4. Цифрова фільтрація та обробка сигналів, зображень, аудіо, відео	29

Тема 1. Класифікація та основи цифрового представлення сигналів

Лекція 1. Вступ до цифрової обробки сигналів.

Вступна частина. Поняття сигналу та зображення. Поняття цифрової обробки сигналу. Растрове і векторне представлення зображень. Типові задачі цифрової обробки сигналів.

Цифрова обробка сигналів (ЦОС, DSP — Digital Signal Processing) — це розділ науки та техніки, що вивчає методи та засоби перетворення, аналізу, фільтрації та синтезу сигналів у цифровій формі.



Типові задачі цифрової обробки сигналів

1. Фільтрація — видалення шуму, виділення корисного сигналу (низькочастотна, високочастотна, смугова, адаптивна фільтрація).
2. Спектральний аналіз — перетворення Фур'є (ДПФ, ШПФ), вейвлет-перетворення для аналізу частотних складових.
3. Кореляційний аналіз — виявлення подібності сигналів, синхронізація, радарні/сонарні задачі.
4. Модуляція та демодуляція — AM, FM, PM, QAM, OFDM (мобільний зв'язок, Wi-Fi, цифрове ТБ).
5. Адаптивна обробка — фільтри з автоматичним налаштуванням (LMS, RLS) для змінних умов (ехо-компенсація, шумозаглушення в навушниках).
6. Стиснення даних — MP3, JPEG, MPEG, FLAC.
7. Розпізнавання та класифікація — голос, зображення, біометрія.

8. Обробка зображень — покращення контрасту, сегментація, детекція об'єктів, відновлення.

Лекція 2. Форми подання та класифікація сигналів.

Випадкові та детерміновані сигнали. Аналогові та цифрові сигнали. Квантування та дискретизація аналогового сигналу. Одновимірні та багатовимірні сигнали. Загальна класифікація сигналів.

Сигнал — це функція, що змінюється в часі або просторі та несе інформацію про фізичний процес (наприклад, напруга мікрофона, яскравість пікселя, температура тощо).

Класифікація сигналів:

Детерміновані (передбачувані, описуються математичною формулою) vs випадкові (стохастичні, з шумом).

Аналогові (неперервні в часі та амплітуді) vs цифрові (дискретні за часом і квантовані за амплітудою).

Одновимірні (час, частота) vs багатовимірні (залежно від просторових координат — зображення, відео).

Періодичні та неперіодичні.

Класифікація сигналів

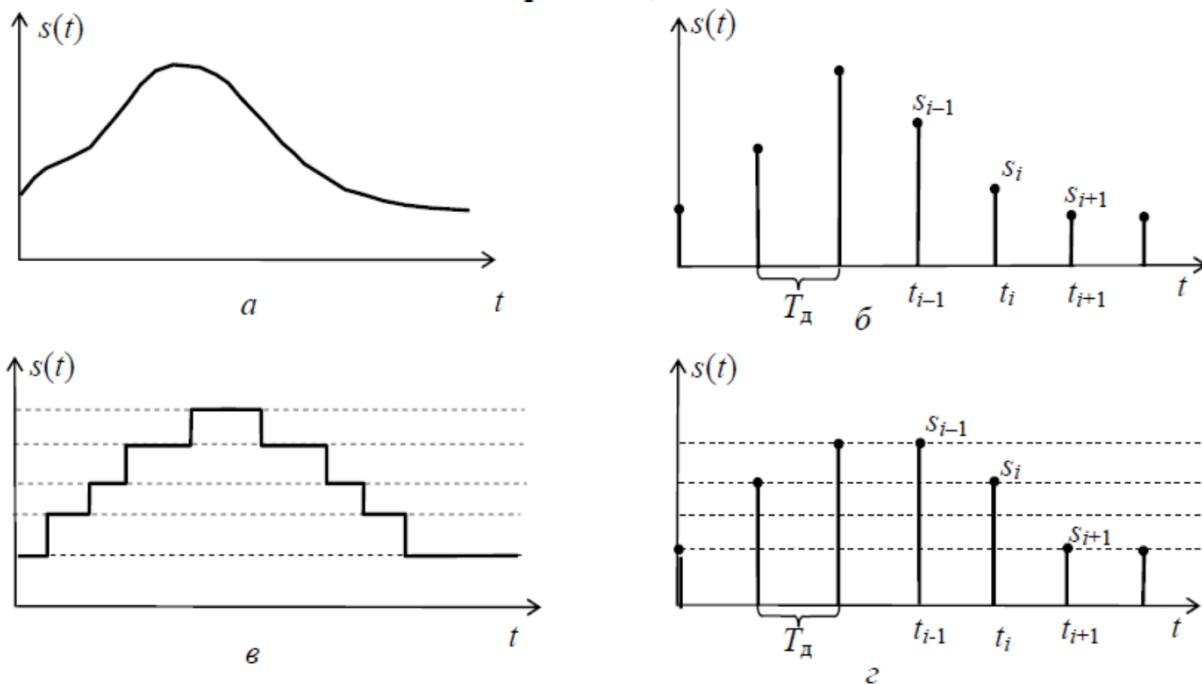
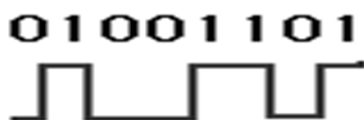


Рисунок 2.1 – Види сигналів



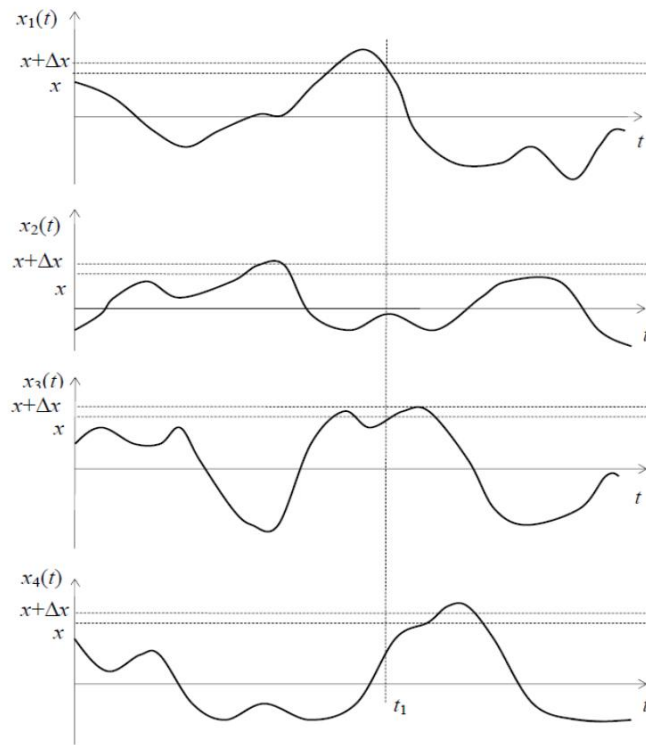
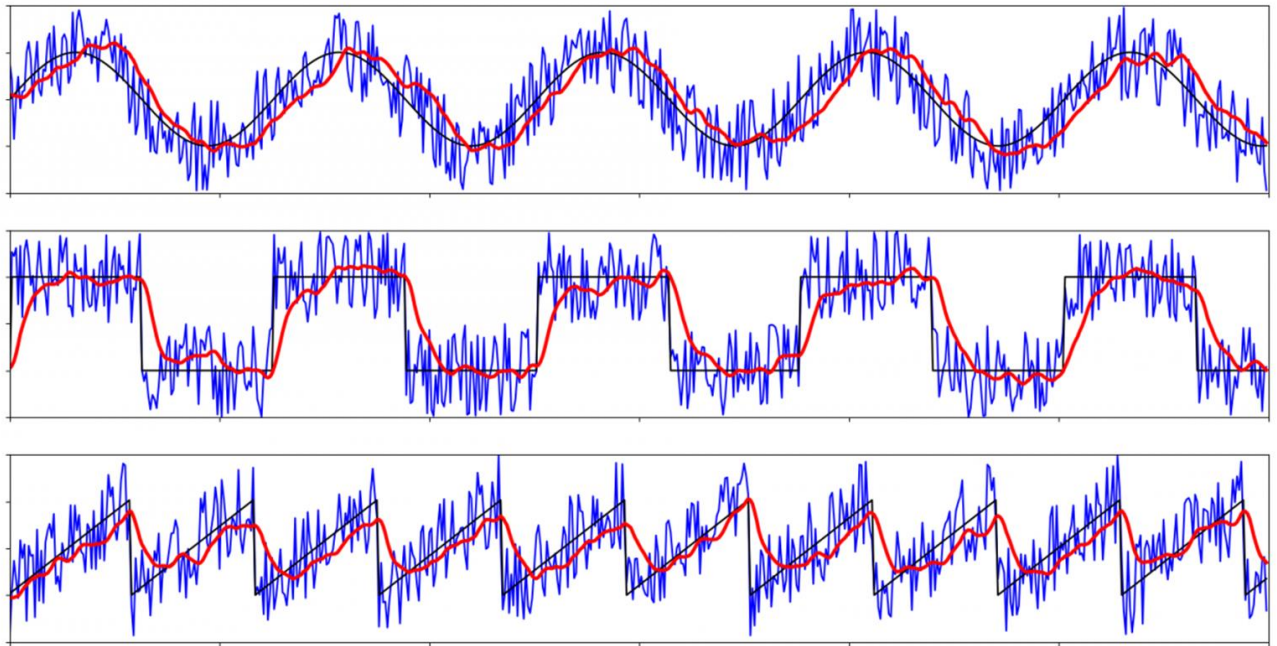


Рисунок 3.1 – Ансамбль реалізацій

Основні типи шумів у цифровій обробці сигналів:

1. Білий гаусів шум – випадковий шум із рівномірним розподілом енергії по всьому спектру, часто використовується як модель фонових завад.
2. Імпульсний шум – короткі, високої амплітуди перешкоди, які виникають раптово, наприклад, через електромагнітні імпульси.
3. Низькочастотний (рожевий) шум – шум, енергія якого зменшується зі збільшенням частоти, часто зустрічається в природних сигналах.
4. Високочастотний шум – шуми, що мають велику складову у верхньочастотному діапазоні, наприклад, теплові шуми в електроніці.
5. Корельований шум – шум, який має певну закономірність і не є повністю випадковим (наприклад, шум від відлуння в системах зв'язку).
6. Шум квантування – шум, що виникає при квантуванні (округленні) у АЦП.
7. Шум вимірювань – артефакти, що виникають через неточності датчиків та обладнання.



Лекція 3. Математичне представлення сигналів та зображень.

Моделі тестових сигналів. Основні характеристики, математичний опис та властивості тестових сигналів. Функція Хевісайда та її застосування при обробці сигналів. Функція Дірака та її властивості.

У цифровій обробці сигналів (ЦОС) реальні сигнали складні, тому для аналізу систем (фільтрів, перетворювачів, алгоритмів) застосовують прості тестові сигнали. Вони дозволяють:

- оцінити імпульсну/перехідну/частотну характеристики системи;
- перевірити лінійність, стаціонарність, стійкість;
- виявити шум, нелінійності, спотворення;
- порівняти теорію з практикою (наприклад, у MATLAB/Python/Octave).

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

1. Одиничний імпульс (дельта-функція Дірака $\delta(t)$ або функція Кронекера $\delta[n]$)

- Має нескінченну амплітуду в одній точці ($t=0$ або $n=0$) і нуль в усіх інших.
- Площа (або сума) дорівнює точно 1.
- Володіє фільтруючою (sifting) властивістю: при множенні на іншу функцію і інтегруванні/сумуванні виділяє значення функції саме в точці 0.
- Відгук лінійної стаціонарної системи на цей сигнал дає повну імпульсну характеристику системи.

- Має рівномірний (білий) спектр по всій частотній осі.
 - Використовується для визначення повної динамічної реакції системи.
2. Одиничний стрибок (функція Хевісайда $\sigma(t)$ або $u[n]$)
- Дорівнює 0 для від'ємних значень часу/індексу і 1 для додатних (при 0 часто вважається 1 або 1/2).
 - Є інтегралом (або накопиченням) одиничного імпульсу.
 - Відгук системи на цей сигнал дає перехідну характеристику (step response).
 - Дозволяє оцінити час наростання, перерегулювання, час встановлення, сталі значення та осідання.
 - Використовується для аналізу перехідних процесів і поведінки системи на різку зміну.
3. Гармонічний (синусоїдальний) сигнал
- Повністю визначається трьома параметрами: амплітудою, частотою та початковою фазою.
 - Є власною функцією лінійних стаціонарних систем: на виході залишається синусоїдою тієї ж частоти, але з зміненою амплітудою та фазою.
 - Зміна амплітуди та фази на виході безпосередньо показує амплітудно-частотну (АЧХ) та фазо-частотну (ФЧХ) характеристики системи.
 - Спектр — дві дельта-функції (на $+f_0$ та $-f_0$) в частотній області.
 - Ідеально підходить для зняття частотних характеристик фільтрів і систем.
4. Білий шум (гаусівський або рівномірний)
- Значення в різні моменти часу статистично незалежні (некорельовані).
 - Автокореляційна функція — дельта-функція (нуль всюди, крім нуля).
 - Спектральна щільність потужності постійна (плоска) по всій частотній осі.
 - Має нескінченну потужність у нескінченній смузі (ідеалізована модель).
 - Використовується для моделювання випадкових завад, тестування шумозаглушення, адаптивних фільтрів та оцінки відношення сигнал/шум.
 - Добре апроксимує тепловий шум, дробовий шум, квантувальний шум у реальних системах.

Лекція 4. Узагальнені схеми цифрових систем.

Структурні схеми типових модулів аналогово-цифрового та цифро-аналогового перетворювачів, їх основні компоненти та принцип роботи. Будова, призначення та принцип роботи мультиплексора.

Структура аналого-цифрового перетворювача, теорема Котельникова. Найчастіше дискретизація неперервних у часі сигналів здійснюється з метою їх обробки та передачі цифровими методами. Пристрій, що здійснює перетворення неперервних сигналів у цифрові називається аналого-цифровим перетворювачем (АЦП).

АЦП поетапно здійснює наступні перетворення неперервного сигналу:

- дискретизацію;
- квантування;
- кодування.

Структурна схема АЦП наведена на рис. 1.

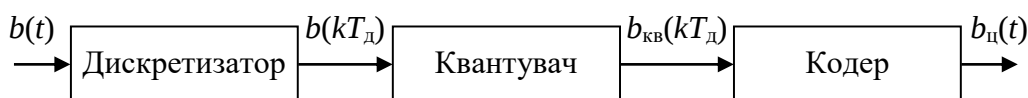


Рисунок 1 – Функціональна схема АЦП

Лекція 5. Аналого-цифрове перетворення сигналів.

Основа принципу часової дискретизації сигналу. Критерії якості наближення сигналу. Види часової дискретизації сигналу. Поняття стиснення даних. Вибір кроку рівномірної часової дискретизації. Теорема Котельникова. Основні характеристики аналогового-цифрових перетворювачів.

Дискретизатор – це пристрій, що перетворює неперервний у часі сигнал $b(t)$ в послідовність його миттєвих значень (відліків) $b(kT_d)$. Час, через який беруться відліки, називається інтервалом дискретизації, та позначається T_d . Значення інтервалу дискретизації визначається теоремою Котельникова, яка формулюється наступним чином:

Будь-який низькочастотний сигнал, спектр якого обмежений частотою $F_{\max}$, може бути точно відновлений за його відліками, взятими через інтервал, що задовольняє умові $T_d \leq 1/2F_{\max}$.

Відповідно, частота, з якою мають братися відліки, визначається умовою $f_d \geq 2F_{\max}$.

Кватувач здійснює округлення амплітуд відліків $b(kT_d)$ до найближчих рівнів квантування, тобто процедура квантування – це теж саме, що процедура округлення.

Кодер перетворює квантовані відліки у двійкові комбінації, що відповідають номерам рівнів квантування, до яких відбувалось округлення.

Числові співвідношення. Наведемо основні числові співвідношення, що мають місце при аналого-цифровому перетворенні та можуть знадобитися при виконанні самостійної роботи (формули розрахунку T_d і f_d повторювати не будемо):

- амплітуда квантованого відліку

$$b_{\text{кв}}(kT_d) = \Delta b \cdot p(kT_d),$$

де Δb – крок квантування,

$$p(kT_d) = \text{int} \left[\frac{b(kT_d)}{\Delta b} + 0,5 \right] - \text{номер рівня квантування};$$

- максимальне значення похибки квантування

$$\varepsilon_{\max} = \Delta b / 2;$$

- мінімальна кількість рівнів квантування при відомому динамічному діапазоні D

$$L_{\min} = \frac{D}{\Delta b} = \frac{\max(b(t)) - \min(b(t))}{\Delta b};$$

оскільки сигнали, що подаються до входу АЦП найчастіше є невід'ємними $b(t) \geq 0$, то останній вираз можна переписати наступним чином:

$$L_{\min} = \frac{\max(b(t))}{\Delta b};$$

– довжина цифрового коду – кількість біт, що необхідні для запису квантованих відліків у двійковому форматі (довжина коду є цілим числом)

$$n \geq \log_2 L_{\min};$$

– фактична кількість рівнів квантування з урахування визначеного n обчислюється наступним чином:

$$L = 2^n;$$

- тривалість одного двійкового символу (біту)

$$T_6 = \frac{T_d}{n} = \frac{1}{nf_d};$$

- швидкість цифрового сигналу (ЦС)

$$R = \frac{1}{T_6} = \frac{n}{T_d} = f_d n,$$

тобто в n раз більше частоти дискретизації.

Ілюстрація роботи АЦП. На рис. 2 проілюстровано процедуру аналого-цифрового перетворення з «проріджуванням».

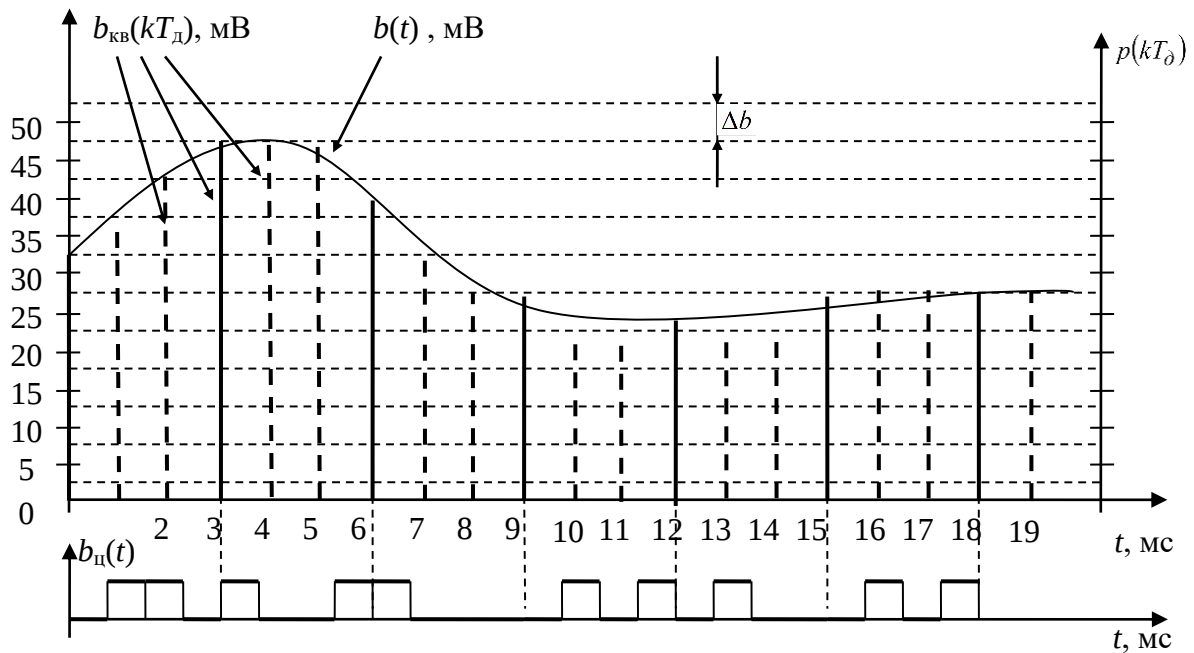


Рисунок 2 – Перетворення неперервного сигналу у цифровий

Дискретизація, проріджування відліків. Випадок, коли інтервал дискретизації є найбільш можливим, а саме $T_d = 1/f_d = 1/2F_{\max}$, є виключно теоретичним, оскільки для відновлення неперервного сигналу передбачає застосування ідеального фільтру нижніх частот (ФНЧ). Однак це не означає, що суттєве зменшення T_d або, відповідно, збільшення f_d є раціональним. Збільшення частоти дискретизації призводить до збільшення швидкості ЦС R , який при цьому буде переносити інформацію про той самий неперервний сигнал. В практичних застосуваннях частота та інтервал дискретизації визначаються згідно наступних умов: $f_d \geq (2,3 \dots 2,4)F_{\max}$, $T_d \leq 1/(2,3 \dots 2,4)F_{\max}$. Відповідно, якщо навіть дискретизатор вже взяв відліки з інтервалом значно меншим, ніж це необхідно, можна виконати так зване проріджування, тобто залишити лише ті відліки, інтервал між якими є найближчим до розрахованого згідно останньої умови, але не перевищує його та є постійним.

Нехай $F_{\max} = 133$ Гц, тоді інтервал дискретизації буде наступним $T_d = 1/2,35F_{\max} \approx 3,2$ мс. Як видно з рис. 2 з виходу дискретизатора відліки надходять через 1 мс, відповідно для подальшого квантування можуть бути відібрані лише нульовий, 3-й, 6-й, 9-й і т.д. відліки. Відліки, що відкидаються, на рис. 2 зображені штриховими лініями.

Квантування відліків. Для того, щоб здійснити квантування відліків, що залишилися після проріджування, необхідно, щоб був відомий крок квантування. В нашому випадку ми можемо його визначити по рис. 2., $\Delta b = 5$ мВ.

Розглянемо процедуру квантування на прикладі нульового та першого відліків. Згідно рис. 2 їх амплітуди наступні: $b(0T_d) = 32$ мВ, $b(1T_d) = 46$ мВ. Розрахуємо номери рівнів квантування:

$$p(0T_d) = \text{int} \left[\frac{b(0T_d)}{\Delta b} + 0,5 \right] = \text{int} \left[\frac{32}{5} + 0,5 \right] = \text{int} [6,9] = 6$$

$$p(1T_d) = \text{int} \left[\frac{b(1T_d)}{\Delta b} + 0,5 \right] = \text{int} \left[\frac{46}{5} + 0,5 \right] = \text{int} [9,7] = 9$$

Кодування. Дуже важливим є розуміння того, що кодуванню піддаються не самі рівні, до яких здійснювалось округлення, а їх номери. Як вже згадувалось, процедура кодування зводиться до запису десяткового значення номеру рівня квантування в двійковій системі числення.

Для того, щоб здійснити кодування відліків, спочатку необхідно знайти довжину цифрового коду, яка розраховується за виразом $n \geq \log_2 L_{\min}$. Щоб знайти $L_{\min}$ при відомому кроці квантування, необхідно знати, яке максимальне значення може приймати сигнал $\max(b(t))$, визначимо його за рис. 2 $\max(b(t)) = 47,5$ мВ. Тоді,

$$L_{\min} = \frac{\max(b(t))}{\Delta b} = \frac{47,5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 9,5.$$

Тепер розрахуємо довжину коду:

$$\begin{aligned} n &\geq \log_2 9,5 \\ n &\geq 3,25, \quad n = 4 \end{aligned}$$

На рис. 2 наведено діаграму цифрового сигналу, що відповідає отриманим кодовим комбінаціям.

Спектр дискретного сигналу. Нагадаємо, що спектральна густина дискретного сигналу представляє собою періодичне повторення (зміщення) спектру вхідного неперервного сигналу з періодом, рівним частоті дискретизації. На рис. 3 наведені спектральна густина $S(f)$ неперервного сигналу та спектральна густина $S_d(f)$ результату його дискретизації.

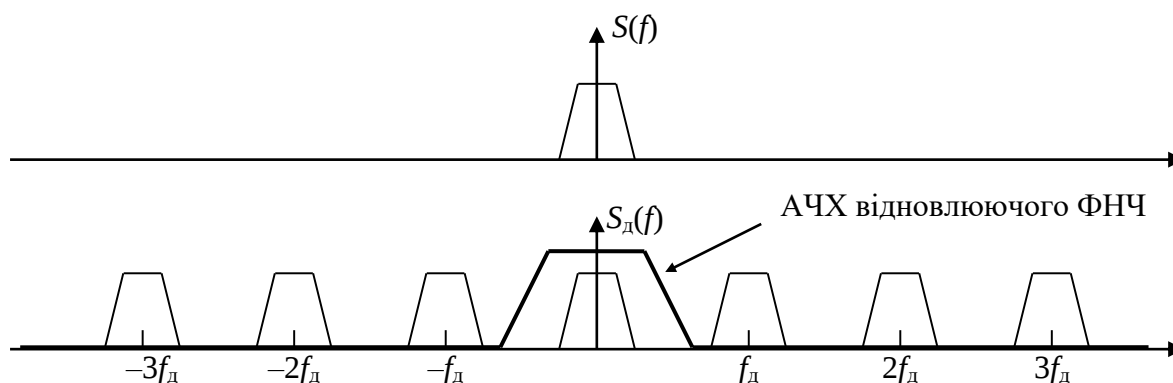


Рисунок 3 – Спектр неперервного $S(f)$ і дискретного $S_d(f)$ сигналів

Лекція 6. Цифро-аналогове перетворення сигналів.

Відновлення неперервних сигналів. Екстраполяція даних. Поняття та види екстраполяторів. Імпульсна характеристика і передавальна функція екстраполятора. Аналогова модель екстраполятора. Похибки відновлення аналогової форми сигналу.

Структурна схема ЦАП наведена на рис. 1.

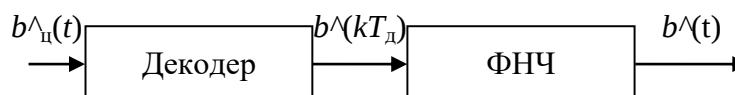
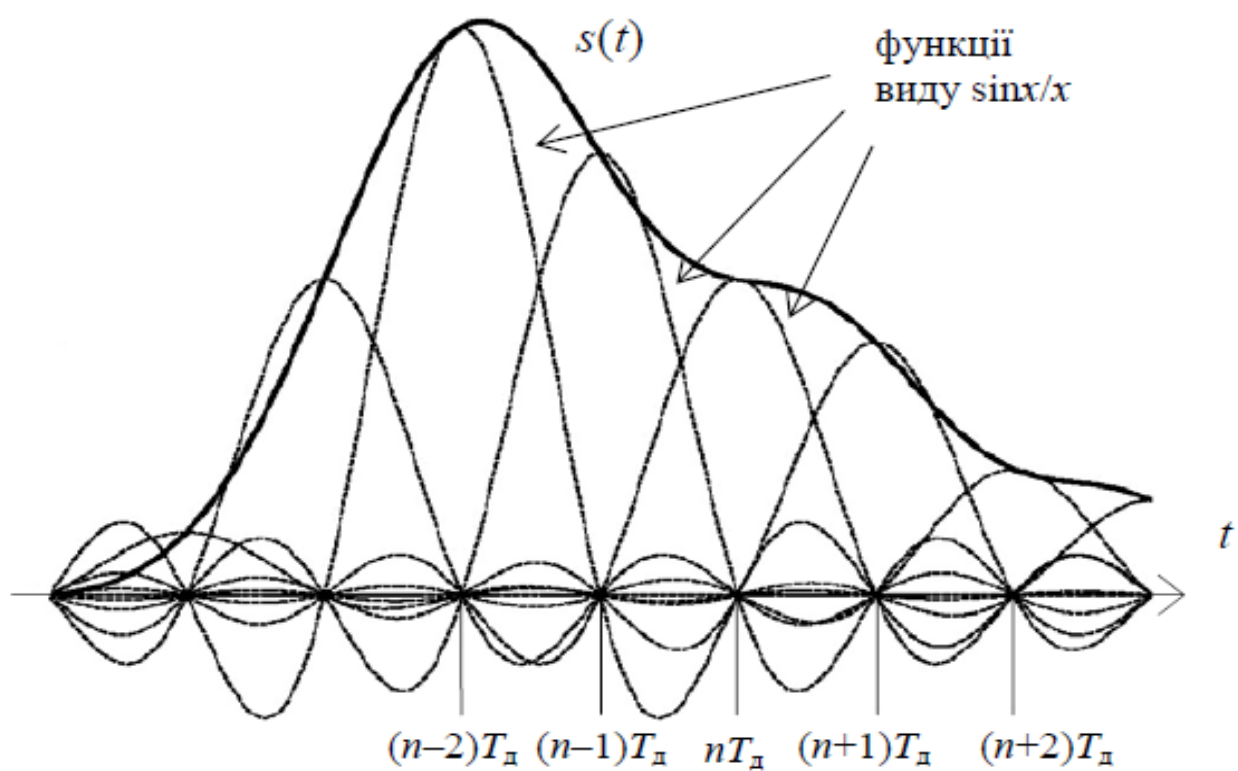
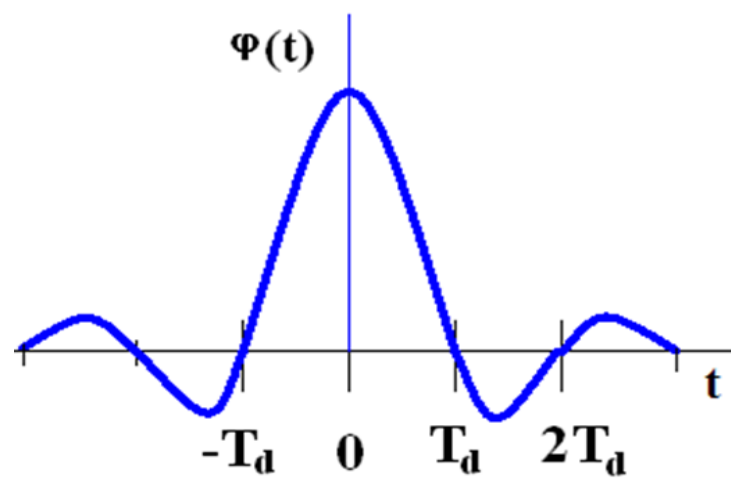


Рисунок 1 – Функціональна схема ЦАП



Тема 2. Інтегральні перетворення сигналів

Лекція 7. Підходи до спектрального аналізу сигналів методом Фур'є.

Розклад функції в ряд Фур'є. Поняття та визначення дійсних коефіцієнтів Фур'є. Теорема Найквіста. Особливості розкладу функції в комплексний ряд Фур'є. Поняття та визначення комплексних коефіцієнтів Фур'є. Визначення спектру амплітуд, спектру фаз та спектру потужності сигналу. Теорема Парсеваля. Основні властивості розкладання сигналу в ряд Фур'є.

Ряд Фур'є для періодичного сигналу

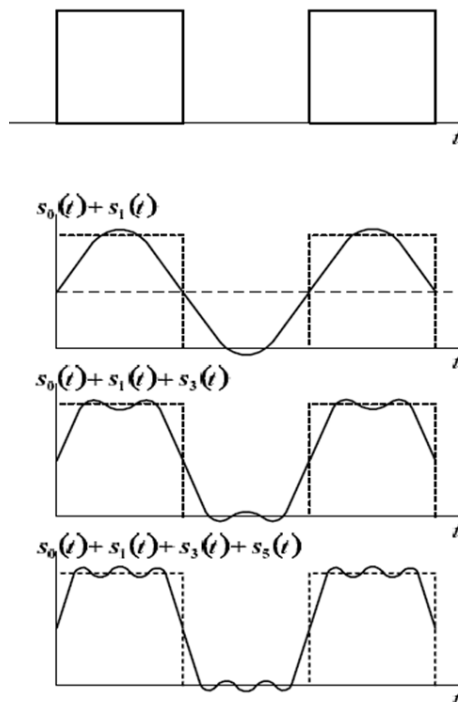
$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t).$$

$f_1 = 1/T$, T – період сигналу $s(t)$;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n},$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n).$$



1. Перетворення Фур'є (ПФ,ЗПФ)
2. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

3. Швидке перетворення Фур'є (ШПФ)
4. z-перетворення
5. Перетворення Лапласа

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{і} \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos \omega t dt .$$

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega .$$

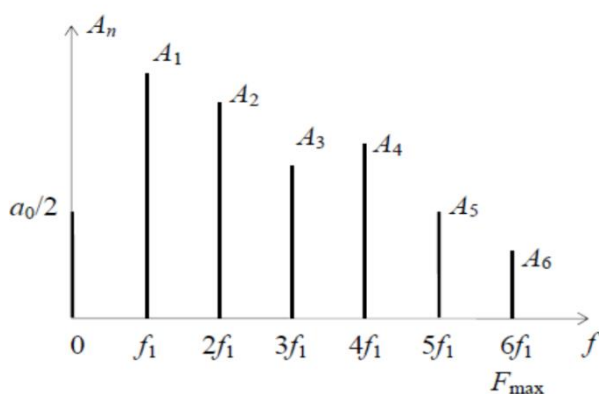


Рисунок 2.5 – Амплітудний спектр періодичного сигналу

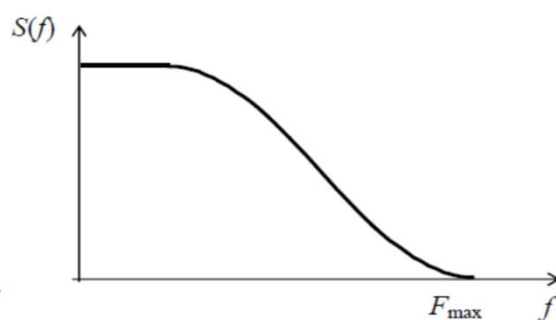


Рисунок 2.6 – Амплітудний спектр неперіодичного сигналу

Перетворення Фур'є

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

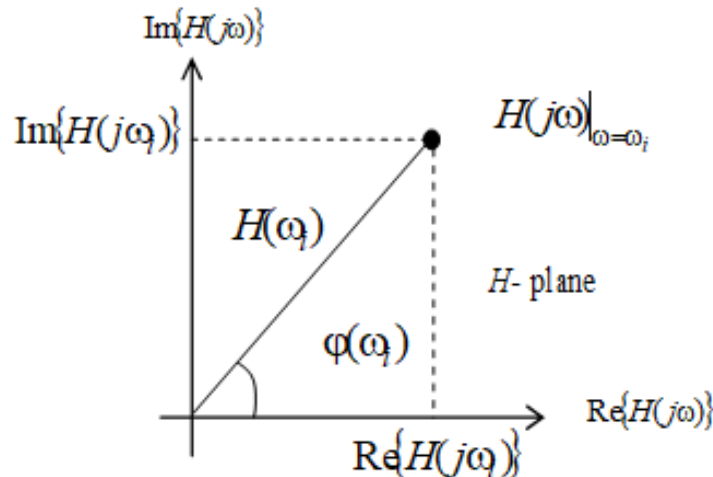
$$H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}$$

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)\cos(\varphi(\omega)) + jH(\omega)\sin(\varphi(\omega))$$

$$H(\omega) = |H(j\omega)| \qquad H(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{H(j\omega)\}^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)] \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}}\right)$$

$$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = H(\omega)\cos(\varphi(\omega)) \qquad \operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = H(\omega)\sin(\varphi(\omega))$$

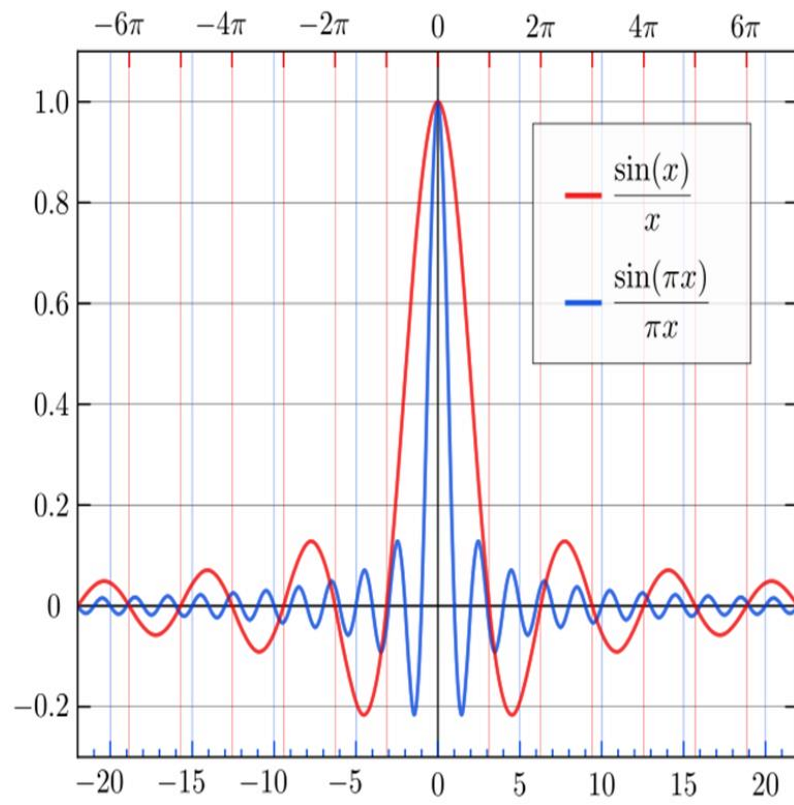


$$H(j\omega) = \frac{a_0(j\omega)^m + a_1(j\omega)^{m-1} + \dots + a_{m-1}j\omega + a_m}{b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \dots + b_{n-1}j\omega + b_n}$$

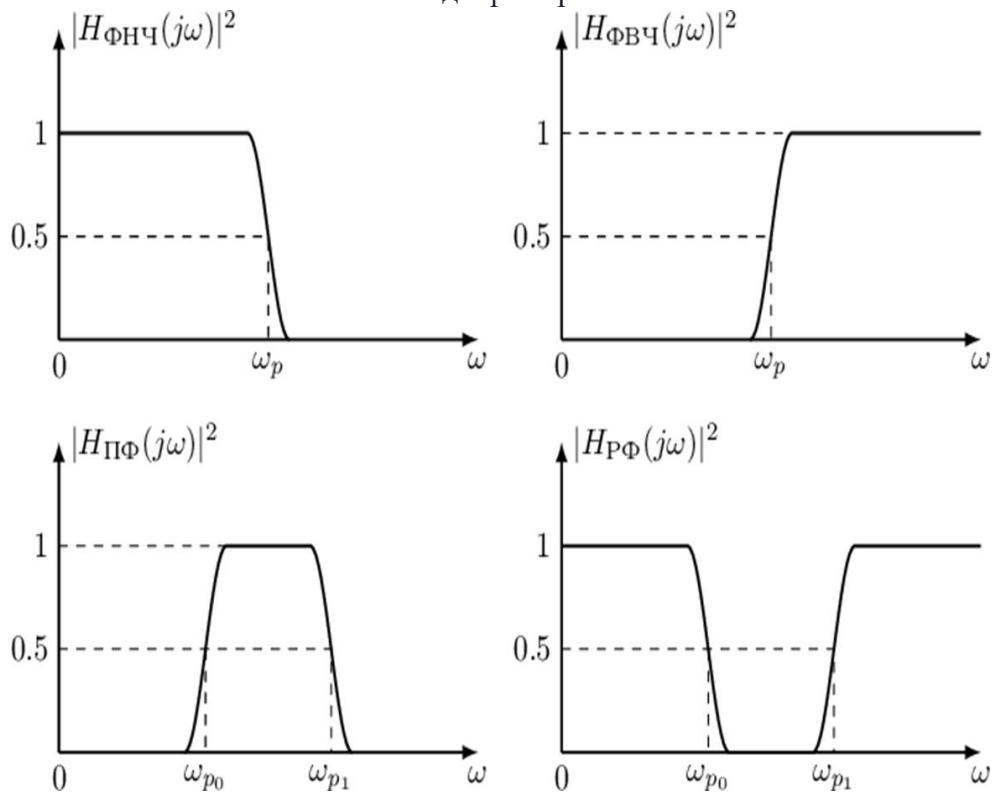
Лекція 8. Використання дискретного та швидкого перетворення Фур'є для спектрального аналізу сигналів.

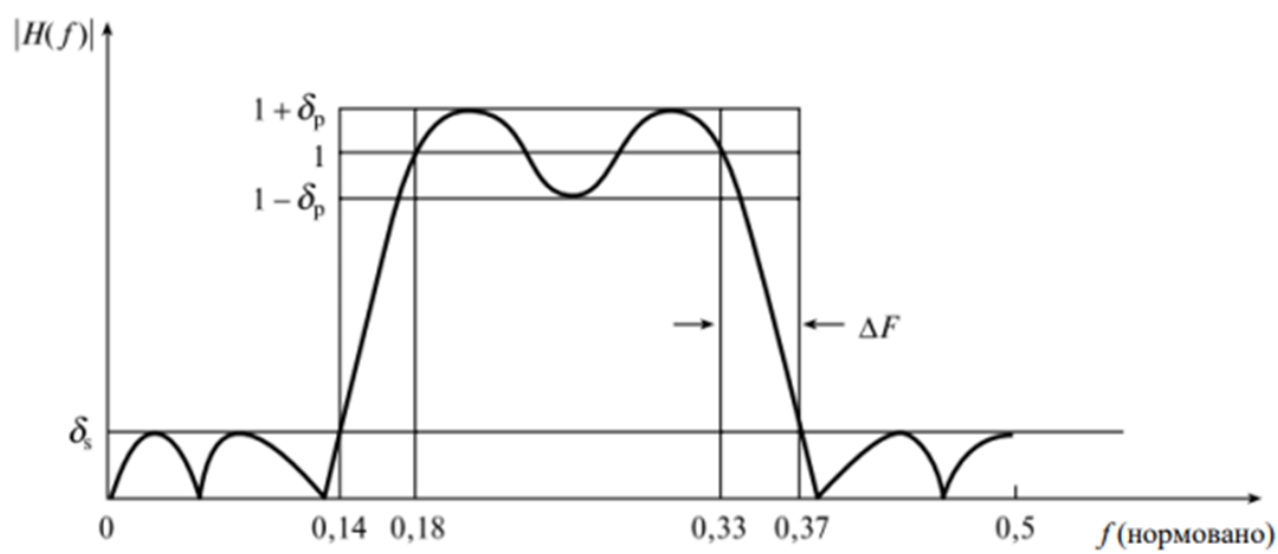
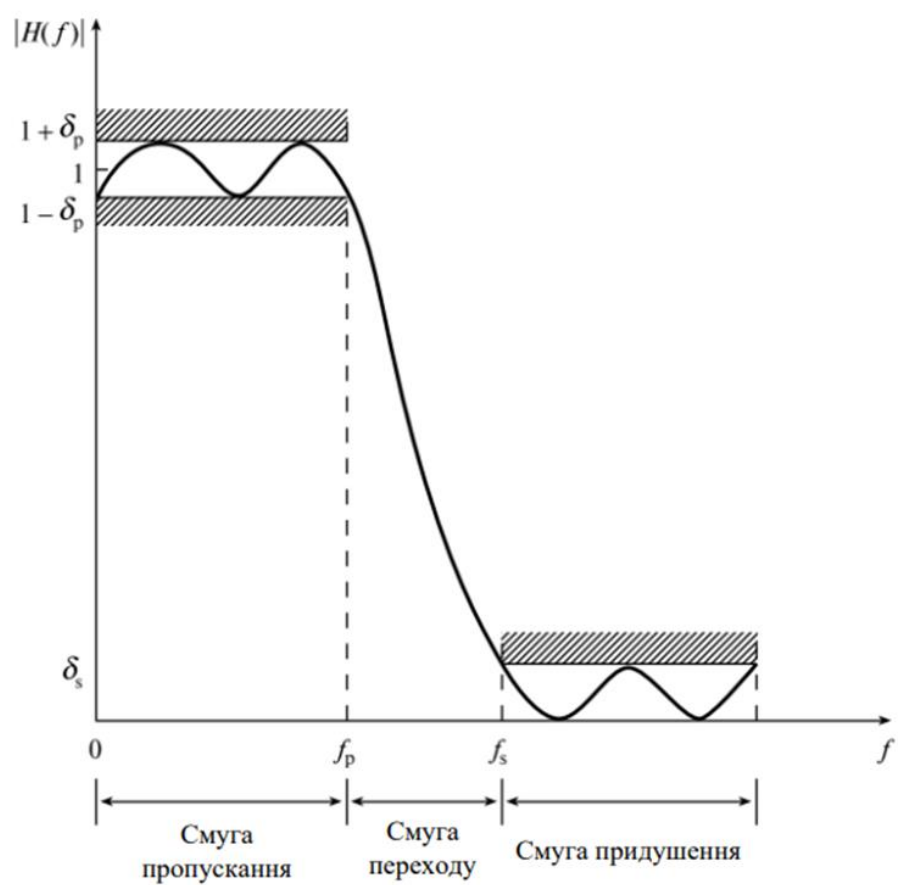
Технологія застосування методу Фур'є для аналізу цифрових сигналів. Поняття про дискретне перетворення Фур'є. Основні властивості дискретного перетворення Фур'є. Періодичність та симетричність спектру. Необхідність застосування та суть алгоритму швидкого перетворення Фур'є. Фільтрація сигналів за допомогою дискретного перетворення Фур'є.

Відгук фільтра на функцію Дірака



Види фільтрів





1. Лінійність

Фільтр вважається лінійним, якщо виконується принцип суперпозиції:

$$H(x_1 + x_2) = H(x_1) + H(x_2)$$

та

$$H(ax) = aH(x)$$

Ця властивість гарантує, що вихідний сигнал є лінійною комбінацією вхідних сигналів.

2. Інваріантність у часі

Фільтр є інваріантним у часі (стаціонарним), якщо його характеристики не змінюються з часом.

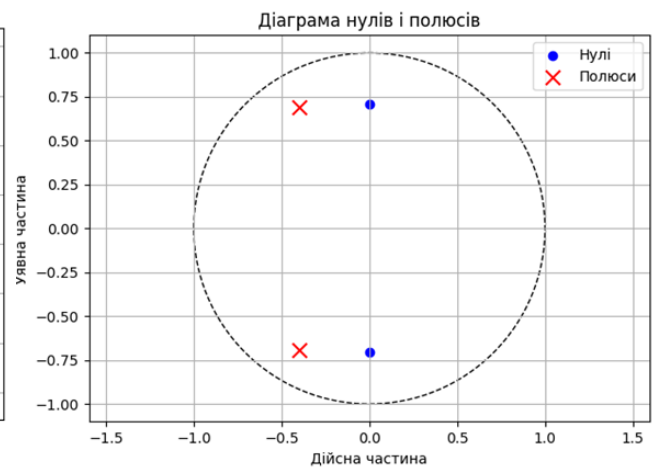
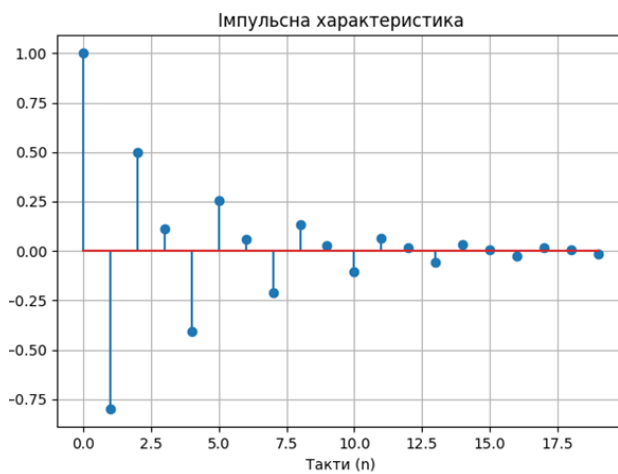
Тобто, зсув вхідного сигналу на деяку кількість відліків викликає такий самий зсув вихідного сигналу.

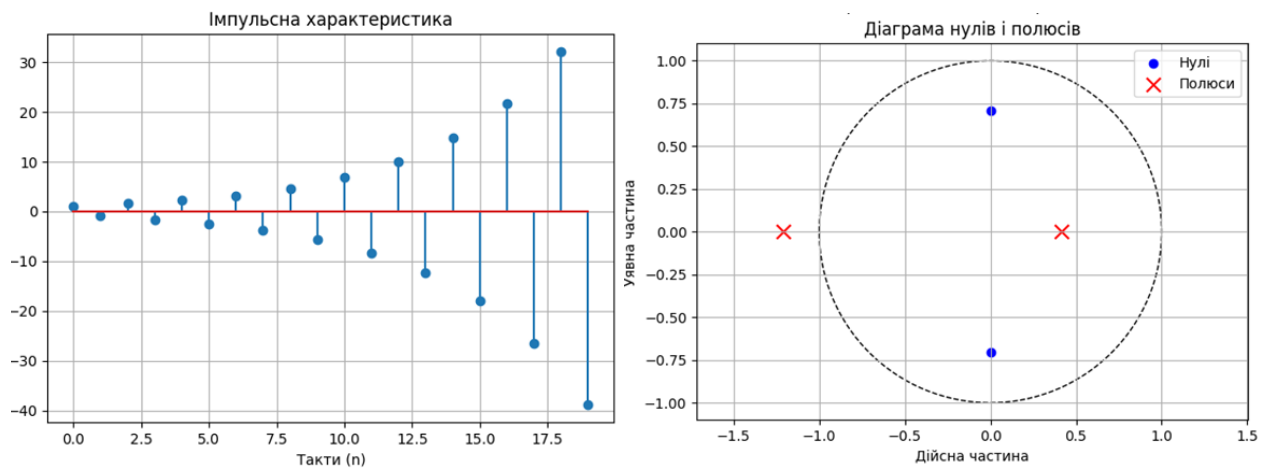
3. Стійкість

Фільтр вважається стійким, якщо його імпульсна характеристика є абсолютно сумовною:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Для БХ-фільтрів стійкість також визначається положенням коренів характеристичного рівняння: всі корені повинні лежати всередині одиничного кола на площині Z.





Характеристика	KIX (FIR) – Фільтр із скінченною імпульсною характеристикою	БІХ (IIR) – Фільтр із безкінечною імпульсною характеристикою
Імпульсна характеристика	Обмежена за довжиною (кінцева)	Нескінченна у часі (затухаюча)
Передатна функція	Тільки нулі (чисельник)	Полюси та нулі (чисельник і знаменник)
Стійкість	Завжди стійкий	Може бути нестійким (залежить від розташування полюсів)
Лінійність фазової характеристики	Лінійна (мінімальні фазові спотворення)	Зазвичай нелінійна (можливі фазові спотворення)
Часові затримки	Значні (потрібен великий порядок для крутих зрізів АЧХ)	Менші затримки при тих самих характеристиках
Реалізація	Використовує тільки згортку (не потребує зворотного зв'язку)	Використовує рекурсивне рівняння (зворотний зв'язок)
Обчислювальна складність	Вища (потрібен більший порядок фільтра)	Менша (досягає тих самих характеристик за меншим порядком)

Лекція 9. Застосування вейвлет-перетворень для обробки сигналів.

Недоліки спектрального аналізу цифрових сигналів методом Фур'є. Поняття прямого та оберненого вейвлет-перетворення. Основні ознаки вейвлету. Приклади материнських вейвлетів. Неперервне вейвлет-перетворення. Властивості вейвлет-аналізу.

Перетворення Фур'є (ПФ, зокрема дискретне та швидке) ефективно для стаціонарних сигналів, де частотний вміст не змінюється в часі. Для реальних (часто нестаціонарних) сигналів воно має суттєві обмеження:

Відсутність часової локалізації: ПФ дає глобальний спектр – ми знаємо, які частоти присутні в сигналі загалом, але не знаємо, коли саме вони з'явилися чи зникли. Наприклад, короткий імпульс або зміна частоти "розмазуються" по всьому спектру.

Погана обробка нестаціонарних та транзйєнтних сигналів: різкі зміни, стрибки, піки, локальні особливості (розриви, сингулярності) викликають поширення енергії на всі частоти (ефект Гіббса, "розмазування" енергії).

Фіксована роздільна здатність: принцип невизначеності Гейзенберга для ПФ – чим точніше частота, тим гірше часова локалізація (і навпаки). Вікно в STFT (короткочасне ПФ) фіксоване, тому компроміс між роздільністю по часу та по частоті постійний для всього сигналу.

Потреба в нескінченному сигналі: для точного ПФ сигнал повинен бути відомий від $-\infty$ до $+\infty$; на практиці доводиться обрізати, що призводить до спотворень.

Погано підходить для сигналів з різною швидкістю змін: низькочастотні компоненти потребують довгого вікна, високочастотні – короткого, але ПФ цього не адаптує.

Саме ці недоліки призвели до появи вейвлет-перетворення (Wavelet Transform), яке адаптивно змінює "вікно" залежно від масштабу (частоти).

Пряме вейвлет-перетворення (аналіз): розкладання сигналу $f(t)$ на набір вейвлет-функцій, які є зсунутими та масштабованими копіями материнського вейвлету $\psi(t)$. Результат – коефіцієнти вейвлету $C(a, b)$, що показують, наскільки сигнал подібний до вейвлету певного масштабу a (обернено пропорційно частоті) у позиції b (часовий зсув).

Обернене вейвлет-перетворення (синтез): точне відновлення оригінального сигналу $f(t)$ з коефіцієнтів $C(a, b)$ за умови, що вейвлет задовольняє умову допустимості (admissibility condition).

Лекція 10. z-перетворення у цифровій обробці сигналів.

Математичний опис та властивості z-перетворення. Приклади використання. Швидкі алгоритми обчислення. Різницеве рівняння.

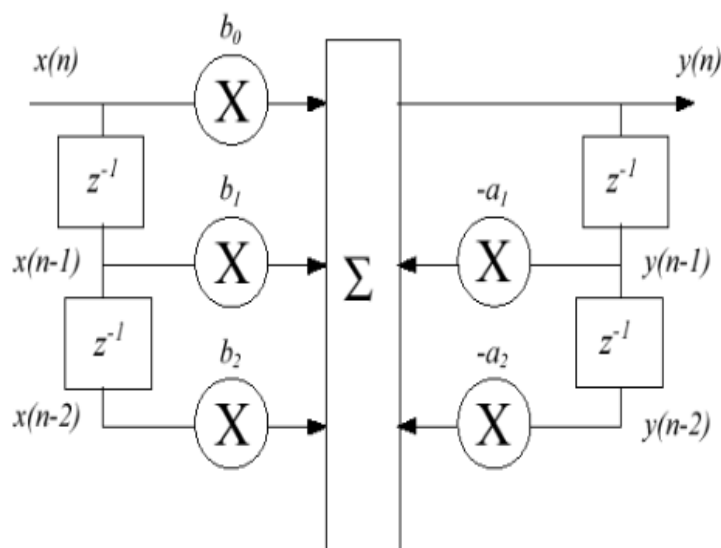
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$b = [0.75 \ 0.5]$$

$$y(n) + 0.2y(n-1) + 0.1y(n-2) = 0.75x(n) + 0.5x(n-1)$$

$$a = [1 \ 0.2 \ 0.1]$$

$$y(n) = -0.2y(n-1) - 0.1y(n-2) + 0.75x(n) + 0.5x(n-1)$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{l=0}^N b_l z^{-l} X(z) - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z).$$

$$\begin{aligned} x(n-k) &\rightarrow z^{-k} \cdot X(z) & x(-n) &\rightarrow X(1/z) \\ x(n) * y(n) &\rightarrow X(z) \cdot Y(z) & a^n x(n) &\rightarrow X(z/a) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^N b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}};$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$\begin{aligned} y(n) + 0.2y(n-1) + 0.1y(n-2) &= 0.75x(n) + 0.5x(n-1) \\ Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) + 0.1z^{-2}Y(z) &= 0.75X(z) + 0.5z^{-1}X(z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{0.75 + 0.5z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

Тема 3. Модуляція сигналів

Лекція 11. Види та методи модуляції сигналів.

Поняття та призначення модуляції сигналів. Види модуляції та їх реалізація. Модуляція аналогових сигналів. Однотональна та багатотональна амплітудна модуляція. Цифрова модуляція сигналів.

Первинний цифровий сигнал $b(t)$ – це послідовність двійкових символів (бітів) 1 і 0, що слідує через інтервал T_6 . У цифрових пристроях прямокутний імпульс високого рівня відповідає 1, а імпульс низького рівня – 0. Основний параметр первинного цифрового сигналу – його швидкість R (біт/с).

Сигнал цифрової модуляції $s(t)$ – це послідовність радіоімпульсів, які відображають первинний сигнал і слідує через тактовий інтервал T :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i^{(k)}(t - kT), \quad (1)$$

де $s_i(t)$, $i = 0, \dots, M - 1$ – каналні символи (радіоімпульси);

M – число каналних символів (рівнів модульованого сигналу);

$s_i^{(k)}(t - kT)$ – i -й каналний символ, що передається на k -му тактовому інтервалі.

Радіоімпульси можуть відрізнятися амплітудами, фазами чи частотами. Існують різні види цифрової модуляції: АМ-М, ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М, ЧМ-М.

Якщо $M = 2$, то має місце двійковий сигнал $s(t)$, коли символ $s_0(t)$ використовується для передавання 0, а символ $s_1(t)$ – для передавання 1. Якщо $M > 2$, то має місце багатопозиційний (багаторівневий) сигнал $s(t)$. Як правило, $M = 4, 8, \dots, 2^n$, n – ціле число. Тут кожний символ $s_i(t)$ використовується для передавання $n = \log_2 M$ біт первинного сигналу $b(t)$. Яку саме послідовність біт переносить кожний символ установлює модуляційний код. Якщо в разі двійкових сигналів $T = T_6$, то в разі багатопозиційних сигналів тривалість тактового інтервалу збільшується: $T = T_6 \log_2 M$.

Для сигналів АМ-М і ФМ-2 каналні символи записуються:

$$s_i(t) = a_i A(t) \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (2)$$

де a_i – число, що відображає n біт, які передаються символом $s_i(t)$;

$A(t)$ – функція, що визначає форму радіоімпульсів;

f_0 – частота носійного коливання.

Із виразу (2) випливає, що каналні символи є сигналами аналогової БМ і, тому спектр радіоімпульсу $s_i(t)$ складається з двох бокових смуг, зосереджених біля частоти носійної f_0 . Спектральні властивості радіоімпульсу $s_i(t)$ цілком визначаються функцією $A(t)$.

Якщо функція $A(t)$ – прямокутний імпульс тривалості T , то спектр радіоімпульсу буде широким, а для передавання цифрових сигналів важливо сформулювати компактний спектр. Для того, щоб спектр радіоімпульсу $s_i(t)$ був компактным, і була відсутня міжсимвольна інтерференція, функція $A(t)$ повинна

бути імпульсом Найквіста. Тоді бокові смуги частот будуть копіями *спектра Найквіста* (рис. 1), а ширина спектра сигналів АМ-М і ФМ-2:

$$\Delta F = 2 f_n (1 + \alpha) = \frac{1 + \alpha}{T} = \frac{1 + \alpha}{T_0 \log_2 M} = \frac{R(1 + \alpha)}{\log_2 M}, \quad (3)$$

де $f_n = 0,5/T$ – частота Найквіста;

α – коефіцієнт скату спектра ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Із виразу (3) випливає важливий висновок – збільшення числа позицій сигналу дозволяє зменшити ширину спектра каналних символів (2).

Канальні символи прийнято умовно зображати у вигляді сигнальних точок у деякому просторі. Сигнальні точки сигналів АМ-М і ФМ-2 розташовуються на числовій осі і тому ці сигнали називають одновимірними (рис. 2). Діаграми, на яких канальні символи зображені у вигляді сигнальних точок, називаються сигнальними сузір'ями.

Модуляційний код сигналу АМ-2: передачі 0 відповідає $a_0 = 0$, а передачі 1 відповідає $a_1 = a$.

Модуляційний код сигналу ФМ-2: $0 \rightarrow a_0 = -a$; $1 \rightarrow a_1 = a$.

Модуляційний код сигналу АМ-4: $00 \rightarrow a_0 = -a$; $01 \rightarrow a_1 = -3a$; $10 \rightarrow a_2 = a$; $11 \rightarrow a_3 = 3a$. Число a визначає енергії каналних символів.

2.5 Канальні символи $s_i(t)$ у разі ФМ-М ($M \geq 4$) і АФМ-М у загальному вигляді описуються за допомогою синфазної і квадратурної складових:

$$s_i(t) = a_{ci} A(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t + a_{si} A(t) \sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4)$$

де a_{ci} , a_{si} – коефіцієнти, що відображають послідовність із n біт, яка передається каналним символом $s_i(t)$.

Сигнали, що описуються виразом (4), є сума двох БМ сигналів з однаковими амплітудними спектрами, що визначаються спектром сигналу $A(t)$. У разі, коли $A(t)$ – імпульс Найквіста, амплітудний спектр кожної зі складових, а також їх суми, має вигляд, наведений на рис. 1. Тому ширина спектра каналних символів у разі ФМ-М і АФМ-М описується виразом (3).

2.6 Сигнали АФМ-М і ФМ-М ($M \geq 4$) є двовимірними, оскільки функції $A(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ і $A(t) \sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$, що присутні у виразі (4), ортогональні та утворюють двовимірний простір. Сигнальні сузір'я двовимірних сигналів зображуються на площині (рис. 3). Тут x символізує коливання $A(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$, а y – $A(t) \sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$.

Для сигналів ФМ-М вираз (4) можна переписати:

$$s_i(t) = a A(t) \cos(2\pi f_0 t - \varphi_i);$$

$$\varphi_i = \arctg\left(\frac{b_i}{a_i}\right). \quad (5)$$

Модуляційний код сигналу ФМ-4:

- $00 \rightarrow \varphi_0 = 135^\circ (a_{c0} = -a \text{ і } a_{s0} = a);$
 $01 \rightarrow \varphi_1 = 45^\circ (a_{c1} = a \text{ і } a_{s1} = a);$
 $10 \rightarrow \varphi_2 = 225^\circ (a_{c2} = -a \text{ і } a_{s2} = -a);$
 $11 \rightarrow \varphi_3 = 315^\circ (a_{c3} = a \text{ і } a_{s3} = -a).$

2.7 Процес формування одновимірних та двовимірних сигналів на основі виразів (2) і (4) такий: кодер модуляційного коду ставить у відповідність $n = \log_2 M$ вхідним бітам два П-імпульси з амплітудами a_{ci} і a_{si} (у випадку одновимірних сигналів лише один імпульс з амплітудою a_{ci} , а $a_{si} = 0$); П-імпульси фільтруються формуючими ФНЧ так, щоб одержати імпульси Найквіста; імпульси $a_{ci}A(t)$ і $a_{si}A(t)$ надходять до входів балансних модуляторів; отримані модульовані сигнали підсумовуються.

2.8 Сигнал ЧМ-2 будується на основі радіоімпульсів, що відрізняються частотами:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= aA(t) \cos(2\pi(f_0 - \Delta f/2)t), \\ s_1(t) &= aA(t) \cos(2\pi(f_0 + \Delta f/2)t), \end{aligned} \quad (6)$$

де Δf – рознесення частот;

a – коефіцієнт, що визначає енергію каналних символів.

Нехай функція $A(t)$ – П-імпульс тривалості T з амплітудою $\sqrt{1/T}$, а $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Легко впевнитись, що у цьому разі скалярний добуток сигналів $s_0(t)$ і $s_1(t)$:

$$(s_0, s_1) = a^2 \frac{\sin 2\pi\Delta f T}{\pi\Delta f T}. \quad (7)$$

Отже, каналні символи (6) ортогональні, коли рознесення частот

$$\Delta f = \frac{k}{2T}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Розглянемо випадок, $k = 1$, тобто $\Delta f = 0,5/T$. Сигнал ЧМ-2 на одному тактовому інтервалі записується

$$s(t) = a\sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t \pm \pi\Delta f t), \quad 0 \leq t < T, \quad (9)$$

де знак «+» відповідає $s_1(t)$, а знак «-» відповідає $s_0(t)$.

З (9) видно, що на тактовому інтервалі має місце лінійна зміна фази носійного коливання $\cos 2\pi f_0 t$, а у момент T набіг фази складає $\pi/2$.

Модуляція ЧМ-2 називається модуляцією мінімального зсуву (ММЗ) у разі виконання наступних умов:

1. У каналних символів (6) функція $A(t)$ – П-імпульс тривалості T .
2. Рознесення частот $\Delta f = 0,5/T$.
3. Модульований сигнал формується без “розриву” фази.

Остання умова реалізується наступним чином: фаза носійного коливання $\cos 2\pi f_0 t$ на початку наступного тактового інтервалу збігається з фазою у кінці попереднього тактового інтервалу, повинно бути накопичення фази без “розриву”. Для цього символи цифрового сигналу відображаються у П-

імпульси тривалості T і амплітуди d_k (k – номер тактового інтервалу): $1 \rightarrow d_k = 1$, $0 \rightarrow d_k = -1$. Тоді зміну фази $\Delta\varphi(t)$ без “розриву” для будь-якого моменту часу $t = nT + \Delta t$ можна записати

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{k=0}^n d_k \frac{\pi}{2} + d_{n+1} \pi \Delta f \Delta t. \quad (10)$$

Тут Π -імпульси амплітуди d_k виступають у ролі множників до функції $\pi \Delta f \Delta t$. Для первинного цифрового сигналу $b(t) = \{1, 0, 0, 1\}$ на рис. 4 наведено зміну фази $\Delta\varphi(t)$ без “розриву”.

Сигнал ММЗ на нескінченному інтервалі записується

$$s_{\text{ММЗ}}(t) = a \sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (11)$$

де $\Delta\varphi(t)$ – зміна фази, яка визначається виразом (10).

Подамо сигнал $s_{\text{ММЗ}}(t)$ через квадратурні складові:

$$s_{\text{ММЗ}}(t) = a \sqrt{2/T} I(t) \cos 2\pi f_0 t + a \sqrt{2/T} Q(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (12)$$

де $I(t) = \cos \Delta\varphi(t)$ – косинусна складова;

$Q(t) = -\sin \Delta\varphi(t)$ – синусна складова.

Для первинного цифрового сигналу $b(t) = \{1, 0, 0, 1\}$ на рис. 4 наведено квадратурні складові. Подання сигналу $s_{\text{ММЗ}}(t)$ через квадратурні складові лежить в основі побудови схеми модулятора.

Нормований спектр модульованого сигналу ММЗ описується виразом

$$S(f) = \frac{\sqrt{1 + \cos(4\pi(f - f_0)T)}}{\sqrt{2}(1 - (4(f - f_0)T)^2)}. \quad (13)$$

Залежність (13) наведена на рис. 5. Зі збільшенням $|f - f_0|$ спектр спадає зі швидкістю $1/(f - f_0)^2$. Якщо ширину спектра $F_{\text{ММЗ}}$ визначити за першими нулями залежності (13), то

$$F_{\text{ММЗ}} = 1,5/T = 1,5R. \quad (14)$$

Для того, щоб отримати сигнал ЧМ-2 з вузьким спектром і не було міжсимвольної інтерференції, необхідно, щоб функція $A(t)$ була імпульсом Найквіста. У такому разі можна вважати, що спектр сигналу $s_{\text{ЧМ-2}}(t)$ є сума спектрів двох радіоімпульсів частот $f_0 - \Delta f/2$ і $f_0 + \Delta f/2$. На рис. 6 представлений нормований спектр сигналу ЧМ-2, з якого випливає, що рознесення частот буде мінімальним, коли спектри радіоімпульсів примикають один до одного, і дорівнює він:

$$\Delta f_{\min} = \frac{1 + \alpha}{T}. \quad (15)$$

Тоді ширина спектра сигналу ЧМ-2:

$$F_{\text{ЧМ-2}} = \Delta f_{\text{min}} + \frac{1 + \alpha}{T} = \frac{2(1 + \alpha)}{T} = 2R(1 + \alpha), \quad (16)$$

вдвічі більша ширини спектра сигналів АМ-2 і ФМ-2.

Формування сигналів ЧМ-2 відрізняється від формування сигналів ФМ-М роботою кодера модуляційного коду і тим, що частоти опорних коливань генераторів в балансних модуляторах відрізняються на величину $\Delta f/2$ від частоти носійного коливання.

Лекція 12. Демодуляція сигналів.

Методи демодуляції амплітудно-модульованого сигналу. Коефіцієнт корисної дії різних методів демодуляції. Демодуляція одновимірної та двовимірної модуляції.

На вхід демодулятора надходить сума переданого модульованого сигналу $s(t)$ і завади $n(t)$: $z(t) = s(t) + n(t)$. За сигналом $z(t)$ демодулятор повинен відновити цифровий сигнал. Критерієм оптимальності є мінімум ймовірності помилки двійкового символу (біта) цифрового сигналу.

Сигнал цифрової модуляції $s(t)$ – це послідовність канальних символів, що відображують цифровий сигнал і проходять через тактовий інтервал T :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i^{(k)}(t - kT), \quad (1)$$

де $s_i(t)$, $i = 0, \dots, M - 1$ – канальні символи (радіоімпульси);

M – число канальних символів;

$s_i^{(k)}(t - kT)$ – i -й канальний символ, що передається на k -му тактовому інтервалі.

Радіоімпульси можуть відрізнятись амплітудами, фазами або частотами. Існують різні види цифрової модуляції: АМ-М, ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М, ЧМ-М. Якщо $M = 2$, то має місце двійковий сигнал $s(t)$, при цьому канальний символ $s_0(t)$ використовується для передавання 0, а канальний символ $s_1(t)$ – для передавання 1.

Опис канальний символ АМ-2, ЧМ-2 і ФМ-2 надається в табл. 1.

Таблиця 1 – Опис канальних символів $s_i(t)$

i	Метод модуляції		
	АМ-2	ЧМ-2	ФМ-2
1	$a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t$	$a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin(2\pi(f_0 + \Delta f/2)t)$	$a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t$
0	0	$a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin(2\pi(f_0 - \Delta f/2)t)$	$a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin(2\pi f_0 t + \pi) = -a \cdot \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t$

У цій таблиці:

a – коефіцієнт, що визначає енергію i -го канального символу;

$A(t)$ – функція, що описує форму канальних символів;

f_0 – частота носійного коливання;

Δf – рознесення частот при ЧМ-2.

З табл. 1 випливає, що при АМ-2 інформація закладена в амплітуді радіоімпульсу $s_i(t)$, при ФМ-2 – у полярності радіоімпульсу $s_i(t)$, при ЧМ-2 – у частоті радіоімпульсу $s_i(t)$.

Вважають, що завада $n(t)$ – гауссів квазібілий шум. Його спектр рівномірний і зосереджений у смузі пропускання каналу зв'язку F_k .

Демодулятор виконує незалежну демодуляцію кожного з каналних символів, що послідовно передаються. Демодуляція зводиться до визначення номера i переданого символу на кожному тактовому інтервалі. Нижче будемо вважати, що обговорюється робота демодулятора на тактовому інтервалі $k = 0$, тобто

$$z(t) = s_i(t) + n(t). \quad (2)$$

При АМ-2 і ФМ-2

$$s_i(t) = a_i \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (3)$$

і коефіцієнти a_i відображують біти, що передаються. Алгоритм роботи оптимальних демодуляторів цих сигналів наступний.

1) Виконується когерентне детектування сигналу $z(t)$. Схема відновлення носійної (ВН) створює коливання $\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$, яке необхідне для роботи детектора. Якщо врахувати, що смуговий шум представляється квадратурними складовими

$$n(t) = N_c(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t + N_s(t) \sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t, \quad (4)$$

то на виході детектора отримаємо

$$u_{\text{дет}}(t) = \underbrace{[a_i A(t) + N_s(t)]}_{\text{НЧ складові}} + \underbrace{[a_i A(t) + N_s(t)] \sin 2\pi f_0 t}_{\text{Сигнал БМ на несійній } 2f_0}. \quad (5)$$

Оскільки шум квазібілий у смузі частот каналу зв'язку F_k із середньою частотою f_0 , то шум $N_s(t)$ – квазібілий в інтервалі частот $(0, F_k/2)$.

2) Виконується фільтрація НЧ складових фільтром, узгодженим з сигналом $A(t)$. На виході УФ отримуємо

$$u_{\text{УФ}}(t) = a_i P(t) + N_s^\Phi(t), \quad (6)$$

де $P(t)$ – відгук УФ на імпульс $A(t)$;

$N_s^\Phi(t)$ – результат фільтрації завади $N_s(t)$.

З теорії узгоджених фільтрів відомо, що

$$P(t) = c K_A(t - t_0), \quad (7)$$

де $K_A(\tau)$ – функція кореляції сигналу $A(t)$;

t_0 – момент відліку, коли миттєве значення імпульсу $P(t)$ максимальне (під час синтезу УФ враховують, що $t_0 \geq T_A$, T_A – тривалість сигналу $A(t)$);

c – довільний додатний коефіцієнт (під час синтезу УФ вибирається таким, щоб $P(t_0) = 1$).

3) Береться відлік сигналу з виходу УФ в момент часу t_0 . Відлікове значення дає оцінку коефіцієнта a_i , який відображує біт, що передається

$$\hat{a} = a_i P(t_0) + N_s^\Phi(t_0) = a_i + N_s^\Phi(t_0), \quad (8)$$

де $N_s^\Phi(t_0)$ – випадкова величина, що має гауссів розподіл імовірностей із нульовим середнім.

Під час демодуляції послідовності канальних символів необхідно виконати дискретизацію з інтервалом T в моменти часу $t_0 + kT$, $k = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$. Правильний вибір цих моментів забезпечує система тактової синхронізації (ТС).

4) На основі оцінки $\hat{a}$ схемою рішень виносяться рішення про переданий символ. Правило винесення рішення формулюється на основі сигнального сузір'я сигналу, що демодулюється. На рис. 1 показано сигнальне сузір'я

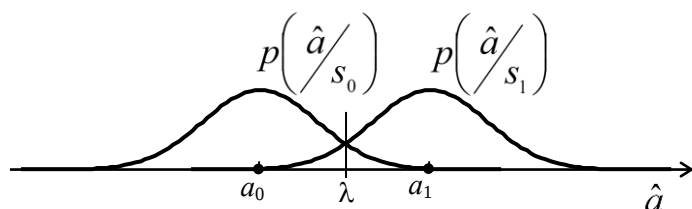


Рисунок 1 – Сигнальне сузір'я сигналів АМ-2 і ФМ-2 й умовні густини ймовірностей оцінки $\hat{a}$

сигналів АМ-2 і ФМ-2. Там же показані умовні густини ймовірності оцінки коефіцієнта, що описує переданий символ, $p\left(\frac{\hat{a}}{s_1}\right)$ і $p\left(\frac{\hat{a}}{s_0}\right)$. Вважаючи, що

символи $s_1(t)$ і $s_0(t)$ рівноймовірні, рішення слід виносити за максимумом умовної густини ймовірності, а саме, область значень $\hat{a}$, де $p\left(\frac{\hat{a}}{s_1}\right) > p\left(\frac{\hat{a}}{s_0}\right)$ є областю символу $s_1(t)$, а область значень $\hat{a}$, де $p\left(\frac{\hat{a}}{s_1}\right) < p\left(\frac{\hat{a}}{s_0}\right)$ є областю символу $s_0(t)$. Рішення виносяться шляхом порівняння оцінки $\hat{a}$ з пороговим значенням $\lambda = \frac{a_1 + a_0}{2}$ за правилом: якщо $\hat{a} > \lambda$, то передавався символ $s_1(t)$, а якщо $\hat{a} < \lambda$, то передавався символ $s_0(t)$. При АМ-2 $a_1 = a$, $a_0 = 0$, $\lambda = 0,5a$, тобто порогове значення дорівнює половині відлікового значення з виходу УФ при надходженні на вхід демодулятора символу $s_1(t)$ без завади. При ФМ-2 $a_1 = a$, $a_0 = -a$, $\lambda = 0$, тобто рішення виносяться за знаком відліку. Після винесення рішення схема рішень видає відповідний біт цифрового сигналу.

Тема 4. Цифрова фільтрація та обробка сигналів, зображень, аудіо, відео

Лекція 13. Лінійна цифрова фільтрація.

Поняття лінійної простово-інваріантної системи. Глобальна та локальна лінійна фільтрація. Згладжуючі фільтри. Фільтри піксельних границь. Диференціальні оператори визначення границь на зображенні.

Множинна обробка (multirate signal processing) – це клас методів ЦОС, де частота дискретизації сигналу змінюється кілька разів протягом обробки (знижується або підвищується). Це дозволяє:

- зменшити обчислювальну складність алгоритмів;
- оптимізувати використання ресурсів процесора/FPGA;
- покращити точність (наприклад, зменшити шум квантування);
- ефективно реалізувати фільтри з дуже вузькими перехідними смугами.

Поелементна обробка (однорідна, неоднорідна) – це клас методів ЦОЗ, де значення вихідного пікселя $g(i,j)$ залежить тільки від значення вхідного пікселя $f(i,j)$ у тій самій позиції (i,j) . Ніякі сусідні пікселі не залучаються.

Переваги:

Гранична простота реалізації ($O(N)$ операцій для зображення $N \times M$ пікселів).

Дуже швидка (паралелізація на GPU, векторизація).

Не потребує пам'яті для сусідів (немає крайових ефектів).

Недоліки:

Не враховує локальний контекст → не усуває шум, не виявляє границі.

Ефективна тільки для глобальних корекцій (контраст, яскравість, колір).

Порогова сегментація полягає в простому об'єднанні близьких за яскравістю областей зображення у невелике число кластерів. Порогова сегментація може здійснюватися на основі апіорно заданих порогів. Якщо яскравість перевищує поріг, то елемент зображення відносять до одного кластеру, якщо вона нижче порогу – то до іншого.

Сегментація шляхом нарощування областей – при такому методі сегментації виділяються однорідні області. Алгоритм передбачає вибір стартового пікселя і перевірку близькості значень суміжних з ним пікселів, наприклад по евклідовій відстані. Якщо значення яскравості поточного і суміжного з ним пікселів виявляються близькими, то їх зараховують в одну область.

Лекція 14. Нелінійна цифрова фільтрація.

Методи рішення задачі нелінійної фільтрації. Медіанна фільтрація. Фільтри “максимум” та “мінімум”. Оператори математичної морфології. Области застосування нелінійних фільтрів.

Нелінійна цифрова фільтрація – це клас методів обробки сигналів та зображень, у яких вихідне значення пікселя (або відліку сигналу) обчислюється нелінійною функцією від значень у його околі (вікні фільтра). На відміну від лінійних фільтрів (усереднення, Гаусса, Собеля тощо), нелінійні фільтри не використовують згортку з ядром і тому краще зберігають краї, гострі переходи та не розмивають деталі.

Задача	Рекомендований фільтр / оператор	Переваги
Видалення імпульсного шуму («сіль-перець»)	Медіанний фільтр	Лінійні фільтри розмивають краї

Збереження країв при згладжуванні	Медіанний, α -усічений середній, адаптивний медіанний	Лінійні сильно розмивають деталі
Виділення / згладжування контурів	Відкриття, закриття, морфологічний градієнт	Формо-залежна обробка
Сегментація об'єктів	Відкриття + закриття, watershed + морфологія	Видаляє дрібний шум, заповнює дірки
Видалення дрібних об'єктів / шум	Відкриття, top-hat / bottom-hat	Залежить від форми структурного елемента
Підготовка до розпізнавання	Комбінація ерозії + дилатації + медіанного	Зменшує варіативність, зберігає ключові ознаки
Медична обробка (рентген, МРТ, УЗД)	Медіанний + морфологічні оператори	Шум імпульсний, важливі краї та дрібні структури
Промисловий контроль (дефекти)	Top-hat, bottom-hat, морфологічне відкриття	Виявлення дуже малих дефектів на неоднорідному фоні

Лекція 15. Основи кореляційного аналізу сигналів та зображень.

Вимірювання степені подібності функцій. Поняття коефіцієнту кореляції. Поняття, визначення та властивості функції взаємної кореляції. Використання функції взаємної кореляції для розрахунку часової затримки сигналів.

Обробка зображень - це маніпулювання зображенням з метою його покращення або вилучення з нього інформації.

Існує два способи обробки зображень:

- обробка аналогових зображень використовується для обробки фотографій, роздруківок та інших друкованих копій зображень;
- цифрова обробка зображень використовується для маніпулювання цифровими зображеннями за допомогою комп'ютерних алгоритмів.

1 Математичні моделі зображень

2 Статистичні методи аналізу зображень

3. Фільтрація зображень

3.1. Оптимальна лінійна фільтрація

3.2. Нелінійна фільтрація

3.3. Інверсні фільтри в задачах обробки зображень

4. Методи на основі динамічних моделей

5. Методи на основі декомпозиції на власні вектори

6. Методи класифікації елементів зображень

7. Методи визначення контурів елементів зображень та сегментації

Лекція 16. Автокореляційна функція та згортка.

Поняття, визначення та властивості функції автокореляції. Теорема Вінера - Хінчина. Поняття спектральної щільності потужності сигналу. Теорема згортки. Властивості операції згортки. Дискретна згортка.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_k(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_k(j\omega)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$\left. \begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ K_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G_X(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \\ K_X(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \right\}$$

$$\tau_K F_{\max} = 0,5$$

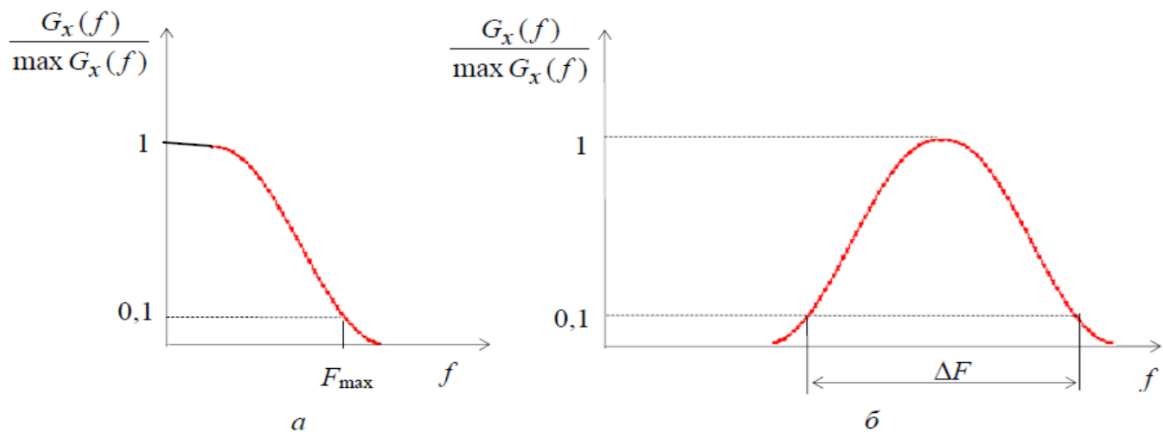
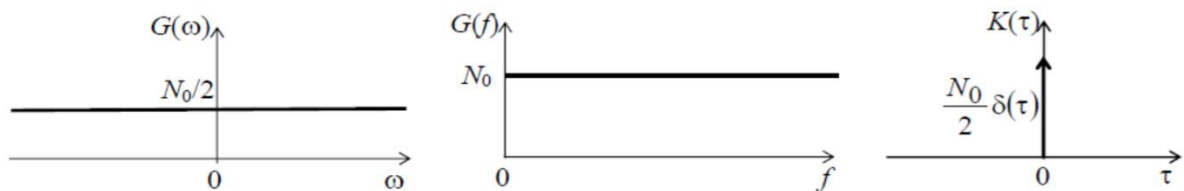


Рисунок 3.4 – Визначення ширини спектра процесу:
 а – спектр примикає до нульової частоти; б – смуговий спектр

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$



Лекція 17. Цифрова обробка кольорових зображень.

Колірні моделі зображень. Псевдокольори. Основи обробки кольорових зображень. Колірні перетворення. Згладжування і підвищення різкості. Стиснення кольорових зображень.

Зображення – це двовимірний (або тривимірний) сигнал, що описує розподіл яскравості/кольору в просторі. Зображення – частковий випадок багатовимірного сигналу.

Колірні моделі зображень

Колірна модель — математичний спосіб представлення кольору як набору чисел (компонент). У цифровій обробці зображень використовують різні моделі залежно від мети (відображення, друк, обробка, стиснення).

Основні моделі:

- RGB (адитивна, для екранів/камер): Червоний (Red), Зелений (Green), Синій (Blue). Кожен канал: 0–255 (8 біт) → 16,7 млн кольорів. Пряме представлення: піксель = (R, G, B). Переваги: інтуїтивна для дисплеїв. Недоліки: кореляція каналів, невідокремлена яскравість.
- CMYK (субтрактивна, для друку): Ціан (Cyan), Пурпуровий (Magenta), Жовтий (Yellow), Чорний (Key/Black). Значення: 0–100% (або 0–1). Чорний компонент додано для економії фарби та глибокого чорного. Перетворення з RGB: $C = 1 - R'$, $M = 1 - G'$, $Y = 1 - B'$ ($R' = R/255$ тощо), потім коригування K.
- HSV / HSL / HSB (тон-насиченість-яскравість): Hue (тон/колір, 0–360°), Saturation (насиченість, 0–100%), Value/Brightness (яскравість, 0–100%) або Lightness. Переваги: інтуїтивна для людини (зміна тону без впливу на яскравість), добре для сегментації кольору. Перетворення з RGB: нелінійне, Hue обчислюється через max/min каналів.
- YCbCr / YUV (відеостандарти, стиснення): Y — яскравість (luma), Cb/Cr — компоненти кольору (chroma, різниця від сірого). Перевага: яскравість відокремлена від кольору → можна сильніше стискати chroma (очі менш чутливі до кольору). Використовується в JPEG, MPEG, цифровому ТБ.
- Lab / Lab* (апаратно-незалежна, перцептивна): L — яскравість (0–100), a — від зеленого до пурпурового (-128..+127), b — від синього до жовтого. Переваги: рівномірна перцептивно (ΔE — метрика різниці кольорів), ідеальна для корекції кольору, перетворень.

Стиснення кольорових зображень

Без втрат:

PNG (deflate + прогнозування фільтрів, добре для графіки з прозорістю).

TIFF (LZW, ZIP), GIF (256 кольорів).

З втратами:

JPEG (найпоширеніший):

DCT (дискретне косинусне перетворення) блоками 8×8.

Квантування (сильніше для chroma).

Subsampling chroma (4:2:0 — зменшення Cb/Cr в 2 рази).

Huffman-кодування.

Артефакти: блокінг, ringing.

JPEG 2000 (wavelet-based): краща якість при високому стисненні, прогресивне завантаження.

WebP / AVIF (сучасні): VP8/VP9 + wavelet або AV1, кращий за JPEG.

Метод максимальної правдоподібності

При розпізнаванні монохроматичних зображень для розподілу яскравості майже завжди вдається підібрати один з відомих одновимірних законів (нормальний, біноміальний, експонентний, пуасонівський)

Метод паралелепіпедів

Одним з найбільш швидких алгоритмів, часто вживаних на практиці і пов'язаних з нормальним законом розподілу, є метод паралелепіпедів, що іноді називається методом прямокутників.

Метод мінімальних відстаней

Це самий простий і швидкий метод класифікації. Рішення про те, до якого класу належить піксель, приймається на підставі порівняння відстані між пікселями і середніми значеннями у просторі яскравостей

№	Напрямок	Опис	Популярні AI-моделі / технології
1	Поліпшення якості	Зменшення шуму, артефактів, збільшення роздільної здатності, деблюринг	SRCNN, ESRGAN, DnCNN, Real-ESRGAN
2	Сегментація	Виділення об'єктів або областей на зображенні	U-Net, DeepLab, Mask R-CNN
3	Розпізнавання	Класифікація об'єктів, розпізнавання облич, OCR	VGG, ResNet, Inception, FaceNet, Tesseract OCR
4	Детекція	Виявлення об'єктів з координатами і класами	YOLO, SSD, Faster R-CNN
5	Стильова трансформація	Зміна стилю зображення (наприклад, під картину, комікс, аніме)	StyleGAN, CycleGAN, Stable Diffusion
6	Генерація	Створення нових зображень за описом або стилем	GAN, DALL·E, MidJourney, Stable Diffusion
7	AI-ретуш	Усунення дефектів, автоматична заміна фону, покращення вигляду	Photoshop Neural Filters, FaceApp, Remove.bg
8	AI-аналітика	Підрахунок об'єктів, вимірювання параметрів, розпізнавання документів	YOLO, Detectron2, OpenCV + Deep Learning

Лекція 18. Цифрова обробка аудіо та відео.

Сучасні алгоритми цифрової обробки аудіо та відео.

Цифровий звук — спосіб зберігання звуку у формі цифрового сигналу. У ширшому сенсі — цифрові технології обробки, зберігання та відтворення звуку.

Якщо сигнал включає частоти, вищі за максимально припустиму граничну частоту (Найквіста), при його оцифруванні виникає ефект накладання спектрів частот (элайзинг). Для запобігання цього ефекту необхідний фільтр захисту накладання спектрів, що обмежує спектр сигналу граничною частотою.

Іншим небажаним ефектом при оцифруванні звуку є шум квантування, що виникає внаслідок округлення значень амплітуди. Для зменшення цього ефекту використовується дитеринг, ефект додавання до сигналу псевдовипадкового сигналу.

Загальний принцип збереження аудіо на цифрових носіях полягає у послідовній фіксації значень амплітуди звукових коливань, які при відтворенні звуку відповідатимуть положенню мембран у гучномовцях.

Ці значення записуються з певною частотою дискретизації та певним амплітудним розділенням. Для зменшення обсягів, ці дані можуть бути стиснені з втратами або без втрат. Вокодер (Vocoder). Розбиває аудіосигнал на кілька частотних смуг і модулює їх за допомогою іншого сигналу. Використовує набір смугових фільтрів для аналізу та синтезу звуку

Фільтр Кальмана. Прогнозує і коригує аудіосигнал у реальному часі, зменшуючи шум на основі математичної моделі. Поєднує статистичні дані й поточний сигнал для оптимального очищення

Вейвлет (Wavelet). Аналізує сигнал у часовій і частотній областях одночасно, відсікаючи шум або виділяючи деталі. Використовує вейвлет-перетворення замість традиційного Фур'є. LMS (Least Mean Squares, метод найменших квадратів). Порівнює вихідний сигнал із "еталонним" (бажаним) сигналом.

Спектральне віднімання. Аналізує спектр сигналу, визначає шум у тихих ділянках і віднімає його від усього сигналу.

Фазова інверсія (Phase Cancellation). Генерує сигнал, протилежний за фазою до шуму, який при накладанні гасить його.

Шумоподавлення (Noise Gating). Вимикає звук, коли рівень сигналу падає нижче заданого порогу, усуваючи тихий фоновий шум.

Статистичні методи (Вінера, Баєса). Оцінює статистичні характеристики шуму й сигналу, оптимально фільтруючи шум за допомогою математичних моделей.

Категорія	Призначення	Приклади інструментів
Генерація мови (TTS)	Перетворення тексту на реалістичну людську мову.	ElevenLabs, Google Cloud Text-to-Speech, Microsoft Azure TTS, Resemble AI, Play.ht, Murf.ai
Розпізнавання мови (ASR)	Автоматичне перетворення аудіозаписів мови на текст (транскрипція).	OpenAI Whisper, Google Cloud Speech-to-Text, AssemblyAI, Deepgram, Descript
Розділення джерел звуку (Source Separation)	Виділення окремих інструментів (вокал, бас, барабани тощо) або джерел (мова, музика) з міксу.	Lalal.ai, Moises.ai, iZotope RX (Music Rebalance), Serato Studio (Stems), FL Studio (Stem Separation), Logic Pro (Stem Separation), UVR
Шумозаглушення та покращення аудіо	Видалення небажаних шумів (фон, гул, клацання) та покращення чіткості/якості звуку.	iZotope RX, Adobe Podcast Enhance Speech, Acon Digital Acoustica, Accentize (dxRevive), NVIDIA Broadcast
Генерація музики	Створення оригінальної музики на основі текстових описів, жанрів, настроїв або референсів.	Suno AI, Udio, Google MusicLM, AIVA, Soundraw, Amper Music (Shutterstock)

AI-асистенти зведення/мастерингу	Надання рекомендацій або автоматизація завдань зведення та мастерингу аудіо.	iZotope Ozone (Master Assistant), iZotope Neutron (Mix Assistant), LANDR, Sonible (smart: series), MasteringTheMix (LIMITER, REFERENCE)
Клонування та модифікація голосу	Створення синтетичної копії голосу конкретної людини або зміна характеристик голосу.	ElevenLabs (Voice Cloning), Resemble AI, Descript (Overdub)
Генерація звукових ефектів (SFX)	Створення унікальних звукових ефектів на основі текстових описів.	ElevenLabs SFX
Відеоредактори з AI-аудіо функціями	Інтегровані функції, такі як TTS, ASR (субтитри), шумозаглушення, ефекти, виділення вокалу.	CapCut, Descript

Характеристика	HEVC (H.265)	VP9	AV1	VVC (H.266)	AVS3
Структура блоків	CTU (Coding Tree Units) - Квадродерево (до 64x64)	Суперблоки (Superblocks) - Рекурсивний поділ (до 64x64)	CTU - Гнучкий поділ: Квадродерево, Бінарне, Трінарне (до 128x128)	CTU - Розширене QTMT (Квадро+Бінарне+Трінарне дерево) (до 128x128)	Розширене QTMT (Quadtree + Multi-type Tree) - гнучкий поділ (до 128x128)
Внутрішньокладове передбачення (Intra Prediction)	~35 режимів (Планарний, DC, 33 кутових)	~10 режимів (DC, ТМ, Вертикальний, Горизонтальний, 6 кутових)	~56+ режимів (вкл. Планарний, DC, кутові, Палітра, Intra Block Copy - IntraBC)	~67+ режимів (вкл. MIP - Matrix Intra Prediction, CCLM, WAIP)	~67+ режимів (вкл. матричне внутрішнє передбачення - MIP)
Міжкларове передбачення (Inter Prediction)	AMVP (Advanced Motion Vector Prediction), афінні трансформації, Merge/Skip режими, В-кадри	Розширені режими, Комбіноване передбачення (Compound Prediction)	Розширені режими, Compound, Global Motion, афінні трансформації, OBMC (Overlapped Block Motion Compensation), Ref Frame Scaling	Розширені режими, афінні трансформації, AMVR, BIO, DMVR, MMVD, GPM, Merge з різницею MV	Розширені режими, Історичне передбачення руху (HMVP), Adaptive Motion Vector Resolution (AMVR), Bi-directional Optical Flow (BIO)
Перетворення (Transform)	Варіанти DCT та DST (Discrete Cosine/Sine Transform)	Варіанти DCT, DST, ADST (Asymmetric DST)	Розширений набір DCT, DST, Identity Transform	Розширений набір DCT/DST (MTS - Multiple Transform)	Розширений набір DCT/DST типів

				Selection), до 64x64	
Квантування (Quantization)	Скалярне, адаптивне	Скалярне, адаптивне	Скалярне, адаптивне	Скалярне, адаптивне (з удосконаленнями)	Скалярне, адаптивне
Ентропійне кодування (Entropy Coding)	CABAC (Context-Adaptive Binary Arithmetic Coding)	Власний арифметичний кодер на основі Bool Coder	Арифметичний кодер (Non-binary, залежний від контексту)	CABAC (з удосконаленнями для багатозначних гіпотез)	CABAC-подібне
Фільтрація в циклі (In-loop Filtering)	Deblocking Filter, SAO (Sample Adaptive Offset)	Deblocking Filter, (SAO-подібний фільтр)	Deblocking Filter, CDEF (Constrained Directional Enhancement Filter), Loop Restoration Filter	Deblocking Filter, SAO, ALF (Adaptive Loop Filter), LMCS	Deblocking Filter, SAO, ALF (Adaptive Loop Filter)

Внутрішньокадрове стиснення (I). I-кадри (Intra-coded pictures). Кодуються незалежно, як статичні зображення. Використовують просторову надлишковість. Більший розмір, але забезпечують точки доступу.

Міжкадрове стиснення (S)

P-кадри (Predicted pictures). Використовують для передбачення інформацію лише з попередніх I або P-кадрів (односпрямоване передбачення).

B-кадри (Bi-predictive pictures). Можуть використовувати для передбачення інформацію як з попередніх, так і з наступних опорних кадрів (двоспрямоване передбачення). Це часто дозволяє знайти краще передбачення (наприклад, для об'єктів, що тимчасово перекриваються) і досягти ще вищого ступеня стиснення.

Сучасні відеокодеки використовують комбінацію I, P та B кадрів (утворюючи так звану Group of Pictures - GOP).

Сучасні тенденції цифрової обробки охоплюють кілька ключових напрямів, які трансформують бізнес, технології та суспільство.

1. Штучний інтелект і машинне навчання
2. Хмарні технології
3. Інтернет речей (IoT)
4. Кібербезпека та захист даних
5. Автоматизація процесів
6. Блокчейн і децентралізовані технології
7. Обробка даних у реальному часі
8. Персоналізація та клієнтоорієнтованість
9. Квантова обробка (перспектива)

Навчальне видання

Розенвассер Денис Михайлович

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Конспект лекцій

Українською мовою