

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра інформаційних технологій

Григор'єва Т.І., Бакуніна О.В.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ
Методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів

Одеса 2025

Затверджено Вченою Радою Міжнародного гуманітарного університету
(протокол № 5 від 20.01.2025 р.)

Григор'єва Т.І., Бакуніна О.В.

Математичні методи в психології: методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів [Електронне видання]. / Григор'єва Т.І., Бакуніна О.В. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету. Одеса, 2025. – 53 с.

Методичні рекомендації з курсу «Математичні методи в психології» розроблено відповідно до навчального плану, вони складаються з навчальної програми курсу, методичних рекомендацій з проведення практичних занять і завдань для самостійної роботи здобувачів, списку рекомендованої літератури. Матеріали призначено для студентів Міжнародного гуманітарного університету, які вивчають галузь знань – 05 Соціальні та поведінкові науки.

Вивчення дисципліни «Математичні методи в психології» сприятиме розвитку навичок застосування статистичних та математичних методів для аналізу, інтерпретації результатів психологічних досліджень та прийняття обґрунтованих рішень на основі емпіричних даних.

ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 3, загальна кількість годин – 90	Галузь – <u>05 Соціальні та поведінкові науки</u> Спеціальність – <u>053 Психологія</u>	обов'язкова	
		Рік підготовки:	
		4-й	
		Семестр	
		7-й	8-й
Мова навчання – українська	Рівень вищої освіти – <u>перший (бакалаврський) рівень</u>	Лекції	
		14 год.	4 год.
		Практичні, семінарські	
		28 год.	6 год.
		Лабораторні	
		Самостійна робота та індивідуальні завдання	
		48 год.	80 год.
		Вид контролю:	
		залік	залік

Дисципліна «Математичні методи в психології» сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення і надає змогу здобувачам оволодіти методами збору, систематизації, узагальнення, математичної обробки та інтерпретації емпіричних даних, формуванні навичок їх комп'ютерної обробки.

Мета навчальної дисципліни «Математичні методи в психології» полягає у формуванні знань і навичок застосування математичних та статистичних методів для аналізу, інтерпретації та обґрунтування результатів психологічних досліджень. Застосування математичних підходів дозволяє зробити дослідження більш об'єктивними, точними та науково обґрунтованими.

ОЧІКУВАНІ КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЯКІ ПЛАНУЄТЬСЯ СФОРМУВАТИ ТА ДОСЯГНЕННЯ ПРОГРАМНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Заплановані результати навчання за навчальною дисципліною

Знання:

- Знання основних принципів і методів математичної статистики.
- Знання основ ймовірнісних розподілів та їх застосувань у статистичному аналізі.
- Розуміння методів перевірки статистичних гіпотез.
- Знання різних статистичних моделей, включаючи регресійний аналіз, кореляційний аналіз, дисперсійний аналіз, кластерний аналіз, факторний аналіз та дискримінантний аналіз.

Уміння:

- Уміння застосовувати різні статистичні методи для аналізу даних, включаючи описову статистику, кореляційний і регресійний аналіз, кластерний і факторний аналіз.
- Уміння інтерпретувати результати статистичних аналізів та робити на їх основі обґрунтовані висновки.
- Оцінювати точність отриманого результату.
- Уміння застосовувати непараметричні методи в аналізі даних.
- Уміння створювати інформативні графіки, діаграми та інші візуальні представлення даних.
- Уміння використовувати програмні пакети для проведення статистичних досліджень

Навички:

- Навички критичного мислення при виборі методів аналізу та інтерпретації

результатів.

- Навички аналізу ризиків та невизначеностей при роботі з даними.
- Навички обґрунтовування вибору
- Навички побудови та тестування статистичних моделей.
- Навички комунікації результатів аналізу, як в усній, так і в письмовій формі.
- Навички роботи в команді та спільної роботи над проектами аналізу даних.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Основні задачі теорії наближених обчислень в психології. Абсолютна та відносна похибки. Дії над наближеними значеннями чисел. Обчислення з наперед заданою точністю.

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

Правила комбінаторики. Ймовірність події. Теореми додавання та множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

Тема 3. Випадкові величини

Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини. Основні розподіли дискретних випадкових величин. Неперервні розподіли. Нормальний розподіл. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема. Системи випадкових величин. Коваріація двох випадкових величин. Коефіцієнт кореляції.

Тема 4. Статистичні методи в психології

Вимірювальні шкали. Генеральна та вибіркова сукупність. Міри центральної тенденції. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Перевірка статистичних гіпотез. Параметричні та непараметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних.

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Моделі: випадкова, детермінована, змішана. Однофакторний і двофакторний дисперсійний аналіз. Завдання кореляційного і регресійного аналізу. Парна лінійна регресійна модель. Рангова кореляція. Нелінійна парна кореляція. Множинна кореляція і регресія. Побудова регресійних моделей. Багатовимірний статистичний аналіз.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин							
	денна форма				Заочна форма			
	усього	у тому числі			усього	у тому числі		
		лекц.	практ	сам. роб.		лекц.	практ	сам. роб.
Тема 1. Похибки наближених значень чисел	14	2	4	8	14		2	12
Тема 2. Методи теорії ймовірностей	20	2	6	12	20		2	18
Тема 3. Випадкові величини	20	4	6	10	20	2		18

Тема 4. Статистичні методи в психології	18	4	6	8	18	2		16
Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз	18	2	6	10	18		2	16
Усього годин	90	14	28	48	90	4	6	80
ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ - залік								

ПИТАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Похибки обчислень. Пряма та обернена задачі теорії похибок. Абсолютна та відносна похибки. Дії над наближеними значеннями чисел. Обчислення з наперед заданою точністю. Оцінка похибок значень функцій. Похибки при обчисленні наближених значень функції однієї змінної. Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних.

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

Задачі комбінаторики. Випадкові події та їх класифікація. Класичне, геометричне та статистичне визначення ймовірності. Протилежні події. Ймовірність протилежної події. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і залежних подій. Формула повної ймовірності. Формули Байєса. Повторні незалежні випробування. Формули Бернуллі, Пуассона, Лапласа. Найімовірніше число настання події під час повторних випробувань. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.

Тема 3. Випадкові величини

Одновимірні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна функція розподілу ймовірностей та її властивості. Числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення) та їх властивості. Біноміальний закон розподілу. Пуассонівський закон розподілу. Рівномірний закон розподілу. Експоненціальний закон розподілу. Нормальний закон розподілу. Закон великих чисел. Двовимірні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна функція розподілу. Числові характеристики. Коваріація двох випадкових величин. Властивості коваріації. Коефіцієнт кореляції.

Тема 4. Статистичні методи в психології

Вимірювання в психології та види шкал. Генеральна та вибіркова сукупність. Міри центральної тенденції. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Емпірична функція розподілу. Побудова полігону частот і полігона відносних частот. Гістограма частот і гістограма відносних частот. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона. Параметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних. Сфера застосування t-критерію Стюдента. Статистичний критерій t-Стюдента для однієї вибірки. Статистичний критерій t-Стюдента для незалежних вибірок. Статистичний критерій t-Стюдента для залежних вибірок. Непараметричні методи порівняння вибірок досліджуваних. Статистичний критерій U-Манна-Уїтні.

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Основні типи дисперсійного аналізу. Дисперсійний аналіз і його реалізація в статистичних пакетах. Основні методи кореляційного аналізу. Коефіцієнт кореляції Пірсона. Коефіцієнт кореляції Спірмена. Коефіцієнт кореляції Кендалла.

Множинний кореляційний аналіз. Реалізація кореляційного аналізу в статистичних пакетах. Основні етапи регресійного аналізу. Реалізація регресійного аналізу в статистичних пакетах. Логістична регресія в статистичних пакетах. Визначення та сфери застосування багатовимірних статистичного аналізу. Основні методи аналізу багатовимірних даних: кластерний, дискримінантний, факторний аналіз.

САМОСТІЙНА РОБОТА

До самостійної роботи студентів включаються:

1. Знайомство з науковою та навчальною літературою відповідно зазначених у програмі тем.
2. Опрацювання лекційного матеріалу.
3. Підготовка до практичних занять.
4. Консультації з викладачем протягом семестру.
5. Самостійне опрацювання окремих питань навчальної дисципліни.
6. Підготовка до підсумкового контролю.

Тематика та питання до самостійної підготовки та індивідуальних завдань

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Похибки обчислень. Основні задачі теорії наближених обчислень в психології. Обґрунтування вибору та застосовувати валідного та надійного психодіагностичного інструментарія (тести, опитувальники, проєктивні методики тощо) психологічного дослідження. Абсолютна та відносна похибки. Предметна область психології, розуміння професійної діяльності психолога.

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

Планування та здійснення психологічного дослідження. Комбінаторика.

Випадкові події та їх класифікація. Безпосереднє знаходження ймовірностей. Протилежні події. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей. Формула гіпотез Байєса. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона. Опрацювання, аналіз та узагальнення психологічної інформації з різних джерел. Аналіз літературних джерел. Презентування результатів власних досліджень усно/письмово для фахівців і нефахівців.

Тема 3. Випадкові величини

Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини. Властивості математичного сподівання. Моменти. Дисперсія. Властивості дисперсії. Параметри нормального розподілу. Правило трьох сигм. Двовимірні неперервні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна і диференціальна функції розподілу та їх властивості. Числові характеристики та їх властивості. Початковий та центральний теоретичні моменти. Надійність психодіагностичного інструментарію. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції та їх властивості. Формулювання мети та завдання психологічного дослідження. Дотримання процедури дослідження. Формулювання аргументованих висновків та рекомендацій.

Тема 4. Статистичні методи в психології

Основні задачі математичної статистики. Обґрунтування вибору математичного методу дослідження. Вимірювання і шкали. Поняття вимірювання у психології. Види вимірювальних шкал. Сутність вимірювань у психологічних та педагогічних дослідженнях. Генеральна та вибіркова сукупність. Збір первинного матеріалу, робота з даними та їх обробка. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Показники варіації статистичного

ряду. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Інтервальні оцінки. Побудова довірчих інтервалів. Перевірка статистичних гіпотез. Параметричні та непараметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних. Обґрунтування вибору технології психологічної допомоги. Використання інформаційних і комунікаційних технологій в дослідженнях психолога.

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Оцінювання достовірності одержаних результатів психологічного дослідження. Поняття міжгрупової та внутрішньогрупової дисперсії. Приклад використання дисперсійного аналізу в психології. Модель однофакторного дисперсійного аналізу. Особливості двофакторного дисперсійного аналізу з та без взаємодії факторів. Приклад застосування двофакторного аналізу в соціологічних дослідженнях. Інтерпретація результатів та їх вплив на висновки дослідження. Поняття кореляції та її види (лінійна, нелінійна, парна, множинна). Приклади задач, що розв'язуються методами кореляційного аналізу. Відмінності між коефіцієнтами кореляції Пірсона та Спірмена. Приклади використання коефіцієнта кореляції Спірмена для рангових даних. Опис коефіцієнта кореляції Кендалла та сфери його застосування. Приклади задач, що використовують цей коефіцієнт для аналізу. Приклад використання множинного кореляційного аналізу Реалізація множинного кореляційного аналізу в статистичних пакетах. Постановка задачі регресійного аналізу та вибір моделі. Приклади застосування лінійної регресії в психології. Основні методи побудови нелінійних регресійних моделей. Застосування логістичної регресії для прогнозування бінарних результатів. Приклади використання логістичної регресії в психології. Особливості побудови та інтерпретації множинної регресії. Визначення та сфери застосування багатовимірного статистичного аналізу. Кластерний, дискримінантний, факторний аналіз. Основні методи кластерного аналізу. Основи дискримінантного аналізу та його використання для класифікації. Приклад задачі дискримінантного аналізу в психології. Приклади застосування факторного

аналізу в психології. Спільні риси та відмінності між кластерним, дискримінантним та факторним аналізами. Висновки за результатами власних досліджень. Аналіз та систематизація одержаних результатів. Інтерпретація та представлення результатів статистичних досліджень.

ТЕМИ ДОПОВІДЕЙ

1. Типові задачі прикладної статистики: прогнозування, класифікація, оцінка параметрів та перевірка гіпотез. Приклади задач у психології, соціології медицині, економіці, та бізнесі.
2. Порівняння та відмінності між середніми показниками: мода, медіана, середнє арифметичне.
3. Аналіз варіації та її роль у статистиці.
4. Приклади застосування інтервальних оцінок у реальних дослідженнях.
5. Оцінка параметрів розподілу за допомогою інтервальних оцінок.
6. Порівняння інтервальних та точкових оцінок: переваги та обмеження.
7. Розподіли з різними параметрами: нормальний, експоненціальний, рівномірний.
8. Приклади застосування аналізу розподілів у психологічних задачах
9. Приклади використання критерію Стюдента в психології.
10. Приклади використання U-критерію Манна-Уїтні в психології та соціології.
11. Огляд основних непараметричних критеріїв (U-критерій Манна-Уїтні, критерій серій Вальда-Вольфовиця). Переваги та обмеження непараметричних методів.
12. Застосування статистичних критеріїв у психології
13. Приклад використання дисперсійного аналізу в психології.
14. Приклад застосування двофакторного аналізу в соціологічних дослідженнях.

15. Переваги та недоліки використання програмних пакетів для дисперсійного аналізу.
16. Приклад використання множинного кореляційного аналізу у психологічних дослідженнях.
17. Приклади використання логістичної регресії в психології.
18. Приклади застосування кластерного аналізу в маркетингових дослідженнях, психології, соціології та біоінформатиці.
19. Приклад використання ієрархічного кластерного аналізу для сегментації ринків.
20. Приклади застосування факторного аналізу в психології, економіці та маркетингу.
21. Порівняльний аналіз кластерного, дискримінантного та факторного аналізу. Вибір методу залежно від специфіки даних та поставленої задачі.

ВИДИ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Робоча програма навчальної дисципліни передбачає наступні види та методи контролю:

Види контролю	Складові оцінювання
поточний контроль , який здійснюється у ході: проведення практичних занять, виконання індивідуального завдання; проведення консультацій та відпрацювань.	50%
підсумковий контроль , який здійснюється у ході проведення заліку.	50%

Методи діагностики знань (контролю)	фронтальне опитування; наукова доповідь, усне повідомлення, індивідуальне опитування, робота у групах, розв'язання задач і практичних завдань, залік.
--	---

Питання до заліку

1. Похибки обчислень. Основні задачі теорії наближених обчислень.
2. Абсолютна та відносна похибки.
3. Дії над наближеними значеннями чисел.
4. Обчислення з наперед заданою точністю.
5. Оцінка похибок значень функцій.
6. Статистичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності.
Класичне означення ймовірності.
7. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей .

8. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей.
9. Протилежні події. Ймовірність протилежної події.
10. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез Байєса.
11. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
12. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.
13. Випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини.
14. Властивості математичного сподівання. Моменти. Дисперсія. Властивості дисперсії
15. Біномінальний розподіл. Розподіл Пуассона. Рівномірний закон.
16. Нормальний розподіл. Показниковий розподіл.
17. Параметри нормального розподілу. Правило трьох сигм.
18. Закон великих чисел.
19. Системи випадкових величин. Числові характеристики двомірних випадкових величин. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори.
20. Коваріація двох випадкових величин. Властивості коваріації. Коефіцієнт кореляції
21. Надійність психодіагностичного інструментарію.
22. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупність. Збір первинного матеріалу, робота з даними та їх обробка.
23. Статистичний ряд розподілу.
24. Емпірична функція розподілу. Побудова полігону частот і полігона відносних частот. Гістограма частот і гістограма відносних частот.
25. Числові характеристики вибіркового розподілу.
26. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
27. Інтервальні оцінки. Побудова довірчих інтервалів.

- 28.Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона.
- 29.Параметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних. Статистичний критерій t-Стюдента для однієї вибірки. Статистичний критерій t-Стюдента для незалежних вибірок. Статистичний критерій t-Стюдента для залежних вибірок.
- 30.Непараметричні методи порівняння вибірок досліджуваних. Статистичний критерій U-Манна-Уїтні.
- 31.Використання інформаційних і комунікаційних технологій в дослідженнях психолога.
- 32.Дисперсійний аналіз і його реалізація в статистичних пакетах.
- 33.Основні методи кореляційного аналізу. Коефіцієнт кореляції Пірсона. Коефіцієнт кореляції Спірмена. Коефіцієнт кореляції Кендалла.
- 34.Множинний кореляційний аналіз.
- 35.Основні етапи регресійного аналізу. Логістична регресія в статистичних пакетах. Побудова регресійних моделей.
- 36.Основні методи аналізу багатовимірних даних: кластерний, дискримінантний, факторний аналіз. Аналіз та систематизація одержаних результатів.

КРИТЕРІЇ ПІДСУМКОВОЇ ОЦІНКИ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

(для іспиту / заліку)

Рівень знань оцінюється:

- «відмінно» / «зараховано» А - від 90 до 100 балів. Студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно знаходити та опрацьовувати необхідну інформацію, демонструє знання матеріалу, проводить узагальнення і висновки.

Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, під час яких давав вичерпні, обґрунтовані, теоретично і практично правильні відповіді, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;

- «добре» / «зараховано» В - від 82 до 89 балів. Студент володіє знаннями матеріалу, але допускає незначні помилки у формуванні термінів, категорій, проте за допомогою викладача швидко орієнтується і знаходить правильні відповіді. Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;

- «добре» / «зараховано» С - від 74 до 81 балів. Студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень, з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, але дає недостатньо обґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи та активність у науково-дослідній роботі;

- «задовільно» / «зараховано» D - від 64 до 73 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на середньому рівні, допускає помилки, серед яких є значна кількість суттєвих. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи;

- «задовільно» / «зараховано» E - від 60 до 63 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні, на всі запитання дає необґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки, має неповний конспект з завданнями до самостійної роботи.

- «незадовільно з можливістю повторного складання» / «не зараховано» FX – від 35 до 59 балів. Студент володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу.

- «незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни» / «не зараховано» F – від 1 до 34 балів. Студент не володіє навчальним матеріалом.

Таблиця відповідності результатів контролю знань за різними шкалами

100-бальною шкалою	Шкала за ECTS	За національною шкалою	
		екзамен	залік
90-100 (10-12)	A	Відмінно	зараховано
82-89 (8-9)	B	Добре	
74-81(6-7)	C		
64-73 (5)	D	Задовільно	
60-63 (4)	E		
35-59 (3)	Fx	незадовільно	не зараховано
1-34 (2)	F		

ПЛАН – КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ДИСЦИПЛІНИ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Похибки обчислень та їх аналіз

Правильний аналіз похибок забезпечує обґрунтованість висновків та достовірність результатів моделювання і вимірювань. Похибки обчислень дозволяють оцінити надійність і точність результатів.

Похибка — різниця між точним значенням величини та її наближеним значенням.

Причини виникнення похибок: обмежена точність вимірювальних приладів; округлення чисел у обчисленнях; методичні недоліки обчислень.

Пряма та обернена задачі теорії похибок

Пряма задача: визначення похибки результату на основі похибок вихідних даних. Наприклад, оцінка похибки суми, різниці, добутку або частки наближених чисел.

Обернена задача: встановлення вимог до точності вихідних даних для забезпечення заданої точності результату.

Абсолютна та відносна похибки

Нехай

a — точне значення деякої величини,

a^* – найближче значення цієї величини.

Тоді

похибка ε наближеного значення величини визначається за формулою:

$$a - a^* = \varepsilon$$

абсолютна похибка Δ_a наближеного значення величини визначається формулою:

$$\Delta_a = |a - a^*| = |\varepsilon|$$

гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta_a}$ наближеного значення величини визначається за формулою:

$$\Delta_a = |a - a^*| \leq \overline{\Delta_a}$$

На практиці задають граничну абсолютну похибку $\overline{\Delta_a}$, користуючись правилом (якщо невідомі інші дані про $\overline{\Delta_a}$): *Якщо наближене значення деякої величини записане у десятковій системі числення, то гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta_a}$ дорівнює одиниці останнього знаку (якщо значення одержане без округлення) та половині одиниці останнього знаку (якщо значення одержане з округленням). Останнім знаком вважають перший справа.*

Відносна похибка δ наближеного значення величини визначається як відношення абсолютної похибки до модуля точного або наближеного значення

$$\delta_a = \frac{|\varepsilon|}{|a|} = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad \text{або} \quad \delta_a = \frac{|\varepsilon|}{|a^*|} = \frac{\Delta_a}{|a^*|}$$

Граничною відносною похибкою називають величину $\overline{\delta_a}$, що задовольняє умову:

$$\frac{\Delta_a}{|a|} \leq \overline{\delta_a} \quad \text{або} \quad \frac{\Delta_a}{|a^*|} \leq \overline{\delta_a}.$$

Таким чином,

$$a = a^* \pm \Delta_a,$$

де $\Delta_a = |a - a^*|$.

А оскільки $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a^*|}$, то

$$a = a^*(1 \pm \delta_a)$$

Або, оскільки $|a - a^*| \leq \overline{\Delta_a}$, то

$$a^* - \overline{\Delta_a} \leq a \leq a^* + \overline{\Delta_a}$$

$$a^*(1 - \overline{\delta_a}) \leq a \leq a^*(1 + \overline{\delta_a})$$

Тут $\overline{\Delta_a}$ і $\overline{\delta_a}$ граничні абсолютна та відносна похибки; $\overline{\delta_a} = \frac{\overline{\Delta_a}}{|a^*|}$.

Значущі цифри. Правильні значущі цифри

Значущими цифрами числа називають всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Наприклад:

1. $x = 4,570345$ – всі цифри в запису цього числа значущі;

2. $x = 0,007614$ – значущі цифри тільки 7,6,1,4;

3. $x = 0,03105600$ – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0

(два останні нулі в запису числа є значущими);

4. а) $x = 3750000$ – всі цифри значущі;

б) $x = 3,75 \cdot 10^6$ – значущі цифри тільки 3,7,5.

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною в широкому сенсі (розумінні)**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta}_a$ цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається **сумнівною в широкому сенсі**.

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною у вузькому сенсі**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\Delta}_a$ цього числа не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається **сумнівною у вузькому сенсі**.

Зауваження 1. Сумнівні цифри замінюють у цілому числі нулями.

Зауваження 2. Якщо наближене число записується без вказівки його граничної абсолютної похибки $\overline{\Delta}_a$, то записується тільки правильні його цифри (як у широкому так і у вузькому сенсі). При цьому правильні нулі у кінці числа не відкидаються.

Оцінка похибки

Операція	Δ	δ	Операція	Δ	δ
$x + y$	$\Delta_x + \Delta_y$	$\frac{ x }{ x+y } \delta_x + \frac{ y }{ x+y } \delta_y$	x / y	$\frac{x\Delta_y + y\Delta_x}{y^2}$	$\delta_x + \delta_y$
$x - y$	$\Delta_x + \Delta_y$	$\frac{ x }{ x-y } \delta_x + \frac{ y }{ x-y } \delta_y$	x^n	$nx^{n-1}\Delta_x$	$n\delta_x$
$x \cdot y$	$x\Delta_y + y\Delta_x$	$\delta_x + \delta_y$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x$	$\frac{\delta_x}{n}$

Похибки при обчисленні наближених значень функції однієї змінної

Нехай задана деяка диференційна функція $y = f(x)$ та x -наближене значення аргументу x_0 .

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y = f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$. Виникає запитання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому приросту аргумента $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \cdot \Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x) > |x - x_0|$, то абсолютну похибку функції можна визначити по формулі

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається по формулі

$$\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \Delta(x).$$

Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних

Розглянемо тепер функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0 , обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u = f(x, y, z)$, а точним значенням вважають $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції одної змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$ знаходимо по формулі

$$\Delta(u) = \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right| \Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u) = \frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

Комбінаторика

Разміщення $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Перестановки $P_m = m!$

Сполучення $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Класичне означення ймовірності

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – кількість наслідків, що сприяють події A ,

n – загальна кількість наслідків

Властивості ймовірності

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{для будь-якої події}$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{для достовірної події}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad \text{для неможливої події}$$

$$\text{Ймовірність протилежної події} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Залежні і незалежні події

Дві події називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи іншої. В іншому випадку події називаються залежними.

Теорема додавання ймовірностей для сумісних подій

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Умовна ймовірність

$$P_A(B) = P(B/A) \quad \text{– ймовірність події } B \text{ за умови, що подія } A \text{ вже настала}$$

$$\text{Для незалежних подій} \quad P_A(B) = P(B)$$

Теорема множення ймовірностей для залежних подій

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

Теорема множення ймовірностей для незалежних подій

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Формула повної ймовірності

Нехай подія A може статися разом з однією з попарно несумісних подій

$H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу (гіпотези). Тоді

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) P_{H_k}(A)$$

Формула гіпотез Байєса

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{P(A)}$$

Формула Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$q = 1 - p, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Найбільш ймовірне число появи події A в n випробуваннях

$$np - q \leq k \leq np + p$$

Формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - \text{функція Гауса.}$$

Властивості функції Гауса

1. $\varphi(x) > 0$ для всіх x ;
2. функція $\varphi(x)$ - парна, $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. Для $|x| \geq 4$ $\varphi(x) \approx 0$;
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функція Лапласа}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{нормована функція Лапласа}$$

Властивості функції Лапласа

1. $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$
2. $\Phi(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$
3. функція $\Phi_0(x)$ - непарна, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$
4. Для $x \geq 4$ $\Phi(x) = 1$, $\Phi_0(x) = 0,5$

Тема 3. Випадкові величини

Дискретна випадкова величина

Закон розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Інтегральна функція розподілу $F(x) = P(X < x)$

Математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Дисперсія $D(X) = M(X - M(X))^2$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(a; b)$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Неперервна випадкова величина

Інтегральна функція розподілу $F(x) = P(X < x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Диференціальна функція розподілу (щільність розподілу ймовірностей)

$$f(x) = F'(x)$$

Умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Математичне сподівання $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Дисперсія $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $(a;b)$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Біноміальний закон розподілу

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

$$M(X) = np \quad D(X) = npq \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

$$np - q \leq k \leq np + p$$

Розподіл Пуассона

$$P_n(X = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np$$

$$M(X) = D(X) = a$$

Для простішого пуассоновського потоку: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$

λ - інтенсивність потоку

Рівномірний закон розподілу

$$X \sim R[a, b] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Експоненціальний (показниковий) закон розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ke^{-kx}, & x \geq 0 \end{cases} \quad k > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-kx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{k} \quad D(X) = \frac{1}{k^2} \quad \sigma(X) = \frac{1}{k}$$

Нормальний закон розподілу

$$X \sim N(m, \sigma)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

m – математичне сподівання,

σ - середнє квадратичне відхилення

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - m| < 3\sigma) \approx 1 \text{ (правило трьох сигм)}$$

$$P(|x - m| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0,6837;$$

$$P(|x - m| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0,9545;$$

$$P(|x - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9973.$$

Стандартний розподіл $X \sim N(0,1)$ - це нормальний розподіл при $m = 0$, $\sigma = 1$

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Центральна гранична теорема

Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ однаково розподілені з математичним сподіванням m_x і дисперсією $D_x = \sigma^2$, то при $n \rightarrow \infty$ закон

розподілу суми $S = \sum_{k=1}^n X_k$ наближається до нормального

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_S)^2}{2\sigma_S^2}}$$

$$m_S = M(S) = \sum_{k=1}^n M(X_k) = n m_x$$

$$\sigma_S^2 = D(S) = \sum_{k=1}^n D(X_k) = n \sigma^2$$

Наслідок центральної граничної теореми

При достатньо великих n (вже при $n > 10$)

$$P\left(\alpha \leq \sum_{k=1}^n X_k \leq \beta\right) \approx \frac{1}{2} \left(\Phi\left(\frac{\beta - m_S}{\sigma_S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_S}{\sigma_S}\right) \right)$$

Коваріація двох випадкових величин

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = \mu_{1,1}$$

$$K_{XY} = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$$

$$K_{XX} = DX \quad K_{YY} = DY$$

Якщо (X, Y) - дискретна двомірна випадкова величина, то

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - MX)(y_j - MY) p_{ij}.$$

Якщо (X, Y) - неперервна двомірна випадкова величина, то

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)(y - MY) f(x, y) dx dy$$

або

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy - MX \cdot MY$$

Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X і Y

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$$

Тема 4. Статистичні методи в психології

Математична статистика є ключовим інструментом у психологічних дослідженнях, який забезпечує об'єктивність, точність і надійність результатів, сприяючи науковій обґрунтованості висновків та рішень.

Основні задачі математичної статистики

1. Аналіз закономірностей у випадкових явищах.
2. Оцінка параметрів генеральної сукупності на основі вибірки.
3. Побудова статистичних моделей.
4. Перевірка статистичних гіпотез.
5. Прогнозування на основі аналізу даних.

Обґрунтування вибору математичного методу дослідження. Вибір методу залежить від мети дослідження (оцінка, прогнозування, порівняння); типу даних (кількісні чи якісні); обсягу вибірки; характеру розподілу змінних (нормальний чи ні); наявності зв'язків між змінними.

Вимірювання і шкали

Поняття вимірювання у психології: процес отримання числових даних для оцінки психічних явищ і процесів. Вимірювання у психології є процесом кількісного або якісного оцінювання психологічних явищ.

Види вимірювальних шкал

1. **Номінальна шкала.** Класифікація об'єктів за категоріями без упорядкування (наприклад, стать, професія, типи темпераменту).
2. **Порядкова шкала.** Дозволяє впорядковувати об'єкти, але без рівності інтервалів між значеннями (наприклад, ранжування рівнів стресу, рівень тривожності: низький, середній, високий).
3. **Інтервальна шкала.** Забезпечує не лише упорядкування, а й рівність інтервалів, але не має абсолютного нуля (наприклад, шкала температури за Цельсієм).

4. **Шкала відношень.** Включає абсолютний нуль, що дозволяє порівнювати значення за пропорціями (наприклад, час реакції).

Генеральна та вибіркова сукупність

Генеральна сукупність охоплює всі об'єкти, що є предметом дослідження, тоді як вибіркова сукупність є підмножиною генеральної, яка використовується для аналізу.

Збір первинного матеріалу, робота з даними та їх обробка

1. **Етапи збору даних.** Формулювання мети дослідження. Вибір методів (опитування, експеримент, спостереження). Підготовка інструментів (анкети, тести).
2. **Обробка даних.** Кодування даних. Побудова статистичних рядів розподілу. Обчислення числових характеристик.

Міри центральної тенденції включають середнє арифметичне, моду та медіану. Середнє арифметичне показує середнє значення сукупності, мода відображає найчастіше значення, а медіана — центральне значення, що ділить сукупність навпіл.

Статистичний ряд розподілу — це впорядкований набір даних, який показує частоту повторюваності значень. Його числові характеристики включають середнє, дисперсію та стандартне відхилення. Емпірична функція розподілу визначає відносну частоту випадкової величини, не перевищуючи заданого значення.

Показники варіації статистичного ряду

Дисперсія (σ^2) - середній квадрат відхилень від середнього значення.

Стандартне відхилення (σ) - корінь квадратний з дисперсії.

Розмах варіації - різниця між максимальним і мінімальним значенням.

Коефіцієнт варіації (V) - відношення стандартного відхилення до середнього значення.

Полігон частот — ламана, що з'єднує точки, відповідні частотам значень. Полігон відносних частот показує частку кожного значення відносно загальної кількості спостережень. Гістограма частот та гістограма відносних частот графічно відображають розподіл даних.

Статистичні оцінки параметрів розподілу включають точкові (наприклад, середнє значення) та інтервальні оцінки, що визначають довірчий інтервал для параметра.

Побудова довірчих інтервалів. Довірчий інтервал — інтервал, який з ймовірністю $1-\alpha$ містить істинне значення параметра.

Перевірка статистичних гіпотез

Психологічна гіпотеза — це обґрунтоване припущення про наявність певного психологічного явища, його закономірностей, зв'язків або механізмів. **Психологічна гіпотеза** формується на основі теоретичних знань, емпіричних спостережень і попередніх досліджень. Гіпотеза служить орієнтиром у проведенні психологічного дослідження і визначає його основну мету та завдання.

Наукові психологічні гіпотези висуваються для пояснення конкретних психологічних феноменів і їх взаємозв'язків. Формулюються на основі існуючих теорій і знань. Приклад: "Інтенсивність тривожності впливає на продуктивність розумової діяльності".

Статистичні гіпотези є формалізованим відображенням наукової гіпотези у вигляді математичних тверджень, які можна перевірити за допомогою методів статистичного аналізу.

Етапи перевірки статистичних гіпотез:

1. Формулювання нульової (H_0) та альтернативної (H_1) гіпотез.
2. Вибір рівня значущості (α).
3. Вибір статистичного критерію.
4. Розрахунок р-значення.
5. Висновок: прийняття або відхилення H_0 .

Перевірка статистичних гіпотез передбачає прийняття або відхилення припущення про розподіл даних. Гіпотезу про нормальний розподіл перевіряють за критерієм Пірсона (χ^2 -критерій), який порівнює емпіричний та теоретичний розподіли.

Приклад побудови моделі психологічної задачі за допомогою психологічної та статистичної гіпотези

Приклад: Вплив музики на рівень концентрації уваги у студентів

Постановка задачі

Дослідник хоче з'ясувати, чи впливає прослуховування класичної музики під час виконання завдання на рівень концентрації уваги у студентів.

1. Формулювання психологічної гіпотези

Психологічна гіпотеза. Прослуховування класичної музики покращує рівень концентрації уваги у студентів під час виконання завдань.

2. Формулювання статистичних гіпотез

Нульова гіпотеза (H_0). Музика не впливає на рівень концентрації уваги.

Середній показник рівня уваги у студентів з музикою і без музики однаковий.

Альтернативна гіпотеза (H_1). Музика позитивно впливає на рівень концентрації уваги. Середній показник рівня уваги в групі з музикою вищий, ніж у групі без музики.

3. Дослідження

1. Збір даних.

У дослідженні беруть участь дві групи студентів (по 30 осіб у кожній).

Група 1. Виконує завдання під класичну музику.

Група 2. Виконує те ж завдання у тиші.

Для оцінки концентрації використовують стандартний тест на увагу (наприклад, пошук чисел на час), результатом якого є кількість правильних відповідей.

2. Збір показників:

Група 1 (з музикою). Середній результат = 85 балів,

стандартне відхилення = 10.

Група 2 (без музики). Середній результат = 78 балів,

стандартне відхилення = 12.

4. Статистичний аналіз

Метод перевірки: двовибірковий t-тест для незалежних вибірок.

Гіпотези:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ (середні значення рівні).

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ (середнє значення групи з музикою більше).

Обчислення t-статистики та p-значення:

Якщо $p < 0.05$, H_0 відхиляється на користь H_1 .

5. Результати

Після розрахунків отримали:

$$t = 2.45, p = 0.01.$$

Оскільки $p < 0.05$, нульова гіпотеза відхиляється. Це означає, що прослуховування класичної музики має значущий позитивний вплив на рівень концентрації уваги.

6. Висновок

На основі отриманих результатів підтверджується психологічна гіпотеза: класична музика покращує рівень концентрації уваги у студентів.

Цей приклад демонструє, як психологічна гіпотеза спочатку формулюється на основі теоретичних міркувань, а потім перевіряється за допомогою статистичних методів.

Параметричні та непараметричні методи порівняння двох вибірок

Параметричні методи порівняння вибірок включають t-критерій Стюдента. Його застосовують для однієї вибірки, щоб оцінити відмінність середнього значення від теоретичного; незалежних вибірок, щоб порівняти

середні двох груп; залежних вибірок, щоб оцінити різницю між парними спостереженнями.

Непараметричні методи, такі як критерій U-Манна-Уїтні, використовуються, коли дані не відповідають нормальному розподілу. Він дозволяє порівнювати медіани двох незалежних вибірок.

Усі ці методи забезпечують можливість коректного аналізу психологічних даних, інтерпретації результатів і формулювання висновків, що сприяє розв'язанню завдань психології.

Обґрунтування вибору технології психологічної допомоги. Вибір базується на аналізі результатів психологічних тестів; індивідуальних особливостей клієнта; даних статистичного аналізу ефективності методів.

Використання інформаційних та комунікаційних технологій у дослідженнях психолога. Застосування програм для статистичного аналізу (SPSS, R, Python). Використання онлайн-опитувань і тестів для збору даних (гугл форма). Автоматизація аналізу великих масивів даних. Візуалізація результатів (графіки, діаграми).

Критерій Стюдента (t-критерій) — це статистичний тест, який використовується для перевірки гіпотез про середні значення однієї або двох вибірок, коли розподіл вибірки є нормальним або близьким до нормального, а розмір вибірки невеликий (звичайно, менше 30).

Типи задач, де застосовується критерій Стюдента

1. Перевірка середнього значення однієї вибірки (One-sample t-test).

Застосовується, коли необхідно перевірити, чи дорівнює середнє значення вибірки заданому значенню. Наприклад, чи середній бал студентів з певного предмету дорівнює 70.

2. **Перевірка рівності середніх значень двох незалежних вибірок (Independent two-sample t-test).** Використовується для порівняння середніх значень двох незалежних груп, наприклад, чи відрізняється середня зарплата чоловіків та жінок в одній організації.
3. **Перевірка рівності середніх значень двох залежних вибірок (Paired t-test).** Використовується для порівняння середніх значень двох залежних або парних вибірок. Наприклад, дослідження ефективності нового препарату шляхом порівняння середніх показників здоров'я до і після лікування у однієї і тієї ж групи пацієнтів.
4. **Оцінка довірчих інтервалів для середнього значення.** t-критерій використовується для побудови довірчих інтервалів для середнього значення вибірки, коли розмір вибірки невеликий і стандартне відхилення популяції невідоме.

Приклади задач

1. **Порівняння ефективності двох методів навчання.** Є дві групи студентів, одна з яких навчається за традиційною методикою, а інша — за новою. Застосування t-критерію дозволяє визначити, чи є статистично значуща різниця в середніх балах між цими групами.
2. **Оцінка впливу дієти на вагу.** Перед початком і після закінчення дієти вимірюється вага групи людей. Застосування парного t-тесту дозволяє оцінити, чи є статистично значущі зміни у вазі після дієти.
3. **Перевірка відповідності середнього значення стандарту.** Виробник напоїв хоче перевірити, чи середній вміст цукру в новому продукті відповідає встановленому стандарту 20 грам на порцію. Для цього застосовується одновибірковий t-тест.

Критерій Стюдента є потужним інструментом для статистичного аналізу, особливо коли дані мають нормальний розподіл і розмір вибірки невеликий. Цей

метод допомагає перевіряти гіпотези, що стосуються середніх значень, і широко використовується в психології.

Критерій Пірсона (χ^2 -критерій) – це статистичний тест, який використовується для перевірки гіпотез про відповідність спостережуваних і теоретичних частот або для оцінки зв'язку між категоріальними змінними. Його часто застосовують у задачах, де дані представлені у вигляді таблиць спряженості (таблиць частот).

Типи задач, де застосовується критерій Пірсона

1. **Перевірка відповідності спостережуваних і теоретичних розподілів (χ^2 -тест на відповідність).** Використовується, коли необхідно перевірити, чи спостережувані частоти в певних категоріях відповідають теоретично очікуваним частотам. Наприклад, чи відповідає спостережуваний розподіл виборців певного віку теоретично очікуваному розподілу.
2. **Перевірка незалежності двох категоріальних змінних (χ^2 -тест незалежності).** Застосовується, коли потрібно перевірити, чи є залежність між двома категоріальними змінними. Наприклад, чи залежить вибір певного товару від статі покупця.
3. **Перевірка однорідності (χ^2 -тест на однорідність).** Використовується для перевірки, чи однакові розподіли певної змінної в різних вибірках. Наприклад, перевірка, чи однакові розподіли улюблених видів спорту серед студентів різних факультетів.

Приклади задач

1. **Перевірка генетичних розподілів.** В задачах генетики часто використовують критерій Пірсона для перевірки, чи спостережуваний розподіл ознак у потомстві відповідає теоретичному розподілу за законом Менделя.

2. **Аналіз маркетингових даних.** Наприклад, дослідження залежності між віковою групою та вибором певного типу продукту. Критерій Пірсона допоможе визначити, чи існує зв'язок між цими двома змінними.
3. **Перевірка рівномірності розподілу голосів на виборах.** Якщо є підозри на фальсифікації, χ^2 -тест можна застосувати для перевірки відповідності спостережуваних результатів голосування теоретичному рівномірному розподілу.
4. **Оцінка ефективності рекламних кампаній.** Аналіз залежності між регіоном та ефективністю рекламної кампанії (кількість покупок після проведення кампанії в різних регіонах).

Критерій Пірсона є дуже корисним для аналізу якісних даних, зокрема для перевірки відповідності спостережуваних даних очікуваним значенням або для оцінки залежності між двома категоріальними змінними. Він широко використовується в психології, соціальних науках, медицині, маркетингу, генетиці та інших галузях, де необхідно аналізувати взаємозв'язки між категоріальними змінними.

U-критерій Манна-Уїтні (також відомий як **тест Манна-Уїтні** або **непараметричний U-тест**), є одним із найбільш використовуваних непараметричних методів для порівняння двох незалежних вибірок. Він дозволяє визначити, чи відрізняються розподіли двох вибірок без припущення про нормальний розподіл.

Сутність U-критерію Манна-Уїтні: U-критерій Манна-Уїтні перевіряє нульову гіпотезу про те, що дві вибірки походять з однакових розподілів. Тобто, він оцінює, чи одна з вибірок має значно більші або менші значення порівняно з іншою.

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Дисперсійний аналіз, кореляційний та регресійний аналіз є ключовими методами математичної статистики, які використовуються для оцінки достовірності результатів психологічних досліджень, встановлення зв'язків між змінними та побудови моделей для прогнозування.

Дисперсійний аналіз застосовується для оцінки міжгрупових та внутрішньогрупових дисперсій. Міжгрупова дисперсія відображає варіацію між середніми значеннями груп, а внутрішньогрупова – варіацію всередині кожної групи. У психології однофакторний дисперсійний аналіз дозволяє оцінити вплив одного фактора на залежну змінну. Модель такого аналізу порівнює середні значення декількох груп і визначає, чи є різниця між ними статистично значущою. Наприклад, дослідження ефективності різних методів навчання на академічну успішність студентів. У випадку двофакторного дисперсійного аналізу враховується вплив двох факторів одночасно, причому з врахуванням або без врахування взаємодії між ними. Наприклад, аналіз впливу статі та віку на рівень тривожності. Результати дисперсійного аналізу інтерпретуються на основі статистичних критеріїв, що дозволяє зробити висновки про значущість впливу факторів.

Кореляційний аналіз використовується для вивчення зв'язку між змінними. Кореляція може бути лінійною, нелінійною, парною або множинною. Парна кореляція визначає зв'язок між двома змінними, а множинна – між кількома незалежними змінними і однією залежною. Основними показниками кореляції є коефіцієнт кореляції Пірсона для кількісних даних і Спірмена для рангових даних. Коефіцієнт Пірсона використовується для нормального розподілу і кількісних змінних, а Спірмена – для непараметричних даних, наприклад, ранжування рівня стресу. Коефіцієнт кореляції Кендалла застосовується для невеликих вибірок і дозволяє оцінити силу зв'язку між

ранговими змінними. Множинний кореляційний аналіз допомагає встановити комплексний вплив кількох змінних на одну залежну змінну. Його реалізація можлива за допомогою статистичних пакетів, таких як SPSS чи R.

Коефіцієнт кореляції Пірсона

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Де: r – коефіцієнт кореляції Пірсона;

x_i і y_i – значення змінних X та Y для i -го спостереження;

$\bar{x}$ і $\bar{y}$ – середні значення змінних X та Y ;

n – кількість спостережень.

Коефіцієнт кореляції Спірмена

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Де r_s – коефіцієнт кореляції Спірмена;

d_i – різниця між рангами відповідних значень x_i і y_i ;

n — кількість спостережень.

Формула коефіцієнта кореляції Кендалла

$$\tau = \frac{C - D}{\frac{1}{2}n(n - 1)}$$

Де C – кількість узгоджених пар спостережень (x_i, y_i) і (x_j, y_j)

(якщо $x_i > x_j$ та $y_i > y_j$ або якщо $x_i < x_j$ та $y_i < y_j$);

D – кількість неузгоджених пар (якщо $x_i > x_j$ та $y_i < y_j$ або якщо $x_i < x_j$ та $y_i > y_j$);

n – кількість спостережень.

Регресійний аналіз використовується для побудови моделей, що описують залежність між змінними. У психології часто застосовують лінійну регресію для вивчення впливу змінних, таких як мотивація та успішність, на загальний результат. Нелінійні регресійні моделі застосовуються у випадках складних залежностей, наприклад, для моделювання психологічних реакцій на стрес. Логістична регресія використовується для прогнозування бінарних результатів, наприклад, наявності або відсутності депресії. Її особливістю є використання ймовірностей для побудови моделей. Множинна регресія дозволяє оцінити вплив кількох факторів на залежну змінну, що є важливим у психологічних дослідженнях.

Багатовимірний статистичний аналіз охоплює **кластерний, дискримінантний і факторний аналіз**.

Кластерний аналіз використовується для групування об'єктів на основі схожості, наприклад, для класифікації учнів за стилями навчання.

Дискримінантний аналіз дозволяє створити моделі для класифікації об'єктів за групами, наприклад, у дослідженні професійної орієнтації.

Факторний аналіз спрямований на визначення прихованих факторів, що впливають на змінні, наприклад, виявлення основних компонентів, які

визначають особистісні характеристики. Спільними рисами кластерного, дискримінантного та факторного аналізу є аналіз багатовимірних даних, тоді як відмінності полягають у меті: класифікація, побудова дискримінантної моделі або виявлення факторів.

Висновки за результатами багатовимірної аналізу дозволяють систематизувати дані, глибше зрозуміти природу досліджуваних явищ та представити результати у вигляді графіків і діаграм, що сприяє більш ефективній інтерпретації та використанню у практичній діяльності.

Приклади застосування математичних методів в психологічних задачах

Математичні методи займають важливе місце у вирішенні психологічних задач, забезпечуючи точність аналізу, систематизацію даних та прогнозування результатів. Розглянемо приклади застосування основних математичних методів у психології.

Приклад 1. Описова статистика. Використовується для підсумування та упорядкування психологічних даних.

Наприклад, середній рівень стресу у вибірці людей визначається шляхом обчислення середнього арифметичного. Медіана дозволяє оцінити середню точку розподілу даних, а стандартне відхилення вказує на варіабельність показників.

Приклад 2. Кореляційний аналіз. Використовується для виявлення взаємозв'язку між двома змінними.

Наприклад, дослідження взаємозв'язку між рівнем стресу та академічною успішністю може показати, чи впливає високий рівень стресу на зниження оцінок. Коефіцієнт кореляції Пірсона визначає силу та напрямок цього зв'язку. Кореляція

змінюється від -1 до 1. Значення, близьке до 1 або -1, вказує на сильний зв'язок, а близьке до 0 – на слабкий. Наприклад, кореляція між тривалістю сну та продуктивністю на роботі складає 0.7, що вказує на сильний позитивний зв'язок.

Приклад 3. Регресійний аналіз. Використовується для прогнозування значення залежної змінної на основі незалежних змінних. Наприклад, за допомогою регресійного аналізу можна передбачити рівень професійного вигорання на основі таких змінних, як тривалість робочого дня, кількість стресових ситуацій та рівень підтримки в колективі. Наприклад, якщо коефіцієнт регресії між кількістю годин роботи та рівнем вигорання дорівнює 0.5, то збільшення робочого часу на 1 годину підвищує рівень вигорання на 0.5 бала.

Приклад 4. Тестування гіпотез дозволяє перевіряти припущення щодо відмінностей або зв'язків між змінними. Наприклад, за допомогою t-тесту можна перевірити, чи існують статистично значущі відмінності між рівнем мотивації у групах чоловіків і жінок. Критерій χ^2 дозволяє визначити, чи відрізняється розподіл категорійних змінних, наприклад, типів темпераменту серед різних вікових груп.

Правило: Встановіть нульову гіпотезу H_0 (наприклад, відмінності немає) та альтернативну H_1 . Використовуйте критичне значення для прийняття рішення.

Приклад: У дослідженні мотивації p -значення = 0.03. Оскільки $p < 0.05$, нульова гіпотеза відхиляється.

Приклад 5. Факторний аналіз використовується для виявлення латентних змінних або факторів, що пояснюють взаємозв'язки між великою кількістю змінних. Наприклад, у психометрії цей метод допомагає виділити ключові компоненти, такі як екстраверсія або нейротизм, на основі відповідей респондентів у психологічних тестах.

Наприклад, у тестуванні особистісних рис можна виділити два фактори: соціальна активність та емоційна стабільність.

Приклад 6. Кластерний аналіз використовується для групування об'єктів за схожістю. Наприклад, кластеризація школярів за рівнем мотивації до навчання може допомогти виявити групи з низькою, середньою та високою мотивацією для подальшої розробки педагогічних підходів. Якщо обрати метрику відстані (наприклад, евклідову) та метод кластеризації (ієрархічний або k-means), то в результаті групування студентів за їхнім стилем навчання ми отримаємо три основні кластери: теоретики, практики та інтегратори.

Приклад 7. Аналіз надійності та валідності тестів використовується в психологічному тестуванні для оцінки якості інструментів. Наприклад, коефіцієнт Кронбаха (α) дозволяє оцінити внутрішню узгодженість тесту, а аналіз кореляцій між пунктами тесту виявляє, наскільки кожен пункт відповідає загальній шкалі. Надійність вважається прийнятною, якщо $\alpha > 0.7$. Для тесту на депресію значення $\alpha = 0.85$ свідчить про високу надійність.

Приклад 8. Моделювання психологічних процесів використовується для аналізу складних систем. Наприклад, моделювання прийняття рішень в умовах стресу за допомогою математичних моделей, таких як дерева рішень, дозволяє передбачити реакції людей на певні ситуації.

Правило: Створіть модель, що описує основні етапи процесу, та перевірте її адекватність на основі емпіричних даних.

Приклад: Модель прийняття рішень у кризових ситуаціях включає три етапи: оцінка ризику, вибір стратегії та реалізація рішення.

Приклад 9. Дискримінантний аналіз застосовується для класифікації об'єктів за заданими критеріями. Наприклад, аналіз даних про респондентів дозволяє класифікувати їх на групи з високим та низьким рівнем тривожності.

Правило: Використовуйте функцію дискримінантів для максимізації різниць між групами.

Приклад: Аналіз студентів показує, що фактори "академічна підтримка" і "самостійність" ефективно відокремлюють групи з різним рівнем мотивації.

Приклад 10. Психометрія використовується для побудови та аналізу шкал у тестах. Наприклад, за допомогою математичних методів визначаються оптимальні порогові значення тестів на визначення депресії, щоб мінімізувати помилкові результати.

Правило: Обчисліть дискримінаційну здатність кожного пункту тесту, щоб забезпечити його відповідність загальній шкалі.

Приклад: У тесті на стрес видалено пункт із низьким коефіцієнтом кореляції ($r = 0.1$).

Приклад 11. Багатовимірний аналіз – Використовується для аналізу даних, що мають велику кількість змінних. Наприклад, аналіз впливу декількох факторів, таких як тривалість сну, рівень фізичної активності та раціон харчування, на рівень когнітивних функцій у людей похилого віку.

Правило: Використовуйте методи зменшення розмірності (наприклад, головні компоненти) для спрощення інтерпретації результатів.

Приклад: Дослідження показало, що когнітивні функції найбільше залежать від тривалості сну та збалансованого харчування.

Застосування математико-статистичних методів у психології дозволяє отримати точні результати, що сприяють глибшому розумінню психічних явищ та ефективному вирішенню практичних задач. Використання комп'ютерних засобів, таких як SPSS, R чи Python, значно спрощує проведення аналізу та підвищує його ефективність.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Стрелковська І.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси (для фахівців у галузі ІТ-технологій) / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2018. – 384 с.
2. Стрелковська І.В. Математична статистика / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2019. – 110 с.
3. Вдовенко В.В. Математичні методи в психології: Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії» Авангард», 2017. – 112 с.
4. Москальов І.О., Лисенко Д.П. Застосування методів математичної статистики у психологопедагогічних дослідженнях: навч. посіб. Київ : НУОУ, 2023. 187 с.
5. Статистичні методи у психології: курс лекцій з дисципліни для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 053 Психологія ОС «Магістр» / І.О. Корнієнко, О.Ю. Воронова.– Мукачево: МДУ, 2019. – 44 с.
6. Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с.

Допоміжна

1. Климчук В.О. Факторний аналіз: використання у психологічних дослідженнях // Практична психологія та соціальна робота. – 2006. – №8. – С. 43-48.
2. Руська Р. В. Теорія імовірності та математична статистика в психології : навч. посіб. – Тернопіль. – 2020. – 112 с. Навч.посіб.– Тернопіль.– 2020. – 112 с.
3. Климчук В.О. Математичні методи у психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. — К.: Освіта України. — 2009. — 288 с.
4. Лиходєєва Г.В. Комп'ютерний практикум з математичної статистики : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2018. 98 с.

Інформаційні ресурси

1. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Київ: НБУВ, 2013-2015. – Режим доступу: www.nbuv.gov.ua
2. Український інститут інтелектуальної власності [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Київ: УІПВ, 2017. – Режим доступу: <http://www.uipv.org>
3. Математичні методи в психології. Курс відео лекцій. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCu7Tj9z4NnyenGXmkvMGEnA/videos>

ЗМІСТ

1. Опис навчальної дисципліни.....	3
2. Заплановані результати навчання за навчальною дисципліною ...	4
3. Програма навчальної дисципліни.....	5
4. Структура навчальної дисципліни.....	6
5. Питання до практичних занять.....	7
6. Самостійна робота.....	8
7. Теми доповідей	11
8. Види та методи контролю.....	13
9. Питання до заліку.....	13
10. Критерії підсумкової оцінки знань студентів.....	15
11. План – конспект лекцій дисципліни «Математичні методи в психології».....	18
12. Рекомендована література.....	47

Навчальне видання

Григор'єва Тетяна Ігорівна
Бакуніна Олена Валеріївна

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ

Методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів