

Національний університет
"Одеська юридична академія"

Факультет кібербезпеки та інформаційних
технологій

Кафедра кібербезпеки

А. О. Кореновський

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО КУРСУ
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

Тема 5. Диференціювання функцій

Одесса
2020

Автор:

А. О. Кореновський – професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія»

**Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична академія»,
протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.**

Рецензенти:

Ковальчук В.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, академік Інженерної Академії України, директор Одеського фахового коледжу комп'ютерних технологій Одеського державного екологічного університету

Логінова Н.І. – доцент, кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія»

Методичні вказівки до курсу Математичного аналізу «Тема 5. Диференціювання функцій» / А. О. Кореновський. – О.: НУ «ОЮА», 2020. – 87 с.

Означення диференційовності та похідної. Геометричний сенс. Зв'язок з неперервністю, односторонні похідні. Властивості похідних (лінійність, похідна добутку та відношення, похідна композиції та оберненої функції).

Означення 1. Нехай функція f означена на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$. Якщо існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то вона називається похідною функції f в точці x_0 і позначається $f'(x_0)$, або $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$.

Означення 2. Нехай функція f означена на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$. Функцію f назовемо диференційовною в точці x_0 , якщо існує така стала A (що залежить від x_0 і не залежить від x), що справедлива рівність

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x),$$

де $r(x) = o(x - x_0)$ ($x \rightarrow x_0$).

Коротше означення диференційовності можна записати у наступному вигляді:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Легко бачити, що ці два означення еквівалентні у тому сенсі, що диференційовність функції рівносильна існуванню похідної, тобто справедлива

Теорема. Функція f диференційовна в точці $x_0 \in (a, b)$ тоді і лише тоді, коли у f існує похідна в точці x_0 і при цьому $A = f'(x_0)$.

Сенс диференційовності полягає в тому, що в деякому околі точки x_0 функція f може бути зображена у вигляді лінійної функції $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ наближено з точністю нескінченно малої більш високого порядку, ніж $(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.

Зв'язок між диференційовністю і неперервністю встановлює наступна

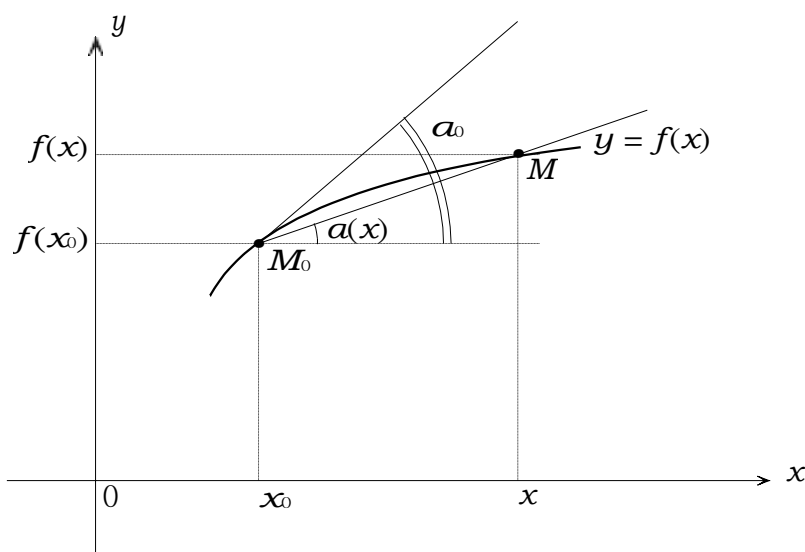
Теорема. Якщо функція f диференційовна в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці.

Оберене твердження не має місця, тобто із неперервності функції f не випливає її диференційовність. Прикладом може бути функція $f(x) = |x|$, яка є неперервною в точці $x_0 = 0$, і для якої вираз

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sign} x$$

не має границі при $x \rightarrow 0$, отже функція f не має похідної в точці $x_0 = 0$. Таким чином, f не є диференційовною в нулі.

Отже, неперервність є необхідною, але не достатньою умовою диференційовності. Іншими словами, якщо функція розривна в точці x_0 , то вона недиференційовна в цій точці. Обернене твердження не має місця.



З геометричної точки зору похідна $f'(x_0)$ – це тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 , з координатами $(x_0, f(x_0))$. При цьому дотичною до графіка функції f в точці M_0 називається границя положення хорди M_0M при прямуванні точки $M(x, f(x))$ уздовж кривої $y = f(x)$ до точки M_0 . Справді, якщо функція f диференційовна в точці x_0 , то при прямуванні M до M_0 уздовж кривої $y = f(x)$ хорда

M_0M має тангенс кута нахилу, який дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

і при $x \rightarrow x_0$ точка M прямує до M_0 уздовж кривої $y = f(x)$. Оскільки

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

то $\operatorname{tg} \alpha(x) \rightarrow f'(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, тобто хорда прагне зайняти деяке граничне положення, тангенс кута нахилу α_0 якого дорівнює $f'(x_0)$. Звідси отримуємо рівняння дотичної до графіка диференційовної в точці x_0 функції $y = f(x)$:

$$k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Приклади. Раніше ми наводили таблицю еквівалентних функцій, з якої можемо встановити диференційовність деяких функцій. Наприклад, якщо рівність $\sin x = x + o(x)$ ($x \rightarrow 0$) записати у вигляді $\sin x - \sin 0 = 1 \cdot (x - 0) + o(x - 0)$, то бачимо, що функція $f(x) = \sin x$ диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна в цій точці дорівнює 1. Це також можна встановити, користуючись означенням похідної:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наведемо ще один приклад:

$$a^x - 1 = x \cdot \ln a + o(x) \quad (x \rightarrow 0) \Leftrightarrow$$

$$a^x - a^0 = \ln a(x - 0) + o(x - 0) \quad (x \rightarrow 0),$$

тобто функція $f(x) = a^x$ диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна в цій точці дорівнює $\ln a$.

Вправа. Розглянути всі інші приклади із згаданої таблиці.

Означення. Нехай функція f означена в деякому правому півоколі $[x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0 . Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то її називають правою похідною функції f в точці x_0 і позначають через $f'_+(x_0)$. Аналогічно означається похідна зліва $f'_-(x_0)$ функції f в точці x_0 .

Нехай функція f означена в деякому околі точки x_0 . Легко бачити, що

- а) якщо існує $f'_+(x_0)$, то f неперервна справа в точці x_0 ;
- б) якщо існує $f'_-(x_0)$, то f неперервна зліва в точці x_0 ;
- в) якщо існують $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0)$, то f неперервна в точці x_0 ;
- г) для того щоб f була диференційовною в точці x_0 , необхідно та достатньо, щоб у неї існували похідні зліва та справа і вони дорівнювали одна одній.

Приклад. Нехай $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Тоді легко бачити, що $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Диференційовність та арифметичні операції.

Теорема. Нехай функції f і g означені на інтервалі (a, b) і диференційовні в точці x_0 . Тоді

- а) функція $f + g$ диференційовна в точці x_0 і

$$(f + g)^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) + g^{(j)}(x_0);$$

- б) функція $f \cdot g$ диференційовна в точці x_0 і

$$(f \cdot g)^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) g(x_0) + f(x_0) g^{(j)}(x_0);$$

- в) якщо $g(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$), то функція f/g диференційовна в точці x_0 і

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(j)}(x_0) = \frac{f^{(j)}(x_0) g(x_0) - g^{(j)}(x_0) f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доведення. Твердження а) очевидне. Доведемо б). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Використовуючи неперервність функції g в точці x_0 , яка випливає з її диференційовності, переходячи до границі при $x \rightarrow x_0$, отримуємо б).

Для доведення с) розглянемо спочатку випадок $f(x) \equiv 1$. Тоді

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (x \rightarrow x_0).$$

У загальному випадку, застосовуючи твердження б), отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Зауваження. Безпосередньо із означення похідної випливає, що $(c \cdot f)'(x_0) = c f'(x_0)$, де c – стала. Тому, використовуючи частину а) доведеної теореми, отримуємо, що операція диференціювання є лінійною операцією, тобто похідна лінійної

комбінації двох диференційовних функцій є лінійною комбінацією їх похідних –

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0),$$

де α и β – сталі.

Похідна композиції та оберненої функції

Теорема (про похідну композиції). Нехай функція f означена на інтервалі I і диференційовна в точці $x_0 \in I$, а функція g означена на інтервалі $J \supset f(I)$ і диференційовна у відповідній точці $y_0 = f(x_0) \in J$. Тоді композиція $\phi(x) = g(f(x))$ диференційовна в точці x_0 , причому

$$\phi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Теорема (про похідну оберненої функції). Нехай функція f строго зростає на інтервалі I , неперервна на I , диференційовна в точці $x_0 \in I$ і $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $g = f^{-1}$ диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$, причому $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1. Нехай $f(x) \equiv C$. Тоді, очевидно, $f'(x) = 0$.

2. Нехай $f(x) = x^n$ ($-\infty < x < +\infty, n \in \mathbb{N}$). Тоді

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{n-k} h^{k+1} - x^n = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} h^k = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} h^{k-1} \rightarrow nx^{n-1} \quad (h \rightarrow 0).$$

Звідси випливає, що $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.

3. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Тоді

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2} \quad (h \rightarrow 0).$$

Отже, $\frac{1}{x}j = -\frac{1}{x^2}$

4. Нехай $f(x) = x^a$ ($x > 0$, $a \in \mathbb{R}$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} ((x+h)^a - x^a) &= \frac{x^a}{h} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^a - 1 = \\ &= \frac{x^a}{h} \cdot \frac{\frac{h}{x} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^a - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{h}{x} \rightarrow a \cdot x^{a-1} \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

тобто $(x^a)j = a \cdot x^{a-1}$.

5. Нехай $f(x) = a^x$ ($-\infty < x < +\infty$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тоді

$$\frac{1}{h} (a^{x+h} - a^x) = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow a^x \cdot \ln a \quad (h \rightarrow 0),$$

тобто $(a^x)j = a^x \cdot \ln a$.

6. Нехай $f(x) = \log_a x$ ($x > 0$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\log_a(x+h) - \log_a x) &= \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} \rightarrow \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

тобто $(\log_a x)j = \frac{1}{x \ln a}$.

7. Нехай $f(x) = \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\sin(x+h) - \sin x) &= \frac{1}{h} (\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x) = \\ &= \frac{1}{h} \sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

тобто $(\sin x)j = \cos x$.

8. Аналогічно отримуємо, що $(\cos x)j = -\sin x$.

9. Нехай $f(x) = \operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(\operatorname{tg} x)^j = \frac{\sin x}{\cos x}^j = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Нехай $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ($x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(\operatorname{ctg} x)^j = (\operatorname{tg} x)^{-j} = -(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

11. Нехай $y = \arcsin x$ ($-1 < x < 1$), т. е. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.
За правилом диференціювання оберненої функції, $y_x^j = \frac{1}{x_y^j}$, де $x = \sin y$, тобто

$$y_x^j = \frac{1}{(\sin y)_y^j} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Але $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$, причому під коренем потрібно взяти знак "+", оскільки при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ маємо $\cos y > 0$. Звідси $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2}$, тобто

$$(\arcsin x)^j = (\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

12. Нехай $y = \arccos x$ ($-1 < x < 1$), т. е. $0 < y < \pi$. Як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$y_x^j = \frac{1}{x_y^j} = \frac{1}{(\cos y)_y^j} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При цьому, як і вище, ми скористались рівністю $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

13. Нехай $y = \operatorname{arctg} x$ ($-\infty < x < +\infty$). Як і в двох попередніх прикладах, маємо

$$y_x^j = \frac{1}{x_y^j} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)_y^j} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

14. Нехай $y = \operatorname{arccotg} x$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді

$$y^j_x = \frac{1}{x^j_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)^j_y} = \frac{1}{\sin^2 y} = \frac{1}{-1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

15. Нехай $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді, як легко обчислити,

$$(\operatorname{sh} x)^j = \operatorname{ch} x.$$

16. Нехай $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($-\infty < x < +\infty$). Тоді, як легко обчислити,

$$(\operatorname{ch} x)^j = \operatorname{sh} x.$$

Приклад 1. Нехай $f(x) = \ln x + \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$. Тоді

$$f^j(x) = \frac{1}{x + \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2x}}{2 \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}} = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}.$$

Приклад 2. Нехай $f(x) = \ln \frac{1}{x}^{\arcsin x}$. Для зручності диференціювання представим функцію f в такому вигляді:

$$f(x) = \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)).$$

Тепер легко обчислюємо похідну

$$\begin{aligned} f^j(x) &= \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)) \times \\ &\times \frac{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} \ln(-\ln x) + \arcsin x \cdot \frac{1}{-\ln x} \cdot -\frac{1}{x}}{1-x^2} = \\ &= \ln \frac{1}{x}^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} \ln \frac{1}{\ln x} + \arcsin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Нехай $f(x) = x|{}^3|$. В околі точки $x > 0$ функція $f(x)$ співпадає з функцією x^3 і тому $f^j(x) = 3x^2$ при $x > 0$.

В околі точки $x_0 < 0$ функція $f(x)$ співпадає з функцією x^3 і тому $f'(x) = -3x^2$ при $x < 0$. В правому півоколі нуля функція f співпадає з функцією x^3 і тому $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. В лівому півоколі нуля функція f співпадає з функцією $-x^3$ і тому $f'(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$. Оскільки в нулі ліва та права похідні функції f співпадають, то f диференційовна в точці $x = 0$ і $f'(0) = 0$. Отже, отримали $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$.

Дослідження функцій на диференційовність та обчислення похідних за означенням.

1. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x}, & x > -1, x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В кожній точці $x_0 > -1, x_0 \neq 0$ функція диференційовна за арифметичними властивостями диференційовних функцій. Дослідимо функцію на диференційовність в точці $x_0 = 0$. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

Це означає, що дана функція диференційовна в точці $x_0 = 0$ і її похідна $f'(0) = 1$.

2. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x \ln(1+|x|)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В кожній точці $x_0 \neq 0$ функція диференційовна за арифметичними властивостями диференційовних функцій. Дослідимо функцію на диференційовність в точці $x_0 = 0$. При $x < 0$ задана функція має вигляд $f(x) = \frac{\sin x \ln(1-x)}{x}$, а при $x > 0$ функція

дорівнює $f(x) = \frac{\sin x \ln(1+x)}{x}$. Тому маємо

$$f^j_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$f^j_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x \ln(1-x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1-x)}{x} = -1.$$

Оскільки $f^j_-(0) \neq f^j_+(0)$, то дана функція не є диференційовною в точці

$$x_0 = 0$$

Дослідження на диференційовність функції, яка задана різними формулами на різних проміжках.

1. Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Якщо $|x_0| = 1$, то функція f диференційовна в точці x_0 за арифметичними властивостями диференційовних функцій.

Нехай $x_0 = 1$. В правому півколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ і тому

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = f(1),$$

тобто функція неперервна справа в точці $x_0 = 1$. Обчислимо в цій точці праву похідну

$$f^j_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

В лівому півколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і тому

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = f(1),$$

тобто функція неперервна зліва в точці $x_0 = 1$. Обчислимо в цій точці ліву похідну

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctg x - \arctg 1}{x - 1} = (\arctg x)'|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}|_{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки, як виявилось, $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2}$, то функція f диференційовна в точці $x_0 = 1$ і її похідна дорівнює $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Нехай $x_0 = -1$. В правому півколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = \arctg x$ і тому

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \arctg x = \frac{\pi}{4} = \arctg 1 = f(1),$$

тобто функція неперервна справа в точці $x_0 = -1$. Обчислимо в цій точці праву похідну

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\arctg x - \arctg 1}{x - 1} = (\arctg x)'|_{x=-1} = \frac{1}{1+x^2}|_{x=-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В лівому півколі точки $x_0 = 1$ функція дорівнює $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ і тому

$$\begin{aligned} f(-1-0) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{4} - 1 \neq f(-1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Таким чином, функція не є неперервною зліва в точці $x_0 = -1$ і тому вона також не має лівої похідної в цій точці.

Отже, отримали, що задана функція диференційовна у всіх точках, окрім точки $x_0 = -1$.

Знаходження рівняння дотичної та нормалі до графіка диференційовної функції в точці.

Рівняння дотичної до графіка функції в точці x_0 має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, а рівняння нормалі до графіка функції в точці x_0 має вигляд $(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$.

1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = \arcsin x$ в точці $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Маємо } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-3/4}} = 2.$$

Тому рівняння дотичної набуває такого вигляду

$$y = \frac{\pi}{3} + 2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

а рівняння нормалі –

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(y - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Знаходження лінійної частини приросту диференційовної функції в заданій точці та обчислення наближеного значення функції, замінюючи її приріст лінійною частиною.

Згідно з означенням диференційовності, приріст диференційовної в точці x_0 функції f може бути представленим у вигляді

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot dx + o(dx), \quad dx \rightarrow 0.$$

Перший доданок в правій частині називається лінійною частиною приросту функції.

1. Заміняючи приріст функції його лінійною частиною, наближено обчислити $\sin 61^\circ$.

Покладемо $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $dx = \frac{\pi}{180}$. Тоді, замінюючи повний приріст функції його лінійною частиною, отримаємо

$$\sin 61^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Обчислення похідної явно заданої функції, користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання.

Нагадаємо **таблицю похідних** елементарних функцій:

1. $f(x) \equiv C$, $f'(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$).

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$).

4. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ ($a \in \mathbb{R}$, $x > 0$).

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).

7. $(\sin x)' = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$).

8. $(\cos x)' = -\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$).

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$).

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$).

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ($x \in \mathbb{R}$).

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ($x \in \mathbb{R}$).

17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$).

та правила диференціювання:

лінійність:

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

похідна добутку:

$$(u(x)v(x))^j = u^j(x)v(x) + u(x)v^j(x),$$

похідна відношення (частки):

$$\frac{u(x)}{v(x)}^j = \frac{u^j(x)v(x) - u(x)v^j(x)}{v^2(x)},$$

диференціювання складеної функції (композиції):

$$(f(g(x)))^j = f^j(g(x))g^j(x),$$

похідна оберненої функції:

$$f^{-1}(y)^j = \frac{1}{f^j(x)}, \text{ де } y = f(x).$$

Кілька прикладів застосування.

$$1. f(x) = \ln x + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1},$$

$$f^j(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 1 + \frac{2x}{2 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$2. f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x},$$

$$f^j(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \cos^2 x - e^{\operatorname{tg} x} 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = e^{\operatorname{tg} x} \frac{1 + \sin 2x}{\cos^4 x}.$$

$$3. f(x) = x^x = e^{x \ln x}, \quad f^j(x) = e^{x \ln x} \ln x + x \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1).$$

$$4. f(x) = \ln \frac{1}{x}^{\arcsin x} = \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)),$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \exp(\arcsin x \cdot \ln(-\ln x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(-\ln x) + \\
 &\quad + \arcsin x \cdot \frac{1}{-\ln x} \cdot -\frac{1}{x} = \\
 &= \ln \frac{1}{x} \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1}{\ln x} + \arcsin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

Основні теореми диференціального числення.

Теорема Ферма. Нехай функція f означена на інтервалі (a, b) і в деякій точці $x_0 \in (a, b)$ набуває найбільшого (найменшого) значення на цьому інтервалі. Якщо існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

З геометричної точки зору теорема Ферма означає що якщо в точці екстремума у графіка функції існує дотична, то вона паралельна до осі Ox .

Зауваження. У функції $f(x) = |x|$, $(-1 < x < 1)$ в точці $x_0 = 0$ є екстремум (мінімум), але похідної в цій точці функція не має. Теорема Ферма означає, що для пошуку екстремума функції f у внутрішніх точках області визначення достатньо дослідити поведінку функції f лише в тих точках, в яких похідна або обертається в нуль, або не існує. Екстремума не може бути в тих точках, в яких похідна існує і не дорівнює нулю. Але із того, що похідна дорівнює нулю в точці x_0 не випливає, що x_0 – точка екстремума. Наприклад, у функції $f(x) = x^3$ в точці $x_0 = 0$ екстремума немає і в той же час $f'(0) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) , і $f(a) = f(b)$. Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$.

Наслідок. Між будь-якими двома коренями диференційовної функції існує корінь похідної.

Приклад. Рівняння непарного степеня $x^5 + x - 1 = 0$ має дійсний корінь. Покажемо, що він єдиний. Позначимо $y =$

$x^5 + x \perp$. Тоді $y' = 5x^4 + 1 > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якби дане рівняння мало б інший корінь, то, згідно з наслідком, знайшлась би точка, в якій похідна y' оберталася б в нуль, а це неможливо.

Теорема Лагранжа (формула скінченних приростів). Нехай функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Геометричний сенс теореми Лагранжа полягає в тому, що існує точка $\xi \in (a, b)$, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна до відрізка, який з'єднує точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$.

Рівність, яка отримана в теоремі Лагранжа, можна переписати в такому вигляді

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

або в такому

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

де $0 < \theta < 1$.

Дві останні рівності називають формулами скінченних приростів.

Наслідок 1. Нехай функція f на інтервалі (a, b) має обмежену похідну. Тоді f рівномірно неперервна на (a, b) .

Наслідок 2. Якщо диференційовна на (a, b) функція f така, що для кожного $\xi \in (a, b)$ похідна $f'(\xi) = 0$, то f тотожно стала на (a, b) .

Теорема Коші (узагальнена формула скінченних приростів). Нехай функції f і g неперервні на відрізку $[a, b]$, диференційовні на інтервалі (a, b) , $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що справедлива рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Правила Лопіталя.

Перша теорема Лопіталя призначена для розкриття неозначеності вигляду⁰

Перша теорема Лопіталя. Нехай функції f і g диференційовні на інтервалі (a, b) , $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Далі, нехай існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

де A може бути скінченним, $+\infty$ чи $-\infty$. Тоді існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

і ця границя дорівнює A .

Зауваження. Теорема Лопіталя стверджує, що границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує. Але може виявитись, що границя відношення функцій існує в той час, коли границя відношення їх похідних не існує, тобто обернене до теореми Лопіталя твердження не має місця.

Друга теорема Лопіталя призначена для розкриття неозначеності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

Друга теорема Лопіталя. Нехай функції f і g диференційовні на інтервалі (a, b) , $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$) і $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

де A може бути скінченним, $+\infty$ чи $-\infty$. Тоді існує

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

і ця границя дорівнює A .

Приклади застосування правила Лопіталя.

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\sqrt{2} \sin x} = \frac{-2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}{-\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x-x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(\sqrt{1+x-x})} =$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x-x}}{x} =$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x-x}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x-x}} - 1}{1} =$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x-x} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x-x}} =$$

$$= \exp \frac{1-2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \exp -\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Формула Тейлора.

Теорема (формула Тейлора із залишком у формі Пеано). Нехай функція f визначена в деякому околі I точки x_0 , має в цьому околі похідні до $(n-1)$ -го порядку включно, а в точці x_0 має похідну n -го порядку. Тоді справедлива рівність

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \rightarrow x_0$.

Формулу Тейлора з центром в точці $x_0 = 0$ називають формулою Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

Наведемо розвинення деяких функцій за формулою Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n).$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \theta(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \bar{o}(x^n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \theta(x^n).\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\alpha = n$, то отримуємо

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n,$$

тобто формулу бінома Ньютона. Якщо ж $\alpha = -1$, то

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

– сума геометричної прогресії із знаменником $-x$ та першим доданком, який дорівнює 1.

Приклад розвинення функції.

Розвинути за формулою Маклорена функцію

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{-3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \\
 &= -\frac{1}{3}(1+x)^{-1} - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} = \\
 &= -\frac{1}{3} \left(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)\right) - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + o(x^n)\right) = \\
 &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{1}{3}x^n - \frac{1}{6 \cdot 2^n}x^n + \dots + \\
 &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{3} - \frac{1}{6 \cdot 2^n}x^n + o(x^n),
 \end{aligned}$$

· де $|x| < 1$, $\frac{x}{2} < 1$, тобто $|x| < 1$.

Обчислення границь з використанням формули Тейлора.

1. Обчислимо границю

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Скориставшись рівностями

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

отримуємо

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

2. Обчислити границю

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Оскільки $\sin x \ln \cos x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), то, користуючись рівністю $e^t = 1 + t + o(t)$ ($t \rightarrow 0$), отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \ln \cos x}}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \sin x \ln \cos x + o(\sin x \ln \cos x))}{x^3}. \end{aligned}$$

Скористуємось наступними рівностями

$$o(\sin x \ln \cos x) = o(\sin x \ln(1 + \cos x - 1)) = o(x(\cos x - 1)) = o(x^3),$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x^2), \quad \ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = \\ &= \cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

Тому отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x + o(x^2)) - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - 2x - x}{1 - e^{-x^3}} x^3,$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} &= (1-2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2x)^2 + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-2x)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \\ e^{-x^3} &= 1 - x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-2x-x}}{1-e^{-x^3}} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - (1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3))}{1 - (1 - x^3 + o(x^3))} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} (x - \ln x)^{\frac{1}{\sin(1-x)^2}} = [t = x - 1, x = t + 1] =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t - \ln(1+t))^{\frac{1}{\sin^2 t}} = \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t - \ln(1+t))}{\sin^2 t} = \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(t^2)}{t^2}}{1 + \frac{o(t^2)}{t^2}} = \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+0}{1+0} = \exp 1 = e. \end{aligned}$$

Формула Тейлора із залишком у формі Лагранжа.

Теорема. Нехай функція f означена на відрізку $[a, b]$ і має на цьому відрізку неперервні похідні до порядку n включно, а на інтервалі (a, b) існує похідна $(n + 1)$ -го порядку. Тоді існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Приклади знаходження проміжків монотонності функції за допомогою похідної.

1. Доведемо, що функція $f(x) = x - \sin x$ строго зростає на $(-\infty, +\infty)$. Маємо $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Звідси вже випливає, що f зростає на $(-\infty, +\infty)$. Залишається показати, що f строго зростає. Нехай $x < y$. Тоді

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y - \sin y - x + \sin x = y - x - 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2} \geq \\ &\geq y - x - 2 \cdot \sin \frac{y-x}{2} \cdot 1. \end{aligned}$$

Оскільки $|\sin t| < |t|$ для всіх $t \neq 0$, то

$$f(y) - f(x) \geq y - x - 2 \cdot \sin \frac{y-x}{2} > y - x - 2 \frac{y-x}{2} = 0,$$

тобто $f(y) > f(x)$.

2. Для функції $f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ ($x > 0$) маємо

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \cos \frac{1}{x}) \geq 0.$$

Отже, f зростає. Покажемо, що f строго зростає. Нехай $x < y$. Тоді на відрізку $[x, y]$ не більше, ніж в скінченному числі точок похідна f' обертається в нуль. Тому $f(x) < f(y)$.

3. Довести нерівність

$$(x + y)^p < x^p + y^p \quad (0 < p < 1, \quad x, y > 0).$$

Ця нерівність рівносильна наступній $(1 + t)^p < 1 + tp$, где $t = \frac{x}{y} > 0$. Покладемо $\phi(t) = (1 + t)^p - 1 - tp$. Тоді $\phi(0) = 0$ и $\phi'(t) = p[(1 + t)^{p-1} - t^{p-1}] < 0$. Отже, функція ϕ строго спадає і тому $\phi(t) < \phi(0)$.

Знаходження екстремумів функцій з використанням похідних першого та вищих порядків, знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

1. Знайти точки екстремума функції $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.
Маємо $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$, $f'(0) = 0$.
Очевидно, $f'(0) = 0$, і тому 0 – критична точка функції f . Покажемо, що інших критичних точок у функції f немає. Оскільки $f'(0) = 0$, то зі строгого зростання функції f на $[0, +\infty)$ буде впливати, що $f'(x) > 0$ для всіх $x > 0$, а оскільки $f'(-x) = -f'(x)$, то $f'(x) < 0$ при $x < 0$. Покажемо, що f строго зростає на $[0, +\infty)$.
Маємо

$$f'(x) = \operatorname{ch} x - \cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 > 0$$

при $x > 0$. Справді, остання нерівність випливає з того, що $t + \frac{1}{t} > 2$ при $t > 0$, $t \neq 1$, де $t = e^x > 1$ при $x > 0$. Таким чином, $f'(x) > 0$ на $(0, +\infty)$. Отже, f строго зростає на $[0, +\infty)$ и тому $f(x) > f(0) = 0$ ($x > 0$). Отримали, що точка $x = 0$ є єдиною критичною точкою функції f . На $(0, +\infty)$ похідна $f' > 0$, і тому функція f строго зростає на $[0, +\infty)$, тобто $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$. На $(-\infty, 0)$ похідна $f' < 0$, і тому функція f строго спадає на $(-\infty, 0)$ і тому $f(x) > f(0) = 0$ при $x < 0$. Таким чином, $f(x) > f(0)$ для будь-якого $x \neq 0$. Отже, 0 – точка строгого мінімуму (єдина точка екстремума даної функції).

Інший розв'язок. Маємо

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad f'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \operatorname{ch} x - \cos x, & f^{(1)}(0) &= 0, \\ f^{(2)}(x) &= \operatorname{sh} x + \sin x, & f^{(2)}(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{ch} x + \cos x, & f^{(4)}(0) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Перша відмінна від нуля похідна є парною, а це означає, що точка 0 є точкою локального екстремума. Оскільки ця похідна додатня, то 0 є точкою строгого мінімуму функції f .

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3$ на відрізку $[0, 3]$.

Маємо $f'(x) = (x-2)(x+1)^2(5x-4)$. Розв'язками рівняння $f'(x) = 0$, які належать до $[0, 3]$, є значення $x = 2$ і $x = \frac{4}{5}$. Обчислимо $f(0) = 4$, $f(3) = 64$, $f(2) = 0$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2^2 \cdot 9^4}{5^5} \approx 2,1$.

Таким чином, найбільше значення функції дорівнює $f(3) = 64$, а найменше – $f(2) = 0$.

Дослідження функцій на опуклість за допомогою похідних.

Нехай $f(x) = x^a$ ($0 < x < +\infty$). Тоді $f'(x) = ax^{a-1}$, $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$. Якщо $a \in (0, 1)$, то $f''(x) < 0$ і f ввігнута (опукла догори). Якщо $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ то $f''(x) > 0$ і f опукла донизу.

Повне дослідження функцій та побудова їх графіків.

Приблизна схема дослідження функцій.

1. Знаходимо область визначення функції, досліджуємо функцію на парність та періодичність.

2. Знаходимо точки перетину з осями координат, множини, на яких функція зберігає знак.

3. Знаходимо асимптоти (похилі та вертикальні) графіка функції. Досліджуємо поведінку в околі особливих точок.

4. Досліджуємо функцію на неперервність (в тому числі односторонню) та характеризуємо точки розриву.

5. Досліджуємо функцію на диференційовність (в тому числі односторонню). За допомогою похідної знаходимо проміжки монотонності та точки екстремума.

6. За допомогою другої похідної досліджуємо характер опуклості функції на різних проміжках та знаходимо точки перегину.

Приклади повного дослідження функцій та побудови їх графіків.

1. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}.$$

Область визначення $D(f)$ даної функції визначається умовами $x^2 - 1 \geq 0$, $x^2 - 4 \neq 0$. Звідси зрозуміло, що $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$. Оскільки для кожного $x \in D(f)$ маємо $-x \in D(f)$ і, очевидно, $f(-x) = f(x)$, то функція парна, і тому її графік симетричний відносно осі Oy . Дана функція неперіодична, оскільки для кожного $T > 0$ знайдеться $x = -2 - T$, таке, що $x = -2 - T \in D(f)$, $x + T = -2 \notin D(f)$.

Оскільки $0 \notin D(f)$, то графік функції не перетинає вісь Oy . Для знаходження точок перетину графіка з віссю Ox знайдемо корені рівняння $f(x) = 0$. Це рівняння, очевидно, має два розв'язки $x = -1$ і $x = 1$. Отже, графік функції перетинає вісь Ox в точках $x = -1$ і $x = 1$. Оскільки чисельник дробу $\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$ невід'ємний, то знак цього дробу, а отже і даної функції, визначається знаком знаменника. Зрозуміло, що $x^2 - 4 > 0$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ і $x^2 - 4 < 0$ для $x \in (-2, -1] \cup [1, 2)$. Знаходимо похилі асимптоти. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 = k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1} - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1 + x} + \frac{4x}{x^2 - 4} = 1 \cdot 0 + 0 = 0 = b.$$

Отже, асимптотою до графіка функції при $x \rightarrow +\infty$ є пряма $y = x$. Для визначення розташування графіка функції відносно асимптоти, розглянемо різницю

$$\begin{aligned} f(x) - (kx + b) &= \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} - x = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1} - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \\ &= \frac{x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1 + x} + \frac{4x}{x^2 - 4} = \\ &= \frac{x}{x^2 - 4} \left(4 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1 + x} \right) = \frac{x}{x^2 - 4} \left(4 - \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \right). \end{aligned}$$

Оскільки дріб в дужках прямує до $\frac{1}{2}$, то при достатньо великих x вираз в дужках додатний. Оскільки множник перед дужкою також додатний, то це означає, що при великих x графік функції розташований вище асимптоти. В силу парності функції, при $x \rightarrow -\infty$ похилою асимптотою є пряма $y = -x$ і графік функції при $x \rightarrow -\infty$ також розташований вище асимптоти. Знаходимо вертикальні асимптоти графіка. Маємо

$$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 = f(1),$$

$$f(-1 - 0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 0 = f(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = +\infty.$$

Звідси випливає, що графік функції має дві вертикальні асимптоти $x = -2$ і $x = 2$, а в точках $x = -1$ і $x = 1$ функція неперервна зліва і справа, відповідно. У всіх останніх точках області визначення функція неперервна, в чому легко переконатись, використовуючи теореми про арифметичні властивості

неперервних функцій, неперервність функції $g(t) = \sqrt{t} (t > 0)$ та теорему про неперервність композиції. У виколених точках області визначення $x = -2$ і $x = 2$ яким би чином не доозначити дану функцію, заново отримана функція буде мати розрив другого роду, оскільки у вказаних точках не існує скінченних односторонніх границь даної функції. Досліджуємо функцію на диференційовність. У всіх внутрішніх точках області визначення функція диференційовна, в чому легко переконатись, використовуючи теореми про арифметичні властивості диференційовних функцій, диференційовність функції $g(t) = \sqrt{t}$ при $t > 0$ та теорему про диференційовність композиції. Похідна у внутрішніх точках дорівнює

$$f'(x) = \frac{2x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x(x^4 - 12x^2 + 8)}{(x^2 - 4)^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

Далі,

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{(x - 1)(x^2 - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x + 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{1}}{x - 1} = -\infty, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{(x + 1)(x^2 - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{x - 4} \cdot \frac{-1}{-x - 1} = +\infty, \end{aligned}$$

Дві останні рівності означають, що в точці $x = 1$ графік функції має правосторонню вертикальну дотичну, а в точці $x = -1$ - лівосторонню вертикальну дотичну. Для знаходження коренів похідної достатньо розв'язати рівняння $x^4 - 12x^2 +$

$8 = 0$. Розв'язуючи його, знаходимо $x = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{7}}$. Два інших розв'язки $x^1 = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{7}}$, $x^2 = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{7}}$ не належать до області визначення функції. Якщо $x \in (x_1, -2) \cup (-2, -1) \cup (x_2, +\infty)$, то $f'(x) > 0$, а якщо $x \in (-\infty, x_1) \cup (1, 2) \cup (2, x_2)$, то $f'(x) < 0$. Це означає, що функція строго зростає на кожному з проміжків $[x_1, -2)$, $(-2, -1]$, $[x_2, +\infty)$ і строго спадає на кожному з проміжків $(-\infty, x_1]$, $[1, 2)$, $(2, x_2]$. При переході через точку x_2 похідна змінює знак з "-" на "+". Тому точка x_2 є точкою локального мінімуму функції і $f(x_2) = \frac{(6 + \sqrt{28})\sqrt[3]{5 + \sqrt{28}}}{2 + \sqrt{28}} \approx 4.96$.

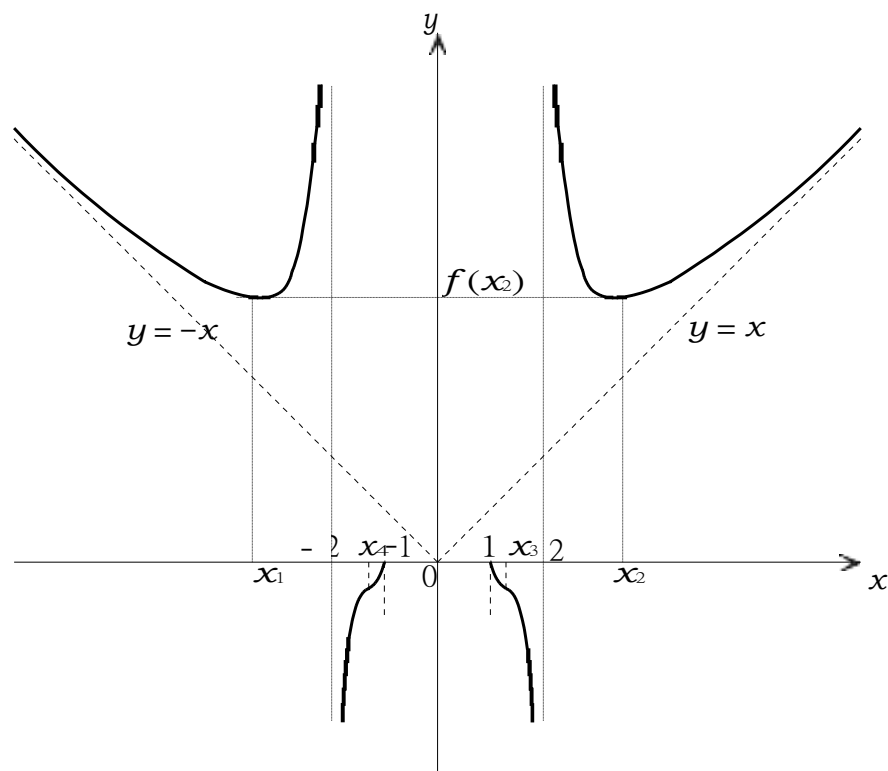
При переході через точку x_1 похідна функції змінює знак з "-" на "+". Це означає, що точка x_1 є точкою локального мінімуму функції і $f(x_1) \approx 4.96$. Обчислимо другу похідну

$$f''(x) = \frac{7x^6 + 72x^4 - 120x^2 + 32}{(x^4 - 1)^3 (x^2 - 1)^{3/2}}.$$

Ми не будемо знаходити корені другої похідної, а отже і точок перегину. Відзначимо лише, що $f''(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1 + 0$. Це означає, що функція опукла донизу в правому півколі точки 1. Якщо ж $x \rightarrow 2 - 0$, то $f''(x) \rightarrow -\infty$, тобто функція опукла догори в лівому півколі точки 2. За неперервністю $f''(x)$, знайдеться точка $x_3 \in (1, 2)$, в якій похідна f'' змінить знак з "+" на "-". Це означає, що на інтервалі $(1, 2)$ дана функція має точку перегину. Далі, $f''(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 2 + 0$ і $f''(x) > 0$ при достатньо великих x . Це означає, що функція f опукла донизу в правому півколі точки 2, а також при достатньо великих x . Із парності функції f випливає, що на інтервалі $(-2, 1)$ також існує точка перегину x_4 . Із встановлених властивостей функції f отримуємо, що множиною

значень даної функції є $(-\infty, 0] \cup \frac{(6 + \sqrt{28})\sqrt[3]{5 + \sqrt{28}}}{2 + \sqrt{28}}, +\infty$.

Використовуючи тепер всю отриману вище інформацію, будемо графік даної функції.



2. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Область визначення $D(f)$ визначається умовою $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$. Оскільки ця нерівність рівносильна наступній $(1 - |x|)^2 \geq 0$, яка, очевидно, є справедливою для всіх $x \in \mathbb{R}$, то $D(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна, оскільки для будь-якого $x \in D(x)$ значення $-x \in D(x)$ і $f(-x) = -f(x)$. Тому графік функції симетричний відносно початку координат. Функція неперіодична, оскільки, наприклад, $f(0) = 0$, а $f(0 + T) \neq 0$ при будь-якому $T > 0$. Єдина точка перетину графіка функції з координатними осями – початок координат. При $x > 0$ функція додатня, тобто графік функції розташований вище осі Ox , а при $x < 0$ функція від'ємна, тобто графік функції розташований нижче осі Ox . При $x \rightarrow +\infty$ $\frac{2x}{1+x^2} \rightarrow +0$. Це означає, що пряма $y = 0$ є похилою асимптотою графіка функції при $x \rightarrow +\infty$ і при цьому графік розташований вище асимптоти. За непераністю функції, пряма $y = 0$ є також похилою асимптотою графіка функції при $x \rightarrow -\infty$.

$x \rightarrow -\infty$ і при цьому графік функції розташований нижче асимптоти. Функція неперервна в кожній точці. Звідси, зокрема, впливає, що вертикальних асимптот графік функції не має. Дослідимо функцію на диференційовність. Маємо

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \text{sign}(1-x^2) \quad (|x| \neq 1).$$

Для знаходження односторонніх похідних в точці $x_0 = 1$ скористаємось правилом Лопітала і отримаємо

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2 \text{sign}(1-x^2)}{1+x^2} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2 \text{sign}(1-x^2)}{1+x^2} = -1.$$

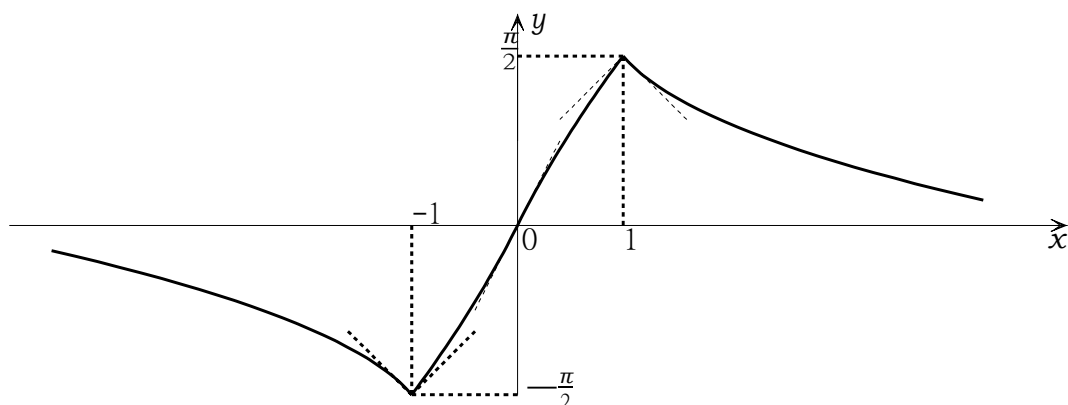
Звідси впливає, що дана функція недиференційовна в точці $x_0 = 1$. За непарністю, функція недиференційовна також і в точці $x_1 = -1$. На інтервалі $(-\infty, -1)$ похідна $f'(x) < 0$, тобто функція спадає, на інтервалі $(-1, 1)$ похідна $f'(x) > 0$, тобто функція зростає, на інтервалі $(1, \infty)$ похідна $f'(x) < 0$, тобто функція спадає. Отже, критична точка $x_1 = -1$ є точкою локального мінімуму, а критична точка $x_0 = 1$ – точкою локального максимуму. Обчислимо значення функції в точці локального максимуму $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, за непарністю функції, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Звідси отримуємо, що множина значень функції – відрізок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Для дослідження опуклості знайде-

мо другу похідну

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \quad (|x| > 1),$$

$$f''(x) = \frac{-1+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2-1}{(1+x^2)^2} \quad (|x| < 1).$$

На інтервалі $(-\infty, -1)$ $f''(x) < 0$, тобто функція опукла догори, на інтервалі $(-1, 0)$ $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу, на інтервалі $(0, 1)$ $f''(x) < 0$, тобто функція опукла догори, на інтервалі $(1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу. При переході через точки $-1, 0, 1$ функція змінює характер опуклості. Це означає, що точки $-1, -\frac{\pi}{2}, (0, 0)$ і $1, \frac{\pi}{2}$ є точками перегину графіка функції. Оскільки $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, то пряма $y = 2x$ є дотичною до графіка функції в початку координат. Оскільки $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, то лівосторонньою дотичною до графіка в точці $1, \frac{\pi}{2}$ є пряма $y = \frac{\pi}{2} + x - 1$, правосторонньою – пряма $y = \frac{\pi}{2} - x + 1$. В точці $-\frac{\pi}{2}, -1$ односторонні дотичні знаходимо виходячи з непарності функції. Використовуючи всю отриману вище інформацію, будуємо графік даної функції.



3. Провести повне дослідження побудувати графік функції

$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}.$$

Область визначення даної функції $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Оскільки $f(-2) = 0$, і $f(x) \neq 0$ при всіх $x \in D(f) \setminus \{-2\}$ то дана функція є функцією загального вигляду і неперіодична. Оскільки $0 \notin D(f)$, то графік функції не перетинає вісь Oy . Єдиною точкою перетину графіка з віссю Ox є точка $(-2, 0)$. При $x \geq 2$ функція $f(x) > 0$, тобто графік розташований вище осі Ox , а при $x < -2$ $f(x) < 0$, тобто графік розташований нижче осі

Ох. Знаходимо похилі асимптоти

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \equiv k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{\frac{1}{x}} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} - 1 + 2e^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 + 2 = 3 \equiv b.\end{aligned}$$

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ асимптотою графіка функції є пряма $y = x + 3$. Всі знайдені границі залишаться такими ж і при $x \rightarrow -\infty$. Це означає, що пряма $y = x + 3$ є також асимптотою графіка функції і при $x \rightarrow -\infty$. Розташуванні графіка функції відносно асимптоти встановимо нижче, виходячи з опуклості функції. Вертикальна асимптота може бути хіба що в точці $x = 0$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Це означає, що пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Виходячи з арифметичних властивостей неперервних функцій та теореми про неперервність композиції, отримуємо, що дана функція неперервна у всіх точках області визначення. Користуючись теоремою про арифметичні властивості диференційовних функцій та теоремою про диференційовність композиції, отримуємо, що дана функція диференційовна у всіх точках області визначення. Знаходимо похідну

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right).$$

Оскільки $e^{\frac{1}{x}} > 0$ для всіх $x \in D(f)$, то знак похідної визначається знаком виразу $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$. Покладемо $t = \frac{1}{x}$ і розглянемо ква-

дратний тричлен $1 - t - 2t^2$. Його корені $t = -1$ і $t = \frac{1}{2}$; при

цьому $1 - t - 2t^2 > 0$ при $-1 < t < \frac{1}{2}$ і $1 - t - 2t^2 < 0$ при $t \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Оскільки $t = \frac{2}{1+x}$, то отримуємо умову $-1 < \frac{2}{1+x} < \frac{1}{2}$. Звідси $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Далі, умова $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ еквівалентна такій $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$.

Отже, отримуємо, що $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ і $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$. Це означає, що на інтервалах $(-\infty, -1)$ і $(2, +\infty)$ функція строго зростає, а на інтервалах $(-1, 0)$ і $(0, 2)$ - строго спадає. При цьому точка -1 є точкою строгого локального максимуму і $f'(-1) = 0$, $f(-1) = \frac{1}{e}$, а точка 2 є точкою

$$e \quad \sqrt{e}$$

строгого локального мінімуму і $f'(2) = 0$, $f(2) = 4e \approx 6.6$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-x}{x} \quad (2) = 0$$

Оскільки існує границя зліва в точці 0 , то можемо визначи-

ти кут нахилу, під яким графік функції входить в точку $(0, 0)$

зліва. Для цього знайдемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0^-)}{x - 0}$$

$$x$$

$$\overline{x^3}$$

$$x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2)e^x$$

$$\frac{1}{x}$$

x

y

$\underline{1}$

e

x

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} x$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} y = 0.$$

Це означає, що вісь Ox є лівосторонньою дотичною до графіка

функції в точці $(0, 0)$. Дослідимо опуклість. Для цього знаходимо

$$f''(x) = e^x \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(x^3 - 1 + \frac{2}{x} + x^3 + \frac{4}{x} \right) =$$

$$= e^x$$

Якщо $x > 0$, то $f''(x) > 0$, і, отже, функція опукла дони-

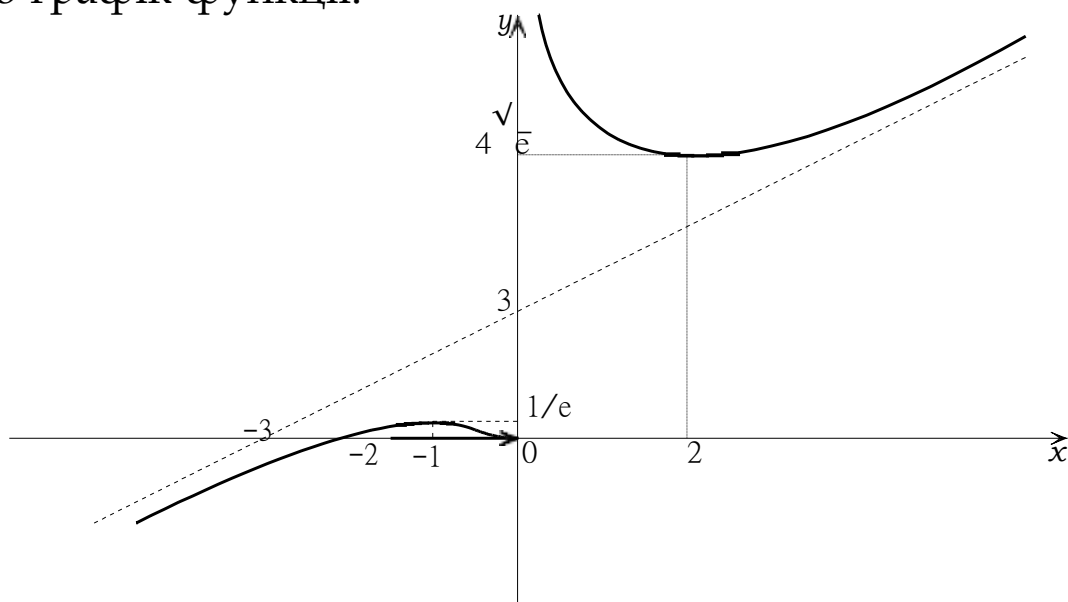
зу на $(0, +\infty)$. Звідси, зокрема, випливає, що при $x \rightarrow +\infty$

графік функції розташований вище похилої асимптоти. Нехай

графік функції розташований нижче своєї похилої асимптоти. Якщо ж $-\frac{4}{5} < x < 0$, то $f''(x) > 0$, тобто функція опукла донизу на інтервалі $[-\frac{4}{5}, 0]$. При переході через точку $-\frac{4}{5}$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак із «+» на «-». Тому точка

$-\frac{4}{5}, f(-\frac{4}{5})$ є точкою перегину графіка функції. Обчислимо $f(-\frac{4}{5}) = \frac{6}{5}e^{-\frac{4}{5}} \approx 0,37$.

Використовуючи тепер всю отриману вище інформацію, будемо графік функції.



Із отриманої вище інформації, зокрема, випливає, що множиною значень даної функції є множина $-\infty, \frac{1}{e} \cup [4\sqrt[4]{e}, +\infty)$.

Індивідуальні завдання за темою (із збірника задач Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). 2-е изд., доп. - М.: Высшая школа, 1994. — 206 с.)

Варіант 57

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{3x-x^2}{4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{2(4x^3 + 3x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$$

3.
$$y = 2x - \ln \sqrt[3]{3 + e^x + 2e^{2x} + e^x + 1}.$$

4.
$$y = \sqrt{x} \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right).$$

5.
$$y = \sqrt[3]{3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}}.$$

6.
$$y = \arctg \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{3}.$$

7.
$$y = \frac{1}{12} (x^2 + 8) \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 4} + \frac{x^2}{8} \arcsin \frac{2}{x}}, \quad x > 0.$$

8.
$$y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln \sqrt{1-x^2}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$.

Варіант 58

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 3x - 1$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(2x^3 + 1)^{\sqrt{1+x^2}}}{3x^3}.$$

3.
$$y = e^{2x} \frac{2 + \sin 2x - \cos 2x}{8}.$$

4.
$$y = \ln x + \frac{\sqrt{3+x^2}}{3+x^2}.$$

5.
$$y = 2 - \frac{1}{9} \cdot \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}.$$

6.
$$y = \arcsin \frac{\sqrt{x-2}}{6x}.$$

7.
$$y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{4x+1}{\sqrt{2}}.$$

8.
$$y = 3 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1-4x^2}} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{4x^2-3}$.

Варіант 59

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x - 2x^3$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{x^4 - 7x^2}{3(x^2 - 4)}.$$

3.
$$y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}.$$

4.
$$y = 3\sqrt{x} - 4 \ln(3 + \sqrt{x}).$$

5.
$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$$

6.
$$y = \frac{2x-1}{3} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}.$$

7.
$$y = 3x - \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{4x}} \right) - e^{-2x} \arcsin e^{2x}.$$

8.
$$y = x(2x^2 + 3) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}.$

Варіант 60

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 + 7\sqrt{x} - 23$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{2x^3 - 3x - 1}{3\sqrt{1 + 4x}}.$$

3.
$$y = \frac{1}{\ln 5} \ln \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}.$$

4.
$$y = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1 - 27x^3}}.$$

5.
$$y = 5 - \frac{1}{16} \cdot \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}.$$

6.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{x}.$$

7.
$$y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \operatorname{arctg}(3x - 2) + \ln 3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5}.$$

8.
$$y = x^3 \arcsin x - \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}.$

Варіант 61

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2x - \sqrt{x^3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = \frac{(1+x^8)^{\sqrt{1+x^8}}}{21x^{12}}.$$

$$3. \quad y = 2 \sqrt[3]{e^x + 1} - \ln \sqrt[3]{\frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1 + 1}}.$$

$$4. \quad y = \ln \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}.$$

$$5. \quad y = 1 - \frac{7 \sin^2 2x}{2 \cos 4x}.$$

$$6. \quad y = \arccos \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^4 + 16}}.$$

$$7. \quad y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x-3} - \ln \frac{1 + \sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$$

$$8. \quad y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} - 2 \sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x+1 > 0.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2-3x^2}$.

Варіант 6.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt[3]{x^2} - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = -8$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 - 3x^4}.$$

3.
$$y = \frac{2}{3} \arctg e^x.$$

4.
$$y = \ln \frac{4 - x^2}{4 + x^2}.$$

5.
$$y = 4 - \frac{7 \cos^2 2x}{4 \sin 4x}.$$

6.
$$y = \frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{3x}.$$

7.
$$y = \frac{x^2}{81} \arcsin \frac{3}{x} - \frac{1}{81} (x^2 + 18) \sqrt{x^2 - 9}, \quad x > 0.$$

8.
$$y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \arctg x + \ln x + \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{3x^2 - 2}.$

Варіант 7.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(x^2 - 6) \sqrt{(4 + x^2)^3}}{12x^3}.$$

3.
$$y = \frac{1}{2} \ln e^{2x} + 1 + 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

4.
$$y = \ln^2(x - \cos x).$$

5.
$$y = 3 + \frac{7 \sin^2 7x}{14 \cos 14x}.$$

6.
$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x.$$

7.
$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}.$$

8.
$$y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} - \sqrt{\frac{9x^2+24x+12}{3x+4}}, \quad 3x+4 > 0.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2-6}{x-2}.$

Варіант 8.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 8\sqrt[4]{x-7}$ в точці з абсцисою $x_0 = 16$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(x^2 - 8) \sqrt{x^2 - 8}}{9x^3}.$$

3.
$$y = \ln(e^x + 1) - \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}.$$

4.
$$y = \ln^3(1 - \cos x).$$

5.
$$y = 2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}.$$

6.
$$y = \frac{1}{2}(x-4) \sqrt{8x - x^2 - 7} + 9 \arccos \frac{x-1}{6}.$$

7.
$$y = 3x - \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{6x}} \right) + e^{-3x} \arcsin e^{3x}.$$

8.
$$y = x \sqrt{2x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1} + \ln x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 + x^2}.$

Варіант 65

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 3x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{3 + 4x^2}{x^3 (2 + x^3)^2}.$$

3.
$$y = \frac{2^{\sqrt{x-1}} + \arctg \sqrt{2^x - 1}}{\ln 2}.$$

4.
$$y = \ln \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

5.
$$y = 41 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}.$$

6.
$$y = \frac{(1 + x) \arctg \sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{3x \sqrt{x}}.$$

7.
$$y = \ln \sqrt{4x - 1} + \frac{\sqrt{16x^2 - 8x + 2}}{16x^2 - 8x + 2} + \frac{\sqrt{16x^2 - 8x + 2}}{16x^2 - 8x + 2} \arctg(4x - 1).$$

8.
$$y = \ln \sqrt{x + x^2 + 1} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}.$

Варіант 66.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = \frac{\sqrt[3]{2 + x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$3. \quad y = 2(x - 2) \sqrt[3]{1 + e^x} - 4 \ln \sqrt[3]{\frac{1 + e^x - 1}{1 + e^x + 1}}.$$

$$4. \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

$$5. \quad y = 2 + \frac{1}{20} \cdot \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}.$$

$$6. \quad y = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{2 + x^2}{9} \sqrt{1 - x^2}$$

$$7. \quad y = \ln \frac{1 + 2\sqrt{-x - x^2}}{2x + 1} - \frac{4}{2x + 1} \sqrt{x}$$

$$8. \quad y = \sqrt{1 - 3x - 2x^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\arcsin \frac{4x + 3}{17}}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x^2}$.

Варіант 11.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 64$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{x^6 + x^3 - 3}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

3.
$$y = \frac{e^{3x}(\sin 2x + 2 \cos 2x)}{5}.$$

4.
$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}}.$$

5.
$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$$

6.
$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

7.
$$y = (2x+3)^4 \arcsin \frac{1}{2x+3} - \frac{2}{3} (4x^2+12x+11) \sqrt{x^2+3x+2}, \quad 2x+3 > 0.$$

8.
$$y = \sqrt{(4+x)(1+x)} - 3 \ln \sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \sqrt{\frac{2-x^2}{9x^2-4}}.$

Варіант 68.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^3-2}{x^3+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(x^2 - 2) \sqrt{4 + x^2}}{6x^3}.$$

3.
$$y = \frac{e^x(2 \sin 2x + \cos 2x)}{5}.$$

4.
$$y = x + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x+2}{x-2}}}.$$

5.
$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}.$$

6.
$$y = \frac{3+x}{2} \sqrt{x(2-x)} - 3 \arccos \frac{x}{2}.$$

7.
$$y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2}.$$

8.
$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x-1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}.$

Варіант 69.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 3$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1+2x^2}}.$$

3.
$$y = e^{5x} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 3x + 2 \sin 3x}{2} \right).$$

4.
$$y = \ln \sin \frac{2x+4}{x-1}.$$

5.
$$y = 25 + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$$

6.
$$y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}.$$

7.
$$y = 5x - \ln \sqrt{1 + \frac{1}{1 - e^{10x}}} + e^{-5x} \arcsin e^{5x}.$$

8.
$$y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{3}}{2x^2 - 1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{3x^2-7}{2x+1}$

Варіант 70.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2+5}{x^2+1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$\frac{\sqrt{x+1}(3x-2)}{4x^2}.$$

3.
$$y = x + \frac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x).$$

4.
$$y = \log_{16} \log_5 \operatorname{ctg} x.$$

5.
$$y = 11 + \frac{13 \cos^2 14x}{28 \sin 28x}.$$

6.
$$y = \arcsin \frac{x}{x+1} + \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

7.
$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}{x^2 - 8x + 17} \operatorname{arctg}(x-4) + \ln |x-4| + \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}{x^2 - 8x + 17}.$$

8.
$$y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} - \frac{\sqrt{4x^2 + 12x - 7}}{2x+3}, \quad 2x+3 > 0.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2+16}{9x^2-8}.$

Варіант 71.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2x + \frac{3}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{2x^3}.$$

3.
$$y = x - 3 \ln \sqrt{\frac{x}{1+e^{\frac{x}{6}}}} - 3 \operatorname{arccotg} e^{\frac{x}{6}}.$$

4.
$$y = \log_4 \log_2 \operatorname{ctg} x.$$

5.
$$y = 27 + \frac{7 \sin^2 15x}{15 \cos 30x}.$$

6.
$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{\arccos x}{2x^2}.$$

7.
$$y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2 - x} - \frac{2}{2 - x} \sqrt{-3 + 4x - x^2}.$$

8.
$$y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} - \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x+1 > 0.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}.$

Варіант 72.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{-3(x^8+2)}{3(x^4+1)}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{x^6 + 8x^3 + 128}{\sqrt{8 - x^3}}.$$

3.
$$y = x - \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

4.
$$y = x \cdot \frac{\cos \ln x - \sin \ln x}{2}.$$

5.
$$y = 33 + \frac{15 \cos^2 16x}{32 \sin 32x}.$$

6.
$$y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}.$$

7.
$$y = (3x^2 - 4x + 2) \sqrt{9x^2 - 12x + 3} - (3x - 2)^4 \arcsin \frac{1}{3x - 2}, \quad 3x - 2 > 0.$$

8.
$$y = (2 + 3x) \sqrt{x - 1} + \frac{3}{2} \arctg \sqrt{x - 1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}.$

Варіант 73.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^5+1}{x^4+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{\sqrt{2x+3(x+2)}}{x^2}.$$

3.
$$y = \ln e^x + \sqrt{e^{2x} - 1} - \arcsin e^{-x}.$$

4.
$$y = \ln \cos \frac{2x+5}{x+1}.$$

5.
$$y = 15 + \frac{27 \sin 17x}{17 \cos 34x}.$$

6.
$$y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} - \arcsin \frac{x}{2} - 1.$$

7.
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} - \frac{x-1}{x^2-2x+3}.$$

8.
$$y = \frac{1}{3}(x-2) \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{x+1+1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{2x^2-1}{x^2-2}.$

Варіант 74.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^{16}+9}{1+5x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = (1 - x^2)^4 \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}.$$

$$3. \quad y = x - e^{-x} \arcsin e^x + \ln \sqrt{1 + \frac{1}{1 - e^{2x}}}.$$

$$4. \quad y = \ln \lg \operatorname{ctg} x.$$

$$5. \quad y = 43 - \frac{31 \cos^2 18x}{36 \sin 36x}.$$

$$6. \quad y = \frac{(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x}}{x}.$$

$$7. \quad y = \ln \sqrt{e^{5x} + e^{10x} - 1} - \arcsin e^{-5x}.$$

$$8. \quad y = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}$.

Варіант 19.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 2(\sqrt[3]{x} - \sqrt[2]{x})$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(2x^2 + 5)\sqrt{x^2 - 3}}{9x^3}.$$

3.
$$y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} + \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}.$$

4.
$$y = \log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{1 - x^4}}.$$

5.
$$y = 13 + \frac{23 \sin^2 19x}{19 \cos 38x}.$$

6.
$$y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin x}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 12x + 10}} \operatorname{arctg}(2x-3).$$

8.
$$y = \ln^3 \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - 1} \operatorname{arctg} x.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 - 11}{4x^3}.$

Варіант 76.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2}{3x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{x+1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}.$$

3.
$$y = \frac{e^{(x^3)}}{1-x^3}.$$

4.
$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ln \sqrt[3]{2 \operatorname{tg} x + 1 + 2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

5.
$$y = 5 + \frac{1}{40} \cdot \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

6.
$$y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} - \frac{9}{4} \arcsin \frac{x-1}{3}.$$

7.
$$y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} + \frac{2}{x+2} \sqrt{\frac{-}{3}}$$

8.
$$y = x \ln \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{2x^2-9}{x^2-1}$.

Варіант 77.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2x}{x^2+1}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{(2x-1) \sqrt{x^2-x}}{x^2}.$$

3.
$$y = 36 \operatorname{arctg} 7e^{4x}.$$

4.
$$y = \ln \arcsin \sqrt{1+e^{2x}}.$$

5.
$$y = 4 - \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}.$$

6.
$$y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+4}{x^2+1}.$$

7.
$$y = \frac{2}{3} (4x^2-4x+3) \sqrt{\frac{2-x-(2x-1)}{4}} \arcsin \frac{1}{2x-1}, \quad 2x-1 > 0.$$

8.
$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x}$.

Варіант 78.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}}$$

3.
$$y = 3e^{\sqrt[3]{x^2 - 2^3 x + 3}}$$

4.
$$y = \ln \arccos \sqrt{1 + e^{4x}}$$

5.
$$y = 13 + \frac{1}{44} \cdot \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$$

6.
$$y = \arcsin \frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

7.
$$y = \frac{2x-1}{4x^2-4x+3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{2}}$$

8.
$$y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} - \sqrt{x^2 + 4x - 5}$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$.

Варіант 79.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

$$3. \quad y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}+e^x-1}}{1+e^x+e^{2x}+e^x+1}.$$

$$4. \quad y = \ln x + \frac{\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}.$$

$$5. \quad y = \frac{1}{3} - \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}.$$

$$6. \quad y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} + x \arcsin \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}.$$

$$7. \quad y = \arcsin e^{-4x} + \ln e^{4x} + \frac{\sqrt{e^{8x}+1}}{e^{8x}+1}.$$

$$8. \quad y = \frac{\sqrt{(3-x)(2+x)}}{(3-x)(2+x)} - 5 \arcsin \frac{\sqrt{x+2}}{5}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^3-x^2-3x-1}{2x^2-2}$.

Варіант 24.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = -2 \left(\sqrt[5]{x} + 3 \sqrt{x} \right)$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = 3 \frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 1}}{x + 1}.$$

$$3. \quad y = e^{\sin x} \cdot x + \frac{1}{\cos x}.$$

$$4. \quad y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} + x \sqrt{2}}.$$

$$5. \quad y = 33 + \frac{1}{48} \cdot \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}.$$

$$6. \quad y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$7. \quad y = \ln \left(5x + \sqrt{25x^2 + 1} \right) + \sqrt{25x^2 + 1} \operatorname{arctg} 5x.$$

$$8. \quad y = x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + 2x.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$.

Варіант 25.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2+3x^2}{3+x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = 3^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

3.
$$y = \frac{e^x}{2} (x^2 - 1) \cos x - (x - 1)^2 \sin x.$$

4.
$$y = \ln \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

5.
$$y = 2 - \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}.$$

6.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}}.$$

7.
$$y = \frac{2}{3x-2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}}.$$

8.
$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{3x^2-10}{4x^2-1}$.

Варіант 82.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[5]{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{\sqrt{x-7}}{6x^2 + 2x + 7}.$$

3.
$$y = \operatorname{arctg} e^x + e^{-x}.$$

4.
$$y = \ln \left(e^x - \frac{1}{e^{2x}} \right).$$

5.
$$y = 3 + \frac{1}{52} \cdot \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}.$$

6.
$$y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} + x.$$

7.
$$y = (3x+1)^4 \arcsin \frac{1}{3x+1} - (3x^2+2x+1) \sqrt{9x^2+6x}, \quad 3x+1 > 0.$$

8.
$$y = x^2 \arccos x + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1-x}$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{3x^2-10}{4x^2-1}$.

Варіант 83.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 3\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

$$2. \quad y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + x + 1}.$$

$$3. \quad y = 3e^{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} - 120\sqrt[3]{x} - 120.$$

$$4. \quad y = \ln \frac{\sqrt{5 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}}{5 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$5. \quad y = 7 - \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}.$$

$$6. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{2(1 - 4x^2)} \arcsin 2x - \frac{1}{8} \ln(1 - 4x^2).$$

$$7. \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{2}} - \frac{2x+1}{4x^2 + 4x + 3}.$$

$$8. \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2}}{x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}$.

Варіант 84.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2x-3x^3}{3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{1-x^4}}.$$

3.
$$y = -\frac{e^{-3x}}{3\sin^3 x}.$$

4.
$$y = \ln \frac{\lg x}{\sin \frac{1}{x}}.$$

5.
$$y = 5 + \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}.$$

6.
$$y = 2x^2 - x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{\frac{x}{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

7.
$$y = \ln e^{3x} + \frac{\sqrt{e^{6x} - 1}}{e^{6x} - 1} - \arcsin e^{-3x}.$$

8.
$$y = \frac{x}{4}(10 - x^2) \sqrt{4 - x^2} - 6 \arcsin \frac{x}{2}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}.$

Варіант 85.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2}{12} + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Обчислити похідну

2. $y = (x - 3) \sqrt{\frac{2x-1}{2x+7}}.$

3. $y = \arcsin e^{-x} + \sqrt{1 - e^{2x}}.$

4. $y = \ln \cos \left(1 + \frac{1}{x} \right).$

5. $y = 3 - \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}.$

6. $y = x + 2 \sqrt{x+2} \arctg \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}.$

7. $y = \sqrt{49x^2 + 1} \arctg 7x + \ln 7x + \sqrt{49x^2 + 1}.$

8. $y = \arcsin \frac{1}{2x+3} - 2 \sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x + 3 > 0.$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{-x^2 - 4x + 13}{4x + 3}.$

Варіант 86.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2 - 2x - 5}{4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{3x \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

3.
$$y = \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 3).$$

4.
$$y = \ln \ln^2 \ln^3 x.$$

5.
$$y = 5 + \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}.$$

6.
$$y = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{x^2 \arcsin \frac{x \sqrt{2}}{1 + x}} + \frac{\sqrt{2}}{2 \ln(1 + x)}.$$

7.
$$y = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$$

8.
$$y = x \arcsin \frac{x}{x + 1} - \sqrt{x} - \arctg \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{8 - x^2}{x^2 - 4}$.

Варіант 87.

1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 6^{\sqrt{x}} - 16\sqrt{\frac{x}{2}}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Обчислити похідну

2.
$$y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 3}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

3.
$$y = \frac{e^{(x^2)}}{1-x^2}.$$

4.
$$y = \ln^2 \ln \ln^3 x.$$

5.
$$y = 31 - \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}.$$

6.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2}.$$

7.
$$y = \arcsin e^{-2x} - \ln e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}.$$

8.
$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

9. Провести повне дослідження та побудувати графік функції $y = \frac{9-10x^2}{4x^2-1}$.