

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра інформаційних технологій

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

для фахівців в галузі зв'язку

Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти

Одеса 2025

Затверджено Вченою Радою Міжнародного гуманітарного університету
(протокол № 5 від 20 січня 2025 р.)

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Рівняння математичної фізики для фахівців в галузі зв'язку. Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету – Одеса: МГУ, 2025. – 105 с.

В навчальному посібнику розглядаються основні відомості про диференціальні рівняння з частинними похідними та методи їх розв'язування.

Найбільша увага у посібнику приділяється тим диференціальним рівнянням з частинними похідними, які є корисними для фахівців в галузі зв'язку.

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Рівняння математичної фізики для фахівців у галузі зв'язку» написаний як посібник для студентів та аспірантів в галузі зв'язку.

Коло питань математичної фізики тісно пов'язане з вивченням різних фізичних процесів. Сюди відносяться явища, які вивчаються в електродинаміці, теорії зв'язку, теорії електричних кіл, цифровій обробці сигналів тощо. При цьому виникають математичні задачі, які містять багато загальних елементів та складають предмет математичної фізики.

Коло питань, які відносяться до математичної фізики, надзвичайно широкі. У запропонованому навчальному посібнику розглядаються задачі математичної фізики, які приводять до рівнянь з частинними похідними.

Навчальний посібник складається з шести розділів і складає шість тем: диференціальні рівняння з частинними похідними та їх класифікація; диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу. Рівняння коливань; електричні коливання та їх дослідження; диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Рівняння лінійної теплопровідності та методи його розв'язання; рівняння теплопровідності у просторі та методи його розв'язання; диференціальні рівняння з частинними похідними еліптичного типу. Рівняння Лапласа.

Наприкінці кожного розділу подано методи розв'язання практичних завдань з даного розділу. У кінці навчального посібника пропонуються контрольні запитання, перевірні тести та тренувальні вправи.

Посібник написано з докладним поясненням розв'язуваних завдань. У кінці посібника є список додаткових джерел з розглянутих тем.

ЗМІСТ

1 Диференціальні рівняння з частинними похідними та їх класифікація ...	6
1.1 Диференціальні рівняння з частинними похідними, основні поняття	6
1.2 Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними та властивості їхніх розв'язків	7
1.3 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними	8
1.4 Постановка задачі для диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними	10
1.5 Поняття про рівняння математичної фізики	11
Приклади до розділу 1	11
 2 Диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу. Рівняння коливань.....	 14
2.1 Хвильове рівняння	14
2.2 Задача про вільні коливання нескінченної струни та її розв'язування методом Даламбера	15
2.3 Дослідження поширення хвиль відхилення методом характеристик.....	19
2.4. Дослідження поширення хвиль імпульса методом характеристик	25
2.5 Задача про вільні коливання струни із закріпленими кінцями та їх розв'язуванням	28
2.6. Задача про вимушені коливання струни із закріпленими кінцями та її розв'язування методом розвинення за власними функціями	34
2.7 Загальна схема методу Фур'є	37
Приклади до розділу 2	40
 3 Електричні коливання та їх дослідження	 46
3.1 Основні параметри та об'єкти дослідження	46
3.2 Диференціальні рівняння вільних електричних коливань у скінченному проводі	46
3.3 Телеграфне рівняння та частинні випадки	47
3.3.1 Телеграфне рівняння	47
3.3.2 Телеграфне рівняння для лінії без витіку	49
3.3.3 Телеграфне рівняння для лінії без спотворень	50
3.3.4 Лінії скінченної довжини	52
3.4 Коливання в електричних лініях	53
3.4.1 Коливання в електричних лініях, які перебувають у стані перехідного процесу	53
3.4.2 Коливання в електричних лініях, в яких відбувається перехідний процес при підключенні розімкненої лінії на постійну напругу	53
Приклади до розділу 3	58

4 Диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Рівняння лінійної теплопровідності та методи його розв'язування	68
4.1 Рівняння лінійної теплопровідності для плоского стрижня без теплових стоків та джерел	68
4.2 Рівняння лінійної теплопровідності для плоского стрижня з тепловими стоками та джерелами	70
4.3 Початкові та граничні умови для рівняння лінійної теплопровідності	71
4.4 Рівняння теплопровідності для нескінченного стрижня та його розв'язування методом Фур'є	72
4.5 Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності	75
Приклади до розділу 4	75
5 Рівняння теплопровідності у просторі та методи його розв'язування	79
5.1 Рівняння теплопровідності для просторового тіла	79
5.2 Початкові та граничні умови для основного рівняння теплопровідності	81
5.3 Рівняння дифузії	82
Приклади до розділу 5	83
6 Диференціальні рівняння з частинними похідними еліптичного типу. Рівняння Лапласа	84
6.1 Рівняння Лапласа. Граничні умови	84
6.2 Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа	85
6.3 Методи розв'язування рівняння Лапласа	86
6.3.1 Тривимірна задача Діріхле та її розв'язування методом функції Гріна	86
6.3.2 Задача Діріхле для круга та її розв'язування методом Фур'є	89
Приклади до розділу 6	91
Контрольні запитання	92
Перевірні тести	93
Тренувальні вправи	101
Література	104

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

1.1 Диференціальні рівняння з частинними похідними, основні поняття

В курсі вищої математики розглядаються звичайні диференціальні рівняння, тобто, рівняння виду

$$F(x; y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

де $y^{(n)}$ – n -я похідна невизнаної функції $y = y(x)$.

Розв'язком таких рівнянь є функція однієї змінної $y = y(x)$.

Нарівні зі звичайними диференціальними рівняннями розглядаються так звані диференціальні рівняння з частинними похідними, розв'язком яких є функції двох або трьох (чи більше) змінних $u = u(x; y)$, $u = u(x; y; z)$, ..., $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Визначення. Рівняння, яке встановлює зв'язок між невідомою функцією $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$ n змінних, незалежними змінними $x_1; x_2; \dots; x_n$ та частинними похідними від шуканої функції називається *диференціальним рівнянням з частинними похідними*.

Таке рівняння може бути подане у вигляді

$$F\left(x_1; x_2; \dots; x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}; \dots; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}\right) = 0, \quad (1.1)$$

де $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$, а $F\left(x_1; x_2; \dots; x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ – задана функція.

Порядком диференціального рівняння з частинними похідними називається *порядок старшої похідної*.

Так, для рівняння (1.1) порядок дорівнює r .

Надалі обмежимося розгляданням диференціальних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядків:

$$F\left(x_1; x_2; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0, \quad (1.2)$$

$$F\left(x_1; x_2; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \dots \partial x_2}\right) = 0. \quad (1.3)$$

Позначимо через $M_r(D)$ множину функцій, які визначені та неперервні в області D разом зі своїми частинними похідними до m -го порядку включно.

Визначення. Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними (1.1) в області D , в якій визначені незалежні змінні $x_1; x_2; \dots; x_n$, називається будь-яка функція $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$ з множиною M_r , яка при підставленні в диференціальне рівняння разом зі своїми частинними похідними перетворює це рівняння у тотожність за змінними $x_1; x_2; \dots; x_n$.

1.2 Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними та властивості їх розв'язків

Визначення. Диференціальне рівняння з частинними похідними називається *лінійним*, якщо воно є лінійним відносно шуканої функції та її частинних похідних.

Так, лінійним є таке диференціальне рівняння з частинними похідними першого та другого порядків:

$$\begin{aligned} A_1(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_2(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_3(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + A_4(x; y) \frac{\partial u}{\partial x} + A_5(x; y) \frac{\partial u}{\partial y} + A_6(x; y)u = f(x; y), \end{aligned} \quad (1.4)$$

де коефіцієнти $A_i(x; y)$ є двічі диференційовними функціями змінних x та y , що визначені в деякій області $D \in XOY$.

Якщо $f(x; y) \equiv 0$ в області D , то рівняння (1.4) називається *однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними*, а якщо $f(x; y) \neq 0$, то – *неоднорідним*.

Визначення. Лінійним диференціальним оператором $L(u)$ називається ліва частина рівняння (1.4), тобто

$$\begin{aligned} L(u) = A_1(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_2(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_3(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + A_4(x; y) \frac{\partial u}{\partial x} + A_5(x; y) \frac{\partial u}{\partial y} + A_6(x; y)u. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В такому разі лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними можна записати у вигляді

$$L(u) = 0, \quad (1.6)$$

а неоднорідне – у вигляді

$$L(u) = f(x; y). \quad (1.7)$$

Розглянемо властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними (1.6).

Теорема 1. Якщо функція $u(x; y)$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (1.6), а c – будь-яка стала, що функція $cu(x; y)$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо функції $u_1(x; y)$ та $u_2(x; y)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (1.6), то функція $u_1(x; y) + u_2(x; y)$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 3. Якщо функції $u_1(x; y)$, $u_2(x; y), \dots, u_m(x; y)$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (1.6), а $c_1, c_2, \dots, c_m$ – будь-які сталі, то і функція

$$c_1 u_1(x; y) + c_2 u_2(x; y) + \dots + c_m u_m(x; y),$$

що є лінійною комбінацією розв'язків $u_1(x; y), u_2(x; y), \dots, u_m(x; y)$, також є розв'язком цього рівняння.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо для звичайного лінійного диференціального рівняння n -го порядку лінійна комбінація n лінійно-незалежних розв'язків утворює загальний розв'язок, то лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними може мати нескінченну кількість частинних розв'язків.

У зв'язку з цим, для таких рівнянь розв'язком може бути навіть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x; y)$.

Теорема 4. Якщо функція $u(x; y)$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (1.6), а функція $v = v(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.7), то функція $u(x; y) + v(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.7).

Теорема 5. Якщо функція $u_1(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння $L(u) = f_1(x)$, а функція $u_2(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння $L(u) = f_2(x)$, то функція $u_1(x; y) + u_2(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння $L(u) = f_1(x) + f_2(x)$.

Така властивість розв'язків називається *принципом суперпозиції*.

Завдання для самостійної роботи. Довести теореми 1 – 5.

1.3 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

Визначення. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними (1.4)

$$\begin{aligned} & A_1(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_2(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_3(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + A_4(x; y) \frac{\partial u}{\partial x} + A_5(x; y) \frac{\partial u}{\partial y} + A_6(x; y) u = f(x; y), \end{aligned}$$

визначене в деякій області $D \in XOY$ називається:

1) рівнянням гіперболічного типу, якщо

$$\Delta = A_2^2(x; y) - A_1(x; y)A_3(x; y) > 0 \text{ в області } D; \quad (1.8)$$

2) рівнянням параболічного типу, якщо

$$\Delta = A_2^2(x; y) - A_1(x; y)A_3(x; y) \equiv 0 \text{ в області } D; \quad (1.9)$$

3) рівнянням еліптичного типу, якщо

$$\Delta = A_2^2(x; y) - A_1(x; y)A_3(x; y) < 0 \text{ в області } D. \quad (1.10)$$

Диференціальні рівняння другого порядку з частинними похідними, надані у формі (1.4), можуть бути суттєво спрощені і приведені до найпростішої, тобто канонічної форми введенням замість незалежних змінних x та y нових незалежних змінних ξ та η , де

$$\begin{cases} \xi = \xi(x; y); \\ \eta = \eta(x; y). \end{cases} \quad (1.11)$$

При цьому мають виконуватись умови:

- 1) функції $\xi(x; y)$ та $\eta(x; y)$ є двічі диференційовними функціями;
- 2) якобіан $I(x; y)$ відрізняється від нуля, тобто

$$I(x; y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.12)$$

Після такої заміни рівняння (1.4) набуває форми:

$$A_1^*(\xi; \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2A_2^*(\xi; \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + A_3^*(\xi; \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + A_4^*\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \quad (1.13)$$

де

$$A_1^*(\xi; \eta) = A_1(x; y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2A_2(x; y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_3(x; y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2; \quad (1.14)$$

$$A_3^*(\xi; \eta) = A_1(x; y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2A_2(x; y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_3(x; y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2; \quad (1.15)$$

$$A_2^*(\xi; \eta) = A_1(x; y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_2(x; y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + A_3(x; y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (1.16)$$

При цьому

$$\left(A_2^*(\xi; \eta) \right)^2 - A_1^*(\xi; \eta) A_3^*(\xi; \eta) = \left(A_2(x; y) - A_1(x; y) A_3(x; y) \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2. \quad (1.17)$$

Остання рівність означає, що введення нових незалежних змінних не змінює тип диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння (1.4) набуває найбільш простої форми, якщо функції $\xi(x; y)$ та $\eta(x; y)$ підібрані таким чином, що виконується одна і лише одна з умов:

$$1. \quad A_1^*(\xi; \eta) = 0; \quad \text{або} \quad A_3^*(\xi; \eta) = 0; \quad (1.18)$$

$$2. \quad A_1^*(\xi; \eta) = 0; \quad \text{або} \quad A_2^*(\xi; \eta) = 0; \quad (1.19)$$

$$3. \quad A_1^*(\xi; \eta) = A_3^*(\xi; \eta); \quad \text{або} \quad A_2^*(\xi; \eta) = 0. \quad (1.20)$$

Канонічне рівняння для рівнянь гіперболічного типу ($\Delta > 0$) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (1.21)$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (1.22)$$

Канонічне рівняння для рівнянь параболічного типу ($\Delta \equiv 0$) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (1.23)$$

Канонічне рівняння для рівнянь еліптичного типу ($\Delta < 0$) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (1.24)$$

Функції $F\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, $\Phi\left(\xi; \eta; u; \frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ є функціями від незалежних змінних ξ ; η ; шуканої функції $u(x; y)$ та їх частинних похідних першого порядку $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ та $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

Вигляд функцій F та Φ залежить від заданого рівняння.

1.4 Постановка задачі для диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними

Як зазначалось раніше, диференціальне рівняння з частинними похідними може мати безліч розв'язків.

Якщо диференціальне рівняння описує той чи інший процес, то зрозуміло, що у безлічі розв'язків необхідно відокремити певний розв'язок. Характеристика процесу дозволяє сформулювати початкові умови. Нарівні з початковими умовами можуть бути задані так звані граничні умови. Якщо D – деяка область, в якій відбувається досліджуваний процес, а Γ – границя області D , то режим, в якому відбувається процес на границі Γ , дозволяє сформулювати граничні умови.

Отже, можливі такі випадки:

1. Задані диференціальне рівняння та початкові умови, тобто задана задача Коші.
2. Задані диференціальне рівняння та граничні умови, тобто, задана крайова задача.
3. Задані диференціальне рівняння, початкові умови, граничні умови, тобто, задана мішана задача.

Перший випадок має місце, якщо рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного або параболічного типу; другий випадок має місце, якщо рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу; третій випадок має місце, якщо рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного та параболічного типу.

1.5 Поняття про рівняння математичної фізики

Дуже часто у фізиці, телекомунікаціях, радіотехніці розглядаються процеси, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними.

Так, приміром, при розгляданні двопровідної однорідної лінії, так званої довгої лінії, незалежними змінними є відстань x , що відлічується від початку лінії та час t , а шуканими функціями можуть бути миттєві значення струму $i(x;t)$ або напруги $u(x;t)$ в будь-якому перерізі лінії.

В зазначених випадках диференціальні рівняння з частинними похідними називаються *рівняннями математичної фізики*.

Рівняння математичної фізики являють собою математичну модель того фізичного процесу, який вони описують.

Дослідження цієї моделі дозволяє зробити певні висновки про характер процесу.

Далі будуть розглянуті основні методи дослідження математичних моделей.

Приклади до розділу 1

Приклад 1.1. Розв'язати задане диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} - 4xy^3 = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я

Задане диференціальне рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку з частинними похідними.

Запишемо диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} = 4xy^3.$$

Проінтегруємо за змінною x це рівняння, вважаючи, що y виконує роль параметра.

$$\int \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} dx = \int 4xy^3 dx;$$

$$u(x; y) = 2x^2y^3 + \psi_2(y), \text{ де } \psi_2(y) - \text{функція дана від } y.$$

Функція $\psi_2(y)$ є сталою відносно змінної x . Ця функція може бути будь-якою, але вона має бути диференційовною.

Отриманий розв'язок диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними є його загальним розв'язком й утримує одну довільну функцію.

В і д п о в і д ь : $u(x; y) = 2x^2y^3 + \psi_2(y)$, де $\psi_2(y)$ – функція дана від y .

Приклад 1.2. Розв'язати задане диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} = 4.$$

Розв'язання

Задане диференціальне рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з частинними похідними.

Запишемо диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} \right) = 4.$$

Обидві частини цього рівняння проінтегруємо за змінною x , вважаючи, що y – параметр:

$$\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = 4x + \psi_2(y),$$

де $\psi_2(y)$ – будь-яка довільна функція від y , що є диференційовною.

Далі отримане рівняння вже першого порядку проінтегруємо за змінною y .

$$u(x; y) = 4xy + \psi_1(x) + \int \psi_2(y) dy.$$

Позначимо $\int \psi_2(y) dy = \psi_3(y)$. Тоді

$$u(x; y) = 4x + \psi_1(x) + \psi_3(y),$$

де $\psi_1(x)$ та $\psi_3(y)$ – будь-які довільні та диференційовні функції.

Отриманий розв'язок є загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними й утримує дві довільні функції.

В і д п о в і д ь: $u(x; y) = 4x + \psi_1(x) + \psi_3(y)$, де $\psi_1(x)$ – будь-яка довільна функція від x , де $\psi_2(y)$ – будь-яка довільна функція від y .

Приклад 1.3. Задане диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} + 4y(x; y) = 0$$

звести до канонічного виду.

Розв'язання

Для того, щоб диференціальне рівняння другого порядку звести до канонічного виду необхідно виконати заміну (1.11) змінних x та y змінні ξ та η .

Для того, щоб вдало підібрати функції $\xi = \xi(x; y)$ та $\eta = \eta(x; y)$ будемо користуватись методом характеристик. Суть цього методу полягає у наступному.

Для рівняння (1.4) складаємо так зване характеристичне рівняння

$$A_1(x; y) dy^2 - 2A_2(x; y) dx dy + A_3(x; y) dx^2 = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на dx^2 дістанемо звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$A_1(x; y)(y')^2 - 2A_2(x; y)y' + A_3(x; y) = 0.$$

У даному випадку це буде таке рівняння

$$(y')^2 - 2y' + 1 = 0. \quad (*)$$

Розв'язки $\varphi(x; y) = c_1$ та $\psi(x; y) = c_2$, характеристичного рівняння називаються характеристиками початкового диференціального рівняння, де c_1, c_2 – сталі.

Отже, розв'язуємо рівняння (*).

$$y' = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1.$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad dy = dx, \quad y = x + c \quad \text{або} \quad y - x = c, \quad \text{де } c - \text{стала.}$$

Таким чином, за функцію ξ візьмемо $\xi = y - x$. Тоді за функцію η можна взяти будь-яку лінійно-незалежну від ξ та диференційовну функцію, приміром, нехай $\eta = y + x$.

Знаходимо необхідні похідні:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставимо ці похідні у задане диференціальне рівняння і після спрощень дістанемо таке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + u = 0.$$

Це канонічне рівняння параболічного типу.

В і д п о в і д ь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + u = 0.$

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ

2.1 Хвильове рівняння

Ті чи інші процеси, основою яких є коливання зі скінченною швидкістю розповсюдження збурень, описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними гіперболічного типу.

Звернемось до системи рівнянь Максвелла для непровідного, однорідного та ізотропного середовища, в якому відсутні заряди та струми:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{H} = 0; \\ \operatorname{div} \bar{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \bar{H} = -\frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $\bar{E}$ – вектор напруги електричного поля; $\bar{H}$ – вектор напруги магнітного поля; ε – коефіцієнт електричної проникності; μ – коефіцієнт магнітної проникності; c – швидкість світла у вакуумі.

Продиференціюємо за t третє з рівнянь (2.1):

$$-\frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial \operatorname{rot} \bar{H}}{\partial t}.$$

З четвертого рівняння маємо:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \bar{E}.$$

Підставимо цей вираз в попереднє рівняння:

$$\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{E}),$$

звідки

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{E}).$$

Згідно з властивостями ротора, маємо:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{E}) = \nabla \times \nabla \times \bar{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{E} - \Delta \bar{E}.$$

Оскільки $\operatorname{div} \bar{E} = 0$, то залишається таке:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \Delta \bar{E}. \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) називається одновимірним хвильовим рівнянням для векторного поля $\bar{E}$.

Аналогічно, для векторного поля $\bar{H}$ хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \Delta \bar{H}. \quad (2.3)$$

Якщо формули $\bar{E} = \{E_x; E_y; E_z\}$ та $\bar{H} = \{H_x; H_y; H_z\}$ задовольняють рівняння відповідно (2.2) та (2.3), то їхні координати $E_x; E_y; E_z; H_x; H_y; H_z$ задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.4)$$

де $a^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu}$ – швидкість розповсюдження процесу в непровідному середовищі,

а $u(x; y; z; t)$ – шукана функція.

Рівняння (2.4) – це тривимірне хвильове рівняння у скалярній формі.

Зокрема, якщо $u = u(x; y; t)$, то дістанемо двовимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.5)$$

а якщо $u(x; t)$, то дістанемо одновимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Усі хвильові рівняння (2.4), (2.5), (2.6) є диференціальними рівняннями гіперболічного типу, оскільки для цих рівнянь виконується умова (1.8).

Для розв'язання таких рівнянь мають бути сформульовані початкові умови.

Розглянемо далі деякі важливі процеси, що описуються диференціальними рівняннями гіперболічного типу та методи розв'язування цих рівнянь.

2.2 Задача про вільні коливання нескінченної струни та її розв'язування методом Даламбера

Будемо розглядати нескінченну струну та досліджувати коливання цієї струни внаслідок збурення.

Якщо збурення відбувається у середній частині нескінченної струни, то виникають хвилі, які поширюються по цій струні в обидві сторони. Припускаючи, що струна є нескінченною, ми можемо знехтувати тими процесами, які будуть відбуватися на кінцях струни.

Вільні коливання такої струни описуються рівнянням (2.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де $t \in [0; +\infty)$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Додамо до цього рівняння початкові умови

$$u(x; 0) = \varphi_0(x), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad (2.8)$$

де функція $\varphi_0(x)$ визначає форму струни на початку процесу, тобто, коли $t = 0$, а функція $\varphi_1(x)$ характеризує швидкість поширення хвиль уздовж струни.

Рівняння (2.6) разом з початковими умовами (2.7) та (2.8) складають задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = \varphi_1(x). \end{cases} \quad (2.9)$$

Розв'язати задачу Коші означає знайти шукану функцію $u = u(x;t)$, яка задовольняє початкові умови (2.7), (2.8). Функція $u = u(x;t)$ визначає величину зміщення точок струни від положення рівноваги у момент t . При кожному фіксованому значенні t графік функції $u = u(x;t)$ визначає форму струни саме в момент t .

Будемо розв'язувати цю задачу методом, який називається методом Даламбера або методом біжучої хвилі.

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\begin{cases} \xi = x - at; \\ \eta = x + at. \end{cases} \quad (2.10)$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = a; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Знайдені похідні підставляємо в рівняння (2.6). Виходить,

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.11)$$

Таким чином, канонічне рівняння (2.6) гіперболічного типу перейшло в канонічне рівняння (2.11) гіперболічного типу.

Покажемо далі, що загальний розв'язок рівняння (2.11) має вигляд

$$u(x; t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \quad (2.12)$$

де функції $\theta_1(x - at)$ та $\theta_2(x + at)$ є двічі диференційовними функціями. Неважко впевнитись у тому, що функція (2.12) задовольняє рівняння (2.11).

Візьмемо $t = 0$ в рівнянні (2.12) і дістанемо

$$u(x, 0) = \theta_1(x) + \theta_2(x),$$

а з урахуванням умови (2.7) маємо:

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x).$$

Знов візьмемо $t = 0$ в рівнянні (2.8), тоді маємо

$$-a\theta_1'(x) + a\theta_2'(x) = \varphi_1(x). \quad (2.13)$$

Проінтегруємо рівність (2.13) за проміжком $(0; x)$:

$$-a(\theta_1(x) - \theta_1(0)) + a(\theta_2(x) - \theta_2(0)) = \int_0^x \varphi_1(x) dx + c, \quad (2.14)$$

де $c = -\theta_1(0) + \theta_2(0) = \text{const}$.

Розглядаючи систему рівнянь

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x); \\ -a(\theta_1(x) - \theta_1(0)) + a(\theta_2(x) - \theta_2(0)) = \int_0^x \varphi_1(x) dx + c, \end{cases}$$

можемо знайти функції $\theta_1(x)$ та $\theta_2(x)$.

$$\begin{cases} \theta_1(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(x) dx - \frac{c}{2}; \\ \theta_2(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(x) dx + \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (2.15)$$

На основі рівнянь (2.15) знаходимо функцію $u(x; t)$:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} \varphi_0(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \varphi_1(x) dx + \frac{1}{2} \varphi_0(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} f_1(x) dx.$$

Цей вираз можна дещо спростити, оскільки

$$- \int_0^{x-at} f_1(x) dx + \int_0^{x+at} f_1(x) dx = \int_{x-at}^{x+at} f_1(x) dx.$$

Тоді

$$u(x; t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(x) dx. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) називається *розв'язком Даламбера задачі Коші* для рівняння коливання струни.

З'ясуємо фізичний зміст функції $u(x; t)$, поданої формулою (2.16).

Спочатку розглянемо функцію $\theta_1(x - at)$ та побудуємо її графіки:

1) для $t = 0$; 2) для $t_1 > 0$; 3) для $t_2 > t_1$ (рис. 2.1).

Аналізуючи графіки функції $\theta_1(x - at)$, можемо дійти висновку, що графік $\theta_1(x - at_1)$ отримано з графіка $\theta(x)$ паралельним переносом на величину at_1 уздовж осі Ox , а графік функції $\theta_1(x - at_2)$ – виходить внаслідок паралельного переносу графіка $\theta(x)$ на at_2 .

Це означає, що графік $\theta(x)$ пересувається праворуч уздовж осі Ox і при цьому утворює хвилю, а коефіцієнт a , що входить до хвильового рівняння визначає швидкість розповсюдження хвилі.

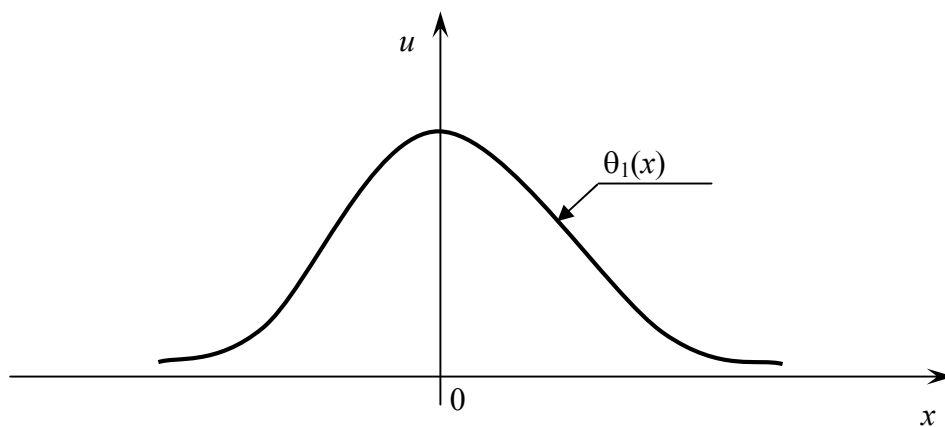
Зокрема, якщо хвильовий процес є синусоїдальним, швидкість розповсюдження хвилі дорівнює a , а точка, що відповідає початку координат коливається за законом $u = A \sin \omega t$, то відхилення $u(x; t)$ визначається формулою

$$u(x; t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

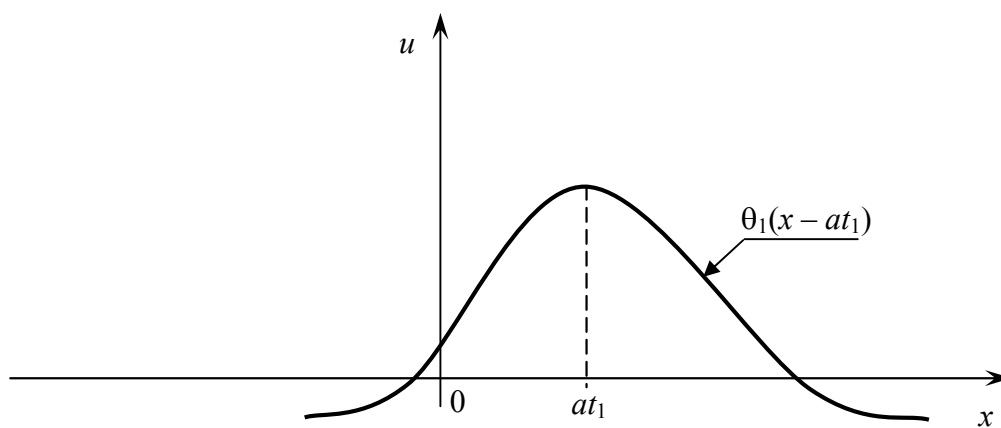
або

$$u(x; t) = -A \sin \frac{\omega}{a} (x - at).$$

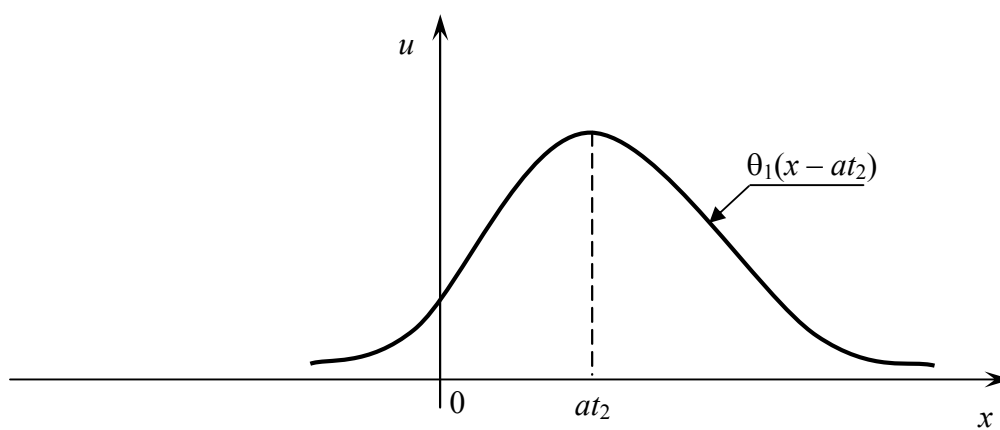
Аналогічні висновки можна зробити і для функції $\theta_2(x + at)$, але хвиля буде розповсюджуватись не вліво, а вправо.



a)



б)



в)

Рисунок 2.1

2.3 Дослідження розповсюдження хвиль відхилення методом характеристик

Розглядаємо нескінченну струну.

Нехай початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а коливання відбуваються завдяки початковому відхиленню, тобто маємо частинний випадок коливань нескінченної струни. Тоді виходить, що $\varphi_1(x) = 0$, а загальний розв'язок відповідного хвильового рівняння має вигляд

$$u(x; t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2}. \quad (2.17)$$

Коливання $u(x; t)$ складається з двох хвиль. Хвиля $\frac{1}{2}\varphi_0(x - at)$ називається *прямою хвилею*, вона зі швидкістю a розповсюджується вправо, а хвиля $\frac{1}{2}\varphi_0(x + a)$ називається *оберненою хвилею* і вона зі швидкістю a розповсюджується вліво.

Якщо $t = 0$, то профілі обох хвиль *співпадають*. Припустимо, що хвиля розміщується в інтервалі $(-\ell; \ell)$, а функція $\varphi_0(x)$ є парною.

Через деякий час хвилі починають розходитися в протилежні сторони та частково перекривають одна одну. Коли $t = \frac{\ell}{a}$, хвилі мають лише одну спільну точку (рис. 2.2). Будь-яка точка струни з абсцисою x бере участь у коливальному процесі, якщо

$$-\ell < x - at < \ell.$$

На рис. 2.2 зображена сума двох графіків: $\frac{1}{2}\varphi_0(x - at)$ та $\frac{1}{2}\varphi_0(x + a)$. Якщо $t = 0$, то хвилі збігаються.

Якщо $t < \frac{\ell}{a}$, то хвилі не накладаються. Якщо абсциса x точки M задовольняє умову $x > \ell$, то точка M лежить на осі Ox і знаходиться у стані спокою в момент $t = 0$. Хвиля, що рухається вправо досягає точки M , коли $t_1 < \frac{x - \ell}{a}$, після чого точка M включається в коливальний процес. Хвиля виходить через цю точку, коли $t_2 < \frac{x + \ell}{a}$, після чого при $t > t_2$ точка M знов знаходиться у стані спокою. Отже, коли $t = t_1$ до точки M доходить передній фронт хвилі, а коли $t = t_2$ – задній фронт.

Якщо $0 < x < \ell$, то через точку M проходять і пряма, і обернена хвилі.

Якщо $x < -\ell$, то точка M перебуває у коливальному процесі за умови $-\ell < x + at < \ell$.

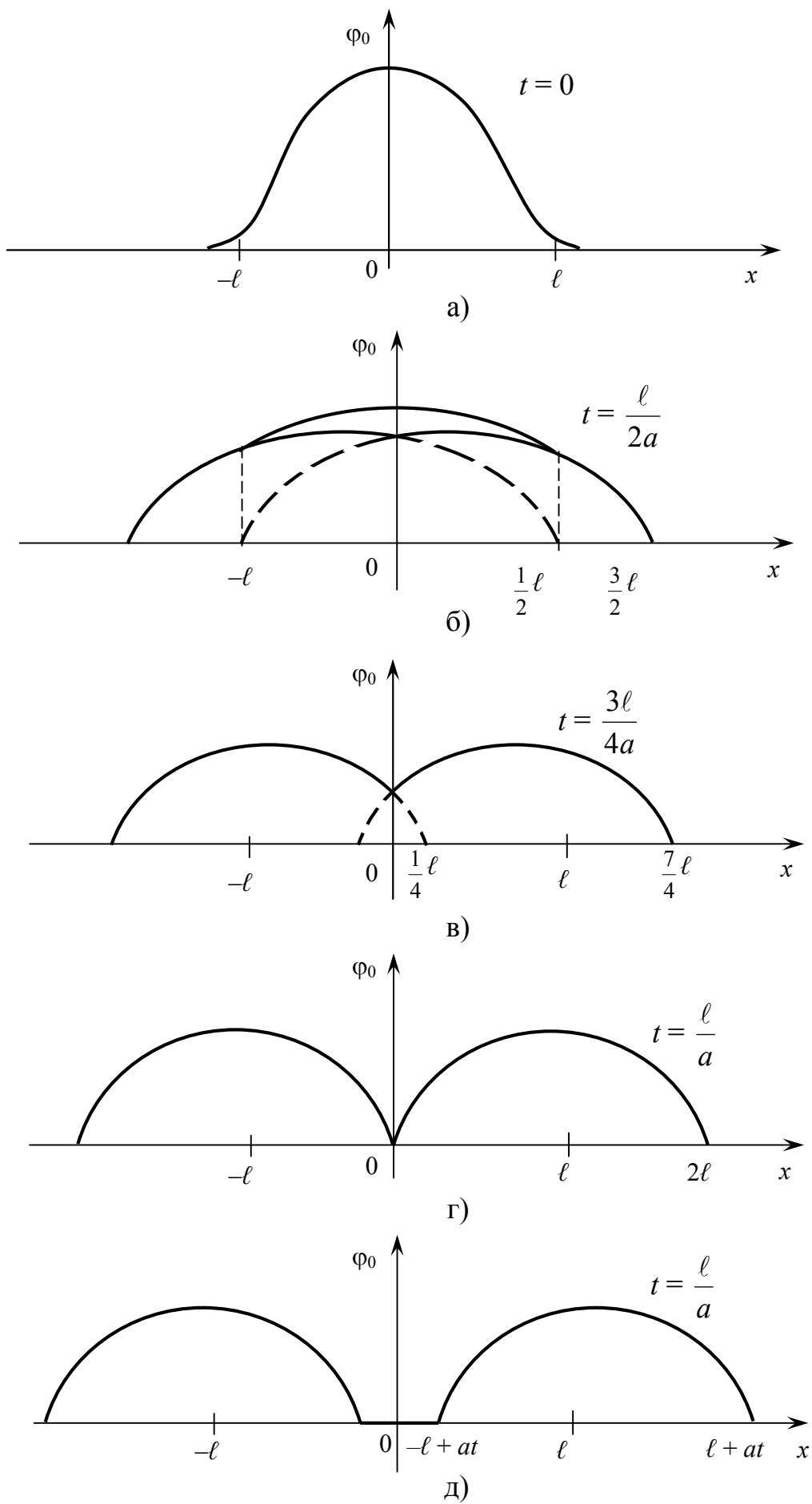


Рисунок 2.2

Якщо $0 > x > -\ell$, то коливання припиняються, коли через точку M проходить задній фронт оберненої хвилі, тобто, коли $t = \frac{\ell - x}{a}$.

Дослідження коливань струни зручно виконувати за допомогою так званої фазової площини xOt (рис. 2.3).

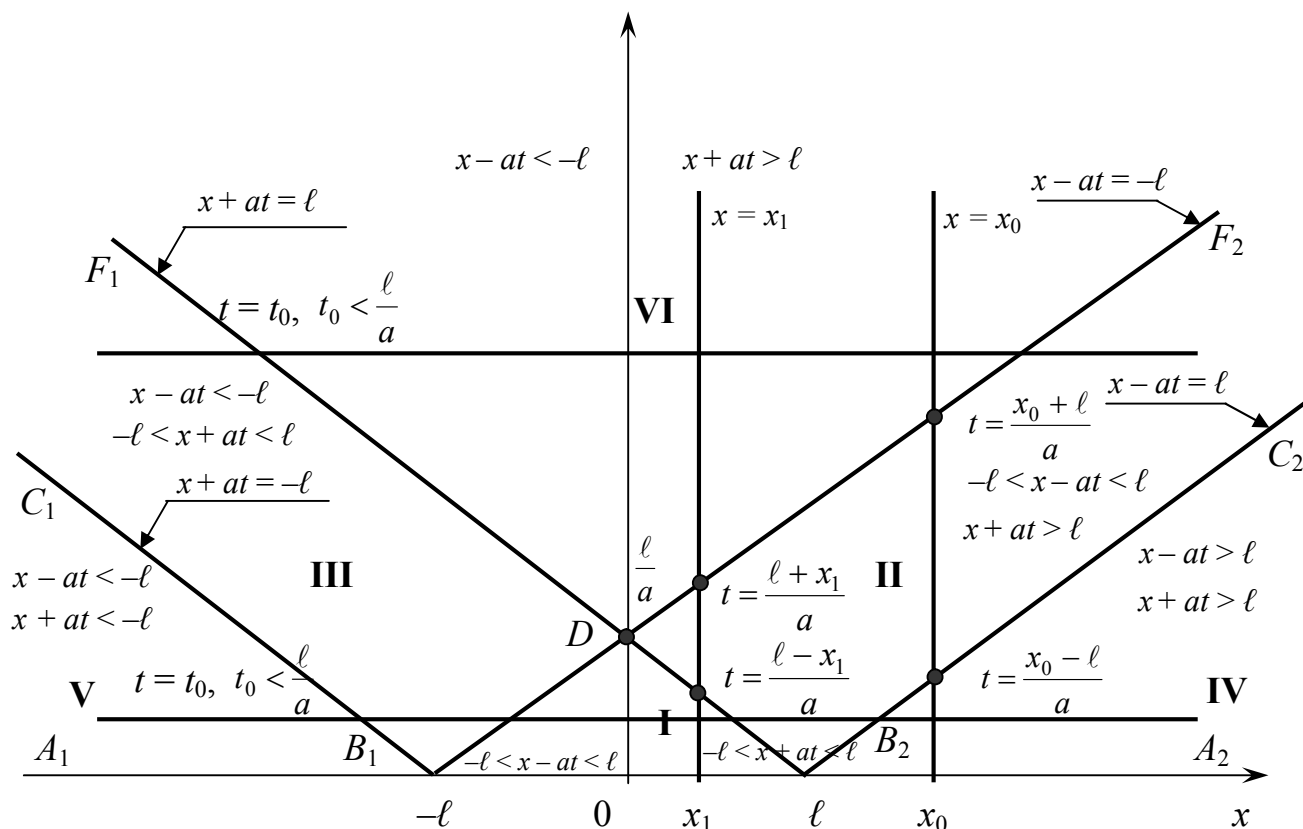


Рисунок 2.3

Півплощина $t \geq 0$ поділяється на зони: I, II, III, IV, V, VI. Кожна точка $N(x;t)$ на струні у момент t відповідає точці $M(x)$ з абсцисою x на струні у початковий момент $t=0$ та потрапляє у ту чи іншу зону. Кожна зона характеризується певним станом хвильового процесу.

Для побудування зон проводимо у фазовій площині прямі $x + at = -\ell$, $x + at = \ell$, $x - at = -\ell$, $x - at = \ell$, які називаються *характеристиками*.

Область B_1DB_2 утворює I зону.

Область $C_2B_2DF_2$ утворює II зону.

Область $C_1B_1DF_1$ утворює III зону.

Область $A_2B_2C_2$ утворює IV зону.

Область $A_1B_1C_1$ утворює V зону.

Область F_1DF_2 утворює VI зону.

Коливання відбуваються у тих точках $N(x;t)$, які відповідають I, II, III зонам. У зоні II діє лише пряма хвиля, а у зоні III діє лише обернена хвиля. У зоні I діють і пряма і обернена хвилі.

У точках, які відповідають IV зоні, коливання відсутні, оскільки до цієї зони ще не дійшов передній фронт прямої хвилі. У точках, які відповідають V зоні, коливання також відсутні, оскільки до них ще не дійшов фронт оберненої хвилі.

У точках, які відповідають VI зоні, коливань вже не має, оскільки через них вже пройшли і задній фронт прямої хвилі і задній фронт оберненої хвилі.

Слід мати на увазі, що через точки фазової площини для яких $x \in [-\ell; \ell]$ проходить і задній фронт прямої хвилі, і задній фронт оберненої хвилі. Якщо ж абсциси x точок є такими: $x \in [-\infty; \ell]$ або $x \in [\ell; +\infty]$, то через точки з такими абсцисами проходить задній фронт лише однієї хвилі.

Дослідження процесу коливань на фазовій площині можна проводити при фіксованому значенні $x = x_0$ або при фіксованому значенні $t = t_0$.

Покажемо, як користуватись фазовою площиною. Для дослідження процесу $U(x_0)t$ при фіксованому значенні x_0 побудуємо у фазовій площині пряму $x = x_0$, де $x_0 < \ell$. Будемо переміщуватись по цій прямій знизу вгору.

Спочатку пряма знаходиться у IV зоні і при цьому $0 \leq t, \frac{x_0 - \ell}{a}$. У IV зоні

коливання відсутні, тобто $U(x_0; t) = 0$. Далі пряма переходить у II зону. При

цьому $\frac{x_0 - \ell}{a} < t < \frac{x_0 + \ell}{a}$. Точки струни знаходяться під дією прямої хвилі,

тобто $U(x_0; t) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - at)$. Оскільки у другій зоні $x_0 + at > \ell$, то виходить,

$\varphi_0(x_0 + at) = 0$. Коли $t > \frac{x_0 + \ell}{a}$, пряма переходить у VI зону. Як відомо, у VI

зоні коливання відсутні, тобто $U(x_0; t) = 0$.

Таким чином, результати дослідження є такими:

$$U(x_0; t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < \frac{x_0 - \ell}{a}; \\ \frac{1}{2} \varphi_0(x_0 - at), & \text{якщо } \frac{x_0 - \ell}{a} < t < \frac{x_0 + \ell}{a}; \\ 0, & \text{якщо } \frac{x_0 + \ell}{a} < t. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи. Провести дослідження коливального процесу $U(x_1; t)$, де $0 < x_1 < \ell$.

За допомогою фазової площини можна досліджувати і коливальний процес $U(x_1; t)$ при фіксованому значенні $t = t_0$. Для цього проводимо горизонтальну пряму $t = t_0$. Якщо $t_0 < \frac{\ell}{a}$, то переміщуючись зліва направо, точка струни проходить послідовно V, III, I, II, IV зони.

У V зоні коливальний процес відсутній, отже, $U(x; t_0) = 0$, при цьому $-\infty < x < -at_0 - \ell$.

У III зоні діє лише обернена хвиля, тобто $U(x; t_0) = \frac{1}{2}\varphi_0(x + at_0)$, при цьому $-\ell - at_0 < x < at_0 - \ell$.

Пряма хвиля у III зоні відсутня, тобто $\varphi_0(x - at_0) = 0$.

У I зоні діють пряма і обернена хвилі, тобто $U(x; t_0) = \frac{1}{2}\varphi_0(x - at_0) + \varphi_0(x + at_0)$, при цьому $at_0 < \ell < x < \ell - at_0$.

У II зоні діє лише пряма хвиля, тобто $U(x; t_0) = \frac{1}{2}\varphi_0(x - at_0)$, при цьому $\ell - at_0 < x < \ell + at_0$.

У IV зоні хвильовий процес відсутній, тобто $U(x; t_0) = 0$, при цьому $\ell + at_0 < x < +\infty$.

Таким чином, хвильовий процес $U(x; t_0)$, де $t_0 < \frac{\ell}{a}$, є таким:

$$U(x; t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x < -at_0 - \ell; \\ \frac{1}{2}\varphi_0(x + at_0), & \text{якщо } -\ell - at_0 < x < at_0 - \ell; \\ \frac{1}{2}(\varphi_0(x - at_0) + \varphi_0(x + at_0)), & \text{якщо } at_0 - \ell < x < \ell - at_0; \\ \frac{1}{2}\varphi_0(x - at_0), & \text{якщо } \ell - at_0 < x < \ell + at_0; \\ 0, & \text{якщо } \ell + at_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи. Провести дослідження коливального процесу $U(x; t_0)$, якщо $t_0 > \frac{\ell}{a}$.

Дослідження хвильового процесу за допомогою фазової площини називається *методом характеристик*.

ЗАУВАЖЕННЯ. Формула (2.16) та її частинні випадки є розв'язками хвильового рівняння (2.6) з початковими умовами (2.7) та (2.8).

Для того, щоб ця формула була розв'язком рівняння (2.6) мають виконуватись наступні умови:

- 1) функція $u(x; t)$ є двічі диференційовною за змінними x та t ;
- 2) функція $\varphi_0(x)$ є двічі диференційовною за змінною x ;
- 3) функція $\varphi_1(x)$ є диференційовною за змінною x .

Якщо розв'язок $u(x; t)$ є єдиним та неперервно залежить від початкових умов, то незначні зміни початкових умов ведуть до незначних змін функції $u(x; t)$. Розв'язок при цьому називається *стійким*, а поставлення задачі є коректним.

Мається на увазі, що для ідеалізації хвильового процесу при складанні його математичної моделі, задаючи початкові умови, можна знехтувати деякими незначними величинами.

2.4. Дослідження поширення хвиль імпульса методом характеристик

Розглядаємо нескінченну струну, початкові відхилення точок якої дорівнюють нулю.

У момент $t = 0$ точки струни отримали деякі початкові швидкості, що привело до виникнення коливального процесу, який за зазначених обставин називається поширення хвилі імпульса, тобто маємо частинний випадок коливань нескінченної струни.

Оскільки за умовою, $u(x; 0) = \varphi_0(x) = 0$, то формула (2.16) набуває вигляду

$$u(x; t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(x) dx.$$

Нехай функція $\Phi(x)$ – є первісною для функції $\frac{1}{2a} \varphi_1(x)$, тобто $\frac{1}{2a} \int \varphi_1(x) dx = \Phi(x) + c$.

Тоді
$$U(x; t) = \frac{1}{2a} \left(\int_{x-at}^0 \varphi_1(x) dx + \int_0^{x+at} \varphi_1(x) dx \right)$$

або

$$u(x; t) = \Phi(x + at) - \Phi(x - at). \quad (2.18)$$

Очевидно, що функція $u(x; t)$ характеризує дві хвилі:

Пряма хвиля – це $-\Phi(x - at)$, обернена хвиля – це $\Phi(x + at)$.

В момент $t = 0$ графік прямої хвилі задано функцією $u_{\text{пр}} = -\Phi(x)$, а оберненої – $u_{\text{об}} = \Phi(x)$, а тоді виходить, що $u(x; 0) = u_{\text{пр}}(x; 0) + u_{\text{об}}(x; 0)$, тобто $u(x; 0) = 0$.

Будемо вважати, що функція $\varphi_1(x)$ задана на проміжку $(-\ell; \ell)$ і при цьому $\varphi_1(x) = v_0$, якщо $x \in (-\ell; \ell)$. З фізичної точки зору v_0 – це стала початкова швидкість.

Оскільки $\varphi_1(x) = u(x; 0)$, то виходить, що функція $\varphi_1(x)$ має розриви I роду у точках $x = -\ell$ та $x = \ell$.

Знаходимо $\Phi(x)$.

$$\begin{cases} \Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-\ell} V_0 dx = -\frac{V_0}{2a} \ell, \text{ якщо } x < -\ell; \\ \Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x V_0 dx = \frac{V_0}{2a} x, \text{ якщо } -\ell \leq x \leq \ell; \\ \Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{\ell} V_0 dx = \frac{V_0}{2a} \ell, \text{ якщо } x > \ell. \end{cases} \quad (2.19)$$

Величина $h = \frac{V_0 \ell}{a}$ називається кінцевим зміщенням.

Функція $\Phi(x)$ є непарною функцією. Побудуємо її графік (рис. 2.4).

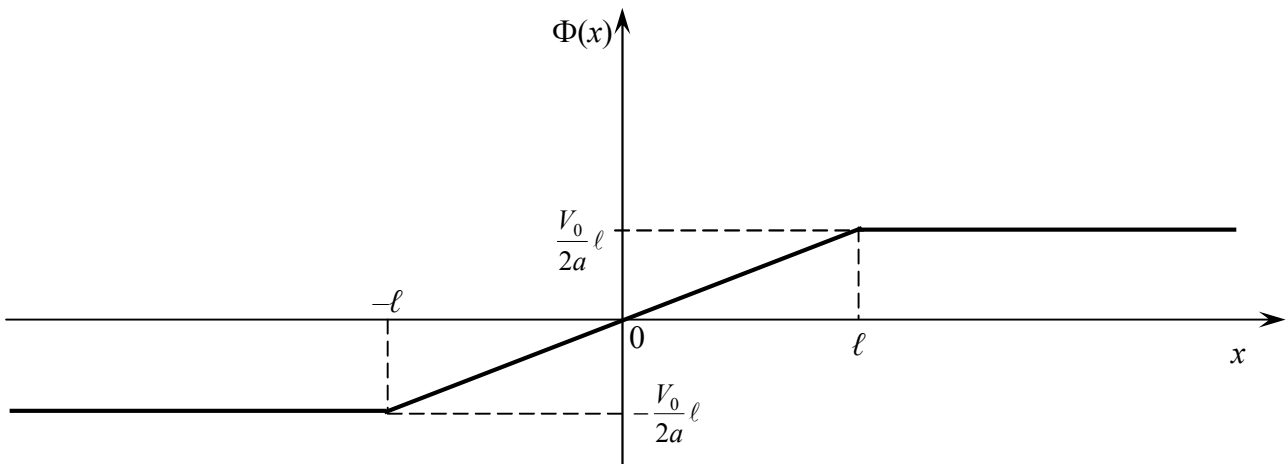


Рисунок 2.4

Побудуємо також графік функції $U(x;t)$ (рис. 2.5). На цьому рисунку подані графіки оберненої хвилі $U_{об}(x;t) = \Phi(x + at)$ у I стовпчику, прямої хвилі $u_{пр}(x;t) = -\Phi(x - at)$ у III стовпчику та графік функції $u(x;t) = u_{пр}(x;t) + u_{об}(x;t)$.

Побудуємо фазову площину (рис. 2.6).

Область B_1DB_2 утворює I зону.

Область $C_2B_2DF_2$ утворює II зону.

Область $C_1B_1DF_1$ утворює III зону.

Область $C_2B_2A_2$ утворює IV зону.

Область $A_1B_1C_1$ утворює V зону.

Область F_1DF_2 утворює VI зону.

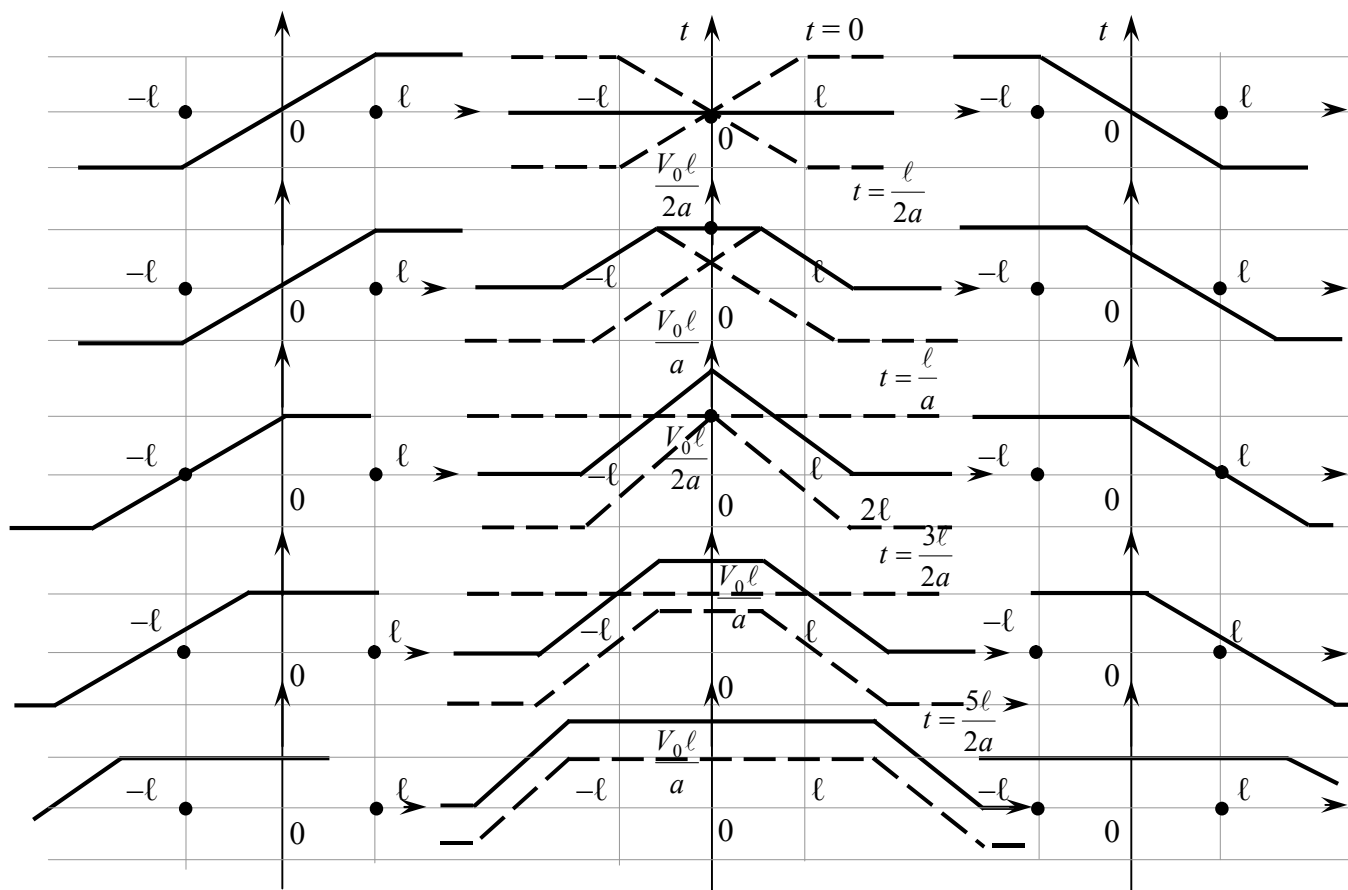


Рисунок 2.5

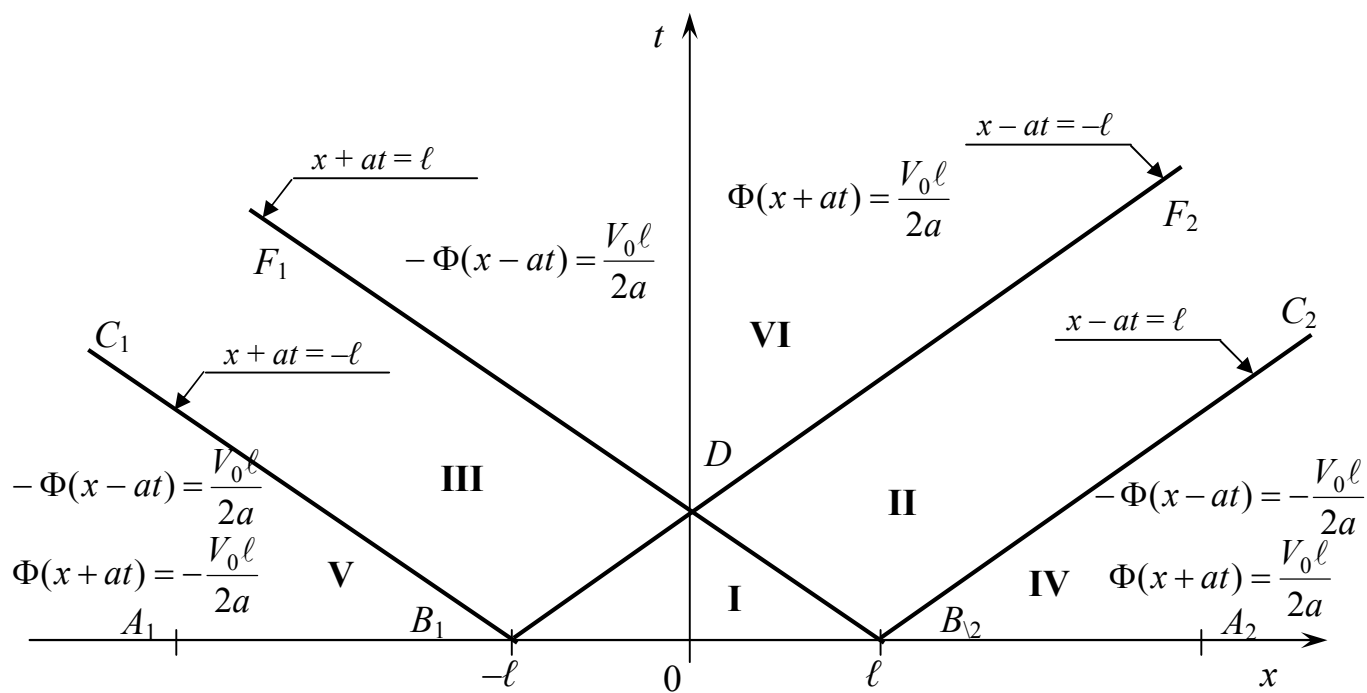


Рисунок 2.6

Дослідження процесу $u(x_0; t)$ при фіксованому значенні x_0 дає такий результат:

$$u(x_0; t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq t < \frac{x_0 - \ell}{a}; \\ \frac{V_0 \ell}{2a} \left(1 - \frac{x_0 - at}{\ell}\right), & \text{якщо } \frac{x_0 - \ell}{a} < t < \frac{x_0 + \ell}{a}; \\ \frac{V_0 \ell}{a}, & \text{якщо } \frac{x_0 + \ell}{a} < t. \end{cases}$$

2.5 Задача про вільні коливання струни із закріпленими кінцями та її розв'язування

Одним з найбільш поширених методів розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Фур'є, який називають *методом розділення змінних*.

Розглянемо цей метод на прикладі однорідного хвильового рівняння, яке описує вільні коливання струни:

– з закріпленими кінцями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ де } t \geq 0, x \in (0; \ell); \quad (2.20)$$

– з початковими умовами

$$\begin{cases} u(x; 0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \text{ де } x \in [0; \ell]; \end{cases} \quad (2.21)$$

– з граничними умовами

$$\begin{cases} u(0; t) = 0; \\ u(\ell; t) = 0, \text{ де } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Така задача називається *мішаною*, оскільки вона утримує і початкові, і граничні умови.

Частинні розв'язки $u(x; t)$ цієї задачі будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $X(x)$ та $T(t)$, тобто

$$u(x; t) = X(x)T(t). \quad (2.23)$$

Функції $X(x)$ та $T(t)$ мають задовольняти граничні умови.

Введену функцію (2.23) продиференціюємо та підставимо у рівняння (2.20). Виходить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} &= X'(x)T(t), & \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} &= X''(x)T(t); \\ \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} &= X(x)T'(t), & \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} &= X(x)T''(t); \end{aligned}$$

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

або

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.24)$$

Особливістю рівняння (2.24) є те, що його ліва частина залежить лише від змінної t , а права – лише від змінної x . Така рівність можлива лише у тому випадку, коли і ліва, і права частини є сталими, тобто

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const.}$$

Позначимо цю сталу через $(-\lambda)$.

Тоді

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (2.25)$$

отже, маємо:

$$\begin{aligned} T''(t) &= -\lambda a^2 T(t), \\ X''(x) &= -\lambda X(x) \end{aligned}$$

або

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.26)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (2.27)$$

Забезпечимо виконання граничних умов:

$$\begin{aligned} u(0; t) &= X(0)T(t) = 0, \\ u(\ell; t) &= X(\ell)T(t) = 0. \end{aligned}$$

Оскільки функція $T(t)$ не може бути нульовою за будь-якого t , то це означає, що мають виконуватись умови

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

які і є граничними умовами для функції (2.23).

Отже, отримали таку задачу: знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.29)$$

який задовольняє граничні умови

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

Така задача називається *задачею Штурма-Ліувілля*.

Число λ у рівнянні (2.29) виконує роль параметра та називається власним числом, а нетривіальні розв'язки, які відповідають власному числу λ , називаються *власними функціями задачі Штурма-Ліувілля*.

Розв'язуючи задачу (2.29) – (2.30) розглянемо окремо три випадки: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

1. Нехай $\lambda < 0$.

Для звичайного однорідного диференціального рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

складаємо характеристичне рівняння:

$$r^2 + \lambda = 0 \text{ або } r^2 - (-\lambda) = 0, \text{ де } -\lambda > 0.$$

Корені характеристичного рівняння такі:

$$r_1 = -\sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = \sqrt{-\lambda}, \text{ де } -\lambda > 0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}. \quad (2.31)$$

Користуючись граничними умовами, знайдемо довільні сталі c_1 та c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 + c_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $c_1 = 0$ та $c_2 = 0$, а $X(x) \equiv 0$.

Таким чином, якщо $\lambda < 0$, то нетривіальних розв'язків задачі Штурма-Ліувілля не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$.

Характеристичне рівняння для звичайного однорідного диференціального рівняння

$$X''(x) = 0$$

є таким: $r^2 = 0$, звідки $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, а загальний розв'язок звичайного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 X + c_2. \quad (2.33)$$

З граничних умов маємо:

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0; \\ c_1 \ell + c_2 = 0. \end{cases}$$

Виходить: $c_2 = 0$, $c_1 = 0$, а $X(x) \equiv 0$.

Нетривіальних розв'язків і у цьому випадку не існує.

3. Нехай $\lambda > 0$.

Характеристичне рівняння для звичайного однорідного диференціального рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

має вигляд

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Тоді $r^2 = -\lambda$, $r_1 = -\sqrt{-\lambda}$, $r_2 = \sqrt{-\lambda}$ або $r_1 = -\sqrt{\lambda}i$, $r_2 = \sqrt{\lambda}i$.

Загальний розв'язок звичайного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (2.34)$$

З граничних умов маємо

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0; \\ c_1 \cos \sqrt{\lambda} \ell + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0. \end{cases}$$

Знаходимо c_1 та c_2 . З першого рівняння виходить, що $c_1 = 0$. З другого рівняння дістанемо

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0.$$

Якщо $c_2 = 0$, то дістанемо тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$, а якщо $c_2 \neq 0$, то знайдемо нетривіальний розв'язок.

Якщо $c_2 \neq 0$, то $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$, а це можливо, коли $\sqrt{\lambda} \ell = \pi n$, де $n = 1; 2; 3; \dots$

Отже, нетривіальні розв'язки мають місце, якщо

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2, \quad n = 1; 2; 3; \dots \quad (2.35)$$

Ці числа є власними значеннями задачі (2.29) – (2.30), а власні функції є такими:

$$X_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{де } n = 1; 2; 3; \dots$$

Припустимо, що $c_2 = 1$, тоді

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{де } n = 1; 2; 3; \dots \quad (2.36)$$

Формулою (2.35) власні функції визначені з точністю до сталого множника c_2 .

Шукаємо загальний розв'язок звичайного однорідного диференціального рівняння (2.26).

Кожному власному числу (2.35) відповідає своя функція $T_n(t)$, визначена рівнянням (2.26):

$$\begin{aligned} T_n''(t) + \lambda_n a^2 T(t) &= 0; \\ T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 a^2 T(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Складаємо характеристичне рівняння для рівняння (2.37):

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 &= 0; \\ r^2 &= - \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2; \\ r_1 &= - \sqrt{- \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2}; \quad r_2 = \sqrt{- \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2}, \end{aligned}$$

тобто

$$r_1 = - \frac{\pi n a}{\ell} i, \quad r_2 = \frac{\pi n a}{\ell} i, \quad \text{де } n = 1; 2; 3; \dots$$

Загальний розв'язок звичайного однорідного диференціального рівняння (2.26) має вигляд

$$T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{\ell} t \right), \quad (2.38)$$

де $n = 1; 2; 3; \dots$

Тепер можна знайти частинні розв'язки $u_n(x; t)$:

$$u_n(x; t) = \left(a_n \cos \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.39)$$

Функції $u_n(x; t)$ є власними функціями задачі Штурма-Ліувілля. Коливання, які відповідають цим власним значенням, називаються *власними коливаннями*.

Згідно з властивостями частинних розв'язків, сума частинних розв'язків $u_n(x; t)$ також є розв'язком рівняння (2.26):

$$u_n(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.40)$$

Отже, розв'язок $U_n(x; t)$ поданий у вигляді нескінченного ряду.

Такий ряд має бути збіжним, а функція $u_n(x; t)$ має бути двічі диференційовною і за x , і за t .

Окрім цього функція $u_n(x; t)$ має задовольняти початкові умови.

Отже, $u_n(x; t) = \varphi_0$, тобто

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x \quad (2.41)$$

та

$$\frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

Знайдемо спочатку $\frac{\partial u(x; t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{\pi n a}{\ell} \sin \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \frac{\pi n a}{\ell} \cos \frac{\pi n a}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

звідки

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n a}{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (3.42)$$

Таким чином, знайдено розвинення в ряд Фур'є за синусами в інтервалі $(0; \ell)$ функцій $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$, а коефіцієнти a_n та b_n знаходяться відповідно за формулами

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx \quad (2.43)$$

та

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^{\ell} \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (2.44)$$

Висновок. Якщо функція $\varphi_0(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно і кусково-неперервну похідну третього порядку, та задовольняє умови

$$\varphi_0(0) = 0; \quad \varphi_0(\ell) = 0;$$

$$\varphi_0''(0) = 0; \quad \varphi_0''(t) = 0,$$

а функція $\varphi_1(x)$ має неперервну похідну першого порядку і кусково-неперервну похідну другого порядку, та задовольняє умови

$$\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1(\ell) = 0,$$

то функція $u(x;t)$, що є сумою ряду (2.40), є двічі диференційовною неперервною за змінними x ($0 < x < \ell$) та t ($t > 0$), а її частинні похідні до другого порядку включно є неперервними функціями за кожним із аргументів і, до того ж, функція $u(x;t)$ задовольняє рівняння (2.20), початкові умови (2.21) та граничні умови (2.22). При цьому можливе почленне диференціювання ряду (2.40) до другого порядку включно за змінними x та t й отримані ряди абсолютно і рівномірно збігаються у проміжку $[0; \ell]$, де $t \geq 0$.

Така функція $u(x;t)$ є розв'язком задачі Штурма-Ліувілля.

Цінність методу Фур'є полягає у тому, що розв'язування однорідного диференціального рівняння з частинними похідними зводиться до розв'язування звичайного однорідного диференціального рівняння.

Можна показати, що методом Фур'є можна розв'язувати і неоднорідні диференціальні рівняння з частинними похідними. У цьому разі задача приводиться до звичайного неоднорідного диференціального рівняння.

Однорідні хвильові рівняння описують малі поперечні коливання струни.

Хвильові процеси у коротких високочастотних повітряних лініях та в коаксіальних кабелях, що застосовуються у радіотехніці, також описуються однорідним хвильовим рівнянням, якщо при цьому можна знехтувати опором R_0 та провідністю Q_0 , тобто, якщо можна припустити, що $R_0 \approx 0$; $q_0 \approx 0$.

Розглянута задача відповідає хвильовому процесу в однорідній струні з закріпленими кінцями, якщо коливання струни є вільними.

Аналізуючи формулу (2.40) можемо дійти висновку, що в момент часу $t = \frac{2\ell}{a}$, $t = \frac{4\ell}{a}$, $t = \frac{6\ell}{a}$, ... струна повертається у початковий стан. Це свідчить про те, що коливання струни не є згасаючим, а також про те, що ці коливання є періодичними з періодом $T = \frac{2\ell}{a}$. Такі висновки можна було зробити завдяки

тому, що не були враховані сили тертя, тобто відбулася ідеалізація процесу.

Якщо враховувати сили тертя, то відповідне хвильове рівняння буде неоднорідним, а коливання, що описуються таким рівнянням, будуть згасаючими.

Формулою (2.39) визначені власні функції $u_n(x; t)$ задачі Штурма-Ліувілля. Запишемо $u_n(x; t)$ в іншому вигляді

$$u_n(x; t) = A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \left(\frac{\pi n a}{\ell} t + \varphi_n \right), \quad (2.45)$$

де $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а $\varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$,

а кожен член ряду (2.45) називається *стоячою хвилею*.

З формули (2.45) випливає, що усі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однаковою частотою $\omega_n = \frac{\pi n a}{\ell}$ та з фазою φ_n . Амплітуда коливання $A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ залежить від абсциси x точки струни.

Усі точки струни водночас досягають свого максимального відхилення. Такі коливання називаються *стоячими*. У процесі коливання кінці струни залишаються нерухомими для $u_1(x; t)$, а для $u_2(x; t)$ нерухомими є кінці струни, а також її середина. Зі збільшенням n збільшується кількість нерухомих точок, а саме, стояча хвиля має стільки нерухомих точок, скільки коренів має рівняння $\sin \frac{\pi n}{\ell} x = 0$ на проміжку $[0; \ell]$. Отже, для $U_n(x; t)$ нерухомих точок буде $n + 1$,

а їхніми абсцисами будуть точки $0; \frac{\ell}{n}; \frac{2\ell}{n}; \frac{3\ell}{n}; \dots; \frac{(n-1)\ell}{n}; \ell$. Нерухомі точки

називаються *вузлами стоячої хвилі*. Між кожними двома вузлами знаходиться точка максимального відхилення, яка є рівновіддаленою від цих вузлів. Такі точки називаються *пучностями*. Для кожної струни існують лише певні частоти $\omega_n = \frac{\pi n a}{\ell}$. Такі частоти називаються *власними частотами струни*.

Коли відбуваються коливання струни, то ця струна дає звук, висота якого зростає разом з частотою коливань. Якщо струна здійснює власні коливання, то самим низьким буде тон, якому відповідає частота ω_1 , а саме:

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T_0}{p}},$$

де T_0 – це натягання, а p – щільність струни. Зі зростанням натягування стає вищим тон. Тон тим вище, чим легше та коротше струна.

Усі тони, які відповідають частотам $\omega_n (n = 2; 3; 4; \dots)$, називаються гармонічними або обертонами.

Вільні коливання струни, характер яких визначається початковими умовами, описуються функцією $u(x; t)$, що являє собою суму гармонік. При цьому характер звучання струни залежить від співвідношення між амплітудами гармонік.

За допомогою функції $u(x; t)$ можна зробити порівняльний аналіз цих амплітуд.

2.6. Задача про вимушені коливання струни із закріпленими кінцями та її розв'язування методом розвинення за власними функціями

Нехай однорідна струна довжиною ℓ на кінцях проміжку знаходиться під впливом зовнішньої сили $f(x; t)$, яка розрахована на одиницю довжини. Отже, кінці струни вважаємо закріпленими.

Хвильовий процес описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x; t), \quad (2.46)$$

яке є неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу.

Граничні умови мають вигляд

$$\begin{cases} u(0; t) = 0; \\ u(\ell; t) = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

а початкові

$$\begin{cases} u(x; 0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x). \end{cases} \quad (2.48)$$

Отже, маємо мішану задачу. Припустимо, що шукана функція $u(x; t)$ може бути надана у вигляді

$$u(x; t) = v_1(x; t) + v_2(x; t), \quad (2.49)$$

де $v_1(x; t)$ – це рішення неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = f(x; t); \quad (2.50)$$

– з граничними умовами

$$\begin{cases} v_1(0; t) = 0; \\ v_1(\ell; t) = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

– з початковими умовами

$$\begin{cases} v_1(x; 0) = 0; \\ \frac{\partial v_1(x; 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

а $v_2(x; t)$ – це рішення однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0; \quad (2.53)$$

– з граничними умовами

$$\begin{cases} v_2(0; t) = 0; \\ v_2(\ell; t) = 0; \end{cases} \quad (2.54)$$

– з початковими умовами

$$\begin{cases} v_2(x;0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial v_2(x;0)}{\partial t} = \varphi_1(x). \end{cases} \quad (2.55)$$

Функція $v_1(x;t)$ описує вимушені коливання струни, тобто такі коливання, які відбуваються під впливом зовнішньої збурювальної сили $f(x;t)$, за умови, що початкові збурення відсутні.

Функція $v_2(x;t)$ описує вільні коливання струни, які відбуваються лише внаслідок початкових умов.

Будемо шукати функцію $v_1(x;t)$ методом розвинення за власними функціями, який є одним із найважливіших методів рішення неоднорідного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними.

Основна ідея цього методу полягає у тому, що функцію $f(x;t)$ розкладаємо в ряд

$$f(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (2.56)$$

де $X_n(x)$ – це власні функції відповідної однорідної краєвої задачі.

Отже, будемо шукати функцію $v_2(x;t)$ у вигляді ряду за власними функціями $\sin \frac{\pi n}{\ell} x$ відповідної однорідної задачі:

$$v_2(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.57)$$

Очевидно, що функція $v_2(x;t)$ надана у вигляді (2.57) задовольняє граничні умови (2.54).

Для того, щоб функція $v_2(x;t)$ надана у вигляді (2.57) задовольняла і нульові початкові умови, будемо вважати, що

$$\begin{cases} \eta_n(0) = 0; \\ \eta'_n(0) = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Задану функцію $f(x;t)$ також подамо у вигляді ряду:

$$f(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (2.59)$$

де

$$\tau_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x;0) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (2.60)$$

Якщо щільність розподілу зовнішньої сили $f(x;t)$ не залежить від t , тобто $f(x;t) = f(x)$, то формула (2.59) при цьому являє собою розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є за синусами, а функції $\eta_n(t)$ є сталими. Якщо функція $f(x;t)$ не залежить від x , тобто $f(x;t) = f(t)$, то функції $\eta_n(t)$ визначаються формулою

$$\eta_n(t) = \frac{2f(t)}{\ell} \int_0^\ell \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \begin{cases} \frac{U}{\pi n} f(t), \text{ де } n = 2k + 1; \\ 0, \text{ де } n = 2k. \end{cases} \quad (2.61)$$

В рівняння (2.46) підставимо функцію $V_2(x; t)$ у вигляді (2.57), а функцію $f(x; t)$ у вигляді (2.59). Виходить:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta_n''(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2} \eta_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.62)$$

Порівнюючи в рівності (2.62) відповідні коефіцієнти за власними функціями, приходимо до звичайного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\eta_n''(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2} \eta_n(t) = \tau_n(t). \quad (2.63)$$

Шуканою функцією у цьому рівнянні є функція $\eta_n(t)$, яка має задовольняти початкові умови (2.58)

$$\begin{cases} \eta_n(0) = 0; \\ \eta_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння (2.63). Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$\eta_n''(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2} \eta_n(t) = 0,$$

а його характеристичне рівняння є таким:

$$r^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2} = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є числа

$$r_1 = -\frac{\pi n a}{\ell} i; \quad r_2 = \frac{\pi n a}{\ell} i,$$

а загальний розв'язок має вигляд

$$\eta_n(t) = a_n \cos \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{\ell} t. \quad (2.64)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.63) знаходиться у той чи інший спосіб в залежності від виду функції $\tau_n(t)$:

$$\tau_n(t) = \frac{1}{\pi n a} \int_0^t \tau_n(\theta) \sin \frac{\pi n(t - \theta)}{\ell} d\theta.$$

Знайдені функції $\eta_n(t)$ підставляємо у формулу (2.57), внаслідок чого знаходимо шукану функцію $V_2(x; t)$, а отже, і функцію $u(x; t)$:

$$U(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a}{\ell} t + b_n \sin \frac{\pi n a}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (2.65)$$

де $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^t \varphi_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx \quad (n = 1; 2; 3; \dots).$

2.7 Загальна схема методу Фур'є

Нехай задане неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними гіперболічного типу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u(x; t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.66)$$

де $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ – неперервні функції на проміжку $[0; \ell]$, до того ж, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$.

Граничні умови є такими:

$$\begin{cases} \alpha u(0; t) + \beta \frac{\partial u(0; t)}{\partial x} = 0; \\ \gamma u(\ell; t) + \delta \frac{\partial u(\ell; t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі, такі що, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Початкові умови є такими:

$$\begin{cases} u(x; 0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \end{cases} \quad (2.68)$$

де $x \in [0; \ell]$

Шуканою функцією є функція $u(x; t)$.

Будемо шукати функцію $u(x; t)$ у вигляді

$$u(x; t) = X(x)T(t). \quad (2.69)$$

Функції $X(x)$ та $T(t)$ задовольняють лише граничні умови (2.67).

Підставимо функцію $u(x; t)$ у вигляді (2.69) у задане рівняння (2.66).

Виходить:

$$\frac{\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) - q(x)X(x)}{p(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.70)$$

Оскільки ліва частина рівності (2.70) залежить лише від x , а права – лише від t , то кожне з відношень у цій рівності є сталою, яку ми позначимо через $(-\lambda)$. Тоді з рівності (2.70) дістанемо два диференціальних рівняння

$$\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0, \quad (2.71)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (2.72)$$

Для того, щоб знайти нетривіальні розв'язки рівняння (2.71), необхідно, щоб функція $X(x)$ задовольняла граничні умови

$$\begin{cases} \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0; \\ \gamma X(\ell) + \delta X'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.73)$$

Таким чином, отримали наступну задачу про власні значення: знайти такі значення параметра λ , за яких існують нетривіальні розв'язки рівняння (2.71) з початковими умовами (2.73).

Ті значення параметра λ , за яких існують розв'язки задачі (2.71), (2.73), називаються *власними значеннями*, а відповідні їм розв'язки називаються *власними функціями*. Оскільки саме рівняння (2.71) та граничні умови (2.62) є однорідними, то власні функції визначаються з точністю до сталого множника:

$$\int_0^{\ell} \rho(x) X_n^2(x) dx = 1. \quad (2.74)$$

Власні функція, які задовольняють умову (2.74) називаються *нормованими*.

Для сформульованої задачі існує безліч власних значень таких, що $\lambda_i \neq \lambda_k$ та безліч власних функцій $X_n(x)$, які відповідають власним значенням.

Усі власні функції, які відповідають власним значенням $\lambda_m \neq \lambda_k$, є ортогональними з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\int_0^{\ell} \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0. \quad (2.75)$$

Нехай власні функції $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$, які відповідають власним числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, утворюють ортогональну та нормовану систему функцій. Можна показати, що усі λ_k знаходяться за формулою

$$\lambda_k = \int_0^{\ell} (p(x)(X'_n(x))^2 + q(x)X_n^2(x)) dx - (p(x)X_n(x)X'_n(x)) \Big|_{x=0}^{x=\ell}. \quad (2.76)$$

Далі розглянемо рівняння (2.72). Це однорідне рівняння. Його загальний розв'язок $T_n(t)$ має вигляд

$$T_n(t) = a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

де a_n, b_n – довільні сталі.

Тоді, кожна з функцій $u_n(x; t) = X_n(x)T_n(t)$ подана у вигляді

$$u_n(x; t) = (a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x), \quad (2.77)$$

є розв'язком рівняння (2.66) з граничними умовами (2.67). Необхідно також забезпечити, щоб виконувались початкові умови (2.68).

Для цього складемо ряд

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (2.78)$$

Якщо ряд (2.78), а також ряди, які виходять з нього двократним диференціюванням за змінними x та t рівномірно збігаються, то його сума $u(x; t)$ є розв'язком рівняння (2.66) та задовольняє граничним умовам (2.67). Для виконання початкових умов необхідно, щоб

$$\begin{cases} u(x;0) = \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \end{cases} \quad (2.79)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \end{cases} \quad (2.80)$$

Таким чином, дійшли висновку, що після проведення перетворень, ми дістали задачу про розвинення довільної функції в ряд за власними функціями $X_n(x)$ граничної задачі.

Отже, нехай довільна функція $\Phi(x)$ може бути подана у вигляді ряду

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad (2.81)$$

за власними функціями $X_n(x)$ граничної задачі (2.71), (2.73). Якщо цей ряд збігається, то його коефіцієнти визначаються формулою

$$a_k = \int_0^{\ell} p(x) \Phi(x) X_k(x) dx. \quad (2.82)$$

Для описаної ситуації справедливі такі теореми.

Теорема 1. Для довільної функції $\Phi(x)$ з інтегрованим квадратом на проміжку $[0; \ell]$ ряд (2.81) збігається до цієї функції у середньому, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} p(x) \left(\Phi(x) - \sum_{k=1}^n a_k X_k(x) \right)^2 dx = 0.$$

Теорема 2 (Стеклова). Будь-яка функція $\Phi(x)$, яка задовольняє граничні умови (3.89) та має неперервну похідну першого порядку і кусково-неперервну похідну другого порядку, може бути розвинена в ряд (2.81), який абсолютно і рівномірно збігається за власними функціями відповідної граничної задачі (2.65), (2.67).

Коефіцієнти a_n та b_n з початкових умов (2.79) та (2.80) знаходяться за формулами

$$\begin{cases} a_n = \int_0^{\ell} p(x) \varphi_0(x) X_n(x) dx, \\ b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{\ell} p(x) \varphi_1(x) X_n(x) dx. \end{cases} \quad (2.83)$$

Якщо ці значення коефіцієнтів підставити в ряд (2.78), то дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.66), (2.67), (2.68).

Приклади по розділу 2

Приклад 2.1. Вивести рівняння, яке описує малі поперечні коливання мембрани.

Розв'язання

Мембраною називається така *однорідна пружна та туго натягнута пластина*. *Поперечними коливаннями* мембрани називаються такі коливання, які відбуваються у напрямку, перпендикулярному пластині, якщо вона знаходиться у стані рівноваги.

Нехай $u(x; y; t)$ – це функція, яка визначає аплікату будь-якої точки $M(x; y; z)$ у момент t . Функція $u(x; y; t)$ називається *законом коливання мембрани*.

Нехай коливання мембрани є вільними, тобто, якщо на неї не впливає деяка зовнішня сила або якщо на мембрану впливає така зовнішня сила, яка є настільки малою, що нею можна знехтувати.

Тоді коливання описуються хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial y^2} \right).$$

Це рівняння називається *рівнянням вільних коливань мембрани*.

Якщо ж мембрана знаходиться під дією зовнішньої сили $F(x; y)$, то тоді коливання точок мембрани описуються рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial y^2} \right) + S(x; y; t).$$

Таке рівняння називається *рівнянням вимушених коливань мембрани*.

В цих рівняннях $a^2 = \frac{T}{\gamma}$, де T – щільність сил натягування, що є сталою в усіх точках мембрани; γ – поверхнева щільність мембрани $S(x; y; t)$ – щільність зовнішньої сили, яка діє на мембрану, тобто

$$S(x; y; t) = \lim_{\Delta\delta \rightarrow 0} \frac{F(\Delta\delta; t)}{\gamma \cdot \Delta\delta}.$$

При цьому $\Delta\delta$ – це мала площа, яка оточує точки $(x; y)$; $F(\Delta\delta; t)$ – зовнішня сила, що діє на площину $\Delta\delta$ у момент t .

До кожного з рівнянь мають бути задані початкові та граничні умови:

1. Якщо мембрана закріплюється уздовж контуру ℓ , що обмежує область δ на площині xOy , яку займає мембрана у стані рівноваги, то граничні умови мають вигляд

$$u(x; y; t) = 0$$

для будь-якої точки $(x; y)$ на контурі ℓ в будь-який час t , а початкові умови мають вигляд

$$\begin{cases} u(x; y; 0) = \varphi_0(x; y), \\ \frac{\partial u(x; y; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x; y). \end{cases}$$

2. Якщо мембрана є нескінченною і збігається з площиною xOy , то граничні умови відсутні, а початкові умови мають вигляд

$$\begin{cases} u(x; y; 0) = \varphi_0(x; y), \\ \frac{\partial u(x; y; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x; y). \end{cases}$$

3. Якщо мембрана закріплена вздовж контуру ℓ , і знаходиться у стані рівноваги, то апліката кожної точки мембрани не залежить від t , тобто $U = U(x; y)$.

Якщо ж контур ℓ є деякою замкненою кривою у просторі і на площину xOy проектується в криву γ , то шукана функція $u(x; y)$ знаходиться з рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Граничні умови при цьому є такими

$$u(x; y) \Big|_{(x; y) \in \gamma} = f(x; y),$$

де $f(x; y)$ – відхилення точок контуру ℓ від площини xOy .

Приклад 2.2. Знайти коливання струни, кінці якої закріплені у точках $x=0$ та $x=\ell$, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове відхилення має форму трикутника з вершиною у точці $M(c; h)$ (рис. 2.7). При цьому задане натягування T_0 , щільність ρ та

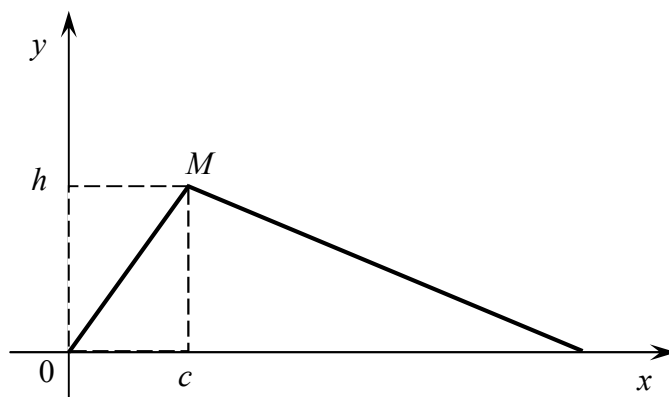


Рисунок 2.7

величина $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$.

Початкові умови задані у вигляді

$$\begin{cases} u(x; 0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq c; \\ \frac{h(\ell - x)}{\ell - c}, & \text{якщо } c \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

де

а $\varphi_1(x) \equiv 0$.

Розв'язання

Шукана функція $U(x; t)$ може бути знайдена за формулою (2.40), де $b_n = 0$.

Знайдемо коефіцієнти a_n за формулою (2.43)

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \left(\frac{h}{c} \int_0^c x \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx + \frac{h}{\ell - c} \int_c^\ell (\ell - x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx \right).$$

$$\int_0^c x \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dV = \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx; \quad V = -\frac{\ell}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{\ell} x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{\ell}{\pi n} x \cos \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^c + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^c = -\frac{\ell c}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n c}{\ell};$$

$$\int_c^\ell (\ell - x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ell - x; \quad du = -dx \\ dV = \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx; \quad V = -\frac{\ell}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{\ell} x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\ell(\ell - c)}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n c}{\ell}.$$

Отже,

$$a_n = \frac{2h\ell^2}{\pi^2 n^2 (\ell - c)} \sin \frac{\pi n c}{\ell}.$$

Підставимо знайдені a_n у формулу (2.40) та знайдемо шукану функцію $U(x; t)$

$$U(x; t) = \frac{2h\ell^2}{\pi^2 c(\ell - c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cos \frac{\pi n a}{\ell} t.$$

Якщо при цьому $\frac{\pi n c}{\ell} = \pi k$, де $k = 0; 1; 2; 3; \dots$, то точка c збігається з вузлом n -ї гармоніки, а $a_n = 0$, і відповідна гармоніка до складу $u(x; t)$ не входить.

Позначимо через u_0 число, яке відповідає найменшому з вузлів, тоді числа u , які відповідають іншим вузлам, є кратними числу u_0 .

Приміром, якщо точка c є серединою відрізка $[0; \ell]$, то вузли будуть розміщені в усіх точках, які відповідають парним значенням n , тобто $n = 2k$, а тому до складу функцій $u(x; t)$ будуть входити лише непарні гармоніки. Функція $u(x; t)$ при цьому буде такою:

$$u(x; t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{\ell} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{\ell}.$$

З отриманої форми виходить, що при достатньо великих k гармоніки майже не впливають на значення $u(x; t)$.

$$\text{В і д п о в і д ь : } u(x; t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{\ell} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{\ell}.$$

Приклад 2.3. Знайти коливання струни, кінці якої закріплені у точках $x = 0$ та $x = \ell$, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а форма струни визначається формулою

$$\varphi_0(x) = A \sin \frac{\pi k}{\ell} x, \text{ де } k - \text{ ціле число.}$$

Розв'язання

Початкове положення струни збігається з графіком однієї з власних функцій. Тоді знов користуємося формулою (2.40) для знаходження функції $u(x; t)$. Усі коефіцієнти b_n дорівнюють нулю. Дорівнюють нулю також усі коефіцієнти a_n , для яких $n \neq k$, що пояснюється ортогональністю власних функцій.

Знаходимо a_n , де $n \neq k$.

$$a_n = A \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi n}{\ell} x dx,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2A}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{\ell} x \right) dx = \frac{A}{\ell} \left(x - \frac{\ell}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{\ell} x \right) \Big|_0^{\ell} = \\ &= \frac{A}{\ell} \left(\ell - \frac{\ell}{2\pi n} \sin 2\pi n \right) = A. \end{aligned}$$

Таким чином, шукана функція $U(x; t)$ є такою:

$$u(x; t) = A \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a}{\ell} t.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } u(x; t) = A \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a}{\ell} t.$$

Приклад 2.4. Знайти коливання струни, яка розміщена на проміжку $(\alpha; \beta)$. В початковому положенні струна знаходиться у стані спокою. Внаслідок удару по струні плоским твердим молотком точки струни набувають початкову швидкість V_0 .

Розв'язання

Виходячи з умови, можемо задати початкові умови

$$\begin{cases} u(x; 0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \end{cases}$$

де $\varphi_0(x) = 0$;

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x < \alpha; \\ V_0, & \text{якщо } \alpha \leq x < \beta; \\ 0, & \text{якщо } \beta < x < c. \end{cases}$$

Для функції $\varphi_0(x)$ порушена умова неперервності, але ми будемо припускати, що функція неперервна для ідеалізації математичної моделі.

Шукану функцію $u(x; t)$ будемо шукати за формулою (2.40). Коефіцієнти a_n дорівнюють нулю. Знайдемо коефіцієнти b_n .

$$b_n = \frac{2V_0}{\pi n a} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2\ell V_0}{\pi^2 n^2 a} \left(\cos \frac{\pi n \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi n \beta}{\ell} \right).$$

Тоді

$$u(x; t) = \frac{2\ell V_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi n \beta}{\ell} \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n a}{\ell} t.$$

Зокрема, якщо $\alpha = 0$, $\beta = \ell$, то

$$u(x; t) = \frac{4\ell V_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{\ell} x \sin \frac{(2n+1)\pi a}{\ell} t.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } u(x; t) = \frac{2\ell V_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi n \beta}{\ell} \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n a}{\ell} t;$$

$$u(x; t) = \frac{4\ell V_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{\ell} x \sin \frac{(2n+1)\pi a}{\ell} t.$$

Приклад 2.5. Знайти коливання струни, яка збурюється внаслідок удару гострим молотком у точці c . Початкові відхилення точок струни дорівнюють нулю.

Р о з в ' я з а н н я

Від удару гострим молотком у струні виникає зосереджений імпульс. Припустимо, що імпульс рівномірно розподілений у δ -околу точки c : $(c - \delta; c + \delta)$. За законом збереження кількості руху маємо

$$2\delta \rho V_0 = I,$$

де ρ – лінійна щільність струни; V_0 – початкова швидкість δ -околу точки c після удару; I – імпульс.

Користуючись формулою

$$u(x; t) = \frac{2\ell V_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi n \beta}{\ell} \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \frac{\pi n a}{\ell} t,$$

підставимо замість $\alpha = c - \delta$, а замість $\beta = c + \delta$ і замість $V_0 = \frac{1}{2\delta \rho}$.

Виходить:

$$u(x; t) = \frac{I\ell}{\pi^2 \alpha \rho \delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n (c - \delta)}{\ell} - \cos \frac{\pi n (c + \delta)}{\ell} \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a t}{\ell}.$$

Припустимо, що $\delta \rightarrow 0$. Тоді

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(\cos \frac{\pi n (c - \delta)}{\ell} - \cos \frac{\pi n (c + \delta)}{\ell} \right) = \frac{2\pi n}{\ell} \sin \frac{\pi n c}{\ell}.$$

Остаточно виходить:

$$u(x; t) = \frac{2\ell}{\pi \alpha \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a t}{\ell}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } i(x; t) = \frac{2\ell}{\pi \alpha \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a t}{\ell}.$$

3 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1 Основні параметри та об'єкти дослідження

В телекомунікаціях, радіотехніці та особливо в електропровідному зв'язку ті чи інші коливальні процеси описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними другого порядку.

В таких рівняннях незалежними змінними є відстань x , яка відраховується від початку або кінця двопровідної однорідної лінії та час t , а шуканою функцією є миттєве значення струму $i(x; t)$ або напруги $u(x; t)$ в будь-якому перерізі зазначеної лінії.

При цьому вважається, що в однорідній двопровідній лінії опір та індуктивність проводу, а також проводимість та ємність між проводами розподілені рівномірно.

Параметри однорідної лінії, віднесені до одиниці довжини:

R_0 – активний опір прямого та оберненого проводів;

L_0 – індуктивність петлі, яка утворена прямим та оберненим проводами;

q_0 – проводимість чи витік струму, який зумовлений недостатньо якісною ізоляцією між проводами;

C_0 – ємність між проводами.

3.2 Диференціальні рівняння вільних електричних коливань у скінченному проводі

Нехай через провід проходить електричний струм, внаслідок чого навколо проводу утворюється електромагнітне поле. У свою чергу це електромагнітне поле викликає і зміну сили струму, і зміну величини напруги. Під впливом цих змін виникає певний коливальний процес.

Довжина проводу дорівнює ℓ . Один з його кінців розміщено на початку координат, а вісь абсцис збігається з віссю проводу.

Позначимо: $i(x; t)$ – сила струму, $u(x; t)$ – напруга у проводі.

Будемо вважати, що ємність C , активний опір R , самоіндукція L та витік g_0 розподілені неперервно та рівномірно уздовж проводу і до того ж є сталими, які розраховані на одиницю довжини проводу.

Зробимо два перерізи проводу $x = x_1$ та $x = x_2$, де $x_1 < x_2$, між якими буде знаходитись частина проводу. Для цієї частини проводу згідно з законом Ома проведемо наступні розрахунки.

$$u(x_1; t) - u(x_2; t) = R \int_{x_1}^{x_2} i(x; t) dx + L \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x; t)}{\partial t} dx. \quad (3.1)$$

Зважаючи на те, що

$$u(x_1; t) - u(x_2; t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} dx,$$

можемо дійти висновку, що

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i(x; t)}{\partial t} + Ri \right) dx = 0. \quad (3.2)$$

Тоді справедливою є і така рівність

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x; t)}{\partial t} + Ri(x; t) = 0. \quad (3.3)$$

Кількість електрики, що протікає через частину проводу між двома перерізами за одиницю часу, є такою:

$$i(x_1; t) - i(x_2; t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} dx.$$

З іншого боку, та ж сама кількість електрики дорівнює сумі кількості електрики, що необхідна для зарядки цього участка проводу, і кількості електрики, що витікає внаслідок неякісної ізоляції:

$$i(x_1; t) - i(x_2; t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} dx + g_0 \int_{x_1}^{x_2} u(x; t) dx.$$

Отже,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial i(x; t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + g_0 u(x; t) \right) dx = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial i(x; t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + g_0 u(x; t) = 0. \quad (3.4)$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку з частинними похідними, яке описує вільні електричні коливання у скінченному проводі.

3.3 Телеграфне рівняння та частинні випадки

3.3.1 Телеграфне рівняння

Будемо виходити з рівняння (3.3)

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x; t)}{\partial t} + Ri(x; t) = 0.$$

Продиференціюємо це рівняння за x :

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 i(x; t)}{\partial t \partial x} + R \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.4)

$$\frac{\partial i(x; t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + g_0 u(x; t) = 0$$

продиференціюємо за t :

$$\frac{\partial^2 i(x; t)}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} + g_0 \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

З рівняння (3.5) маємо

$$\frac{\partial^2 i(x; t)}{\partial t \partial x} = -\frac{R}{L} \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2},$$

а з рівняння (3.6) маємо

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} - g_0 \frac{\partial u(x; t)}{\partial t}.$$

Тоді

$$-\frac{R}{L} \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} - g_0 \frac{\partial u(x; t)}{\partial t}$$

або

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} + Lg_0 \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} - R \frac{\partial i(x; t)}{\partial x}. \quad (3.7)$$

З рівняння (3.4) знаходимо $\frac{\partial i(x; t)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial i(x; t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} - g_0 U(x; t)$$

та підставляємо в рівняння (3.7).

Виходить:

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} + g_0 L \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + RC \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + g_0 Ru(x; t)$$

або

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} + (RC + g_0 L) \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + RC \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + g_0 Ru(x; t). \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) – це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними, де шуканою функцією є напруга $u(x; t)$.

Аналогічне рівняння можна вивести і відносно струму $i(x; t)$:

$$\frac{\partial^2 i(x; t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x; t)}{\partial t^2} + (RC + g_0 L) \frac{\partial i}{\partial t} + g_0 Ri(x; t). \quad (3.9)$$

Рівняння (3.8) та (3.9) називаються *телеграфними рівняннями*.

Розв'язання телеграфного рівняння є достатньо складним.

Розглянемо деякі частинні випадки цього рівняння, які відіграють значну роль у різноманітних задачах зв'язку та радіотехніки.

Припустимо, що ми маємо справу з нескінченною лінією, яка простирається в обидві сторони.

При цьому задаються початкові умови для напруги та струму:

$$u(x; 0) = \mu(x); \quad (3.10)$$

$$i(x; 0) = v(x). \quad (3.11)$$

З рівнянь (3.4) та (3.3) маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial i(x;t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x;t)}{\partial t} + g_0 u(x;t) &= 0, \\ \frac{\partial u(x;t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x;t)}{\partial t} + R i(x;t) &= 0.\end{aligned}$$

Тоді $\frac{\partial i(x;0)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} + g_0 u(x;0) = 0$.

Оскільки $\frac{\partial i(x;0)}{\partial x} = v'(x)$, то маємо

$$\frac{\partial u(x;0)}{\partial x} = -\frac{g_0}{C} \mu(x) - \frac{1}{C} v'(x). \quad (3.12)$$

Аналогічно маємо

$$\frac{\partial i(x;0)}{\partial x} = -\frac{R}{L} v(x) - \frac{1}{L} \mu'(x). \quad (3.13)$$

3.3.2 Телеграфне рівняння для лінії без витоку

Якщо припустити, що у проводі опір R є майже несуттєвим й ізоляція є якісною, тобто $R = g_0 = 0$, то телеграфне рівняння (3.8) може бути зведене до канонічної форми

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.14)$$

Це хвильове рівняння, а його загальний розв'язок, як вже зазначалося раніше, може бути поданий у вигляді (2.12), а саме:

$$u(x;t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at).$$

Функція $u(x;t)$ характеризує процес накладання хвиль, які розповсюджуються вліво та вправо зі швидкістю $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

До речі, проведені вимірювання величин L та C для повітряних ліній показали, що швидкість розповсюдження хвиль в таких лініях практично збігається зі швидкістю світла у повітрі.

Для функції (2.12) початкові умови мають вигляд:

$$\begin{cases} u(x;0) = \mu(x); \\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = -\frac{1}{C} v'(x). \end{cases}$$

За формулою Даламбера (2.16) дістанемо

$$u(x;t) = \frac{1}{2} (\mu(x+at) + \mu(x-at)) + \frac{1}{2aC} \int_{x-at}^{x+at} v'(x) dx$$

або після спрощення

$$u(x; t) = \frac{1}{2} (\mu(x + at) + \mu(x - at)) + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{2} (v(x - at) - v(x + at)). \quad (3.15)$$

Функція (3.15) є розв'язком поставленої задачі. При цьому, у будь-якій точці проводу відношення напруги до струму для прямої хвилі дорівнює $\sqrt{\frac{L}{C}}$, а для оберненої $-\sqrt{\frac{L}{C}}$. Величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ називається *хвильовим опором лінії*.

Виникнення хвиль у проводі дуже часто буває замовлене атмосферними розрядами. Якщо на деякій ділянці проводу виникає індукований заряд, то уздовж проводу починають розповсюджуватися хвилі напруги та струму з однаковою швидкістю. Оскільки початковий струм дорівнює нулю, то $v(x) = 0$. Функція $\mu(x)$ при цьому відрізняється від нуля на тій ділянці, на якій виникає індукований заряд.

3.3.3 Телеграфне рівняння для лінії без спотворень

Лінією без спотворень називається така лінія, параметри якої задовольняють умову

$$RC = Lg_0. \quad (3.16)$$

Особливістю лінії без спотворень є те, що хвилі напруги та хвилі струму розповсюджуються у такий самий спосіб як і в лініях без витоків, але при цьому амплітуди хвиль в міру їх проходження зменшуються, тобто відбувається згасання хвиль.

Будемо виходити з телеграфного рівняння (3.8), в якому замість функції $u(x; t)$ візьмемо функцію $v(x; t)$ у такий спосіб

$$u(x; t) = e^{-\frac{R}{L}t} v(x; t). \quad (3.17)$$

Знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} &= e^{-\frac{R}{L}t} \left(-\frac{R}{L} v + \frac{\partial v}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} &= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{R^2}{L^2} v(x; t) - \frac{2R}{L} \cdot \frac{\partial v(x; t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} &= e^{-\frac{R}{L}t} \frac{\partial v(x; t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} &= e^{-\frac{R}{L}t} \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (3.8), дістанемо після спрощення наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2} + \frac{\partial v(x; t)}{\partial t} \left(-\frac{2R}{L} + \frac{RC + Lg_0}{LC} \right) +$$

$$+ v(x; t) \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{R}{L} \cdot \frac{RC + Lg_0}{LC} + \frac{Rg_0}{LC} \right) - \frac{1}{LC} \cdot \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2},$$

де $a = \frac{1}{\sqrt{RC}}$.

Для розв'язання задачі задамо початкові умови для функції $v(x; t)$:

$$v(x; 0) = \mu(x);$$

$$u(x; 0) = \mu(x).$$

Далі знаходимо $\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial v(x; t)}{\partial t} = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} u(x; t) + e^{\frac{R}{L}t} \frac{\partial u(x; t)}{\partial t}.$$

З урахуванням (3.12) та (3.16) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial v(x; 0)}{\partial t} = \frac{R}{L} \mu(x) - \frac{g_0}{C} \mu(x) - \frac{1}{C} v'(x) = -\frac{1}{C} v'(x). \quad (3.18)$$

Таке рівняння, як було показано раніше, має розв'язок

$$v(x; t) = \frac{1}{2} (\mu(x + at) + \mu(x - at)) + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{2} (v(x - at) - v(x + at)),$$

а функція $u(x; t)$ буде такою:

$$u(x; t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{1}{2} (\mu(x + at) + \mu(x - at)) + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{2} (v(x - at) - v(x + at)) \right). \quad (3.19)$$

Аналогічно знаходиться струм $i(x; t)$

$$i(x; t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{1}{2} (\mu(x + at) + \mu(x - at)) + \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{1}{2} (v(x - at) - v(x + at)) \right). \quad (3.20)$$

Отже, в лініях без спотворення, як і у лініях без витоку, між напругою та струмом в прямих та обернених хвилях зберігається стале відношення $\sqrt{\frac{L}{C}}$, тобто хвильовий опір. Хвилі напруги і струму розповсюджуються як і в лініях без витоку, але зі згасанням хвиль протягом часу за показниковим законом $e^{-\frac{R}{L}t}$.

Причиною згасання хвиль є розсіювання енергії, спровоковане виділенням тепла у проводі та витоком струму.

Якщо не виконується рівність $RC = Lg_0$, то швидкість розповсюдження синусоїдального струму, а також його згасання залежать від частоти ω .

Якщо по лінії розповсюджується складний імпульс, що являє собою результат накладання простих синусоїдальних струмів, то кожний такий струм

має свою швидкість розповсюдження та свій коефіцієнт згасання, внаслідок чого відбувається спотворення сигналів, що передаються по цій лінії.

3.3.4 Лінії скінченної довжини

Нехай провід має скінченну довжину ℓ . Раніше були розглянуті коливання скінченної струни (п. 2.5). Доцільно було б скористатися результатами, отриманими у п. 2.5, але введені там функції $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$ визначені лише на проміжку $[0; \ell]$, а при розгляданні телеграфного рівняння та його частинних випадків передбачається, що такі функції мають бути визначені для будь-якого значення x .

Отже, необхідно знайти такі умови, за яких аналогічні їм функції $u(x)$ та $v(x)$ можуть бути продовжені.

За цим методом у той чи інший спосіб можна ввести спеціальні граничні умови.

Будемо виходити з формули

$$u(x; t) = Ri(x; t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int L dt.$$

Граничні умови, приміром, можуть бути такими:

$$1. \begin{cases} u(0; t) = \varepsilon; \\ u(\ell; t) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

При цьому мається на увазі, що до одного з кінців проводу підключена батарея з постійною е.р.с. ε , а другий його кінець є заземленим.

$$2. \begin{cases} u(0; t) = \varepsilon \sin \omega t; \\ i(\ell; t) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

У цьому випадку початок проводу знаходиться під синусоїдальною напругою, а кінець проводу заізолюваний.

$$3. \begin{cases} u(0; t) = \varepsilon - R_0 i_0 - L_0 \frac{di_0}{dt}; \\ u(\ell; t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (3.23)$$

У цьому випадку і до початку і до кінця проводу підключені R_0 та R_1 і з самоіндукцією L_0 та L_1 .

$$4. \begin{cases} u(0; t) = \varepsilon - \frac{1}{C_0} \int i_0 dt; \\ i(\ell; t) = C_1 \frac{du_1(\ell; t)}{dt}. \end{cases} \quad (3.24)$$

До початку та до кінця проводу підключені відокремлювальні конденсатори ємністю C_0 та C_1 , а $u_1(\ell; t)$ – напруга на кінці проводу.

Після введення тих чи інших граничних умов розв'язання можна продовжити, опираючись на результати п. 2.5.

3.4 Коливання в електричних лініях

3.4.1 Коливання в електричних лініях, які перебувають у стані перехідного процесу

Будемо розглядати електричну лінію, в якій з тієї чи іншої зовнішньої причини виникли коливання.

Нехай електрична лінія знаходиться у стані спокою та характеризується напругою u_1 та силою струму i_1 , але в момент $t = 0$ усталений стан змінюється і в електричній лінії виникає перехідний процес. В електричному колі виникають коливання, які характеризуються напругою u_n , силою струму i_n . Коли після цього настає усталений процес, то він характеризується напругою u_2 та силою струму i_2 .

Отже, під час перехідного процесу в електричному колі напруга та сила струму є такими

$$i = i_n + i_2, \quad u = u_n + u_2.$$

При цьому

$$i(0) = i_1, \quad u(0) = u_1.$$

Функції $u_n(x; t)$ та $i_n(x; t)$ мають задовольняти наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x; t)}{\partial t} + Ri(x; t) = 0; \\ \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} + gu(x; t) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Функції $u_2(x; t)$ та $i_2(x; t)$ мають задовольняти систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + Ri(x; t) = 0; \\ \frac{\partial i(x; t)}{\partial x} + gu(x; t) = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

3.4.2 Коливання в електричних лініях, в яких відбувається перехідний процес при підключенні розімкненої лінії на постійну напругу

Нехай електрична лінія довжиною ℓ знаходиться у стані спокою і при цьому $u_1(x; 0) = 0$, $i_1(x; 0) = 0$.

У момент $t = 0$ початок електричної лінії ($x = 0$) підключається до джерела постійної напруги ε . Другий кінець лінії ($x = \ell$) залишається вільним.

Внаслідок цього у колі виникає перехідний процес і по його завершенні встановлюється стаціонарний стан, який характеризується величинами $u_2(x; t)$, $i_1(x; t)$, які мають задовольняти систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{du_2(0; t)}{dx} + Ri_2(x) = 0; \\ \frac{di_2(x)}{dx} + gu_2(x) = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u_2(0) = \varepsilon; \\ i_2(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Неважко впевнитись у тому, що загальний розв'язок такої системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} u_2(0) = c_1 e^{-\sqrt{Rg}x} + c_2 e^{\sqrt{Rg}x}; \\ i_2(x) = \frac{\sqrt{Rg}}{R} (c_1 e^{-\sqrt{Rg}x} - c_2 e^{\sqrt{Rg}x}). \end{cases} \quad (3.29)$$

Користуючись граничними умовами, знайдемо c_1 та c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \varepsilon; \\ c_1 e^{-\sqrt{Rg}\ell} - c_2 e^{\sqrt{Rg}\ell} = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$c_1 = \frac{\varepsilon e^{\sqrt{Rg}\ell}}{2 \operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon e^{-\sqrt{Rg}\ell}}{2 \operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}.$$

Таким чином, маємо

$$u_2(x) = \varepsilon \frac{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}(\ell - x)}{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}; \quad (3.30)$$

$$i_2(x) = \frac{\varepsilon \sqrt{Rg}}{R} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{Rg}(\ell - x)}{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}. \quad (3.31)$$

Для того, щоб визначити значення напруги u та сили струму i під час перехідного процесу, виходимо з формул

$$\begin{cases} u = u_2 + u_n; \\ i = i_2 + i_n. \end{cases}$$

На початку лінії ($x = 0$) можна вважати, що $u(0) = \varepsilon$, а це означає, що $u_n(0) = 0$.

Аналогічно, оскільки другий кінець лінії ($x = \ell$) розімкнено, то

$$i_n(\ell) = 0.$$

Функції $u_n(x; t)$ та $i_n(x; t)$ мають задовольняти початковим умовам. Отже,

$$\begin{cases} u_n(x;0) = u(x;0) - u_2(x;0) = u_1(x;0) - u_2(x;0); \\ i_n(x;0) = i(x;0) - i_2(x;0) = i_1(x;0) - i_2(x;0), \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} u_n(x;0) = -\varepsilon \frac{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}(\ell - x)}{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}; \\ i_n(x;0) = -\varepsilon \frac{\operatorname{sh} \sqrt{Rg}(\ell - x)}{\operatorname{ch} \sqrt{Rg}\ell}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Далі знаходимо розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x;t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x;t)}{\partial t} + Ri(x;t) = 0; \\ \frac{\partial i(x;t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x;t)}{\partial t} + gu(x;t) = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u_n(0;t) = 0; \\ i_n(\ell;t) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Будемо вважати, що ізоляція проводу є якісною, тобто $g = 0$. Тоді спрощується система диференціальних рівнянь (3.33) і граничні умови (3.34) теж спрощуються:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n(x;t)}{\partial x} + L \frac{\partial i_n(x;t)}{\partial t} + Ri_n(x;t) = 0; \\ \frac{\partial i_n(x;t)}{\partial x} + C \frac{\partial u_n(x;t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\begin{cases} u_n(x;t) = -\varepsilon; \\ i_n(x;0) = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (3.35) будемо шукати у вигляді

$$\begin{cases} u_n(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}; \\ i_n(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(t) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Тоді система (3.35) набуває вигляду

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} T_n(t) + L\tau'_n(t) + R\tau_n(t) \right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} = 0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \tau_n(t) + CT'_n(t) \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} = 0. \end{cases}$$

Далі

$$\begin{cases} L\tau'_n(t) + R\tau_n(t) + \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}T_n(t) = 0; \\ CT'_n(t) - \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\tau_n(t) = 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

де $n = 0; 1; 2; 3; \dots$.

Рівність (3.37) продиференціюємо за змінною t , а замість $T'_n(t)$ підставимо його значення з рівності (3.38).

Виходить:

$$\tau''_n(t) + \frac{R}{L}\tau'_n(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC}\tau_n(t) = 0. \quad (3.39)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.39) має вигляд

$$\tau_n(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(a_n \cos \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + b_n \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t \right), \quad (3.40)$$

де a_n та b_n – довільні сталі.

Якщо $\tau_n(t)$ з формули (3.40) підставити в рівняння (3.37), то виходить, що

$$\begin{aligned} T_n(t) = & -\frac{2\ell L}{(2n+1)} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\left(\frac{R}{2L}a_n + \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot b_n \right) \cos \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \right. \\ & \left. + \left(\frac{R}{2L}b_n - \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot a_n \right) \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Далі переходимо до знаходження сталих a_n та b_n враховуючи початкові умови (3.36)

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} = -\varepsilon; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(0) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} = 0, \end{cases}$$

а звідси

$$T_n(0) = -\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varepsilon \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx$$

або

$$\begin{cases} T_n(0) = -\frac{4\varepsilon}{(2n+1)\pi}; \\ \tau_n(0) = 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\tau_n(0) = 0, \quad (3.43)$$

де $n = 0; 1; 2; 3; \dots$.

Якщо $t=0$, то формули (3.40) та (3.41) з урахуванням (3.42) дають значення a_n та b_n :

$$\begin{cases} a_n = 0; \\ b_n = \frac{2\varepsilon}{\ell L \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \end{cases}$$

Цей результат дає можливість $T_n(t)$ та $\tau_n(t)$ надати у вигляді

$$T_n(t) = \frac{4\varepsilon e^{-\frac{R}{2L}t}}{(2n+1)\pi \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cos \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \frac{R}{2L} \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right), \quad (3.44)$$

$$\tau_n(t) = \frac{2\varepsilon \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}}{LL \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t. \quad (3.45)$$

Підставимо $T_n(t)$ та $\tau_n(t)$ в (3.37) та дістанемо значення напруги і сили струму у перехідному процесі:

$$u_n(x;t) = -\frac{4\varepsilon}{\pi} e^{-\frac{R}{LL}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \cos \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \frac{R}{LL} \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t}{(2n+1) \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}; \quad (3.46)$$

$$i_n(x;t) = \frac{2\varepsilon}{\ell L} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t}{\sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}. \quad (3.47)$$

Аналіз формул (3.46), (3.47) показує, що:

1) коли $R < \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{L}{C}}$, то вільні коливання у проводі складаються із згасаючих коливань;

2) коли $R > \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{L}{C}}$, то скінченна кількість перших членів у рядах (3.46), (3.47) відповідає так званому аперіодичному руху.

За будь-яких значень R ці ряди описують згасаючі коливання зі зростанням t .

Остаточний результат є таким:

$$u(x; t) = \varepsilon - \frac{4\varepsilon}{\pi} e^{-\frac{R}{LL}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}}{(2n+1) \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \cos \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \frac{R}{2L} \sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right); \quad (3.48)$$

$$i(x; t) = \frac{2\varepsilon}{L\ell} e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t}{\sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2 LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}. \quad (3.49)$$

Приклади до розділу 3

Приклад 3.1. Провід без спотворення довжиною ℓ є таким, що його початок ($x=0$) у момент $t=0$ є заземленим, а кінець цього проводу є заізолюваним. Провід є зарядженим до потенціалу ε по відношенню до землі. Знайти розподіл потенціалу уздовж проводу.

Розв'язання

Позначимо потенціал через $u(x; t)$ та введемо нову функцію $v(x; t) = \ell^{\frac{R}{L}} u(x; t)$. У такому разі для знаходження допоміжної функції $v(x; t)$ маємо рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\text{де } a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Як виходить з умови задачі початкові умови є такими

$$\begin{cases} u(x; t) = \varepsilon; \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \frac{g}{C} \varepsilon. \end{cases}$$

На основі початкових умов для функції $u(x; t)$ знаходимо початкові умови для функції $v(x; t)$.

Одна з умов є такою:

$$v(x;0) = \varepsilon.$$

Для другої початкової умови скористаємось рівнянням

$$\frac{\partial v(x;t)}{\partial t} = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} u(x;t) + e^{\frac{R}{L}t} \frac{\partial u(x;t)}{\partial t},$$

з якого при $t = 0$ маємо

$$\frac{\partial v(x;0)}{\partial t} = \frac{R}{L} \varepsilon - \frac{g}{C} \varepsilon$$

або

$$\frac{\partial v(x;0)}{\partial t} = \frac{(RC - Lg)\varepsilon}{LC}.$$

Оскільки за умовою провід без спотворень, то $RC - Lg = 0$, отже,

$$\frac{\partial v(x;0)}{\partial t} = 0.$$

Таким чином, початкові умови для функції $V(x;t)$ є такими:

$$\begin{cases} v(x;0) = \varepsilon; \\ \frac{\partial v(x;0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Граничні умови для функції $u(x;t)$:

$$\begin{cases} u(0;t) = 0; \\ \frac{\partial u(\ell;0)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Граничні умови для функції $v(x;t)$:

$$\begin{cases} v(x;0) = 0; \\ \frac{\partial v(\ell;t)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Таким чином, ми отримали мішану задачу: знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 v(x;t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x;t)}{\partial x^2}, \quad (*)$$

який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} v(x;0) = \varepsilon; \\ \frac{\partial v(x;0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

та граничні умови

$$\begin{cases} v(0;t) = 0; \\ \frac{\partial v(\ell;t)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Будемо шукати розв'язок $v(x;t)$ у вигляді

$$v(x;t) = X(x)T(t)$$

де $X(0) = 0$ та $X'(\ell) = 0$.

Продиференціюємо функцію $v(x; t)$ за змінними x та t :

$$\frac{\partial v(x; t)}{\partial x} = X'(x)T(t);$$

$$\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t);$$

$$\frac{\partial v(x; t)}{\partial t} = X(x)T'(t);$$

$$\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t).$$

Підставляючи знайдені похідні у рівняння (*) дістанемо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

або

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Позначимо ці відношення через $-\lambda^2$, тобто

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Звідси дістанемо рівняння

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

та

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0.$$

На функцію $X(x)$ були накладені додаткові умови $X(0) = 0$ та $X'(\ell) = 0$.

Розв'язуємо звичайне диференціальне рівняння

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X'(\ell) = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$r^2 + \lambda = 0$$

має корені $r_1 = -\lambda i$, $r_2 = \lambda i$, а загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Користуючись початковими умовами, знаходимо довільні сталі c_1 та c_2 :

$$X(0) = c_1 = 0;$$

$$X'(\ell) = c_2 \lambda \cos \lambda \ell = 0.$$

Очевидно, що умова $c_2 \lambda \cos \lambda \ell = 0$ може виконуватись лише тоді, коли $\cos \lambda \ell = 0$, тобто, коли

$$\lambda t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ де } n = 0; 1; 2; 3; \dots$$

Таким чином, знайдені власні числа задачі

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}, \text{ де } n = 0; 1; 2; 3; \dots$$

Кожному власному значенню λ_n відповідає безліч власних функцій, які відрізняються одна від одної лише сталим множником.

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$$

Припустимо, що $A_n = 1$. Тоді $X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$.

Усі ці функції є ортогональними на проміжку $(0; \ell)$.

Визначившись з функцією $X_n(x)$, переходимо до знаходження функції $T_n(t)$ з рівняння

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 T(t) = 0.$$

З урахуванням того, що $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}$ загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell}.$$

За допомогою знайдених функцій $X_n(x)$ та $T_n(t)$ знаходимо частинні розв'язки $V_n(x; t)$ диференціального рівняння (*):

$$V_n(x; t) = X_n(x) T_n(t),$$

тобто

$$V_n(x; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$$

Коефіцієнти a_n та b_n знаходяться за формулами (2.43) та (2.44):

$$a_n = \frac{2\varepsilon}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$$

або

$$a_n = \frac{4\varepsilon}{\pi(2n+1)},$$

$$b_n \equiv 0.$$

Від функції $V(x; t)$ повертаємось до функції $U(x; t)$:

$$U(x; t) = \frac{4\varepsilon}{\pi} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь : } U(x; t) = \frac{4\varepsilon}{\pi} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$$

Приклад 3.2. Провід без витіку має довжину ℓ . До початку проводу ($x = 0$) підключено змінний струм, е.р.с. якого дорівнює $\varepsilon \sin \omega t$, другий кінець проводу ($x = \ell$) є накоротко замкненим.

В момент підключення е.р.с. напруга та струм у проводі дорівнюють нулю.

Знайти напругу $U(x;t)$ на проводі.

Р о з в ' я з а н н я

Провід без витіку, отже $R = g = a$. Напруга $U(x;t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2}. \quad (*)$$

Початкові умови мають вигляд

$$\begin{cases} U(x;0) = 0; \\ \frac{\partial U(x;t)}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i(x;0)}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

а граничні умови мають вигляд

$$\begin{cases} U(0;t) = \varepsilon \cdot \sin \omega t; \\ U(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

Слід звернути увагу на те, що граничні умови є неоднорідними, у зв'язку з чим користуватися безпосередньо методом Фур'є не можна.

У такій ситуації шукану функцію $U(x;t)$ будемо шукати у вигляді суми двох функцій, а саме:

$$U(x;t) = V_1(x;t) + V_2(x;t).$$

Кожна з цих функцій є розв'язком рівняння (*). При цьому для функції $V_1(x;t)$ граничні умови візьмемо такими:

$$\begin{cases} V_1(0;t) = \varepsilon \cdot \sin \omega t; \\ V_1(\ell;t) = 0, \end{cases}$$

а для функції $V_2(x;t)$ такими:

$$\begin{cases} V_2(0;t) = 0; \\ V_2(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

Будемо шукати функцію $V_1(x;t)$ у вигляді

$$V_1(x;t) = X(x) \sin \omega t.$$

Знайдемо $\frac{\partial^2 V_1(x;t)}{\partial t^2}$ та $\frac{\partial^2 V_1(x;t)}{\partial x^2}$ і підставимо їх у рівняння (*).

$$\frac{\partial V_1(x;t)}{\partial t} = \omega X(x) \cos \omega t;$$

$$\frac{\partial^2 V_1(x;t)}{\partial t^2} = -\omega^2 X(x) \sin \omega t;$$

$$\frac{\partial V_1(x;t)}{\partial x} = X'(x) \sin \omega t ;$$

$$\frac{\partial^2 V_1(x;t)}{\partial x^2} = X''(x) \sin \omega t .$$

Тоді маємо:

$$-\omega^2 X(x) \sin \omega t = a^2 X''(x) \sin \omega t$$

або

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X(x) = 0 ,$$

а граничні умови мають вигляд

$$\begin{cases} X(0) = \varepsilon; \\ X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння:

$$r^2 + \frac{\omega^2}{a^2} = 0 .$$

Коренями характеристичного рівняння є числа

$$r_1 = -\frac{\omega}{a}i, \quad r_2 = \frac{\omega}{a}i .$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння для комплексно спряжених коренів запишемо у вигляді

$$X(x) = c_1 \cos \frac{\omega x}{a} + c_2 \sin \frac{\omega x}{a} .$$

Довільні сталі c_1 та c_2 знаходимо виходячи з граничних умов.

$$X(0) = c_1 = \varepsilon, \text{ звідки } c_1 = \varepsilon ;$$

$$X(\ell) = \varepsilon \cos \frac{\omega \ell}{a} + c_2 \sin \frac{\omega \ell}{a} = 0, \text{ звідки } c_2 = -\varepsilon \operatorname{ctg} \frac{\omega \ell}{a}, \text{ де } \frac{\omega \ell}{a} \neq \pi n$$

або $\omega \neq \frac{\pi n a}{\ell}$. Тоді $X(x) = \varepsilon \cos \frac{\omega x}{a} - \varepsilon \operatorname{ctg} \frac{\omega \ell}{a} \sin \frac{\omega x}{a}$.

Отже, знайдено функцію $V_1(x;t)$.

$$V_1(x;t) = \left(\varepsilon \cos \frac{\omega x}{a} - \varepsilon \operatorname{ctg} \frac{\omega \ell}{a} \sin \frac{\omega x}{a} \right) \sin \omega t .$$

Цей вираз можна спростити

$$V_1(x;t) = \varepsilon \sin \omega t \left(\sin \frac{\omega \ell}{a} \cos \frac{\omega x}{a} - \cos \frac{\omega \ell}{a} \sin \frac{\omega x}{a} \right) \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} ;$$

$$V_1(x;t) = \frac{\varepsilon \sin \omega t}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \left(\frac{\omega \ell}{a} - \frac{\omega x}{a} \right) ;$$

$$V_1(x;t) = \frac{\varepsilon \sin \omega t}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega}{a}(\ell - x).$$

Далі будемо шукати функцію $V_2(x;t)$. Ця функція також задовольняє рівняння (*) з граничними умовами відповідно

$$\begin{cases} V_2(0;t) = 0; \\ V_2(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо початкові умови для $V_2(x;t)$.

Оскільки $U(x;0) = 0$, то $V_1(x;0) + V_2(x;0) = 0$ і, отже, $V_1(x;0) = 0$ та $V_2(x;0) = 0$.

Далі

$$\frac{\partial U(x;t)}{\partial t} = 0, \text{ значить } \frac{\partial V_1(x;0)}{\partial t} + \frac{\partial V_2(x;0)}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{\partial V_1(x;0)}{\partial t} = \frac{\varepsilon \omega \cos \omega t}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega}{a}(\ell - x);$$

$$\frac{\partial V_1(x;0)}{\partial t} = \frac{\varepsilon \omega}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega}{a}(\ell - x).$$

Очевидно, що $\frac{\partial V_2(x;0)}{\partial t} = -\frac{\partial V_1(x;0)}{\partial t}$, тобто $\frac{\partial V_2(x;0)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \omega}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega}{a}(\ell - x)$.

Отже, початкові умови для функції $V_2(x;t)$ є такими:

$$\begin{cases} V_2(x;0) = 0; \\ \frac{\partial V_2(x;0)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \omega}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega}{a}(\ell - x). \end{cases}$$

Функцію $V_2(x;t)$ будемо шукати методом Фур'є.

Нехай $V_2(x;t) = X(x)T(t)$.

Функція $V_2(x;t)$ має задовольняти рівняння (*), тобто

$$\frac{\partial^2 V_2(x;t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V_2(x;t)}{\partial x^2},$$

звідки маємо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

або

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Позначимо через c кожне з відношень.

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = c;$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c.$$

Звідси дістанемо два звичайних диференціальних рівняння:

$$X''(x) - cX(x) = 0$$

та

$$T''(t) - ca^2T(t) = 0.$$

Будемо шукати розв'язок першого з рівнянь.

Оскільки, $V_2(x;t) = 0$ та $V_2(\ell;t) = 0$,

то

$$X(0)T(t) = 0 \text{ та } X(\ell)T(t) = 0.$$

Виходить, що для функції $X(x)$ граничні умови мають вигляд

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що рівняння $X''(x) - cX(x) = 0$ має тривіальний розв'язок при будь-якому значенні c . Але за деяких значень c існують і нетривіальні розв'язки.

Припустимо, що $X(x) = e^{rx}$ та складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - c = 0.$$

1. Якщо $c = \lambda^2 > 0$, то $r_1 = \lambda$, $r_2 = -\lambda$, а загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Довільні сталі c_1 та c_2 знаходимо виходячи з граничних умов

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0; \\ X(\ell) = c_1 e^{\lambda \ell} + c_2 e^{-\lambda \ell} = 0. \end{cases}$$

Така система має лише тривіальний розв'язок $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Отже, $X(x) \equiv 0$.

2. Нехай $c = 0$. Тоді характеристичне рівняння $r^2 = 0$ має кратні корені $r_1 = 0$ та $r_2 = 0$, а загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 + c_2 x.$$

Зважаючи на граничні умови, маємо:

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0; \\ X(\ell) = c_1 + c_2 \ell = 0. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = c_2 = 0$. Отже, $X(x) \equiv 0$.

3. Нехай $c = -\lambda^2 < 0$.

Тоді характеристичне рівняння має вигляд $r^2 + \lambda^2 = 0$, а його коренями є числа $r_1 = -\lambda i$ та $r_2 = \lambda i$, а загальний розв'язок диференціального рівняння є таким:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

З граничних умов маємо:

$$X(0) = c_1 \cos \lambda x = 0, \text{ звідки } c_1 = 0,$$

$$X(\ell) = c_1 \cos \lambda \ell + c_2 \sin \lambda \ell = 0, \text{ звідки } c_2 \sin \lambda \ell = 0.$$

У цьому випадку або $c_2 = 0$ і тоді знов дістанемо тривіальний розв'язок, а якщо $c_2 \neq 0$, то тоді, очевидно, що $\sin \lambda \ell = 0$, а це означає, що $\lambda \ell = \pi n$, де $k = 1; 2; 3; \dots$.

Отже, якщо $\lambda = \frac{\pi n}{\ell}$ або $c = -\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$, то існує нетривіальний розв'язок

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

де $X_n(x)$ – це частинний розв'язок, який відповідає певному значенню λ_n , A_n – довільна стала.

Кожному власному значенню λ_n відповідає нескінченна кількість частинних розв'язків $X_n(x)$. При цьому функції $\sin \frac{\pi n x}{\ell}$ є власними функціями диференціального рівняння і вони утворюють систему ортогональних функцій.

Переходимо до розв'язування диференціального рівняння

$$T''(t) - ca^2 T(t) = 0.$$

Для кожного власного числа $\lambda_n = \frac{\pi n}{\ell}$ існує своя функція $T(t)$, яка відповідає рівнянню

$$T''(t) + \left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 T(t) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$T_n(t) = B_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} + D_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell},$$

де B_n та D_n – довільні сталі.

Тепер маємо, що

$$V_2(x; t) = \left(B_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} + D_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell} \right) \cdot A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

або

$$V_2(x; t) = \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell} \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

де $a_n = B_n A_n$; $b_n = D_n A_n$.

Оскільки $V_2(x;0)=0$, то $a_n=0$, а коефіцієнти b_n знаходяться за формулою

$$b_n = \frac{-2\varepsilon}{\pi n a} \int_0^\ell \frac{\sin \frac{\omega(\ell-x)}{a}}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$$

Після спрощення маємо:

$$b_n = \frac{2\varepsilon \omega a}{\ell \left(\left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 - \omega^2 \right)}.$$

Числа $\frac{\pi n a}{\ell}$ являють собою частоти власних коливань.

Остаточно маємо такий результат:

$$U(x;t) = \frac{\varepsilon \sin \frac{\omega(\ell-x)}{a}}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \omega t + \frac{2\varepsilon \omega a}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n a t}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell}}{\left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 - \omega^2}.$$

В і д п о в і д ь :
$$U(x;t) = \frac{\varepsilon \sin \frac{\omega(\ell-x)}{a}}{\sin \frac{\omega \ell}{a}} \sin \omega t + \frac{2\varepsilon \omega a}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n a t}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell}}{\left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 - \omega^2}.$$

4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1 Рівняння лінійної теплопровідності для плоского стрижня без теплових стоків та джерел

Поставимо задачу дослідити розподіл тепла у твердому тілі.

Розглянемо плоский металевий стрижень, бічна поверхня якого не пропускає тепло в ту чи іншу сторону, тобто бічна поверхня є теплоізованою.

Якщо в початковий момент стрижень є нерівномірно нагрітим, то в ньому відбувається процес передачі тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих частин. Така *властивість* називається *теплопровідністю*.

Будемо розглядати найпростіший випадок, коли 1) теплоізованою є не лише бічна поверхня, а і кінці стрижня; 2) відсутня передача тепла у стрижень зовні; 3) у середині стрижня відсутні точки, які поглинають тепло, тобто теплові стоки та точки, теплові джерела; 4) усі точки будь-якого поперечного перерізу стрижня мають однакову температуру, тобто стрижень є достатньо тонким.

Покладемо, що вісь стрижня лежить на осі Ox . За таких припущень температура кожної точки $M(x)$ на осі Ox буде залежати від абсциси x та часу t . Температура точок стрижня визначається функцією $u = u(x; t)$. За фіксованого значення t функція u залежить лише від x , тобто $u = u(x; t_0)$, а швидкість теплообміну в напрямку осі Ox визначається похідною $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$. За фіксованого значення x , функція u залежить лише від t , тобто $u = u(x_0; t)$, і визначає закон змінення температури у точках x поперечного перерізу $x = x_0$ протягом часу.

Процес теплообміну у стрижні будемо описувати за допомогою диференціального рівняння, враховуючи при цьому наступну інформацію:

1. Кількість тепла Q_1 , необхідного для того, щоб підвищити температуру u однорідного тіла на величину Δu визначається величиною

$$Q_1 = \rho c V \Delta u, \quad (4.1)$$

де ρ – це щільність тіла; c – питома теплоємність; V – об'єм тіла.

2. Кількість тепла Q_2 , яке протікає через поперечний стрижень упродовж часу Δt , тобто тепловий потік є пропорційним площі перерізу, швидкості змінення температури у напрямку, перпендикулярному площині перерізу, а також, проміжку часу Δt , тобто величині

$$Q_2 = -kS \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} \Delta t. \quad (4.2)$$

Тут k – коефіцієнт теплопровідності.

Тепловий потік вважається додатним, якщо тепло поширюється в напрямку зростання x . Якщо $\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} > 0$, то це означає, що функція $U = U(x;t)$ є зростаючою, тобто її значення зростають при зростанні x . У такому разі тепловий потік буде спрямований в бік зменшення x , чим і пояснюється знак мінус у формулі (4.2).

Якщо стрижень є однорідним, а температура змінюється поступово, то коефіцієнт k у формулі (4.2) можна вважати сталим.

Зробимо два поперечних перерізи через точки x та $x + \Delta x$ і будемо розглядати ділянку стрижня, яка знаходиться між цими перерізами. Для цієї ділянки складаємо рівняння теплового балансу. За основу візьмемо рівність $Q_1 = Q_2$, тобто

$$-kS \frac{\partial u(x + \Delta x; t)}{\partial x} = -kS \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} \Delta t$$

або

$$\frac{\partial u(x + \Delta x; t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x; t)}{\partial x}. \quad (4.3)$$

З точністю до нескінченно малих вищого порядку можна вважати, що

$$\frac{\partial u(x + \Delta x; t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Тоді величина ΔQ теплового потоку

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1$$

або

$$\Delta Q = -kS \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} \Delta t + kS \left(\frac{\partial u(x; t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t,$$

або

$$\Delta Q = kS \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta t. \quad (4.4)$$

За цей самий проміжок Δt температура $u(x; t)$ має змінитись на величину $\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} \Delta t$ з точністю до нескінченно малих вищого порядку. Отже, є справедливою рівність

$$\Delta Q = \rho c V \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} \Delta t$$

або

$$\Delta Q = \rho c S \Delta x \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} \Delta t. \quad (4.5)$$

З рівностей (4.4) та (4.5) маємо рівняння

$$\rho c S \Delta x \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} \Delta t = kS \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta t$$

або

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}.$$

Для зручності позначимо $\frac{k}{\rho c} = a^2$, тоді дістанемо рівняння

$$\frac{\partial U(x;t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2}, \quad (4.6)$$

де число $a = \sqrt{\frac{k}{\rho c}}$ називається *коефіцієнтом температуропровідності*.

Рівняння (4.6) є лінійним та однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку.

Рівняння (4.6) називається *рівнянням лінійної теплопровідності* для однорідного стрижня, який не має теплових стоків та джерел.

4.2 Рівняння лінійної теплопровідності для плоского стрижня з тепловими стоками та джерелами

Розглянемо стрижень, який відрізняється від стрижня, описаного у п. 1.1, тим, що в ньому є теплові стоки та джерела. Інтенсивність виділення або поглинання тепла характеризуються щільністю теплових стоків та джерел.

Щільністю теплових стоків та джерел називається така функція $F(x;t)$ за допомогою якої з точністю до нескінченно малих вищого порядку визначається кількість тепла ΔQ , що виділяється на достатньо малій ділянці стрижня $(x; x + \Delta x)$ протягом достатньо малого проміжку часу $(t; t + \Delta t)$, а саме:

$$\Delta Q = F(x;t) \Delta x \Delta t. \quad (4.7)$$

Якщо точка $M(x)$ є стоком, то $F(x;t) < 0$, якщо точка $M(x)$ є джерелом, то $F(x;t) > 0$.

Так, якщо через стрижень пропускати електричний струм, то в ньому буде виділятися тепло і при цьому $F(x;t) = \text{const}$, а точніше

$$F(x;t) = I^2 R,$$

де I – струм, а R – опір одиниці довжини стрижня.

Рівняння балансу складається так само, як і у попередньому випадку з урахуванням тепла, яке виникає внаслідок існування теплових стоків та джерел. Отже, маємо:

$$\rho c \frac{\partial U(x;t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2} + \frac{1}{S} F(x;t), \quad (4.8)$$

де доданок $\frac{1}{S} F(x;t)$ отриманий діленням на $S \Delta x \Delta t$ величини $F(x;t) \Delta x \Delta t$.

Поділивши обидві частини рівності (3.162) на $\rho c S$ та позначивши через $g(x;t)$ величину $\frac{1}{\rho c S} F(x;t)$, дістанемо рівняння

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2} + g(x;t). \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку.

Рівняння (4.9) називається *рівнянням лінійної теплопровідності* для однорідного стрижня, в якому є теплові стоки та джерела.

4.3 Початкові та граничні умови для рівняння лінійної теплопровідності

Будемо розглядати рівняння лінійної теплопровідності (4.8).

Початкові умови для рівняння теплопровідності мають задавати температуру стрижня в той момент часу, від якого починається відлік часу. Звичайно це буває значення $t = 0$.

Отже, початкова умова є такою:

$$u(x;0) = f(x), \quad (4.10)$$

де $f(x)$ – задана функція, яка обумовлена дослідженим процесом.

Граничні умови задаються в тих випадках, коли існує теплообмін стрижня з зовнішнім середовищем. Нехай довжина стрижня дорівнює ℓ . Початком стрижня вважаємо точку з абсцисою $x = 0$, а кінцем – точку з абсцисою $x = \ell$.

Тоді граничні умови можуть бути такими:

$$\begin{cases} u(0;t) = u_0^*; \\ u(\ell;t) = u_1^*, \end{cases} \quad (4.11)$$

де u_0^* та u_1^* – задані числа, які обумовлені досліджуваним процесом.

Тепер припустимо, що на кінцях стрижня відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем. В такому разі діє закон Ньютона: потік тепла через одиницю поверхні в одиницю часу є пропорційним різниці температур тіла та зовнішнього середовища, тобто $h(u - u^*)$, де u – температура кінця стрижня; u^* – температура зовнішнього середовища; h – коефіцієнт пропорційності, який залежить від фізичних властивостей стрижня та зовнішнього середовища. Коефіцієнт h називається *коефіцієнтом теплообміну*.

Будемо вважати, що за даних обставин коефіцієнт h є сталим і якщо $h > 0$, то це означає, що потік тепла зі стрижня виходить у зовнішнє середовище, а якщо $h < 0$, то стрижень поглинає тепло із зовнішнього середовища. Кількість тепла, що проходить через поперечний переріз за час Δt визначається формулою

$$\Delta Q = h(u - u^*) S \Delta t.$$

За законом зберігання енергії кількість тепла, що виходить, дорівнює кількості тепла, яке проходить через торцевий переріз.

Величини h та u^* на різних кінцях стрижня можуть бути різними.

Позначимо, що на лівому кінці стрижня $h = h_0$, $u^* = u_0^*$, на правому $h = h_1$, $u^* = u_1^*$.

У такому разі граничні умови мають вигляд:

$$\begin{cases} k \frac{\partial u(0; t)}{\partial x} = h_0 (u(0; t) - u_0^*); \\ -k \frac{\partial u(\ell; t)}{\partial x} = h_1 (u(\ell; t) - u_1^*). \end{cases} \quad (4.12)$$

Якщо якийсь кінець стрижня є заізолюваним, то гранична умова для цього кінця має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Таким чином, для розв'язання задачі теплопровідності для однорідного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею без теплових джерел, необхідно знайти температуру $u(x; t)$, яка задовольняє рівняння (4.6), початкові умови (4.11) та граничні умови (4.12).

4.4 Рівняння теплопровідності для нескінченного стрижня та його розв'язування методом Фур'є

Розглядаємо тонкий довгий теплопровідний стрижень, бічна поверхня якого є теплоізолюваною. Температура $u(x; t)$ в точках цього стрижня задовольняє рівняння теплопровідності (4.3)

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2}.$$

Ідеалізуючи розглядуваний процес будемо вважати стрижень нескінченним. У такому разі граничні умови не задаються. Залишається лише початкова умова (4.10):

$$u(x; 0) = f(x).$$

Рівняння теплопровідності (4.3) та початкова умова (4.10) складають задачу Коші для рівняння теплопровідності.

Для спрощення розв'язання задачі Коші зробимо заміну змінної

$$t = \frac{1}{a^2} \tau. \quad (4.13)$$

Тоді $\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x; \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}$ або

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u(x; \tau)}{\partial \tau}.$$

Поставлена задача Коші (4.3) при цьому набуває такого вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x; \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x; \tau)}{\partial x^2}, \\ u(x; 0) = f(x). \end{cases} \quad (4.14)$$

Будемо користуватись методом Фур'є. Шукану функцію $u(x; \tau)$ подамо у вигляді добутку двох функцій

$$u(x; \tau) = X(x)T(\tau), \quad (4.15)$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x; \tau)}{\partial x} &= X'(x)T(\tau), \quad \frac{\partial^2 u(x; \tau)}{\partial x^2} = X''(x)T(\tau), \\ \frac{\partial u(x; \tau)}{\partial \tau} &= X(x)T'(\tau), \end{aligned}$$

а рівняння (4.14) набуває вигляду

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

або

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (4.16)$$

Рівняння (4.16) розпадається на два рівняння

$$T'(\tau) + \lambda^2 T(\tau) = 0; \quad X''(x) = -\lambda^2 X(x).$$

Розв'язуємо перше рівняння

$$T'(\tau) + \lambda^2 T(\tau) = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд $r + \lambda^2 = 0$, звідки $r = -\lambda^2$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$T(\tau) = ce^{-\lambda^2 \tau}.$$

Розв'язуємо друге рівняння

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Характеристичне рівняння $r^2 + \lambda^2 = 0$ має корені $r_1 = -\lambda i$, $r_2 = \lambda i$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння є таким:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Таким чином,

$$u(x; \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \cdot ce^{-\lambda^2 \tau}$$

або

$$u(x; \tau) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) \cdot e^{-\lambda^2 \tau}, \quad (4.17)$$

де $\alpha = AC$; $\beta = BC$.

З (4.17) виходить, що вибираючи те чи інше λ ми будемо отримувати новий комплект довільних сталих α та β , оскільки вони залежать від λ . Щоб підкреслити цей факт запишемо функцію $u(x; \tau)$ у такій формі:

$$u_\lambda(x; \tau) = (\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x) \cdot e^{-\lambda^2 \tau}, \quad (4.18)$$

де $\lambda \in (-\infty; +\infty)$.

Кожна з функцій $U_\lambda(x; \tau)$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (4.6). Згідно з властивостями частинних розв'язків однорідного диференціального рівняння з частинними похідними можна стверджувати, що функція

$$u_\lambda(x; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(x; \tau) dx$$

або

$$u_\lambda(x; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (4.19)$$

також є розв'язком диференціального рівняння (4.6).

У формулі (4.19) коефіцієнти $\alpha(\lambda)$ та $\beta(\lambda)$ можуть бути тими чи іншими. Ми маємо знайти такі $\alpha(\lambda)$ та $\beta(\lambda)$ за яких виконується початкова умова (4.10). Це означає, що коефіцієнти $\alpha(\lambda)$ та $\beta(\lambda)$ мають задовольняти рівняння

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda = f(x). \quad (4.20)$$

Для того, щоб розв'язати таке рівняння доцільно функцію $f(x)$ подати у вигляді інтеграла Фур'є, а це можливо, якщо на будь-якому скінченному інтервалі $(-\ell; \ell)$ функція $f(x)$ задовольняє умову Діріхле та є абсолютно

інтегровною, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ має бути збіжним.

Цей інтеграл дорівнює тепловій енергії стрижня, а його збіжність означає, що ця енергія має бути скінченною.

У фізичних процесах це завжди виконується.

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \cos \lambda(\mu - x) d\mu$$

або

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \cos \lambda \mu d\mu \right) \cos \lambda x + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \sin \lambda \mu d\mu \right) \sin \lambda x \right) d\lambda. \quad (4.21)$$

Порівнюючи (4.20) з (4.21), доходимо висновку, що коефіцієнти $\alpha(\lambda)$ та $\beta(\lambda)$ мають визначатися формулами

$$\begin{cases} \alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \cos \lambda \mu d\mu; \\ \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \sin \lambda \mu d\mu. \end{cases} \quad (4.22)$$

Підставимо формули (4.22) в (4.19)

$$u(x; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) (\cos \lambda x \cos \lambda \mu + \sin \lambda x \sin \lambda \mu) e^{-\lambda^2 \tau} d\mu \quad (4.23)$$

або

$$u(x; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) \cos \lambda(x - \mu) e^{-\lambda^2 \tau} d\mu. \quad (4.24)$$

Ця функція є розв'язком рівняння (4.14).

Якщо від змінної τ повернутися до змінної t та виконати деякі перетворення, то дістанемо шукану функцію $u(x; t)$, яка є розв'язком рівняння (4.6):

$$u(x; t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2 t}} d\mu. \quad (4.25)$$

4.5 Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

Розглянемо функцію

$$\varphi_\mu(x; t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.26)$$

Безпосереднім підставленням можна впевнитись у тому, що ця функція є розв'язком рівняння (4.6).

Функція (4.26) називається *фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності*.

Фізичним тепловим імпульсом називається такий процес, який описується рівнянням теплопровідності, а його початкові умови мають такий вигляд:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0, & \text{якщо } |x - x_0| < \varepsilon; \\ 0, & \text{якщо } |x - x_0| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.27)$$

де $u_0 = \text{const}$, а ε – нескінченно мала додатна величина.

Такий розподіл температур виникає тоді, коли у деякому ε -околі точки x_0 температура усіх точок стрижня при $t=0$ також дорівнює нулю. Потім в момент часу $t=0$ до точки x_0 підводиться полум'я дуже високої температури. Внаслідок цього в точці x_0 температура підвищується до значення u_0 .

В такому разі розв'язком рівняння (4.6) буде функція

$$u(x; t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2 t}} d\mu. \quad (4.28)$$

За теоремою про середнє значення функція $u(x; t)$ може бути приведена до такої форми

$$u(x; t) = \frac{\theta_0}{\rho c} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu^*)^2}{4a^2 t}},$$

де $\mu^* \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

Кількість тепла, підведеного до точки x_0 , дорівнює spc . Позначимо $spc = \theta_0$. Тоді

$$u(x; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu^*)^2}{4a^2 t}}.$$

Для того, щоб ідеалізувати фізичний тепловий процес, припустимо, що $\varepsilon \rightarrow 0$, тоді $U_0 \rightarrow +\infty$, а $\mu^* \rightarrow x_0$. В такому разі

$$u(x; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$$

або

$$u(x; t) = \varphi_{x_0}(x; t).$$

Це означає, що функція $u(x; t)$ переходить у фундаментальний розв'язок при $\mu = x_0$.

Приклади до розділу 4

Приклад 4.1. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності, початкові умови для якого мають вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x < x_1; \\ u_0, & \text{якщо } x_1 < x < x_2; \\ 0, & \text{якщо } x_2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язання

Згідно з формулою (4.25) розв'язок $u(x; t)$ є таким:

$$u(x; t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2 t}} d\mu.$$

Виконаємо спрощення

$$u(x; t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2 t}} d\mu =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x-\mu}{2a\sqrt{t}} = v \\ -\frac{1}{2a\sqrt{t}} d\mu = dv \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & v \\ \hline x_2 & \frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}} \\ \hline x_1 & \frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}} \\ \hline \end{array} \left. \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv = -\frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv - \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv = \\
&= \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right).
\end{aligned}$$

Отже,

$$u(x; t) = \frac{1}{2} u_0 \left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right).$$

До складу останньої формули входить функція

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

називана *інтегралом ймовірностей*.

Ця функція є непарною. Значення функції $\Phi(x)$ табульовані. При цьому $\Phi(+\infty) = 1$; $\Phi(-\infty) = -1$.

Безпосередньою підстановкою можна впевнитись в тому, що знайдена функція $U(x; t)$ задовольняє заданим початковим умовам.

Дійсно, якщо $-\infty < x < x_1$, то за $t \rightarrow 0$ $\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(-\infty) = -1$, $\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(-\infty) = -1$, а $u(x; t) = 0$; якщо $x_2 < x < +\infty$, то за $t \rightarrow 0$ $\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(+\infty) = 1$, $\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(+\infty) = 1$, а $u(x; t) = 0$; якщо $x_1 < x < x_2$, то за $t \rightarrow 0$ $\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(+\infty) = 1$, $\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow \Phi(-\infty) = -1$, а $u(x; t) = u_0$.

У точках розриву $x = x_1$ та $x = x_2$ за $t \rightarrow 0$ $u(x; t) \rightarrow \frac{1}{2} U_0$.

В і д п о в і д ь : $u(x; t) = \frac{1}{2} u_0 \left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right)$.

Приклад 4.2. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності, який задовольняє початкові умови

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x < -\ell; \\ u_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right), & \text{якщо } 0 \leq x \leq \ell; \\ u_0 \left(1 + \frac{x}{\ell}\right), & \text{якщо } -\ell \leq x \leq 0; \\ 0, & \text{якщо } \ell < x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язання

Згідно з формулою (4.25) розв'язок рівняння теплопровідності є таким:

$$u(x; t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\ell}^0 \left(1 + \frac{\mu}{\ell}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}} d\mu + \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{\mu}{\ell}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}} d\mu.$$

У кожному з інтегралів зробимо одну і ту ж саму заміну

$$\frac{x - \mu}{2a\sqrt{t}} = v$$

та знайдемо межі інтегрування.

Виходить:

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \int_{\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv - \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{a}{\ell} \sqrt{t} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}}} v e^{-v^2} dv + 2\frac{a}{\ell} \sqrt{t} \int_{\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} v e^{-v^2} dv \right) = \\ &= \frac{1}{2} u_0 \left(\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \left(\Phi\left(\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}}\right) \right) \right) + \\ &\quad + u_0 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(x+\ell)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\ell)^2}{4a^2t}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} u_0 \left(\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \Phi\left(\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}}\right) - 2\frac{x}{\ell} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \Phi\left(\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}}\right) \right) + \\ &\quad + u_0 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(x+\ell)^2}{4a^2t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\ell)^2}{4a^2t}} \right). \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{1}{2} u_0 \left(\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \Phi\left(\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}}\right) - 2\frac{x}{\ell} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \Phi\left(\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}}\right) \right) + \\ &\quad + u_0 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(x+\ell)^2}{4a^2t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\ell)^2}{4a^2t}} \right). \end{aligned}$$

5 РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПРОСТОРИ ТА МЕТОДИ ЙОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

5.1 Рівняння теплопровідності для просторового тіла

Розглянемо деяке просторове тіло, яке не є рівномірно нагрітим. Температура тіла у момент часу t у кожній його точці $M(x; y; z)$ визначається функцією $u(x; y; z; t)$. Функція $u = u(x; y; z; t)$ у кожний момент часу t задає скалярне поле, тобто поле температур. Таке скалярне поле змінюється, якщо змінюється t , тобто це є нестационарне скалярне поле. За кожного конкретного значення t маємо еквіпотенціальну поверхню, яка називається *ізотермічною поверхнею*.

Ізотермічні поверхні змінюються при зміні t . Напрямок найбільшої швидкості змінення аргументу визначається за допомогою градієнта скалярного поля $u(x; y; z; t)$, тобто

$$\overline{\text{grad}} u(x; y; z; t) = \left\{ \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial y}, \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial z} \right\}.$$

У точках ізотермічної поверхні $\overline{\text{grad}} u(x; y; z; t)$ є колінеарним з нормаллю $\bar{n}$ до цієї поверхні.

При цьому, швидкість змінення скалярного поля у точці $M(x; y; z; t)$ визначається через модуль градієнта

$$V_{\max} = |\overline{\text{grad}} u(x; y; z; t)|,$$

якщо $\overline{\text{grad}} u(x; y; z; t) \parallel \bar{n}$.

На ізотермічній поверхні візьмемо елементарну ділянку $\Delta\delta$. Через цю ділянку впродовж часу Δt проходить тепловий потік ΔQ , який визначається формулою

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial n} \Delta\delta \Delta t, \quad (5.1)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, який будемо вважати сталою величиною.

Величина теплового потоку вважається додатною, якщо напрямок теплового потоку збігається з вибраним напрямком нормалі. Якщо тепло від більш нагрітих участків переходить до менш нагрітих, то величина теплового потоку є від'ємною, чим і пояснюється наявність знака мінус у формулі (5.1).

Оскільки $\frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial n} = \overline{\text{grad}} u(x; y; z; t) \cdot \bar{n}$, то формулу (5.1) можна надати у вигляді

$$\Delta Q = -k \overline{\text{grad}} u(x; y; z; t) \cdot \bar{n} \Delta\delta \Delta t. \quad (5.2)$$

Позначимо: $a(x; y; z; t) = -k \overline{\text{grad}} u(x; y; z; t)$.

Тоді

$$\Delta Q = \text{pr}_n \overline{a_n(x; y; z; t)} \Delta\delta \Delta t,$$

де $\overline{a_n(x; y; z; t)}$ – проекція вектора $\overline{a(x; y; z; t)}$ на зовнішню нормаль $\overline{n_0}$. Вектор $\overline{a(x; y; z; t)}$ називається *вектором теплового потоку*.

У заданому твердому тілі виділимо елементарний об'єм, обмежений замкненою поверхнею S . Потік тепла із цього елемента об'єму через поверхню S дорівнює добутку величини Δt на потік вектора $\overline{a(x; y; z; t)}$ через поверхню S , тобто

$$Q = \Delta t \oint_S \overline{a(x; y; z; t)} \cdot \overline{d\delta}$$

або

$$Q = \Delta t \oint_S \text{пр}_n \overline{a(x; y; z; t)} \cdot d\delta. \quad (5.3)$$

При цьому $Q > 0$, якщо елементарний об'єм втрачає тепло, та $Q < 0$, якщо елементарний об'єм поглинає тепло.

Якщо до правої частини формули (5.3) застосувати теорему Остроградського-Гаусса, то дістанемо такий результат:

$$Q = \iiint_V \text{div} \overline{a(x; y; z; t)} dV,$$

де V – об'єм, обмежений поверхнею S .

Оскільки

$$\begin{aligned} \text{div} \overline{a(x; y; z; t)} &= -\text{div}(k \overline{\text{grad } u(x; y; z; t)}) = -k \text{div}(\overline{\text{grad } u(x; y; z; t)}) = \\ &= -k \left(\frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial z^2} \right) = -k \Delta u, \end{aligned}$$

де Δu – це оператор Лапласа, тобто

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial z^2}.$$

Кількість тепла, яке поглинається елементарним об'ємом визначається формулою

$$Q_2 = \iiint_V k \Delta u dV. \quad (5.4)$$

Цей результат відповідає випадку, коли в елементарному об'ємі відсутні стоки та джерела.

Припустимо тепер, що в елементарному об'ємі є теплові джерела, щільність яких визначається функцією $F(x; y; z; t)$.

У такому разі з елементарного об'єму впродовж часу $(t; t + \Delta t)$ буде виділятися кількість тепла Q_2 , яка визначається формулою

$$Q_2 = \Delta t \iiint_V F(x; y; z; t) dV. \quad (5.5)$$

Загальна кількість тепла Q при цьому дорівнює

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

У точці $M(x; y; z)$ упродовж часу $(t; t + \Delta t)$ температура $u(x; y; z; t)$ змінюється на величину

$$u(x; y; z; t + \Delta t) - u(x; y; z; t) = \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial y} \Delta t .$$

Для того, щоб відбулася така зміна температури в елементарному об'ємі знадобиться кількість тепла, яка дорівнює

$$c\rho\Delta V \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} \Delta t ,$$

де c – питома теплоємність; ρ – щільність.

Для усього тіла V необхідна кількість тепла

$$Q_2 = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial U(x; y; z; t)}{\partial t} dV . \quad (5.6)$$

При цьому $Q_3 = Q_1 + Q_2$, звідки

$$\iiint_V c\rho \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} dV = \iiint_V k\Delta U \Delta V + \iiint_V F(x; y; z; t) dV .$$

Після спрощення дістанемо рівність

$$c\rho \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} - k\Delta U - F(x; y; z; t) = 0 \quad (5.7)$$

або

$$\frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} = a^2 \Delta U + \frac{1}{c\rho} F(x; y; z; t) , \quad (5.8)$$

де $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}} .$

Рівняння (5.8) є основним рівнянням теплопровідності.

Якщо теплові джерела відсутні, то рівняння (5.8) набуває вигляду

$$\frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

або

$$\frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z; t)}{\partial z^2} \right) . \quad (5.9)$$

Рівняння (5.9) є однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними.

5.2 Початкові та граничні умови для основного рівняння теплопровідності

Початкові умови для основного рівняння теплопровідності передбачають завдання температури в усіх точках просторового тіла в деякий початковий момент часу, приміром, $t = 0$

$$u(x; y; z; 0) = f(x; y; z) , \quad (5.10)$$

де $f(x; y; z)$ – функція, яка визначена та неперервна в усіх точках просторового тіла.

Рівняння теплопровідності (5.9) та початкові умови (5.10) складають задачу Коші для основного рівняння теплопровідності.

Нехай Γ – це границя просторового тіла. Перепадом температур в точці на границі Γ називається різниця між температурами точки зовнішнього середовища та точки на границі Γ . Потік тепла із середовища тіла через будь-яку частину поверхні Γ є пропорційним перепаду температур на цій частині границі.

Якщо позначити через h коефіцієнт теплообміну, то граничні умови можна подати у вигляді

$$-k \frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma} = h \left(u(x; y; z; t) \Big|_{\Gamma} - u^*(x; y; z; t) \right), \quad (5.11)$$

де $u(x; y; z; t)$ – внутрішня точка тіла, а $u^*(x; y; z; t)$ – точка на границі Γ .

За деяких умов граничні умови можуть бути більш простими.

1. Якщо границя тіла заізолювана, то $h = 0$. Тоді гранична умова має вигляд

$$\frac{\partial u(x; y; z; t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (5.12)$$

2. Якщо границя тіла не заізолювана, то температура тіла на границі збігається з температурою зовнішнього середовища, це означає, що $h \rightarrow \infty$. Тоді гранична умова має вигляд

$$u(x; y; z; t) \Big|_{\Gamma} = u^*(x; y; z; t). \quad (5.13)$$

5.3 Рівняння дифузії

Характеристикою дифузії є концентрація дифундуючої речовини $c = c(x; y; z; t)$.

Процес дифузії має багато спільного з процесом теплопровідності.

Рівняння дифузії є аналогічним рівнянню теплопровідності та має вигляд

$$\frac{\partial c(x; y; z; t)}{\partial t} = D \Delta c \quad (5.14)$$

або

$$\frac{\partial c(x; y; z; t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c(x; y; z; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x; y; z; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c(x; y; z; t)}{\partial z^2} \right), \quad (5.15)$$

де D – коефіцієнт дифузії, $D > 0$.

Початкові умови для рівняння дифузії:

$$c(x; y; z; 0) = f(x; y; z). \quad (5.16)$$

Функція $f(x; y; z)$ задає початкову концентрацію.

Граничні умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(x; y; z; t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma} = 0; \\ c(x; y; z; t) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

де Γ – границя області, в якій відбувається дифузія.

Перша з умов (5.13) означає, що границя Γ є непроникною. Стіною для речовини, в якій відбувається дифузія. Друга умова (5.13) задає концентрацію на границі Γ .

В деяких випадках коефіцієнт D може бути змінним.

Приклади до розділу 5

Приклад 5.1. У тонкій непроникній нескінченній трубці розміщено два середовища. Перше на ділянці $x < \ell$ з коефіцієнтом дифузії D_1 , а друге на ділянці $x > \ell$ з коефіцієнтом дифузії D_2 . В момент $t = 0$ в трубку вводиться погонна одиниця дифундуючої речовини, тобто, така кількість речовини, яка за рівномірного розподілу за одиницею довжини дає концентрацію, що дорівнює одиниці.

Тоді, у першому середовищі фундаментальним розв'язком буде функція

$$\varphi_0(x; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_1 t}} e^{-\frac{x^2}{4D_1 t}} = c_1(x; t).$$

У другому середовищі для рівняння

$$\frac{\partial c_2(x; t)}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2(x; t)}{\partial x^2}$$

задано початкову умову

$$c_2(x; 0) = 0$$

та граничну умову

$$c_2(\ell; t) = c_1(\ell; t).$$

Гранична умова є умовою склеювання. Можна показати, що розв'язок знаходиться за формулою

$$c_2(x; t) = \frac{x - \ell}{2\sqrt{D_2 \pi}} \int_0^t \frac{c_1(\ell; \tau)}{(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x - \ell)^2}{4D_2(\ell - \tau)}} d\tau,$$

$$\text{де } c_1(\ell; t) = \frac{1}{2\sqrt{D_1 t}} e^{-\frac{\ell^2}{4D_1 t}}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } c_2(x; t) = \frac{x - \ell}{2\sqrt{D_2 \pi}} \int_0^t \frac{c_1(\ell; \tau)}{(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x - \ell)^2}{4D_2(\ell - \tau)}} d\tau,$$

$$\text{де } c_1(\ell; t) = \frac{1}{2\sqrt{D_1 t}} e^{-\frac{\ell^2}{4D_1 t}}.$$

6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

6.1 Рівняння Лапласа. Граничні умови

Стационарні фізичні процеси тієї чи іншої природи, а саме: гравітаційний та електростатичний потенціали у точках простору, потенціал швидкості безвихрового потоку нестисливої рідини, температура однорідного ізотропного середовища при стаціонарному руху тепла описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними – рівнянням Лапласа.

Якщо шукана функція $u = u(x; y; z)$ є функцією трьох змінних, то рівняння Лапласа має вигляд

$$\Delta u(x; y; z) = 0 \quad (6.1)$$

або

$$\frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial z^2} = 0. \quad (6.2)$$

Якщо шукана функція $u = u(x; y)$ є функцією двох змінних, то рівняння Лапласа має вигляд

$$\Delta u(x; y) = 0 \quad (6.3)$$

або

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0. \quad (6.4)$$

Якщо шукана функція $u = u(x)$ є функцією однієї змінної, то рівняння Лапласа має вигляд

$$\Delta u(x) = 0 \quad (6.5)$$

або

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.6)$$

Функції $u = u(x; y; z)$, $u = u(x; y)$ або $u = u(x)$, які задовольняють відповідно рівняння (6.2) або (6.4), або (6.6), називаються гармонічними функціями.

Рівняння Лапласа розглядається у сукупності з граничною умовою, яка характеризує певний фізичний процес.

Першою граничною задачею або задачею Діріхле називається така задача:

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ u|_{\delta} = f_1(p). \end{cases} \quad (6.7)$$

Другою граничною задачею або задачею Неймана називається така задача:

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\delta} = f_2(p). \end{cases} \quad (6.8)$$

Третьою граничною задачею називається така задача:

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ \left. \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu \right) \right|_{\delta} = f_3(p). \end{cases} \quad (6.9)$$

Тут δ – певна поверхня; $\bar{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні δ ; $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$ – задані функції змінної $p \in \delta$.

До рівнянь еліптичного типу належить також рівняння Пуассона

$$\Delta u(x; y; z) = g(x; y; z), \quad (6.10)$$

а також рівняння Гельмгольца

$$\Delta v(x; y; z) + k^2 v(x; y; z) = 0, \quad (6.11)$$

де $v(x; y; z) = u(x; y; z; t)e^{-i\omega t}$, а $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, коефіцієнт a визначається з відповідного хвильового рівняння

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

В залежності від обставин і рівняння Пуассона, і рівняння Гельмгольца розглядаються з тією чи іншою граничною умовою (6.7) – (6.9).

6.2 Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа

Рівняння Лапласа може бути подане, як у декартовій системі координат, так і у циліндричній або сферичній системі координат.

У просторовому випадку рівняння Лапласа у декартовій системі координат має форму (6.1)

$$\frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x; y; z)}{\partial z^2} = 0,$$

у циліндричній системі координат це рівняння має форму

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r; \varphi; z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r; \varphi; z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(r; \varphi; z)}{\partial z^2} = 0, \quad (6.12)$$

а у сферичній системі координат маємо таке рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u(r; \theta; \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial^2 u(r; \theta; \varphi)}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u(r; \theta; \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Серед розв'язків таких диференціальних рівнянь за певних обставин зустрічаються такі розв'язки, для яких є характерною циліндрична або

сферична симетрія, такі розв'язки залежать лише від однієї змінної, тобто $u = u(r)$.

Знаходяться ці розв'язки у просторовому випадку $u = u(x; y; z)$ зі сферичною симетрією вже зі звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0,$$

яке виходить із рівняння Лапласа у сферичній системі координат.

Внаслідок інтегрування маємо:

$$u(r) = \frac{c_1}{r} + c_2,$$

де $c_1; c_2 - \text{const}$. Якщо припустити, що $c_1 = -1; c_2 = 0$, то виходить:

$$u_0(r) = \ln \frac{1}{r}, \quad (6.14)$$

де $r \neq 0$.

Функція (6.14) називається *фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині*.

6.3 Методи розв'язування рівняння Лапласа

6.3.1 Тривимірна задача Діріхле та її розв'язування методом функції Гріна

Розглянемо дві двічі диференційовні функції $u = u(x; y; z)$ та $v = v(x; y; z)$, через які визначається вектор $\bar{a}$:

$$\bar{a} = u(x; y; z) \overline{\text{grad } v(x; y; z)} - v(x; y; z) \overline{\text{grad } u(x; y; z)}.$$

Нехай T – деяке просторове тіло, а S – замкнена поверхня, яка обмежує тіло T ; $\bar{n}_0$ – одиничний вектор нормалі до зовнішньої сторони поверхні S .

Будемо користуватись теоремою Остроградського-Гаусса:

$$\iiint_T \bar{a}(x; y; z) \cdot \bar{n}_0 ds = \iiint_T \text{div } \bar{a}(x; y; z) dv.$$

Спростуємо цю формулу

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{a}(x; y; z) &= \text{div} (u(x; y; z) \overline{\text{grad } v(x; y; z)} - v(x; y; z) \overline{\text{grad } u(x; y; z)}); \\ \text{div } u(x; y; z) \overline{\text{grad } v(x; y; z)} &= \text{div } u(x; y; z) \left(\frac{\partial v(x; y; z)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial z} \right) = \\ &= u(x; y; z) \left(\frac{\partial^2 v(x; y; z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x; y; z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(x; y; z)}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial x} \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial y} \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial y} + \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial z} \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial z} = \\ &= u(x; y; z) \Delta v + \overline{\text{grad } u(x; y; z)} \cdot \overline{\text{grad } v(x; y; z)}. \end{aligned}$$

Так само знаходимо

$$\operatorname{div}(v(x; y; z) \overline{\operatorname{grad} u(x; y; z)}) = v(x; y; z) \Delta u + \overline{\operatorname{grad} v(x; y; z)} \overline{\operatorname{grad} u(x; y; z)}.$$

Таким чином, виходить, що

$$\operatorname{div} \bar{a}(x; y; z) = u(x; y; z) \Delta v - v(x; y; z) \Delta u.$$

Формула Остроградського-Гаусса переходить у формулу Гріна

$$\begin{aligned} \oint_S \left(U(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial n} - V(x; y; z) \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n} \right) ds = \\ = \iiint_T (u(x; y; z) \Delta v(x; y; z) - v(x; y; z) \Delta u) dv. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Розглянемо тепер випадок, коли просторове тіло T обмежене замкненою поверхнею S_1 зсередини та замкненою поверхнею S – зовні, при цьому поверхня S_1 цілком знаходиться у середині поверхні S_0 , а тіло T – це внутрішня частина по відношенню до поверхні S та зовнішня частина по відношенню до поверхні S_1 . У такому разі формула Остроградського Гаусса має такий вигляд:

$$\oint_{S_1} \bar{a}(x; y; z) \cdot \overline{n_{01}} ds + \oint_S \bar{a}(x; y; z) \cdot \overline{n_0} ds = \iiint_T \operatorname{div} \bar{a}(x; y; z) dv,$$

де $\overline{n_{01}}$ – одиничний нормальний вектор до зовнішньої сторони поверхні S_1 , тобто, вектор спрямований усередину поверхні S_1 .

Формула Гріна набуває такої форми:

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \left(u(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial n_1} - v(x; y; z) \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n_1} \right) d\sigma + \\ + \oint_S \left(u(x; y; z) \frac{\partial v(x; y; z)}{\partial n} - v(x; y; z) \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n} \right) d\sigma = \\ = \iiint_T (u(x; y; z) \Delta v(x; y; z) - v(x; y; z) \Delta u) dm. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Саме ця формула лежить в основі методу функції Гріна для розв'язування просторової задачі Діріхле.

Нехай замкнена поверхня S обмежує просторове тіло T . Точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in E$. Поверхня S_1 – це ε -окіл точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Між поверхнями S та S_1 знаходиться тіло T . Точка $M(x; y; z) \in T$.

Відстань між точками M_0 та M позначимо через r_{M_0M} . Тоді

$$r_{M_0M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Функція

$$\omega = \frac{1}{r_{M_0M}}, \quad (6.17)$$

де $r_{M_0M} \neq 0$ є розв'язком рівняння Лапласа: $\Delta \omega = 0$ в усіх точках за винятком точки M_0 .

Розглянемо далі просторову задачу Діріхле з граничною умовою для просторової області T :

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0; \\ \omega_1|_S = \omega. \end{cases} \quad (6.18)$$

Функція ω є гармонічною функцією в області T , а функція ω_1 є гармонічною в області v , що обмежена поверхнею S .

Функцією Гріна для області v називається функція

$$G = G(x; y; z; x_0; y_0; z_0) = \omega_1 - \omega = \omega_1 - \frac{1}{r_{M_0M}}. \quad (6.19)$$

Функція Гріна задовольняє умову

$$G|_S = 0. \quad (6.20)$$

Розглянемо функцію $U = U(x; y; z)$, яка в області v є гармонічною функцією, а на поверхні S набуває значення U^* , тобто

$$u|_S = u^*.$$

Нехай $v = G$. Тоді за формулою Гріна виходить:

$$\oint\oint_{S_1} \left(u \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) ds + \oint\oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (6.21)$$

В цій формулі

$$\oint\oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \oint\oint_S u^* \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

у зв'язку з тим, що $u|_S = u^*$, а $G|_S = 0$.

Перший інтеграл переведемо у сферичну систему координат. Тоді на S_1

$$r_{M_0M} = r = \varepsilon; \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}; \quad d\sigma = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Отже, маємо:

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \oint\oint_S u^* \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Якщо припустити, що $\varepsilon \rightarrow 0$ та зробити граничний перехід, то матимемо такий результат:

$$u(x_0; y_0; z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\oint_S u^* \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (6.22)$$

Формула (6.2) є розв'язком задачі Діріхле в просторі, якщо задана функція Гріна G .

У такий самий спосіб можна показати, що функція

$$u(x_0; y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u^* \frac{\partial G}{\partial n} d\ell \quad (6.23)$$

є розв'язком задачі Діріхле на площині, якщо задана функція Гріна G .

6.3.2 Задача Діріхле для круга та її розв'язування методом Фур'є

Будемо розв'язувати задачу Діріхле для круга методом Фур'є. Нехай маємо деякий круг радіуса R з центром на початку координат. Доцільно розглядати задачу Діріхле у полярних координатах. Отже, необхідно знайти функцію $u = u(r; \varphi)$, яка задовольняє рівняння Лапласа і граничну умову:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0; \\ u|_{r=R} = u^*(\varphi). \end{cases} \quad (6.24)$$

Згідно з методом Фур'є припустимо, що функція $u = u(r; \varphi)$ може бути надана у вигляді добутку двох функцій:

$$u(r; \varphi) = u(r)\Phi(\varphi),$$

де функції $u(r)$ та $\Phi(\varphi)$ є функціями однієї змінної.

Тоді маємо:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Phi = -\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} u$$

або

$$\frac{r}{u} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (6.25)$$

Ліва та права частини рівності (6.25) мають бути сталими, оскільки ліва частина залежить лише від r , а права – лише від φ . Тоді, якщо $\lambda = \text{const}$, то

$$\begin{cases} \frac{r}{U} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \lambda; \\ \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\lambda. \end{cases} \quad (6.26)$$

Розглянемо друге рівняння (6.26)

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\lambda.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(\varphi) = a \cos \sqrt{\lambda} \varphi + b \sin \sqrt{\lambda} \varphi, \quad (6.27)$$

де $a; b = \text{const}$.

Враховуючи, що в полярній системі координат $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, доходимо висновку, що $\sqrt{\lambda}$ має бути цілим числом, тобто $\sqrt{\lambda} = n$, $\lambda = n^2$, де $n = 0; 1; 2; 3; \dots$.

Значення $\lambda = n^2$ є власними числами, а функцію $\Phi(\varphi)$ можна записати у вигляді

$$\Phi(\varphi) = a \cos n\varphi + b \sin n\varphi. \quad (6.28)$$

Далі розглянемо перше з рівнянь (6.26)

$$\frac{r}{u} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = n^2,$$

звідки

$$r^2 \frac{du}{dr^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} - n^2 u = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$U(r) = r^n \text{ та } U(r) = r^{-n}.$$

Другий розв'язок нас не влаштовує, оскільки точка $r = 0$ входить до круга.

Перший розв'язок залежить від n . Тому ми дістанемо нескінчену множину частинних розв'язків

$$u_n(r; \varphi) = r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

У такому разі згідно з властивостями частинних розв'язків однорідного диференціального рівняння розв'язком буде і функція

$$u(r; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (6.29)$$

Подамо функцію $u(r; \varphi)$ у вигляді

$$u(r; \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \cdot r^n. \quad (6.30)$$

Тут коефіцієнт a_0 був наданий у вигляді $\frac{a_0}{2}$. Для визначення коефіцієнтів a_n та b_n скористаємось граничною умовою: $u \Big|_{r=R} = u^*(\varphi)$.

Маємо:

$$u^* \Big|_{r=R} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi).$$

Тоді очевидно, що

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u^*(\tau) \cos n\tau d\tau; \\ b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u^*(\tau) \sin n\tau d\tau. \end{cases} \quad (6.31)$$

Для того, щоб знайти розв'язок задачі Діріхле для круга, залишається лише підставити формули для коефіцієнтів у (6.30).

Приклади до розділу 3

Приклад 6.1. (Задача Неймана).

Знайти функцію $u(x; y; z)$, яка задовольняє рівняння Лапласа в області V ,

обмеженій поверхнею S та задану граничну умову:
$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ \left. \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n} \right|_S = u_1^*, \end{cases} \text{ де}$$

$\frac{\partial u(x; y; z)}{\partial \bar{n}}$ – похідна за напрямком нормалі до зовнішньої сторони поверхні S , а

функція u_1^* є визначеною на поверхні S .

Розв'язання

У формулі Гріна (6.15) покладемо, що $V(x; y; z) = 1$, тоді $\frac{\partial u(x; y; z)}{\partial \bar{n}} = 0$ та $\Delta V = 0$, а формула Гріна набуває вигляду

$$\oint_S \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n} ds = \iiint_V \Delta u dv.$$

Тоді будь-яка функція $u(x; y; z)$, що є гармонічною в області v , задовольняє рівність

$$\oint_S \frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n} ds = 0,$$

а граничне значення похідної $\frac{\partial u(x; y; z)}{\partial n}$ на границі S задовольняє умову

$$\oint_S u_1^*(x; y; z) ds = 0.$$

За таких обставин задача Неймана має розв'язок $U(x; y; z)$, а також безліч розв'язків $u(x; y; z) + c$, де $c = \text{const}$.

Така задача відіграє важливу роль в теорії хвильових процесів, зокрема, в теорії електромагнетизму.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Чи може бути розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними функція $cu(x; y)$, якщо функція $u(x; y)$ розв'язок цього рівняння, а $c = \text{const}$?

2. Чи може бути розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними функція $c_1u_1(x; y) + c_2u_2(x; y) + \dots + c_nu_n(x; y)$, якщо функції $u_1(x; y), u_2(x; y), \dots, u_n(x; y)$ є розв'язками цього рівняння, а $c_1, c_2, \dots, c_n$ – будь-які сталі?

3. Чи може бути розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними функція $u(x; y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_nu_n(x; y)$, якщо функції $u_n(x; y)$ є розв'язками цього рівняння, а c_n – будь-які сталі, де $n = 1; 2; 3; \dots$.

4. Що можна сказати про функцію $u(x; y) + v(x; y)$, якщо функція $u(x; y)$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними, а функція $v(x; y)$ є розв'язком відповідного лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними?

5. Що можна сказати про функцію $u(x; y) = u_1(x; y) + u_2(x; y)$, якщо функція $u_1(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними $L(u) = f_1(x)$, а функція $u_2(x; y)$ є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними $L(u) = f_2(x)$?

6. За яких умов лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними належить до гіперболічного типу?

7. За яких умов лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними належить до параболічного типу?

8. За яких умов лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними належить до еліптичного типу?

9. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболічного типу?

10. Який вигляд має канонічне рівняння параболічного типу?

11. Який вигляд має канонічне рівняння еліптичного типу?

12. Який вигляд має тривимірне хвильове рівняння?

13. Який вигляд має двовимірне хвильове рівняння?

14. Сформулюйте задачу Коші для хвильового рівняння.

15. Що таке фазова площина і яку інформацію можна отримати за допомогою фазової площини?

16. У чому полягає метод Даламбера для розв'язування хвильового рівняння?

17. У чому полягає метод Фур'є для розв'язування хвильового рівняння?

18. Яка задача називається задачею Штурма-Ліувілля?

19. Який вигляд має диференціальне рівняння з частинними похідними, що описує вільні електричні коливання у скінченному проводі?

20. Який вигляд має телеграфне рівняння для струму?

21. Який вигляд має телеграфне рівняння для напруги?

22. Який вигляд має рівняння теплопровідності для однорідного стрижня без стоків та джерел?

23. Який вигляд має рівняння теплопровідності для однорідного стрижня, в якому є стоки та джерела?

24. Який вигляд має рівняння Лапласа?

25. Яка функція називається функцією Гріна?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Диференціальне рівняння з частинними похідними має вигляд

$$\left(\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} - 2u(x; y) \right) \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} - 2u(x; y) \right)^2 - xy^2 = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) задане диференціальне рівняння є рівнянням другого порядку;
- 2) задане диференціальне рівняння є рівнянням третього порядку;
- 3) задане диференціальне рівняння є рівнянням четвертого порядку;
- 4) інша відповідь?

2. Задано диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = (x + 1)e^{\frac{x}{y}};$$

- 2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = (y - 1)e^{\frac{y}{x}};$$

- 3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = ye^{\frac{x}{y}};$$

- 4) інша відповідь?

3. Задано диференціальне рівняння

$$x \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}};$$

- 2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \frac{x}{y}$;

- 3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xy;$$

- 4) інша відповідь?

4. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \cos(x + ay)$;

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \sin(x + ay)$;

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \sin(y + ax)$;

4) інша відповідь?

5. Задано диференціальне рівняння

$$y^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + xy \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = u(x; y).$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \frac{y}{(x^2 - y^2)^4}$;

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$;

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція $u(x; y) = \frac{y^2}{(x^2 - y^2)^5}$;

4) інша відповідь?

6. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \cdot \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ де } \xi = x + y + \cos x; \eta = x - y - \cos x;$$

2) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ де } \xi = x + y - \cos x; \eta = x - y + \cos x;$$

3) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ де } \xi = x + y + \sin x; \eta = x - y - \sin x;$$

4) інша відповідь?

7. Задано диференціальне рівняння

$$y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0, \text{ де } x > 0; y > 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u(\xi; \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u(\xi; \eta)}{\partial \eta} = 0$, де $\xi = y^2$; $\eta = x^2$;

2) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u(\xi; \eta)}{\partial \xi} = 0$, де $\xi = y^2$; $\eta = x^2$;

3) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u(\xi; \eta)}{\partial \xi} = 0$, де $\xi = y^2$; $\eta = x^2$;

4) інша відповідь?

8. Задано диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0, \text{ де } x > 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} = 0$, де $\xi = \frac{x}{y}$; $\eta = y$;

2) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} = 0$, де $\xi = \frac{y}{x}$; $\eta = y$;

3) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \eta^2} = 0$, де $\xi = \frac{y}{x}$; $\eta = y$;

4) інша відповідь?

9. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2}$, де $v = (h - x)u(x; t)$;

2) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2}$, де $v = xu(x; t)$;

3) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд $\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2}$, де $v = (h - x)u(x; t)$;

4) інша відповідь?

10. Задано диференціальне рівняння

$$b^4 \sin^4(2x + c) \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} + 4b^4 \sin^4(2x + c) u(x; t) = \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ де } \xi = t - \frac{1}{2b^2} \operatorname{ctg}(2x + c); \eta = t + \frac{1}{2b^2} \operatorname{ctg}(2x + c).$$

2) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ де } \xi = t - \operatorname{tg} x; \eta = t + \operatorname{tg} x.$$

3) канонічна форма заданого диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\xi; \eta)}{\partial \xi^2} = 0, \text{ де } \xi = x + bt; \eta = x - bt.$$

4) інша відповідь?

11. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $-\infty < y < 0$;

2) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $y = 0$;

3) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $0 \leq y < 10$;

4) інша відповідь?

12. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $-\infty < y < 0$;

2) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $y = 0$;

3) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $5 \leq y < 10$;

4) інша відповідь?

13. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $-\infty < y < 0$;
- 2) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $5 \leq y \leq 10$;
- 3) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $0 < y < +\infty$;
- 4) інша відповідь?

14. Задано диференціальне рівняння

$$y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $x = 0$; $y \neq 0$;
- 2) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $x = 0$; $y = 0$;
- 3) задане рівняння є диференціальним рівнянням еліптичного типу, якщо $x \neq 0$; $y \neq 0$;
- 4) інша відповідь?

15. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} \sin^2 x - 2y \sin x \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $x \neq 0$; $y \neq 0$;
- 2) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $x = 0$; $y = 0$;
- 3) задане рівняння є диференціальним рівнянням параболічного типу, якщо $x = 0$; $y \neq 0$;
- 4) інша відповідь?

16. Задано диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

- 1) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $x \neq 0$; $y \neq 0$;
- 2) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $x = 0$; $y = 0$;
- 3) задане рівняння є диференціальним рівнянням гіперболічного типу, якщо $x = 0$; $y \neq 0$;
- 4) інша відповідь?

17. Задано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^4 u(x; y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $u(x; y) = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + x\varphi_3(x) + \varphi_4(x)$;

2) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $u(x; y) = x(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) + x\varphi_3(x) + \varphi_4(x)$;

3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $u(x; y) = x\varphi_1(y) + y\varphi_2(x)$;

4) інша відповідь?

18. Задано диференціальне рівняння

$$y \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = f(x^3 + y^3);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = f(x^2 + y^2);$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = f\left(\frac{x}{y}\right);$$

4) інша відповідь?

19. Задано диференціальне рівняння

$$x \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + z \frac{\partial u(x; y)}{\partial z} = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xy + f(x^2 - y^2);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xy + f(x^2 + y^2);$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \frac{x}{y} + f(x^2 - y^2);$$

4) інша відповідь?

20. Задано диференціальне рівняння

$$y \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + x \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xy + f(x^2 + y^2);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xy + f(x^2 - y^2);$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \frac{x}{y} + f\left(\frac{y}{x}\right);$$

4) інша відповідь?

21. Задано диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial z} = u(x; y).$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y; z) = e^{-x^{-1}} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y; z) = e^{-\frac{1}{x}} f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right);$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y; z) = e^{-\frac{1}{x}} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$$

4) інша відповідь?

22. Задано диференціальне рівняння

$$xy \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = x^2.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \frac{1}{3} \frac{x^2}{y} + \frac{1}{xy} f(xy);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \frac{3y}{x^2} + \frac{1}{xy} f(xy)$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = x^2 + f(xy).$$

4) інша відповідь?

23. Задано диференціальне рівняння з початковими умовами

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2}; \\ u(x; 0) = 0; \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = x. \end{cases}$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xt;$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = \frac{x}{t};$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = x + t$$

4) інша відповідь?

24. Задано задачу Коші

$$\begin{cases} xy \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = y; \\ u(x; 0) = x^2. \end{cases}$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданої задачі Коші є функція

$$u(x; y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2} \right);$$

2) розв'язком заданої задачі Коші є функція

$$u(x; y) = x^2 - y^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2} \right);$$

3) розв'язком заданої задачі Коші є функція

$$u(x; y) = x^2 - y^2 - \ln \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}};$$

4) інша відповідь?

25. Задано диференціальне рівняння

$$xy \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + (x - 2u(x; y)) \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = yu(x; y)$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xf(x + y - 4);$$

2) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xf(2x - y^2 + 4);$$

3) розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$u(x; y) = xf(2x - y^2 - 4u(x; y));$$

4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

№ 1. Однорідна струна з закріпленими кінцями $x=0$ та $x=\ell$ вступає в коливальний процес без початкової швидкості.

Початкова умова має вигляд $U(x;0) = \frac{16}{5}m \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right)$, де $m > 0$.

Знайти вільні коливання струни.

№ 2. Однорідна струна з закріпленими кінцями $x=0$ та $x=\ell$ в початковий момент має форму параболи, симетричної відносно серединного перпендикуляра до відрізка $[0;\ell]$. Початкові швидкості відсутні. Визначити зміщення точок струни від прямолінійного положення рівноваги.

№ 3. В однорідному тілі v відбувається вільний теплообмін. Тіло v є ізольованим від зовнішнього середовища. Якими мають бути граничні умови для температури $u(x; y; z; t)$ точок цього тіла?

№ 4. У тонкому проводі омичний опір дорівнює R , ємність дорівнює C , провідність ізоляції дорівнює g , а самоіндукція дорівнює L . Скласти диференціальне рівняння для сили струму.

№ 5. У тонкому проводі омичний опір дорівнює нулю, ємність дорівнює C , провідність ізоляції дорівнює нулю, а самоіндукція дорівнює L . Скласти диференціальне рівняння для сили струму.

№ 6. Тонкий провід має довжину ℓ . У точці $x=0$ провід є заземленим, а у точці $x=\ell$ прикладена е.р.с. $\varepsilon(t)$. Знайти функцію $i(t)$, якщо

$$i(0) = \varphi_0(x),$$

а напруга $u(0) = \varphi_1(x)$.

При цьому омичний опір та провідність ізоляції дорівнює C , а самоіндукція дорівнює L .

№ 7. Тонкий провід має довжину ℓ . У точці $x=0$ провід є заізольованим, а у точці $x=\ell$ прикладена е.р.с. $\varepsilon(t)$. Омичний опір та провідність ізоляції дорівнюють нулю. Сформулювати відповідні граничні умови та знайти силу струму $i(x;t)$.

№ 8. Струна має довжину ℓ та є закріпленою на кінцях. В початковий момент струна має форму кривої $u = \frac{1}{8\ell}(\ell - x)x$. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон коливання струни.

№ 9. Знайти закон коливання струни довжиною ℓ з закріпленими кінцями, якщо в початковий момент усі точки струни мають швидкість $\frac{1}{25}a$, де a – коефіцієнт у рівнянні коливань струни. Початкове відхилення відсутнє.

№ 10. Струна має довжину ℓ . Лівий кінець струни закріплений у точці $x=0$, а правий – знаходиться у точці $x=\ell$ та може вільно переміщуватись. В

початковий момент струна має форму кривої $u = \frac{1}{20} \sin \frac{\pi k}{2\ell}$. Початкова швидкість відсутня. Знайти закон невимушених коливань струни.

№ 11. Знайти закон розподілу температури стрижня довжиною ℓ . Кінці стрижня знаходяться в точках $x = 0$ та $x = \ell$. В початковий момент температура стрижня визначається функцією

$$u(x;0) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} x u_0, & \text{якщо } 0 < x < \frac{1}{2} \ell; \\ \frac{1}{\ell} (\ell - x) u_0, & \text{якщо } \frac{1}{2} \ell < x < \ell. \end{cases}$$

Теплообмін стрижня є вільним. На кінцях стрижня підтримується нульова температура.

№ 12. Провід має довжину ℓ . Його лівий кінець знаходиться у точці $x = 0$ і є заізолюваний, а правий кінець проводу знаходиться у точці $x = \ell$ та є заземленим. Провід має хорошу ізоляцію, отже, витік відсутній, тобто $g = 0$.

Омічний опір є дуже малим і ним можна знехтувати. Початковий струм при $t = 0$ дорівнює нулю, а початкова напруга задається формулою

$$u(x;0) = \varepsilon_0 \sin \frac{(2m+1)\pi}{2\ell} x.$$

Знайти силу струму $i(t)$.

№ 13. Провід має довжину ℓ , а його кінці заізолювані. У проводі $g = 0$ та $R = 0$. Початковий струм дорівнює нулю, а початкова напруга задається формулою

$$u(x;0) = \varepsilon_0 \sin \frac{(2m+1)\pi}{2\ell} \pi x.$$

Знайти силу струму $i(t)$.

№ 14. Провід має довжину ℓ . Лівий кінець проводу знаходиться у точці $x = 0$ і є заземленим, а правий кінець проводу знаходиться у точці ℓ і є заізолюваним.

В початковий момент напруга в усіх точках проводу дорівнює ε_0 . Струм у початковий момент дорівнює нулю.

Омічний опір дорівнює R , самоіндукція дорівнює L . Витік за одиницю дорівнює g , ємність дорівнює C .

Провід являє собою лінію без спотворень, тобто має місце відношення

$$\frac{R}{L} = \frac{g}{C}.$$

Знайти напругу $U(x;t)$.

№ 15. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

та знайти його загальний розв'язок.

№ 16. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

та знайти його загальний розв'язок.

№ 17. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

та знайти його загальний розв'язок, коли $y > 0$.

№ 18. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

та знайти його загальний розв'язок.

№ 19. У нескінченному проводі омичний опір дорівнює R , витік дорівнює g , самоіндукція дорівнює L , а ємність дорівнює C і при цьому має місце залежність $RC = Lg$. Знайти закон розподілу сили струму, якщо в початковий момент $t = 0$ сила струму дорівнює $\varphi_0(x)$, а напруга $\varphi_1(x)$, тобто

$$i(x;0) = \varphi_0(x);$$

$$u(x;0) = \varphi_1(x).$$

№ 20. У напівскінченному проводі омичний опір дорівнює R , витік дорівнює g , самоіндукція дорівнює L , а ємність – C , при цьому має місце відношення $RC = Lg$.

Лівий кінець провода знаходиться у точці $x = 0$ і є заізолюваним. Знайти закон розподілу сили струму в проводі, якщо в початковий момент

$$\begin{cases} i(x;0) = \varphi_0(x); \\ u(x;0) = \varphi_1(x), \end{cases}$$

де $0 < x < +\infty$.

№ 21. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4a^2}{\ell^2} u,$$

який задовольняє початковій умові

$$\begin{cases} u(x;0) = \varphi_0(x); \\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = \varphi_1(x). \end{cases}$$

№ 22. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} u(0;t) = 1; \\ u(2;t) = 2. \end{cases}$$

№ 23. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \operatorname{sh} x,$$

з початковою умовою

$$u(x;0) = 0$$

та граничними умовами

$$\begin{cases} u(0;t) = 0; \\ u(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

№ 24. Розв'язати мішану задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x - \ell);$$

$$u(x;0) = 0;$$

$$\begin{cases} u(0;t) = 0; \\ u(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

№ 25. Розв'язати мішану задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial u}{\partial t} - b^2 u = 0;$$

$$u(x;0) = 0;$$

$$\begin{cases} u(0;t) = m; \\ u(\ell;t) = 0. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. І.В. Стрелковська, А.Г. Буслаєв, В.М. Паскаленко. Вища математика в телекомунікаціях: Підручник. – Одеса: "ВМВ", 2008. – 620 стор.

2. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. II. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Підручник для студентів вузів / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса: ВМВ, 2010. – 594 стор., іл.

3. Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. III: Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл. Інтеграл по області : Підручник [для студентів вузів]; за заг. ред. проф. П. П. Воробієнка. – Одеса: ВМВ, 2012. – 496 с., іл. 239.

4. Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. IV: Інтеграл по орієнтованій області. Векторний аналіз. Ряди. Диференціальні рівняння. Підручник [для студентів вузів] за загальною редакцією проф. П.П. Воробієнка. – Одеса: ВМВ, 2015. – 668 с., іл. 178.

5. Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. V: Елементи теорії функцій комплексної змінної. Теорія ймовірностей та випадкові процеси. Підручник [для студентів вузів] за загальною редакцією проф. П.П. Воробієнка. – Одеса: ВМВ, 2018. – 508 с.

Навчальне видання

Стрелковська Ірина Вікторівна

Паскаленко Вікторія Миколаївна

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

для фахівців в галузі зв'язку

Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти

Українською мовою