

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ЮРИДИЧНА АКАДЕМІЯ»
КАФЕДРА КІБЕРБЕЗПЕКИ

Чепурна О.Є.
Черевко Є.В.
Баландіна Н.М.
Овчинников М.Ю.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЧАСТИНА 2
для підготовки бакалаврів
у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право»

ОДЕСА 2025

УДК 51:005.8:075.8

Ч 49

Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична
академія» (протокол № 6 від 29 квітня 2025 року)

Автори:

Чепурна Олена Євгенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-1432-0799

Черевко Євген Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-9574-1316

Баландіна Наталя Миколаївна – старший викладач кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0000-0002-3121-4517

Овчинников Микола Юрійович – асистент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія», ORCID: 0009-0009-8221-7193

Рецензенти:

Логінова Наталія Іванівна – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія»,

Гострик Олексій Маркович – кандидат економічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедрою економічної кібернетики та інформаційних технологій Одеського національного економічного університету

Чепурна О. Є., Черевко Є. В., Баландіна Н. М., Овчинников М. Ю.

Вища математика : методичні вказівки. Ч. 2 : для підготовки бакалаврів у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право» / О. Є. Чепурна, Є. В. Черевко, Н. М. Баландіна, М. Ю. Овчинников. – Одеса : Нац. ун-т «Одеська юридична академія», 2025. – 110 с.-Режим доступу: <https://hdl.handle.net/11300/30872>

Методичні вказівки з дисципліни «Вища математика» частина 2 спрямовані на розвиток фундаментальних компетенцій з математичних методах дослідження економічних явищ і процесів, їх застосування в реальних умовах, а також на розвиток навичок використання математики для підвищення ефективності управління. Практична частина методичних вказівок та приклади з економічною складовою дозволяє здобувачам не лише освоїти теоретичні основи вищої математики, але й отримати досвід застосування математичного апарату та практичний досвід у використанні аналітичних методів і технологій, які сприятимуть їхньому професійному зростанню та успішній реалізації в майбутній професійній діяльності.

УДК 51:005.8:075.8

Ч 49

© О.Є. Чепурна, Є.В. Черевко, Н.М. Баландіна, М.Ю. Овчинников

© Національний університет «Одеська юридична академія»

Зміст

ВСТУП	4
1. Функції декількох змінних	5
1.1. Функції багатьох змінних. Означення	5
1.2. Область визначення	5
1.3. Границя. Неперервність функції	7
1.4. Частинний похідні	7
1.5. Повний диференціал функції	11
1.6. Диференціювання складних функцій.	11
1.7. Диференціювання неявно заданих функцій	13
1.8. Частинні похідні вищих порядків	14
1.9. Елементи теорії поля похідна за напрямом. Градієнт	16
1.10. Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі.	17
1.11. Екстремум функції двох змінних	20
1.12. Найбільше та найменше значення функції двох змінних	21
2. Невизначений інтеграл.	24
2.1. Первісна і невизначений інтеграл.	24
2.2. Основні методи інтегрування	26
2.3. Інтегрування раціональних функцій	30
2.4. Інтегрування тригонометричних функцій	36
2.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій	40
2.6. Метод невизначених коефіцієнтів.	45
3. Визначний інтеграл	48
3.1. Поняття визначного інтеграла	48
3.2. Обчислення визначного інтеграла	52
3.3. Застосування визначного інтеграла	56
3.3.1. Обчислення площ плоских фігур	57
3.3.2. Визначення довжини дуги плоскої кривої	63
3.3.3. Обчислення об'єму тіла	67
3.3.4. Механічні застосування визначного інтеграла	69
4. Диференційні рівняння	77
4.1. Основні поняття і означення	77
4.2. Диференційні рівняння першого порядку	79
4.3. Диференційні рівняння другого порядку	89
Рекомендована література та інтернет ресурси	108

ВСТУП

Вивчення курсу «Вища математика» є невід'ємною складовою підготовки бакалаврів у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право». Друга частина методичних вказівок орієнтована на засвоєння студентами теоретичних і практичних положень математичного аналізу та елементів прикладної математики, необхідних для формування системного мислення та вміння обґрунтовувати прийняття управлінських рішень на основі кількісних методів.

Основна увага приділяється розгляду функцій багатьох змінних, методів диференціювання та інтегрування, а також розв'язанню диференціальних рівнянь, що моделюють широке коло економічних, фінансових та управлінських процесів. Подання матеріалу супроводжується прикладами, які мають прикладний характер і спрямовані на поглиблення розуміння студентами можливостей застосування математичного апарату у професійній діяльності.

Запропоновані методичні вказівки сприяють розвитку вміння аналізувати умови задач, обирати оптимальні методи їх розв'язання, перевіряти правильність отриманих результатів та інтерпретувати їх у контексті економіки й управління. Структура посібника відповідає логіці викладу курсу та забезпечує можливість послідовного опрацювання матеріалу як у процесі аудиторних занять, так і під час самостійної роботи.

Методичні рекомендації та приклади розрахунків орієнтовані на підвищення рівня математичної культури студентів, формування навичок використання сучасних інформаційних технологій для обробки й аналізу даних, що є важливими складовими підготовки фахівців у сфері бізнесу, адміністрування та права.

1. Функції багатьох змінних

1.2. Функції багатьох змінних. Означення

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідно число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y , і записують її $z = f(x, y)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y - незалежними змінними (аргументами).

Наведемо такі приклади:

а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень a та b відповідає єдине значення площі, тобто S - функція двох змінних: $S = f(a, b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E , сила струму I та опір R замкнутого електричного поля пов'язанні співвідношенням $E = IR$. Тут E є функцією змінних I та R : $E = f(I, R)$.

Змінна величина u називається функцією n незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо кожній сукупності значень $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ цих змінних з даної області їх зміни відповідає єдине значення величини u - $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1.3. Область визначення

Множину пар (x, y) значень x та y , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$ або D .

Множину значень z позначають $E(f)$ або E .

Областю визначення функції $z = f(x, y)$ є деяка множина точок (x, y) площини OXY . Графіком функції двох змінних є поверхня.

Лінію, що обмежує область D , називають межею області визначення.

Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми.

Область, яка містить тільки внутрішні точки, називають відкритою.

Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.

Для функцій трьох змінних $u = F(x, y, z)$ область визначення належить тривимірному простору і геометрично є деякою сукупністю точок простору.

Ми розглянули поняття області визначення функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок більшої кількості незалежних змінних.

Нехай задано множину $D \in R_n$, де R_n – n – вимірний простір. Якщо кожній точці $x \in D$ за певним законом відповідає одне і тільки одне дійсне число y , то кажуть, що на множині D визначено функцію від n змінних і записують $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $y = f(x)$ де $x \in R_n$.

Множину D при цьому називають областю визначення або областю існування функції.

Приклад 1. Знайти область визначення та побудувати її, якщо

$$z = \sqrt{y^2 - 4x}$$

Розв'язання. Областю визначення є сукупність точок (x, y) площини OXY (рис. 1.1.), включаючи і точки самої кривої.

Приклад 2. Знайти область визначення функції та побудувати її, якщо $z = \arcsin(x + y)$.

Розв'язання. Область визначення є сукупність точок $(x, y) \in R_2$, що задовольняють нерівностям $-1 \leq x + y \leq 1$. На площині XOY ця область представляє смугу, яка обмежена паралельними прямими $x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ (рис.2), включаючи точки самих прямих.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $u(x, y, z)$ та побудувати її, якщо $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$

Розв'язання. Заданий аналітичний вираз існує в усіх точках $(x, y, z) \in R_3$, в яких $-x^2 - y^2 + 2z > 0$, $x^2 + y^2 < 2z$. Цю нерівність задовольняють точки (x, y, z) , що містяться в середині

параболіда обертання $x^2 + y^2 = 2z$ (рис.3), не включаючи його поверхню.

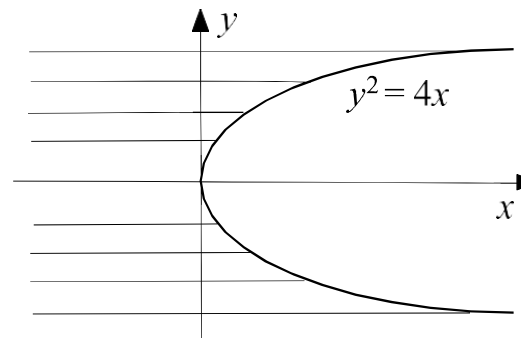


Рис. 1

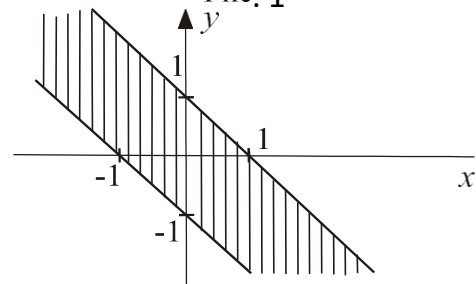


Рис. 2

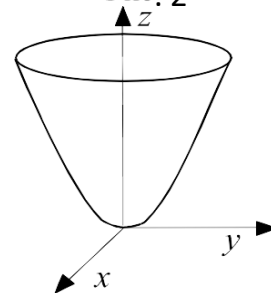


Рис. 3

1.3. Границя. Неперервність функції

Означення. Число A називається границею функції двох змінних $z = f(x, y)$ при прямуванні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа ε_0 знайдеться δ -окіл точки M_0 , що для будь-якої точки $M(x, y)$ із цього околу (за винятком, можливо, самої точки M_0) виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Границю функції $z = f(x, y)$ записують у вигляді.

$$A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \text{ або } A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

Якщо границя функції існує, то вона не залежить від способу прямування $M \rightarrow M_0$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{\sin(xy)}{x}$.

Розв'язання. Функція має невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 5$, тому використовуємо першу чудову границю $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} y \frac{\sin(xy)}{xy} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Означення. Нехай точка M_0 та деякий її окіл належать області визначення функції $f(M)$ називається неперервною в точці M_0 , якщо має місце рівність $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$, при цьому точка M наближається до точки M_0 довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Означення. Функція $f(M)$, неперервна в кожній точці деякої області, називається неперервною в цій області.

1.4. Частинний похідні

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, визначену в деякому околі точки (x, y) . Зафіксуємо змінну y . Дістанемо функцію $z = f(x, y)$ однієї змінної

x . Якщо ця функція має похідну (по змінній x), то останню називають частинною похідною функції $f(x, y)$ по змінній x і позначають $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ або $f'_x(x, y)$.

Таким чином, якщо скористатися означенням похідної однієї змінної, то дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Величину $\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називають частинним приростом функції $f(x, y)$ по змінній x в точці (x, y) .

Аналогічно вводять поняття частинної похідної по змінній y в точці (x, y) , яку позначають $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ або $f'_y(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y}. \quad (1.2)$$

Величину $\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називають частинним приростом функції $f(x, y)$ по змінній y в точці (x, y) .

Для довільної точки (x, y) частинні похідні позначатимемо $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, або z'_x, z'_y . Необхідно мати на увазі, що $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|$ та $\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|$ визначають величину швидкості, з якою відбувається зміна функції $z = f(x, y)$ при зміні тільки x або y , а знак z'_x та z'_y вказує на характер цієї зміни (зростання чи спадання).

Частинні похідні обчислюються за відомими правилами диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 4. Знайти частинні похідні:

а) $z = x^4 + 2xy - y^3 + 5$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки однієї змінної $x (y = \text{const})$ знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y^2$

б) $z = 2x^3y^2 + 2z$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки однієї змінної $x (y = \text{const})$ знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 + 2$. Аналогічно вважаючи z функцією тільки однієї змінної $y (x = \text{const})$ знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y$.

в) $z = 5^{\sqrt{x}-2y}$.

Розв'язання. Застосуємо табличну похідну від показникової функції і вважаючи z функцією тільки змінної $x(y = \text{const})$, потім тільки однієї змінної $y (x = \text{const})$, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5^{\sqrt{x}-2y} \cdot \ln 5 \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = 5^{\sqrt{x}-2y} \cdot \ln 5 \cdot (-2)$$

г) $u = x^2 z + \operatorname{arctg} xy$.

Розв'язання. В даному випадку маємо функцію трьох $u = f(x, y, z)$. Вважаючи u спочатку функцією тільки змінної $x(y, z = \text{const})$, потім функцією тільки змінної $y(x, z = \text{const})$, і наприкінці $z(x, y = \text{const})$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + \frac{1}{1 + (xy)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot x, \frac{\partial u}{\partial z} = x^2.$$

д) $z = \sin 2y + \sqrt{y} \cdot e^x$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної $x(y = \text{const})$, потім тільки однієї змінної $y (x = \text{const})$, отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} \cdot e^x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos 2y \frac{e^x}{2\sqrt{y}}$.

е) $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи правило диференціювання добутку функцій однієї змінної і вважаючи z функцією тільки змінної $x(y = \text{const})$, знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$. Потім, вважаючи z функцією тільки однієї змінної $y (x = \text{const})$, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}.$$

Приклад 5. Знайти вказану частину похідну від функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$

а) $z = 2x^4 y^3 - \frac{y}{2}$. Знайти $\frac{dz(M)}{dy}, M(1; 1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної $y (x = \text{const})$, знаходимо $\frac{dz}{dy} 6x^4 y^2 - \frac{1}{2}$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M :

$$\frac{dz(M)}{dy} = \left(6x^4y^2 - \frac{1}{2}\right)_M = 5,5$$

б) $z = \ln(x + 2y^2)$. Знайти $\frac{dz(M)}{dy}$, $M(0; 1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної x ($y = \text{const}$), знаходимо

$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{x+2y^2}$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M :

$$\frac{dz(M)}{dy} = \left(\frac{1}{x + 2y^2}\right)_M = \frac{1}{2}$$

в) $z = 2xy^5 + x^2 - y$. Знайти $\frac{dz(M)}{dy}$, $M(0; 1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної y ($x = \text{const}$), знаходимо

$\frac{dz}{dy} = 10xy^4 - 1$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M :

$$\frac{dz(M)}{dy} = (2e^{2x} \cdot \sin 3y)_M = 2.$$

1.5. Повний диференціал функції

Повним приростом функції $z = f(x, y)$, диференційованої в точці (x, y) , будемо називати різницю

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається частина повного приросту Δz , лінійна відносно приростів аргументів $\Delta x, \Delta y$, що обчислюється у вигляді $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Диференціали незалежних змінних $\Delta x, \Delta y$ співпадають з їх приростом, тобто

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

тому

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Аналогічно обчислюється диференціал для функції трьох змінних $u = u(x, y, z)$.

Отже, $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$.

Повний диференціал застосовують у наближених обчисленнях у вигляді $\Delta z \approx dz$ або $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y$.

Рівність буде тим точніша, чим менше будуть $|\Delta x|, |\Delta y|$.

Приклад 6. Знайти повні диференціали функцій:

а) $z = x^3 y^2$.

Розв'язання. Частинні похідні $\frac{dz}{dx} = 3x^2 y^2$, $\frac{dz}{dy} = 2x^3 y$ підставляємо до формули повного диференціалу функції двох змінних

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

б) $z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Аналогічно прикладу а).

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}};$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}};$$

$$dz = \frac{-y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}} dx + \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}} dy.$$

в) $z = yx^y$

Розв'язання.

$$\frac{dz}{dx} = y^2 x^{y-1}; \quad \frac{dz}{dy} = yx^y \ln x; \quad dz = y^2 x^{y-1} dx + yx^y \ln x dy.$$

1.6. Диференціювання складних функцій.

1. Нехай функція $z = f(x, y)$ – диференційована функція аргументів x та y , які у свою чергу є диференційованими функціями незалежної змінної t . Тоді складена функція $z = f[x(t), y(t)]$ також диференційована і визначається за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

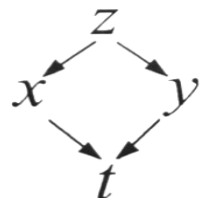


Схема до
розв'язання

Приклад 7. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \cos^2 x - \sin y, x = t^2 + t - 1, y = t^3 - 2t.$$

Розв'язання. Оскільки проміжні зміни змінні x і y є диференційованими функціями аргументу t , то функція z фактично є функцією однієї змінної $z = f[x(t), y(t)]$. Тоді знайдемо частинні похідні по проміжним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2\cos x \sin x = -\sin 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\cos y,$$

а також звичайні похідні від проміжних змінних по аргументу t :

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{dz}{dt} = -(2t + 1)\sin 2x - (3t^2 - 2)\cos y = -(2t + 1)\sin 2(t^2 + t - 1) - (3t^2 - 2)\cos(t^3 - 2t)$$

2. Розглянемо складніший випадок. Нехай $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$. Тоді $z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$, $z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$.

Ці формули неважко узагальнити для функції більшої кількості змінних.

Приклад 8. $z = u^2 v + uv^2, u = x \cos y, v = y \sin x$.

Розв'язання.

$$z'_u = 2uv + v^2 = 2(x \cos y) \cdot (y \sin x) + y^2 \sin^2 x = (2x \cos y + y \sin x) y \sin x;$$

$$z'_v = u^2 + 2uv = (x \cos y)^2 + x \cos y \cdot y \sin x = x \cos y (x \cos y + 2y \sin x);$$

$$u'_x = \cos y; \quad u'_y = -x \sin y;$$

$$v'_x = y \cos x; \quad v'_y = \sin x;$$

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$$

$$= (2x \cos y + y \sin x) y \sin x \cos y + x \cos y (x \cos y + 2y \sin x) y \cos x;$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$$

$$= -(2x \cos y + y \sin x) y \sin x \cdot x \sin y + x \cos y (x \cos y + 2y \sin x) \sin x.$$

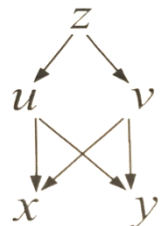


Схема до
розв'язання

1.7. Диференціювання неявно заданих функцій

Похідна неявної функції, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ – диференційована функція змінних x і y й $F'_y(x, y) \neq 0$ дорівнює

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (1.3)$$

Частинні похідні неявної функції двох змінних $z = f(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційована функція змінних x, y і z й $F'_z(x, y) \neq 0$, обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_z(x, y)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_z(x, y)}. \quad (1.4)$$

Приклад 9. Задана функція $y^2 - 2xy = 3$. Знайти $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $y^2 - 2xy - 3 = 0$ і скористаємося формулою (1.3)

$$F'_x = -2y, \quad F'_y = 2y - 2x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2y}{2y - 2x} = \frac{y}{y - x}.$$

Приклад 10. Задана функція $x^3y^2 + xy^5 + 15xy + y = 0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y)$ і скористаємося формулою (3):

$$F'_x = 3x^2y^2 + y^5 + 15y, \quad F'_y = 2x^3y + 5xy^4 + 15x + 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3x^2y^2 + y^5 + 15y}{2x^3y + 5xy^4 + 15x + 1}.$$

Приклад 11. Задана функція $4\sin(x - y - z^4) + y + \ln z - x = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z)$ і скористаємося формулою (4):

$$f'_x = 4\cos(x - y - z^4) - 1, \quad f'_y = -4\cos(x - y - z^4) + 1,$$

$$f'_z = -16z^3\cos(x - y - z^4) + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4\cos(x - y - z^4) - 1}{\frac{1}{z} - 16z^3\cos(x - y - z^4)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4\cos(x - y - z^4)}{\frac{1}{z} - 16z^3\cos(x - y - z^4)}.$$

1.8. Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція декількох змінних $u = f(x, y, \dots, t)$ має частинні похідні. В загальному випадку вони є знову функціями декількох змінних. Тому від них можна знову знайти частинні похідні.

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її похідних першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Для функції двох змінних частинних похідних буде чотири. Вони позначаються таким чином:

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ – функція послідовно диференціюється двічі по x ;
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ – функція спочатку диференціюється по x , а потім по y ;
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ – функція спочатку диференціюється по y , а потім по x ;
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ – функція послідовно диференціюється двічі по y .

Похідні другого порядку можна знову диференціювати.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, що вирізняються послідовністю диференціювання називають мішаними. Мішані похідні, якщо вони неперервні, рівні між собою:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial^3 x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right).$$

При цьому результат багаторазового диференціювання функції по різним змінним не залежить від послідовності диференціювання за цими змінними. Істотним є лише те, щоб обчислювані частинні похідні були неперервними.

Приклад 12. Знайти похідні другого порядку від функцій:

а) $z = x^3 - x^2y + y^2$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial x^2} = 6x - 2y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-x^2 + 2y)'_x = -2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 2xy)'_y = -2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x$$

б) $z = e^{2xy^2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2xy^2} \cdot 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial x^2} = e^{2xy^2} \cdot 4y^4$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2xy^2} \cdot 4xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2xy^2} \cdot 16x^2y^2 + e^{2xy^2} \cdot 4x = e^{2xy^2} \cdot (4xy^2 + 1) \cdot 4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (e^{2xy^2} \cdot 4xy)' = e^{2xy^2} \cdot 8xy^2 + e^{2xy^2} \cdot 4y = e^{2xy^2} \cdot 4y(2xy^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (e^{2xy^2} \cdot 2xy^3)'_y = e^{2xy^2} \cdot 8xy^3 + e^{2xy^2} \cdot 4y = e^{2xy^2} \cdot 4y(2xy^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

в) $z = \cos(xy)$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos(xy) - \sin(xy).$$

Приклад 13. Обчислити похідну $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ від функції $z = 5x^4y^3 + 6e^{-3x} \cdot y + \sin 2x$

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 20x^3y^3 - 18e^{-3x} \cdot y = 2\cos 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 60x^3y^2 - 18e^{-3x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \\ &= 120x^3y \end{aligned}$$

Приклад 14. Перевірити, чи виконується рівність $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функції $z = \ln(4x + e^{-y})$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку $z'_x = \frac{4}{4x + e^{-y}}$, потім знайдемо $z''_{xy} = \frac{4e^{-y}}{(4x + e^{-y})^2}$.

Диференціюємо в іншому порядку: $z'_y = \frac{-e^{-y}}{x + e^{-y}}$, $z''_{yx} = \frac{4e^{-y}}{(x + e^{-y})^2}$.

Отже $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Приклад 15. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$ диференціальному рівнянню: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні, які містяться у рівнянні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Підставляючи їх у рівнянні здобудемо тотожність:

$$x^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) - xy \left(\frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) + y^2 = 0.$$

1.9. Елементи теорії поля похідна за напрямом. Градієнт

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають **стаціонарним**, а скалярне поле, яке змінюється з часом – **нестаціонарним**.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, то відповідне скалярне поле $u(x, y)$ називають **плоским**. Якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних, то скалярне поле $u(x, y, z)$ називають **просторовим**.

Для плоского скалярного поля розглядають **лінії рівня**, на яких функція $u(x, y)$ має стале значення. Рівняння лінії рівня – $u(x, y) = C, C = \text{const}$.

Поверхнею рівня скалярного поля, заданого функцією $u(x, y, z)$ називають поверхню на якій функція має стале значення. Рівняння поверхні рівня – $u(x, y, z) = C, C = \text{const}$.

Геометрично плоскі скалярні поля зображують за допомогою **ліній рівня**, а просторові – за допомогою **поверхонь рівня**.

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття **похідної за напрямом**.

Розглянемо на множині D диференційовану функцію $U = f(x, y, z)$ і точку $M(x, y, z)$. Проведемо з точки M вектор $\vec{S}\{S_x, S_y, S_z\}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}$, $\cos\beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}$, $\cos\gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|}$, тоді похідна від функції $U = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{S}$ буде обчислюватись за формулою:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma.$$

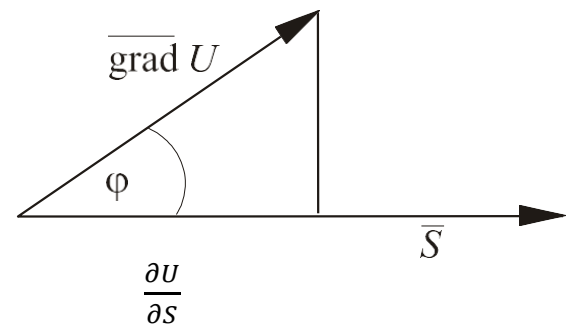
Зазначимо, що будь яка частинна похідна є окремим випадком похідної за напрямом. Наприклад, якщо $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial U}{\partial x} \left(\cos\alpha = \cos 0 = 1, \cos\beta = \cos\gamma = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \right) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}$

Вектор, у якого проєкціями на осі координат є значення частинних похідних функції $U = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, зветься градієнтом функції U .

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Якщо кут між векторами $\overrightarrow{\text{grad}} U$ і $\vec{S}$ позначити через φ , то $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = |\overrightarrow{\text{grad}} U| \cdot \cos\varphi$.

Тобто похідна $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}}$ дорівнює проєкції $|\overrightarrow{\text{grad}} U|$ на вектор $\vec{S}$.



Якщо $\varphi = 0$, то $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = |\overrightarrow{\text{grad}} U|$ – найбільше значення похідної в точці M (у цьому випадку напрям вектора $\vec{S}$ збігається з напрямом градієнта).

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} = 0 \right)$, то похідна у напрямі вектора, перпендикулярного вектору $\overrightarrow{\text{grad}} U$ завжди дорівнює нулю.

Приклад 16. Від заданої функції $U = x^2 - xy + y^3 z^2$ знайти:

- похідну в точці $M(1, -2, -1)$ у напрямку вектора $\vec{S}\{3, -1, 2\}$;
- градієнт функції U в точці M .

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції U і їх значення в точці M :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - y; \quad \frac{\partial U(M)}{\partial x} = \frac{\partial U(1, -2, -1)}{\partial x} = 4$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + 3y^2z^2; \quad \frac{\partial U(1, -2, -1)}{\partial y} = 11;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2y^3z; \quad \frac{\partial U(1, -2, -1)}{\partial z} = 16.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\bar{S}$:

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\bar{S}|} = \frac{3}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\bar{S}|} = -\frac{1}{\sqrt{14}}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\bar{S}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Тоді похідна U у напрямку $\bar{S}$ в точці M буде дорівнювати числу:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{S}} = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 11 \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{14}} + 16 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{33}{\sqrt{14}}.$$

За формулою градієнта маємо: $\overline{grad} U = 4\bar{i} + 11\bar{j} + 16\bar{k}$.

1.10. Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі.

Нехай деяка поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Якщо в точці $P(x, y, z) \in S$ всі три похідні $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ неперервні і хоча б одна з них не дорівнює нулю, то точка P називається **звичайною**. Якщо всі три похідні дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує, то точка P називається **особливою** (вершина конічної поверхні). Якщо всі точки поверхні S є звичайними, то поверхня називається **гладкою** (простою).

Дотичною прямою до поверхні у звичайній точці називається дотична до деякої кривої, яка розміщена на цій поверхні і проходить через задану точку.

Теорема. Усі дотичні прямі до гладкої поверхні у звичайній точці лежать в одній площині.

Площина, яка містить усі дотичні до кривих, що розміщені на поверхні і проходять через задану точку, називається **дотичною площиною**.

Таким чином, якщо поверхню задано рівнянням у неявному виді $F(x, y, z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні в точці $P(x_0, y_0, z_0) = P_0$ має вигляд:

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини записується у вигляді:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Пряма, яка проходить через точку $P(x_0, y_0, z_0) = P_0$ перпендикулярно до дотичної площини, називається **нормаллю до поверхні**.

Якщо поверхня задана в неявній формі $F(x, y, z) = 0$, то рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}} \quad (1.7)$$

Якщо поверхня задана в неявній формі $z = f(x, y)$, то рівняння нормалі запишеться у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}. \quad (1.8)$$

Приклад 17. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точці $P(2, 1, -3) = P_0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у вигляді $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z)$, знайдемо частинні похідні та їх значення в точці P_0 :

$$F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F(P_0)}{\partial x} = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -8y; \quad \frac{\partial F(P_0)}{\partial y} = -8$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z; \quad \frac{\partial F(P_0)}{\partial z} = -12$$

За формулою (7) маємо: $4(x - 2) - 8(y - 1) - 12(z + 3) = 0$ або $4x - 8y - 12z - 36 = 0$, або $x - 2y - 3z - 9 = 0$ – рівняння дотичної площини. Рівняння нормалі одержимо за формулою (8):

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z+3}{-12} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-3}.$$

1.11. Екстремум функції двох змінних

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, якщо існує околі точки $P_0(x_0, y_0)$ такий, що для будь-якої точки (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$).

Оскільки екстремум функції $z = f(x, y)$ визначається лише в малому околі точки $P_0(x_0, y_0)$, то його називають **локальним**.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ необхідні і достатні умови мають наступний вигляд.

Теорема (необхідні умови): якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум функції у точці $P_0(x_0, y_0)$, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують.

Тобто, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (або не існує), $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (або не існує).

Точки, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують, називаються стаціонарними точками функції $z = f(x, y)$.

Теорема (достатні умови): нехай в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно і нехай, крім того, точка $P_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною точкою функції $f(x, y)$ і $A = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x^2}$;

$B = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial y^2}$. Тоді в точці $P_0(x_0, y_0)$:

- 1) $f(x, y)$ має максимум, якщо $AC - B^2 > 0$ ($A < 0$ або $C < 0$);
- 2) $f(x, y)$ має мінімум, якщо $AC - B^2 > 0$ ($A > 0$ або $C > 0$);
- 3) екстремум відсутній, якщо $AC - B^2 < 0$;
- 4) екстремум може бути, а може і не бути, якщо $AC - B^2 = 0$ (в цьому випадку потрібні подальші дослідження).

Приклад 18. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні значення змінних x та y ,

тобто $\left\{ \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{matrix} \right\}$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь: $u =$

$$\frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{dz}{dy} = 6xy - 12, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0, \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \quad x_1^2 = 4, \quad x_2^2 = 1.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

$$M_1(2,1), \quad M_2(-2,-1), \quad M_3(1,2), \quad M_4(-1,-2).$$

Знайдемо $AC - B^2 = 36x^2 - 36y^2$.

Тепер для кожної стаціонарної точки будемо знаходити знак $CC - B^2$:

– для точки $M_1(2,1)$: $AC - B^2 = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1 > 0$. В цій точці екстремум є. Розглянемо знак A (або C). $A = 6x = 6 \cdot 2 = 12 > 0$, тому в точці M_1 маємо мінімум, який дорівнює $z_{min}(2,1) = -28$;

– для точки $M_2(-2,-1)$: $AC - B^2 > 0$ ($A < 0$). Отже, в т. M_2 маємо максимум, який дорівнює $z_{max}(2,1) = +28$;

– для точки $M_3(1,2)$: $AC - B^2 < 0$ екстремуму немає;

– для точки $M_4(-1,-2)$: $AC - B^2 < 0$ екстремуму немає.

1.12. Найбільше та найменше значення функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x, y)$, неперервна в обмеженій замкненій області D , обов'язково має в цій області найбільше і найменше значення.

Цих значень функція досягає або в стаціонарних точках (які знаходяться в середині D), або в точках, які належать межі області D .

Тому, щоб знайти найбільше і найменше значення функції в області D , потрібно:

1) знайти стаціонарні точки, які розташовані всередині області і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області (на цих лініях функція двох змінних перетворюється у функцію однієї змінної);

3) із усіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Зауваження. Найбільше (найменше) значення можуть бути не єдиними.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - 2y$ у замкненій області, яка обмежена лініями $x + 2y - 6 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 2 \end{cases}; \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2y - x - 2 = 0 \end{cases}; x = \frac{4}{3}; y = \frac{5}{3}.$$

Знайдемо стаціонарні точки (див. рис.).

Таким чином, єдина стаціонарна точка $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

належить області D і значення функції в цій точці

$z(M_1) = z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. Проведемо дослідження функції на межах області.

Розглянемо межу AB . Її рівняння $x + 2y - 6 = 0$ зв'язує між собою змінні x і y .

Визначимо з цього рівняння одну змінну через другу, наприклад $x = 6 - 2y$, і підставимо у вираз функції z :

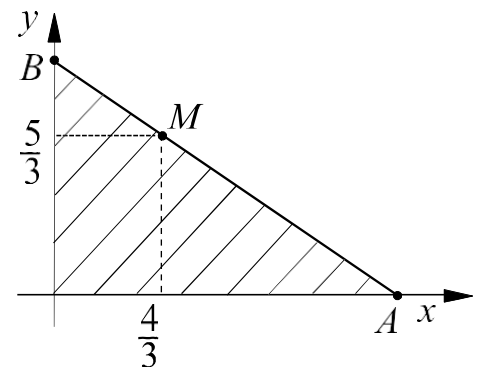
$$z = (6 - 2y)^2 + y^2 - (6 - 2y)y - (6 - 2y) - 2y = 7y^2 - 30y + 30.$$

Таким чином, ми одержали функцію однієї змінної $z(y) = 7y^2 - 30y + 30$, де y змінюється на відрізку $[0, 3]$. Далі шукаємо найбільше і найменше значення функції $z(y)$ на $[0, 3]$, які і будуть найбільшим і найменшим значенням функції $z = f(x, y)$ на межі AB . Знаходимо стаціонарні точки функції $z(y)$:

$$z(y) = 14y - 30, \quad 14y - 30 = 0, \quad y = \frac{15}{7}.$$

Ця точка розташована всередині відрізка $[0, 3]$, тому на цій межі маємо:

$$z\left(\frac{15}{7}\right) = 7 \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^2 - 30 \cdot \frac{15}{7} + 30 = -\frac{15}{7}; \quad z(0) = 30; \quad z(3) = -4.$$



Розглянемо межу OA ; її рівняння $y = 0$. В цьому випадку функція $z = f(x, y)$ буде мати вигляд $z = x^2 - x$, $0 \leq x \leq 6$ (ми знов одержали функцію однієї змінної).

Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[0, 6]$, $z'(x) = 2x - 1$; $2x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$.

Ця стаціонарна точка належить відрізку $[0, 6]$, тому знаходимо:

$$z\left(\frac{1}{2}\right), \quad z(0) \quad \text{і} \quad z(6),$$

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}; \quad z(0) = 0, \quad z(6) = 30.$$

Всі ці обчислення проводились за умови $y = 0$, тому як і в попередньому випадку, якщо:

$$-x = 0, \text{ то } z(M_5) = z(0, 0) = 0;$$

$$-x = \frac{1}{2}, \text{ то } z(M_6) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Значення $z(6, 0) = 30$ не врахуємо, тому що на межі AB точка з такими координатами вже була (точка M_2).

Нарешті розглянемо межу OB : $x = 0, z(y) = y^2 - 2y, 0 \leq y \leq 3, z'(y) = 2y - 2, 2y - 2 = 0, y = 1$ (стаціонарна точка належить відрізку $[0, 3]$).

Перш ніж знаходити значення функції на кінцях відрізка і в стаціонарній точці, відзначимо, що значення $z(0)$ і $z(3)$ можна не враховувати, тому що $z(0)$ за умови $x = 0$, це $z(0, 0) = z(M_5)$, $z(3)$ за умови $x = 0$ це $z(0, 3) = z(M_3)$. Тому знайдемо тільки $z(1) = -1$ або $z(M_7) = z(0, 1) = -1$.

Із знайдених значень функції вибираємо найбільше і найменше значення:

$$z(M_1) = z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}; \quad z(M_2) = z(A) = z(6, 0) = 30;$$

$$z(M_3) = z(B) = z(0, 3) = -4 \quad z(M_4) = z(A) = z\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right) = -\frac{15}{7};$$

$$z(M_5) = z(0, 0) = 0; \quad z(M_6) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}; \quad z(M_7) = z(0, 1) = -1.$$

Найбільше значення буде в точці M_2 (тобто в точці A): $z(6, 0) = 30$.

Найменше – в точці $M_1: z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}$.

2. Невизначений інтеграл.

2.1. Первісна і невизначений інтеграл.

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка вірна рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Треба відзначити, що число первісних для однієї і тієї ж функції може бути безконечне багато. Вони відрізнятимуться один від одного на деяке постійне число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Визначення. *Невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням

$$F(x) + C.$$

Позначення невизначеного інтеграла -

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (2.1)$$

Тут функція $f(x)$ називається *підінтегральною*, $f(x) dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінна інтегрування*, $\int$ - позначення операції інтегрування (*оператор інтегрування*)

Умовою існування невизначеного інтеграла на деякому відрізку є безперервність функції на цьому відрізку.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx;$ де u, v, w – деякі функції від x .
5. $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$

Приклад:

$$\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$$

Знаходження значення невизначеного інтеграла пов'язане головним чином із знаходженням первісної функції. Для деяких функцій така задача виявляється складною, або неможливою. У останньому випадку мається на увазі, що первісна функція не є елементарною. Нижче будуть розглянуті способи знаходження невизначених інтегралів для основних класів функцій – раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових і ін.

Таблиця основних невизначених інтегралів

З визначення первісної функції виходить, що інтегрування є операція, зворотна диференціюванню. Тому для перевірки правильності виконання інтегрування потрібно продиференціювати результат і отримати при цьому підінтегральну функцію. Для зручності проведення інтегрування нижче наводиться таблиця основних невизначених інтегралів.

Таблиця інтегралів

Інтеграл		Значення	Інтеграл		Значення
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
---	---------------------	--------------	----	----------------------------	--

Інтеграли цієї таблиці прийнято називати табличними.

Якщо операції диференціювання не виводить нас з області елементарних функцій, тобто результат диференціювання також є елементарною функцією, то для операції інтегрування справа зовсім інакша: інтеграли від деяких елементарних функцій вже не є елементарними функціями. Наведемо приклади деяких з них:

$\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона (інтеграл помилок) ;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм;

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - інтегральний синус.

Інтеграли, що приведені вище, прийнято називати інтегралами, що не «беруться». Кожен з цих інтегралів не є елементарною функцією, проте вони мають велике значення в прикладній математиці.

2.2. Основні методи інтегрування

Розглянемо три основні методи інтегрування.

Безпосереднє інтегрування.

Метод безпосереднього інтегруванням заснований на припущенні про можливе значення первісної функції з подальшою перевіркою цього значення диференціюванням.

Розглянемо вживання цього методу на прикладі: Потрібно знайти значення інтеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основі відомої формули диференціювання $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можна зробити вивід, що шуканий інтеграл рівний $\ln x + C$, де C – деяке постійне число. Однак, з іншого боку $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$. Таким чином, остаточно можна зробити вивід:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Відмітимо, що на відміну від диференціювання, де для знаходження похідної використовувалися чіткі прийоми і методи, правила знаходження похідної, для інтегрування такі методи недоступні. Якщо при знаходженні похідної ми користувалися сповна визначеними правилами, які наводять до результату, то при знаходженні первісною доводиться в основному спиратися на знання таблиць похідних і первісних.

Що стосується методу безпосередньої інтегрування то він застосовується лише для деяких вельми обмежених класів функцій. Функцій, для яких можна з ходу знайти первісну дуже мало. Тому в більшості випадків застосовуються способи, описані нижче.

Метод підстановки (заміни змінної)

Метод інтегрування підстановкою полягає у введенні нової змінної інтегруванням. При цьому вихідний інтеграл наводиться до нового інтеграла, який є або табличним, або таким, що зводиться до нього.

Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$ і пошук первісної при цьому викликає труднощі, то часто виявляється зручним виробити заміну змінної інтегрування, вважаючи $x = \varphi(t)$ і $dx = \varphi'(t)dt$ в результаті отримаємо:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклади. Знайти невизначений інтеграл:

1. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Зробимо заміну $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

2. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Заміна $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Отримуємо:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Інтегрування по частинам.

Цей метод заснований на відомій формулі похідної твору:

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

де u і v – деякі функції від x .

У диференціальній формі: $d(uv) = u dv + v du$

Інтегрування дає: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а відповідно до приведених вище властивостей невизначеного інтеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{або} \quad \int u dv = uv - \int v du \quad ;$$

Отримали формулу інтегрування по частинам, яка дозволяє знаходити інтеграли багатьох елементарних функцій.

Приклади.

$$\begin{aligned} 1. \int x^2 \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Як видно, послідовне вживання формули інтегрування по частинам дозволяє поступово спростити функцію і привести інтеграл до табличного.

$$\begin{aligned} 2. \int e^{2x} \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = \\ &= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx \end{aligned}$$

Видно, що в результаті повторного вживання інтегрування по частинам функцію не удалося спростити до табличного вигляду. Проте, останній отриманий інтеграл нічим не відрізняється від початкового. Тому перенесемо його в ліву частину рівності.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким чином, інтеграл знайдено взагалі без вживання таблиць інтегралів.

Перш ніж розглядати детально методи інтегрування різних класів функцій, наведемо ще декілька прикладів знаходження невизначених інтегралів, які зводяться до табличних.

Приклади

$$\begin{aligned} \int (2x+1)^{20} dx &= \{2x+1=t; \quad dt=2dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \\ &= \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx &= \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+2} \right| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx &= \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{ \sin x = t; \quad dt = \cos x dx \} = \\ &= \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C = -2 \sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{2x^2}; \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{4} \right) + C.$$

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2 \arctg t + C = 2 \arctg \sqrt{x} + C.$$

2.3. Інтегрування раціональних функцій

1. *Інтегрування простих раціональних дробів.* До простих раціональних дробів відносяться функції наступних чотирьох типів:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{1}{ax+b}; \\ \text{II.} & \frac{1}{(ax+b)^m}; \\ \text{III.} & \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}; \\ \text{IV.} & \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} \end{array}$$

m, n – натуральні числа ($m \geq 2, n \geq 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Перші два типи інтегралів від елементарних дробів досить просто наводяться до табличних підстановкою $t = ax + b$.

$$\text{I.} \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Розглянемо метод інтегрування елементарних дробів вигляду III.

Інтеграл дробу вигляду III може бути представлений у вигляді:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\
&= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C
\end{aligned}$$

Тут в загальному вигляді показано приведення інтеграла дробу вигляду III до двох табличних інтегралів.

Розглянемо вживання вказаної вище формули на прикладах.

Приклад.

$$\begin{aligned}
\int \frac{7x - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx &= \int \frac{84x - 24}{36x^2 - 60x + 48} dx = \int \frac{84x - 24}{(6x - 5)^2 + 23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 6x - 5; \quad du = 6dx; \\ x = \frac{u + 5}{6}; \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{6} \int \frac{14u + 70 - 24}{u^2 + 23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2 + 23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2 + 23} = \frac{7}{6} \ln(u^2 + 23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\
&= \frac{7}{6} \ln|36x^2 - 60x + 48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x - 5}{\sqrt{23}} + C.
\end{aligned}$$

Взагалі кажучи, якщо у тричлені $ax^2 + bx + c$ вираз $b^2 - 4ac > 0$, то дріб за визначенням не є елементарною, проте її можна інтегрувати вказаним вище способом.

Приклад.

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x - 3}{x^2 + 6x - 40} dx &= \int \frac{5x - 3}{(x + 3)^2 - 49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x + 3; \quad du = dx; \\ x = u - 3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u - 15 - 3}{u^2 - 49} du = \\
&= 5 \int \frac{udu}{u^2 - 49} - 18 \int \frac{du}{u^2 - 49} = \frac{5}{2} \ln|u^2 - 49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u - 7}{u + 7} \right| + C = \\
&= \frac{5}{2} \ln|x^2 + 6x - 40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x - 4}{x + 10} \right| + C.
\end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x + 4}{\sqrt{7 - x^2 + 6x}} dx &= \int \frac{3x + 4}{\sqrt{16 - (x - 3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x - 3; \quad du = dx; \\ x = u + 3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u + 9 + 4}{\sqrt{16 - u^2}} du = \\
&= 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16 - u^2}} + 13 \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = -3\sqrt{16 - u^2} + 13 \operatorname{arcsin} \frac{u}{4} + C =
\end{aligned}$$

$$= -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C$$

Розглянемо тепер методи інтеграції простих дробів IV типу.

Спочатку розглянемо окремий випадок при $M=0$, $N=1$.

Тоді інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можна шляхом виділення в знаменнику

повного квадрата представити у вигляді $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Зробимо наступне

перетворення:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, що входить в цю рівність, братимемо по частинах.

$$\text{Позначимо: } \left\{ \begin{array}{l} dv_1 = \frac{u du}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \int \frac{u du}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для вихідного інтеграла отримуємо:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Отримана формула називається *рекурентною*. Якщо застосувати її $n-1$ разів, то

вийде табличний інтеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Повернемося тепер до інтеграла від елементарного дробу вигляду IV в загальному випадку.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]^n} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 2ax + b; \quad du = 2adx; \\ x = \frac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac - b^2; \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u-b)}{2a} + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{u du}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right]$$

У отриманій рівності перший інтеграл за допомогою підстановки $t = u^2 + s$ наводиться до табличного, а до другого інтеграла застосовується розглянута вище рекурентна формула.

Не дивлячись на складність інтегрування елементарного дробу вигляду IV, на практиці його досить легко застосовувати для дробів з невеликою степеню n , а універсальність і спільність підходу робить можливою дуже просту реалізацію цього методу на ЕОМ.

Приклад.

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2+3} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

2. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Відношення двох многочленів

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($P_m(x)$ – многочлен степені m , а $Q_n(x)$ – многочлен степені n) –

називається *дробово-раціональною функцією (раціональним дробом)*.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь многочлена чисельника менше степені многочлена знаменника, тобто $m < n$, інакше раціональний дріб – *неправильна*.

Має місце твердження: всякий неправильний раціональний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Наприклад, - неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{r|l} 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ 6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 & 2x^2 + 3 \\ \hline 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\ 9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 & \\ \hline 20x^2 - 25x - 25 & \end{array}$$

Отримаємо частку $W(x) = 2x^2 + 3$ і залишок $R(x) = 20x^2 - 25x - 25$. Тому

$$\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} = 2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}.$$

Теорема. Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб, знаменник $Q(x)$ якою

представлений у вигляді твору лінійних і квадратичних множників

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

то цей дріб може бути представлений у вигляді суми простих дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{s_1}x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{R_1x + S_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{R_{s_m}x + S_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \end{aligned}$$

де $A_i, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, \dots, R_1, S_1, \dots$ - деякі постійні величини.

При інтегруванні раціональних дробів прибігають до розкладання вихідного дробу на елементарні. Для знаходження величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ застосовують так званий *метод невизначених коефіцієнтів*, суть якого полягає в тому, що для того, щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно і достатньо, щоб були рівні коефіцієнти при однакових степенях x .

Вживання цього методу розглянемо на конкретному прикладі.

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$$

Оскільки $x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Наводячи до спільного знаменника і прирівнюючи відповідні чисельники, отримуємо:

$$A(x - 4)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ -4A - 2B - 6C + D = -30 \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28 \\ -16A - 8B + 8D = -88 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B \\ 2A + 2B + 4C - 3D = 14 \\ 2A + B - D = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14 \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x - 2} dx + \int \frac{3}{x - 4} dx + \int \frac{x + 2}{x^2 + 4} dx &= 5 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \\ + \int \frac{2}{x^2 + 4} dx &= 5 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{A}{x + 3} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)^2} dx + \int \frac{Dx + E}{x^2 + 2} dx$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x + 3) + (Dx + E)(x + 3)(x^2 + 2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E = (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тоді значення заданого інтеграла:

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx &= 3 \int \frac{dx}{x+3} + 2 \int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \\ &= 3 \ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

2.4. Інтегрування тригонометричних функцій

Більшість інтегралів від тригонометричних функцій часто не можна обчислити аналітично, тому розглянемо деяких основних типів функцій, які можна проінтегрувати.

Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо деякі випадки знаходження інтеграла вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція від змінних $\sin x$ і $\cos x$.

Інтеграли цього вигляду обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\text{Тоді } x = 2\arctgt; \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2};$$

$$\text{Таким чином: } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Описане вище перетворення називається *універсальною тригонометричною підстановкою*.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{4\frac{2t}{1 + t^2} + 3\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t + 2)^2} = -\frac{1}{t + 2} + C = -\frac{1}{tg \frac{x}{2} + 2} + C. \end{aligned}$$

Безперечною достоїнністю цієї підстановки є те, що з її допомогою завжди можна перетворити тригонометричну функцію в раціональну і обчислити відповідний інтеграл. До недоліків можна віднести те, що при перетворенні може вийти досить складна раціональна функція, інтегрування якої буває вельми громіздким.

Проте при неможливості застосувати більш раціональну заміну змінною цей метод є єдино результативним.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{(1 + t^2) \left[9 + \frac{8(1 - t^2)}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} \right]} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + 16} = \frac{1}{2} \arctg \frac{t + 1}{4} + C = \frac{1}{2} \arctg \frac{tg \frac{x}{2} + 1}{4} + C. \end{aligned}$$

На практиці застосовують і інші, простіші підстановки, залежно від властивостей підінтегральної функції. Інколи зручні наступні правила:

1) якщо функція R є непарною відносно $\cos x$. В цьому випадку зручно скористатися підстановкою $\sin x = t$

Не дивлячись на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональне застосувати підстановку $\sin x = t$.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4} dt = \\ &= \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} + 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = \\ &= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Взагалі кажучи, для вживання цього методу необхідна лише непарність функції відносно косинуса, а степінь синуса, що входить у функцію може бути будь-якій, як цілою, так і дробом.

2) якщо функція R є непарною відносно $\sin x$. В цьому випадку застосовується підстановка $\cos x = t$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2} dt = \\ &= \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2} \right] dt = \int \left[t+2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int t dt + \int 2 dt - 4 \int \frac{t dt}{t+2} - 5 \int \frac{dt}{t+2} = \\ &= \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| + 8 \ln|t+2| - 4t = \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

3) якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$. В цьому випадку інтеграл раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$. Така ж підстановка застосовується, якщо інтеграл має вигляд

Приклад.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} = \\ & = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 16} dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \\ & = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C \end{aligned}$$

Інтеграли типу $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для знаходження таких інтегралів застосовуються наступні підстановки:

- 1) $\sin x = t$, якщо n – ціле позитивне непарне число;
- 2) $\cos x = t$, якщо m – ціле позитивне непарне число;
- 3) $\operatorname{tg} x = t$, якщо $m + n$ – парне негативне ціле число;
- 4) якщо m і n – цілі парні ненегативні числа, то для пониження порядку

використовуються формули $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{d \operatorname{ctg} 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C$$

Приклад.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \\ &+ \frac{1}{8} \left[\int dx + \int \cos 4x dx \right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.\end{aligned}$$

Інтеграли типу $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$

обчислюються за допомогою формул

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Приклад.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

Приклад.

$$\begin{aligned}\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx &= \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 21x dx - \frac{1}{4} \int \sin x dx + \frac{1}{4} \int \sin 13x dx + \frac{1}{4} \int \sin 7x dx = \\ &= -\frac{1}{84} \cos 21x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{52} \cos 13x - \frac{1}{28} \cos 7x + C.\end{aligned}$$

2.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо деякі типи інтегралів, що містять ірраціональні функції. Для знаходження інтеграла від ірраціональної функції слід застосувати підстановку, яка перетворює цю функцію до раціональної форми, інтеграл від якої може бути знайдений.

Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де n - натуральне число.

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функція раціоналізується

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \quad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

$$\text{Тоді } \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt = \int r(t) dt.$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} &= \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4(\sqrt[4]{1-2x})^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = \\ &= -2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = -2 \int \left(t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2 \int t dt - 2 \int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= -t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C = -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2 \ln|\sqrt[4]{1-2x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Якщо до складу ірраціональної функції входить коріння різних степенів, то у якості нової змінної треба узяти корінь степені, рівної найменшому загальному кратному степенів коріннів, що входять у вираз. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1 + \sqrt[6]{x-1})} dx &= \left\{ \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \right. \\ &\quad \left. dx = 12t^{11} dt; \right\} = \int \frac{(t^4 + t^3) 12t^{11} dt}{t^{12}(1+t^2)} = \\ &= 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = 12 \left(\int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) = 12 \left(\int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right) = \\ &= 12 \int t dt - 12 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + 12 \int dt - 12 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2 + 1) - 12 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x-1} + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

Існує декілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від вигляду виразу, що стоїть під знаком радикала, переважно застосовувати той або інший спосіб.

Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути приведений до вигляду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким чином, інтеграл наводиться до одного з трьох типів:

$$1) \int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du;$$

$$2) \int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du;$$

$$3) \int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du;$$

Можливі три способи інтегрування таких функцій.

1) Тригонометрична підстановка

Інтеграл вигляду $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du$ підстановкою $u = m \sin t$ або $u = m \cos t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t; \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Інтеграл вигляду $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du$ підстановкою $u = m \operatorname{tg} t$ або $u = m \operatorname{ctg} t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Приклад:

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t; dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}; \end{array} \right\} = \int \frac{a \cos t dt}{\cos^2 t a^4 \operatorname{tg}^4 t a} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^4} \int \frac{(1 - \sin^2 t) d \sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4 \sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = \\
&= \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\} = -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4 x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C.
\end{aligned}$$

Інтеграл вигляду $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du$ підстановкою $u = \frac{1}{\sin t}$ або $u = \frac{1}{\cos t}$

зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} &= \left\{ x = \frac{2}{\cos t}; dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt; \right. \\
&\quad \left. \sqrt{x^2 - 4} = 2 \operatorname{tg} t; \right\} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 \operatorname{tg}^5 t} = \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^4 t dt = \\
&= \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t d(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{32} \int \operatorname{ctg}^2 t dt = \\
&= -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{96} \operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{32} \operatorname{ctg} t + \frac{t}{32} + C = \\
&= \left\{ \operatorname{ctg} t = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{1}{32} \arccos \frac{2}{x} + C.
\end{aligned}$$

2. Підстановки Ейлера

1. Якщо $a > 0$, то інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

2. Якщо $a < 0$ і $c > 0$, то інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3. Якщо $a < 0$, а підкорінний вираз розкладається на дійсні множники $a(x - x_1)(x - x_2)$, те інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Відзначимо, що підстановки Ейлера незручні для практичного використання, оскільки навіть при нескладних підінтегральних функціях наводять до вельми громіздких обчислень.

2.6. Метод невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо інтеграли наступних трьох типів:

$$I. \int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \quad II. \int P(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}dx; \quad III. \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

де $P(x)$ – многочлен, n – натуральне число.

Причому інтеграли II і III типів можуть бути легко приведені до вигляду інтеграла I типа.

Інтеграли типа I можна обчислювати, користуючись формулою

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $Q(x)$ - деякий многочлен, степінь якого нижча за степінь многочлена $P(x)$, а λ - деяка постійна величина.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $Q(x)$, степінь якого нижча за степінь многочлена $P(x)$, диференціюємо обидві частини даного виразу, потім множимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , визначають λ і коефіцієнти многочлена $Q(x)$.

Даний метод вигідно застосовувати, якщо степінь многочлена $P(x)$ більше одиниці. Інакше можна успішно використовувати методи інтегрування раціональних дробів, які розглянуті вище, оскільки лінійна функція є похідною підкорінного виразу.

Приклад.

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Диференціюємо цей вираз, потім помножимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x .

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x - 1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda =$$

$$= 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$3Ax^3 - (5A - 2B)x^2 + (10A - 3B + C)x + 5B - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A - 2B = 7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -13 \\ \lambda = -7 \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx &= (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \\ &= (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \ln(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C. \end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3} dx &= \int \frac{(4x^2 - 6x)(x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \\ &= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2 + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x}{\sqrt{x^2 + 3}} &= (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2 + 3} + \\ &+ \frac{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 3}} \end{aligned}$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2 + 3) + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = 3Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 9Ax^2 + 6Bx + 3C + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda$$

$$4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x = 4Ax^4 + 3Bx^3 + (2C + 9A)x^2 + (6B + D)x + 3C + \lambda$$

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = 3/2; \quad D = -6; \quad \lambda = -9/2;$$

$$\int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3} dx = \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - 6 \right) \sqrt{x^2 + 3} - \frac{9}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| + C.$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{v}; \\ dx = -\frac{dv}{v^2} \end{array} \right\} = -\int \frac{v^3 dv}{v^2 \sqrt{\frac{1}{v^2} - 1}} = -\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1 - v^2}} =$$

$$= (Av + B)\sqrt{1 - v^2} + \lambda \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$- \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} = A\sqrt{1 - v^2} - \frac{(Av + B)v}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$-v^2 = A - Av^2 - Av^2 - Bv + \lambda, \quad -v^2 = -2Av^2 - Bv + A + \lambda. \text{ Звідки}$$

$$A = 1/2; \quad B = 0; \quad \lambda = -1/2;$$

Отже

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} = -\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{v\sqrt{1 - v^2}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin v = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} - \arcsin \frac{1}{x} \right) + C$$

Інтегрування диференціальних біномів

Інтеграли типу $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ називаються інтегралами від диференціального бінома, де a, b – дійсні числа; $m, n, i p$ – раціональні числа.

Як було доведено Чебишевим П.А., інтеграл від диференціального бінома може бути виражений через елементарні функції лише в наступних трьох випадках:

1) Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[n]{x}$, де λ - спільний знаменник m і n .

2) Якщо $\frac{m+1}{n}$ - ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою

$t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, де s – знаменник числа p .

3) Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число, то використовується підстановка $t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$,

де s – знаменник числа p .

У всіх останніх випадках інтеграли типу $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ не виражаються через відомі елементарні функції.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx$.

Оскільки диференціальний біном - $x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$

то $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Тому робимо підстановку $\sqrt[4]{x} + 1 = t^3$

тоді $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt$, $t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} + 1}$. В результаті

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2} \cdot 12t^2(t^3 - 1)^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \\ &= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7} (\sqrt[4]{x} + 1)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти інтеграл

- 1) $\int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$. 2) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$. 3) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$. 4) $\int \frac{\ln 5x dx}{x}$. 5) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.
- 6) $\int 4x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 8} dx$. 7) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$. 8) $\int \cos \ln x dx$. 9) $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$. 10) $\int \frac{(6x+1)dx}{x^2 - 8x + 25}$.
- 11) $\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2 + 2x + 1}$. 12) $\int \frac{3x-1}{x^2 + 3x + 2} dx$. 13) $\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx$. 14) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$.
- 15) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}$. 15) $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$. 16) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx$. 17) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx$.
- 18) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx$. 19) $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx$. 20) $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx$.

3. Визначний інтеграл

3.1. Поняття визначного інтеграла

Хай на відрізку $[a, b]$ задана безперервна функція $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на частини (не обов'язково однакові) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тоді $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ – довжини часткових відрізків.

На кожному з отриманих частковому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ виберемо довільну точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і знайдемо значення функції в цій точці, тобто $f(c_i)$ (див. рис. 3.1).

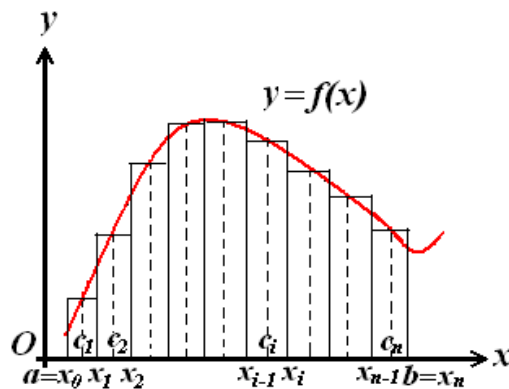


Рис. 3.1.

Складемо вираження S_n , яке називається *інтегральною сумою* для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Позначимо λ довжину найбільшого часткового відрізка: $\lambda = \max \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Знайдемо границю інтегральної суми, коли $n \rightarrow \infty$ так, що $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Якщо при будь-якому розбиванні відрізка $[a, b]$ на часткові таких, що $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ і довільному виборі точок c_i інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$

прагне до границі I , то це число називається *визначним інтегралом* від функції

$y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$.

Таким чином
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i . \quad (3.1)$$

Числа a і b називаються відповідно *нижньою і верхньою границями інтегралу*, x – змінній інтегрування, $[a, b]$ – відрізком інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a, b]$ існує визначний інтеграл називається *інтегрованою* на цьому відрізку.

З рисунку 3.1. видно, що сума добутків $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ дорівнює площі ступінчастої фігури і приблизно дорівнює площі S криволінійної трапеції:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i .$$

Із зменшенням всіх величин Δx_i криволінійної трапеції ступінчастою фігурою збільшується. Тому за точне значення площі криволінійної трапеції береться границя S , до якої прагне площа ступінчастої фігури S_n , коли n необмежено зростає так, що $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i , \text{ тобто } S = \int_a^b f(x)dx .$$

Такий геометричний зміст визначного інтеграла.

Теорема (Коши). Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Існують і інші теореми математичного аналізу, що визначають класи функцій, інтегрованих на відрізку $[a, b]$. Зокрема такими є:

- безперервні на відрізку $[a, b]$ функції;
- обмежені на відрізку $[a, b]$ функції, що мають кінцеве число точок розриву;
- монотонні на відрізку $[a, b]$ функції.

Основні властивості визначного інтеграла

Розглянемо основні властивості визначного інтеграла, вважаючи підінтегральну функцію інтегрованою на відрізку $[a, b]$

$$1) \int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (C - \text{const}), \text{ тобто постійний множник } C \text{ можна}$$

виносити за знак визначного інтеграла.

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx, \text{ тобто інтеграл від суми (різниці)}$$

дорівнює сумі (різниці) інтегралів.

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

5) Для довільних чисел a, b, c справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ тобто інтеграл по всьому відрізку дорівнює}$$

сумі інтегралів по частинах цього відрізка.

6) Якщо функція $f(x)$ зберігає знак на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, то інтеграл має той же знак, що і функція. Так якщо $f(x) \leq 0$ на відрізку $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$

≤ 0 .

7) Якщо $f(x) \leq \varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$, тобто

нерівність між безперервними функціями на відрізку $[a, b]$ ($a < b$) можна інтегрувати.

8) Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

9) **Теорема про середнє значення.** Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка $c \in [a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Доведення: Відповідно до властивості 8:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

або $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. Позначимо $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu$.

Оскільки функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то вона набуває на цьому відрізку всіх значень від m до M . Другими словами, існує таке число $c \in [a, b]$, що

$$\mu = f(c), \text{ тобто } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c) \text{ або } \int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a). \text{ Теорема}$$

доведена.

10) *Похідна визначного інтеграла по змінній верхній границі дорівнює підінтегральній функції, в якій змінна інтегрування замінена цією границею*

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

Доведення: Хай функція $y = f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$. Вводиться

позначення $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, тут $x \in [a, b]$, $t \in [a, x]$. Розглянемо три точки

відрізку $[a, b]$: a , x та $x + \Delta x$ ($x, x + \Delta x \in [a, b]$) і визначимо різницю

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt. \text{ По властивості 5 визначних}$$

інтегралів перший інтеграл правої частини можна представити у вигляді суми

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \text{ В результаті}$$

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

По теоремі про середнє значення (властивість 9) $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$,
 $c \in [x, x+\Delta x]$.

Далі обчислимо похідну функції $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ c \rightarrow x}} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

3.2. Обчислення визначного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ – яка-небудь її первісна на $[a, b]$ (), то виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3.2)$$

Доведення. Хай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Тоді відповідно до приведеної вище теореми, функція $\int_a^x f(t)dt$ – первісна функція від $f(x)$. Але оскільки функція може мати нескінченно багато первісних, які відрізнятимуться один від одного лише на постійне число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x , тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a)$$

$$\text{Тоді } \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) .$$

$$\text{А при } x = b: \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Замінивши змінну t на змінну x , отримуємо формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{Теорема доведена.}$$

Формула Ньютона – Лейбніца є загальний підхід до знаходження визначних інтегралів, якщо відома первісна функція $F(x)$.

Приклади. Обчислити інтеграл

1. $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2;$
2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-1}^1 = \arctg 1 - \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$
3. $\int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_1^{\sqrt{3}/2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}.$

Розглянемо тепер методи обчислення визначних інтегралів, ці методи практично нічим не відрізняються від всіх тих способів, які були розглянуті при знаходженні невизначених інтегралів.

При обчисленні визначних інтегралів широко застосовуються методи заміни змінною і метод інтегрування по частинах.

Інтегрування підстановкою

Хай необхідно обчислити визначний інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ – безперервна функція на відрізку $[a, b]$. Обчислення даного інтеграла будемо проводити методом заміною змінної $x = \varphi(t)$.

Теорема. Хай 1) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ безперервні

на відрізку $[\alpha, \beta]$;

2) множина значень функції $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ є відрізок

$[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (3.3)$$

Доведення. Хай $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Тоді по формулі Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Оскільки,

$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ то $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тому по формулі Ньютона-Лейбніца

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доведена.

Формула (3.3) називається формулою заміни змінної в визначному інтегралі.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Інтегрування по частинам

Теорема. Якщо безперервні на відрізку $[a, b]$ функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають безперервні на цьому відрізку похідні, то справедлива формула інтегрування по частинам:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3.4)$$

Виведення цієї формули абсолютно аналогічне виведенню формули інтегрування по частинам для невизначеного інтеграла.

Формула (3.4) називається формулою інтегрування по частинам для визначного інтеграла.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \ln x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right] = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{16}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 1 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx = 4 \ln 2 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{1}{16} (16 - 1) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання

Обчислити визначний інтеграл

- 1) $\int_1^e \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$. 2) $\int_0^2 x \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2} dx$. 3) $\int_{0.5}^1 \sqrt{4x-2} dx$. 4) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1 - \cos 6x} dx$.
- 5) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$. 6) $\int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z + 1}$. 7) $\int_{0.5}^1 x \sqrt{2x-1} dx$. 8) $\int_1^9 \frac{z dz}{\sqrt{2z+7}}$.
- 9) $\int_1^{16} \frac{dz}{z + \sqrt[4]{z}}$. 10) $\int_{-1}^7 \frac{dz}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$. 11) $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx$. 12) $\int_{-1}^0 9x^2 \ln(x+2) dx$.
- 13) $\int_0^1 4x \arcsin x dx$. 14) $\int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx$. 15) $\int_0^1 x^2 3^x dx$. 16) $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx$.
- 17) $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$.

3.3. Застосування визначного інтеграла

3.3.1. Обчислення площ плоских фігур

Прямокутні координати

Відомо, що визначний інтеграл на відрізку є площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x)$. Якщо графік розташований вищим за вісь Ox (див. рис. 3.4), тобто $f(x) > 0$,

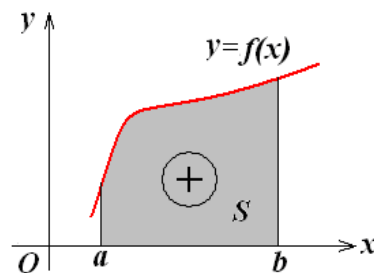


Рис. 3.4

то площа має знак “+” і в цьому випадку шукана площа визначається формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.5)$$

Якщо графік функції $f(x)$ розташований нижчим за вісь Ox (див. рис. 3.5), тобто $f(x) < 0$,

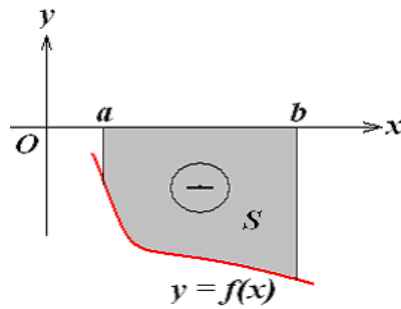


Рис. 3.5

то площа має знак “ - ” і $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Площа фігури, яка обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (за умовою $f_2(x) \geq f_1(x)$ див. рис. 3.6), а також прямими $x = a$ і $x = b$, може бути знайдена за допомогою визначних інтегралів

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (3.6)$$

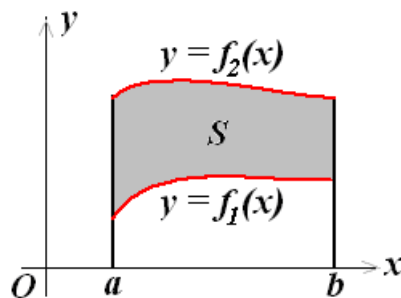


Рис. 3.6.

Приклади.

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = \sin x$ і віссю Ox при $0 \leq x \leq \pi$. Побудуємо дану фігуру (рис.3.7)

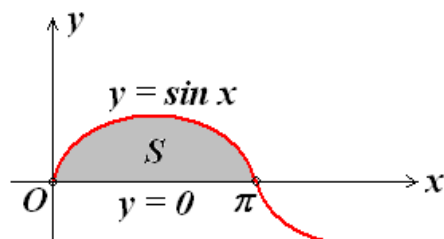


Рис. 3.7.

Використовуючи формулу (6.5), знаходимо шукану площу фігури

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2 \text{ (кв. од.)}$$

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

Побудуємо дану фігуру (рис. 3.8)

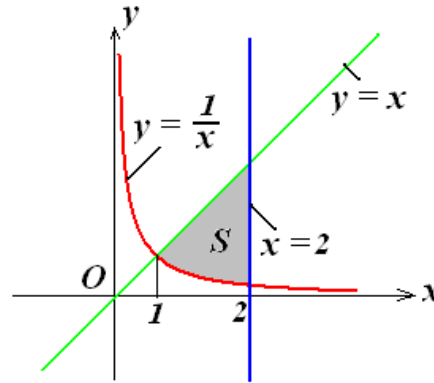


Рис. 3.8.

Знаходимо границі інтегрування : точка перетину ліній $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ має абсцису $x = \pm 1$, отже, проміжок інтегрування - $1 \leq x \leq 2$. За формулою (3.6) визначаємо площу фігури

$$S = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \ln|2| - \frac{1}{2} + \ln|1| = \frac{3}{2} - \ln 2 \text{ (кв. од.)}$$

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно обчислити (рис. 3.9).

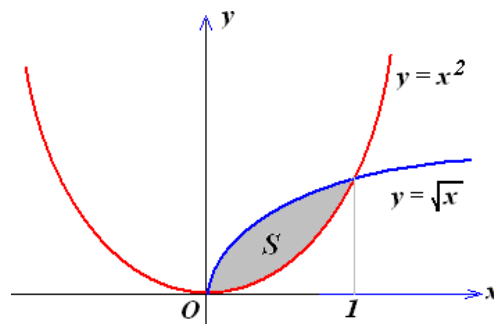


Рис. 3.9.

Знаходимо точку перетину ліній $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$. Розв'язуємо рівняння $x^2 = \sqrt{x}$, маємо $x^4 - x = 0$ або $x(x^3 - 1) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. З рисунка

видно, що границями інтегрування є $0 \leq x \leq 1$ Визначаємо площу фігури, використовуючи формулу (3.6)

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Параметричні координати

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана у параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

прямими $x = a$ і $x = b$ і віссю Ox , то її площа визначається по формулі

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \right|, \quad (3.7)$$

де α і β визначаються з рівності $x(\alpha) = a$ і $x(\beta) = b$.

Приклади.

1. Знайти площу фігури обмеженою еліпсом, який заданий в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$$

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно визначити (рис. 3.10)

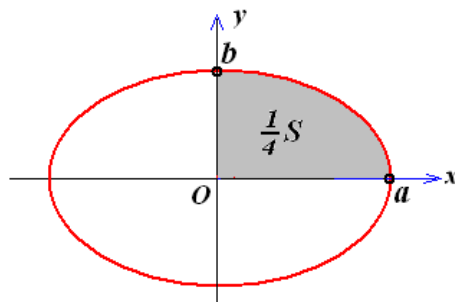


Рис. 3.10.

Знайдемо четверту частину площі S еліпса, яка розташована в першій чверті координатної площини (на рисунку вона зображена сірим кольором). Тут x змінюється від 0 до a , тоді t змінюється від $\pi/2$ до 0. По формулі (3.7) знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \text{ Таким чином } \frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}. \text{ Значить } S = \pi ab. \end{aligned}$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої однієї аркою циклоїди і віссю Ox .

Циклоїда є траєкторія крапки, розташованої на ободі колеса радіусу a , при рівномірному коченні колеса по осі Ox . При одному звороті колеса $0 \leq t \leq 2\pi$ центр колеса переміститься на відстань $2\pi a$ (рис. 3.11).

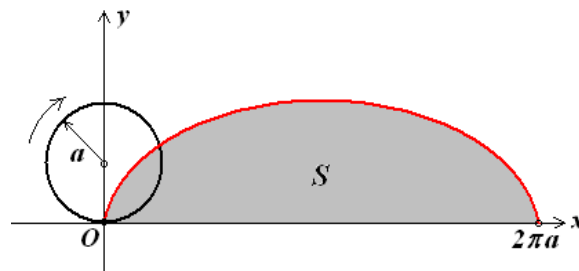


Рис. 3.11.

Рівняння циклоїди в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

При зміні $0 \leq x \leq 2\pi a$ параметр t змінюється в межах $0 \leq t \leq 2\pi$. По формулі (3.7) знаходимо шукану площу

$$\begin{aligned} S &= \int_a^\beta y(t) \cdot x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Полярні координати

В деяких випадках обчислення площ криволінійних фігур зручно проводити в полярних координат.

Полярна система координат визначається завданням точки O (полюс) проміння Or , витікаю чого з точки O (полярній осі) і масштабу для виміру

довжини. Положення точки M на площині визначається в полярній системі координат двома числами: *полярним радіусом* $r = OM$ (рис. 7.12), що виражає довжину відрізка OM у вибраному масштабі, і *полярним кутом* $\varphi = \angle pOM$.

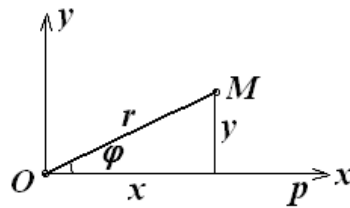


Рис. 3.12.

З рис. 3.12 видно, що незалежно від розміщення точки M на площині мають місце наступні формули переходу:

від полярних координат (r, φ) до декартових (x, y) : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;

від декартових до полярних: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Знайдемо площу криволінійного сектора. Хай крива AB задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причому функція $r = r(\varphi)$ безперервна і невід'ємна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Плоска фігура, яка обмежена кривою AB і двома променями, які складають з полярною віссю кути α і β , називатимемо *криволінійним сектором* (рис. 3.13). Площа S криволінійного сектора визначається формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (3.8)$$

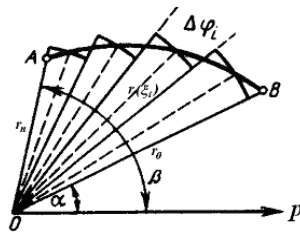


Рис. 3.13.

Доведення. Розіб'ємо довільним чином відрізок $[\alpha, \beta]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \dots < \varphi_n = \beta$, виберемо на кожному частковому відрізку $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ довільно точку ξ_i ($\varphi_{i-1} \leq \xi_i \leq \varphi_i$) і побудуємо кругові сектори з

радіусами $\rho(\xi_i)$. В результаті отримаємо віялоподібну фігуру, площа якої приблизно дорівнює площі S криволінійного сектора:

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n r^2(\xi_i) \Delta\varphi_i,$$

де $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. З іншого боку, площа віялоподібної фігури є інтегральною сумою для інтеграла (3.8). Оскільки функція $r^2(\varphi)$ безперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, то границя цієї суми при $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n} \{\Delta\varphi_i\} \rightarrow 0$ існує і дорівнює інтегралу (3.8).

Отже, і площа криволінійного сектора чисельно дорівнює цьому визначному інтегралу:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n r^2(\xi_i) \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, яка обмежена полярною віссю і першим витком спіралі Архімеда: $r = a\varphi$, де a — позитивне число (рис. 3.12).

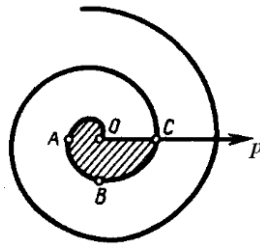


Рис. 3.12.

Розв'язання. При зміні $\angle\varphi$ від 0 до 2π полярний радіус описує криву, що обмежує криволінійний сектор $OABC$. Тому по формулі (3.8) маємо

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Відстань від точки C до полюса рівно $r = 2\pi a$. Тому круг радіусу OC має площу $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi^3 a^2 = 3 \cdot S_{OABC}$, тобто площа фігури, обмеженою полярною віссю і першим витком спіралі Архімеда, рівна $1/3$ площі круга з радіусом, рівним найбільшому з полярних радіусів витка. До цього виводу прийшов ще Архімед.

Приклад 2. Другий закон Кеплера (закон площ) про рух планет сонячної системи свідчить: площа, що описується радіусом-вектором планети, проведеному з центру Сонця, зростає пропорційно часу.

Користуючись цим законом площ, покажемо, що швидкість планети V_{Π} в найближчій до Сонця точці орбіти Π (перигелій) буде найбільшою, а в найбільш віддаленій від Сонця точці A (афелій) – швидкість буде найменшою (рис. 3.15)

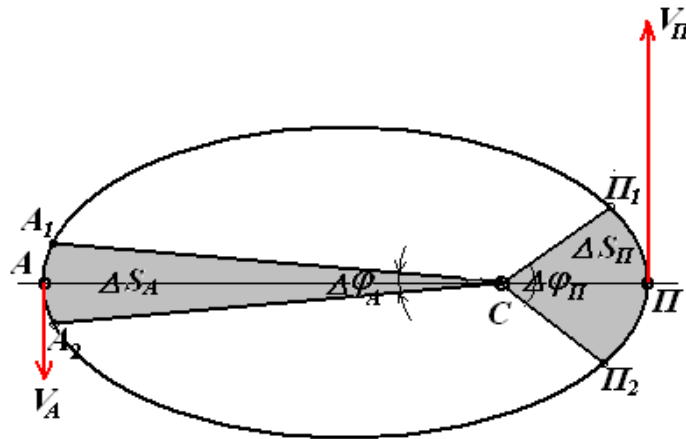


Рис. 3.15.

Розглянемо переміщення планети в околицях точок A (афелій) і Π (перигелій), за законом Кеплера площі секторів $S_{A_1CA_2} = \Delta S_A$ і $S_{\Pi_1C\Pi_2} = \Delta S_{\Pi}$ рівні між собою, тобто $\Delta S_A = \Delta S_{\Pi}$,

де ΔS_A - площа сектора, що спирається на дугу A_1A_2 , довжина цієї дуги дорівнює $A_1A_2 = r_A \Delta \varphi_A$, аналогічно ΔS_{Π} - площа сектора, що спирається на дугу $\Pi_1\Pi_2$, довжина цієї дуги дорівнює $\Pi_1\Pi_2 = r_{\Pi} \Delta \varphi_{\Pi}$.

З формули для площі криволінійного сектора (6.8) витікає, що

$$r_A^2 \Delta \varphi_A = r_{\Pi}^2 \Delta \varphi_{\Pi}$$

або $r_A(r_A \Delta \varphi_A) = r_{\Pi}(r_{\Pi} \Delta \varphi_{\Pi})$, тобто $r_A A_1A_2 = r_{\Pi} \Pi_1\Pi_2$. Тут A_1A_2 і $\Pi_1\Pi_2$ переміщення планети за один і той же проміжок часу Δt в околиці крапок A і Π орбіти. Розділимо попередню рівність на проміжок часу :

$$r_A \frac{A_1A_2}{\Delta t} = r_{\Pi} \frac{\Pi_1\Pi_2}{\Delta t}.$$

Відношення переміщення планети A_1A_2 до часу Δt є швидкість планети в точці A , аналогічне відношення переміщення $\Pi_1\Pi_2$ до часу Δt є швидкість планети в точці Π , тобто

$$\frac{A_1A_2}{\Delta t} = V_A, \quad \frac{\Pi_1\Pi_2}{\Delta t} = V_\Pi.$$

В результаті $r_A V_A = r_\Pi V_\Pi$ або $CA \cdot V_A = CP \cdot V_\Pi$, звідки витікає, що

$$\frac{V_A}{V_\Pi} = \frac{CP}{CA} < 1.$$

3.3.2. Визначення довжини дуги плоскої кривої

Прямокутні координати

Хай в прямокутних координатах задана плоска крива AB , рівняння якої $y = f(x)$, де $a \leq x \leq b$. Якщо $f(x)$ і $f'(x)$ безперервні, то такі криві називаються *гладкими*. Під довжиною дуги AB розуміється границя, до якої прагне довжина ламаної лінії, вписаної в цю дугу, коли число сторін ламаною необмежено зростає, а довжина найбільшої із сторін ламаною прагне до нуля.

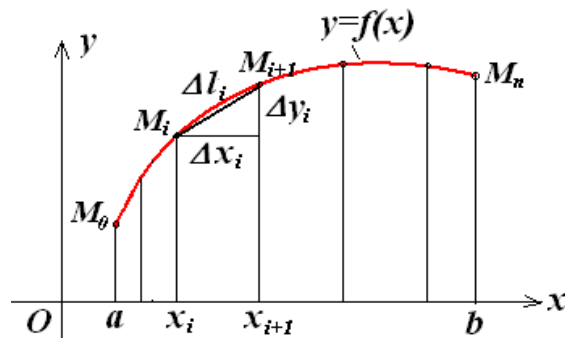


Рис. 3.16.

Довжина ламаної лінії, яка відповідає дузі M_0M_n , може бути знайдена як сума

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \text{ де } \Delta l_i - \text{довжина сторони ламаною на ділянці } [x_i, x_{i+1}] \text{ (рис. 3.16).}$$

Тоді довжина дуги M_0M_n дорівнює $L_{M_0M_n} = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta l_i$.

З геометричних міркувань: $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$, але в той

же час $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$.

Тоді $L_{M_0 M_n} = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Тобто довжина дуги $M_0 M_n$ при

зміні x від a до b дорівнює

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.9)$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кубічної параболи $y^2 = x^3$, що знаходиться між точками $A(0; 0)$ і $B(4; 8)$.

Оскільки $y = x^{\frac{3}{2}}$, то $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тому шукана довжина дуги згідно формулі (3.9)

визначається таким чином

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Якщо рівняння кривої задане параметрично, то з врахуванням правил обчислення похідної параметрично заданої функції, з формули (3.9) отримуємо

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \end{aligned}$$

де $x = x(t)$, $a = x(\alpha)$ і $y = y(t)$, $b = y(\beta)$. Таким чином, якщо рівняння кривої задане в параметричній формі, то довжина кривої знаходиться по формулі

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt . \quad (3.10)$$

Приклад. Знайти довжину першої арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Знаходимо похідні $x' = a(1 - \cos t)$ і $y' = a \sin t$. По формулі (3.10)

довжина арки циклоїди

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a \left(-2 \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a . \end{aligned}$$

Якщо задана просторова крива, і $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt . \quad (3.11)$$

Полярні координати

Хай крива задана в полярних координатах, $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причому функція $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ безперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$. Скористаємося формулами зв'язку між полярними і декартовими координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тоді рахуючи кут φ параметром, можна задати рівняння кривої в параметричній формі

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

і довжину кривої знаходимо по формулі (3.10), виконавши відповідні перетворення

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y'_\varphi = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

Тому $\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} = \sqrt{(r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2} =$
 $= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$

В результаті довжина кривої визначається формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (3.12)$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди $r = 2a(1 + \cos \varphi)$. Кардіоїда, яка зображена на рисунку

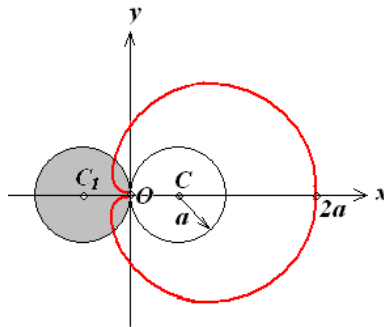


Рис.3.17

може бути отримана як траєкторія точки кола C_1 , що котиться без ковзання по колу C того ж радіусу a . Коли φ пробігає проміжок $(-\pi, +\pi)$, кардіоїда описується повністю. Довжина її згідно (7.12) рівна

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{4a^2(1 + \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 4a \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16a$$

Таким чином, довжина кардіоїди дорівнює восьмикратному діаметру виробляючого круга.

3.3.3. Обчислення об'єму тіла

Обчислення об'єму тіла по відомих площах його поперечних перетинів

Хай є тіло об'єму V . Площа будь-якого поперечного перетину тіла S , відома як безперервна функція $S = S(x)$. Розіб'ємо тіло на “шари” поперечними

перетинами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на якому-небудь проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ функція $S(x)$ безперервна, то набуває на ній найбільшого і найменшого значень. Позначимо їх відповідно M_i і m_i .

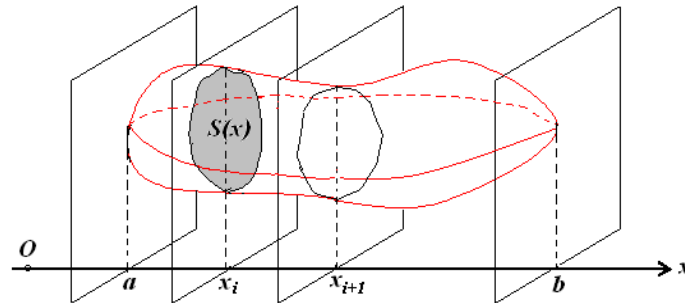


Рис. 3.18

Якщо на цих найбільшому і найменшому перетинах побудувати циліндри із утворюючими, паралельними осі x , то об'єми цих циліндрів будуть відповідно рівні $M_i \Delta x_i$ і $m_i \Delta x_i$, тут $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Виробивши такі побудови для всіх відрізків розбиття, отримаємо циліндри, об'єми яких рівні відповідно $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ і $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$.

При прагненні до нуля кроку розбиття λ , ці суми мають загальну границю:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx.$$

Таким чином, об'єм тіла може бути знайдений по формулі:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (3.13)$$

Недоліком цієї формули є те, що для знаходження об'єму необхідно знати функцію $S(x)$, що вельми проблематично для тіл складної форми.

Об'єм тіла обертання

Розглянемо криву, задану рівнянням $y = f(x)$. Передбачимо, що функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо відповідну їй криволінійну трапецію з підставами a і b обернути довкола осі Ox , то отримаємо так зване *тіло обертання* (рис. 7.19).

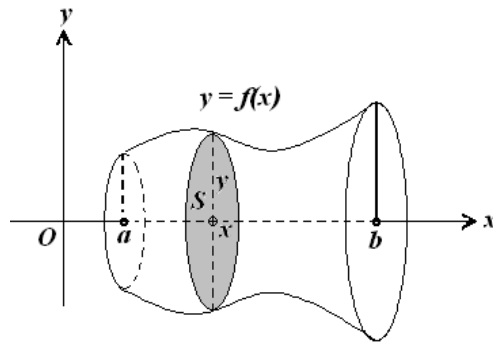


Рис. 3.19.

Перетин цього тіла площиною, перпендикулярній осі Ox , проведеною через довільну точку x осі Ox ($x \in [a, b]$), є круг з радіусом $y = f(x)$. Отже, площа поперечного перетину $S(x) = \pi y^2$.

Застосовуючи формулу (3.13) об'єму тіла, для якого відомі площі поперечних перетинів, отримуємо

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (3.14)$$

Приклад. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ (рис. 3.20).

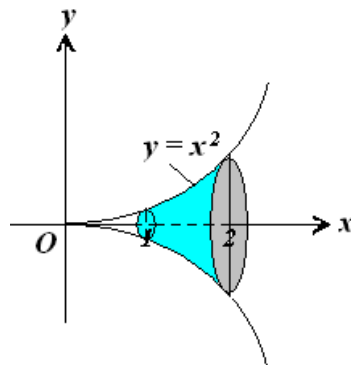


Рис. 3.20.

Розв'язання. За формулою (3.14) знаходимо

$$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{5} (2^5 - 1).$$

3.3.4. Механічні застосування визначного інтеграла

Центр тяжіння плоскої фігури

Згідно закону унесвітнього тяжіння всі тіла притягуються до Землі з силою, пропорційній масі тіла (m - маса тіла і $g = 9,81 \text{ м/с}^2$), ця сила називається вагою тіла (силою тяжіння).

При розгляданні рівноваги і руху тіл складної форми поважно знати положення центру тяжіння цього тіла.

Розглянемо визначення положення центру тяжіння матеріальної пластини ABB_1A_1 у вигляді криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою AB , яка задана явним рівнянням $y = y(x)$, і лініями $x = a$, $x = b$ ($a < b$) і $y = 0$ (Рис. 3.21).

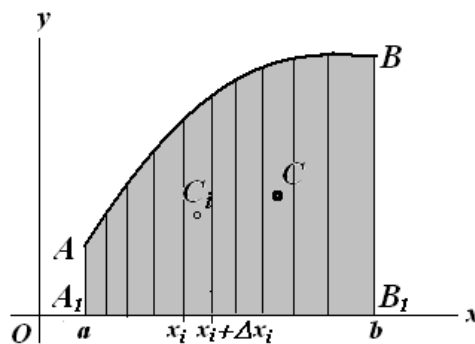


Рис. 3.21

Передбачимо, що поверхнева щільність матеріалу пластини постійна, тобто фігура однорідна. Можна для визначеності вважати, що питома вага матеріалу пластини дорівнює 1 ($\gamma = \rho g = 1$, ρ – щільність матеріалу), тоді маса пластини або її будь-якій частині вимірюється відповідною площею.

Для визначення положення центру тяжіння проведемо розбиття даної пластини на вертикальні смуги з основами Δx_i $i = 1, 2, \dots, n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$). Центр тяжіння кожної смуги визначається координатами

$$\hat{x}_i = x_i, \quad \hat{y}_i = \frac{1}{2} y_i,$$

де $\hat{x}_i$ і $\hat{y}_i$ - координати точки кривої $y = y(x)$ ($\hat{y}_i = y(\hat{x}_i)$).

Центром тяжіння даної однорідної пластини ABB_1A_1 , також як для будь-якого іншого тіла, володіє цією властивістю, що її положення не залежить від повороту даної пластини на будь-який кут по відношенню до вертикалі. Як

показано в курсі теоретичної механіки координати центру тяжіння тіла визначається формулами

$$x_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}, \quad y_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}, \quad (3.15)$$

коли кількість розбиття прагне до нескінченності, а довжина елементів розбиття $\Delta x_i \rightarrow 0$. У формулах (3.15) - площа i -ої смуги розбиття

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} \Delta x_i (y_i + y_{i+1}), \quad (x_i = x_{i+1}, \quad y_i = \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1})).$$

Переходячи до границі у формулах (3.15), коли $n \rightarrow \infty$ і $\Delta x_i \rightarrow 0$, відповідні суми є інтегральними, тому координати центру тяжіння криволінійної трапеції визначається формулами

$$x_C = \frac{\int_a^b x y dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_C = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}, \quad (3.16)$$

де $y = y(x)$ – рівняння кривої AB .

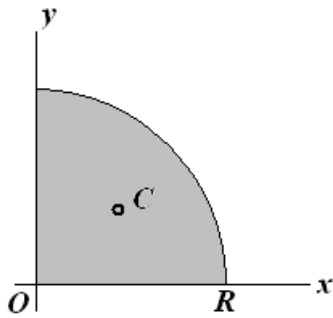
Зауваження. 1. Якщо плоска фігура має вісь або центр симетрії, то центр тяжіння такої фігури знаходиться на осі або в центрі симетрії.

2. Якщо тіло складається з частин, центри тяжіння яких відомі, то центр тяжіння складеної фігури визначається по формулах

$$x_C = \frac{1}{\sum_{i=1}^k S_i} \sum_{i=1}^k x_i S_i, \quad y_C = \frac{1}{\sum_{i=1}^k S_i} \sum_{i=1}^k y_i S_i,$$

тут k – кількість складових частин; S_i і x_i, y_i – відповідно площа і координати центру тяжіння i -ої частини. Якщо ж плоска фігура має отвори, то центр тяжіння цієї фігури визначається по цих же формулах, проте площі, відповідні отворах мають бути негативними.

Приклад. Визначити координати центру тяжіння чверті круга $x^2 + y^2 \leq R^2$ ($x, y > 0$). Зобразимо дану плоску фігуру (див. рисунок).



Площа чверті круга $S = \int_0^R y dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2}{4}$.

Визначаємо інтеграли чисельників формул (3.16) (ці інтеграли називаються *статичними моментами*)

$$\begin{aligned} \int_0^R xy dx &= \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) = \\ &= -\frac{1}{3} (R^2 - x^2) \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R = \frac{R^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^R y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{2} \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{R^3}{3}.$$

Таким чином, координати центру тяжіння чверті круга рівні

$$x_C = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}, \quad y_C = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

Завдання для самостійного розв'язання.

Знайти координати центру тяжіння фігури, обмеженої лініями:

1) $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}, \quad x = 0, \quad y = 0. \quad 2) \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0, \quad y = \cos x.$

3) $y = 2x - x^2, \quad y = 0. \quad 4) \quad y = \frac{2}{\pi}x, \quad y = \sin x.$

Робота і потужність сили

Для характеристики дії сили, що діє на тіло при деякому його переміщенні, вводиться поняття про роботу сили. Розглянемо прямолінійний рух тіла M уздовж осі Ox під дією змінної сили $F(x)$ з положення x_0 в положення x_1 (рис. 6.22). Прикладом змінної сили, яка залежить від переміщення x , є сила пружності пружини

$$F_{\text{упр}} = cx, \quad (3.17)$$

де c – жорсткість пружини, x – деформація цієї пружини. Іншими прикладами таких сил є сила утиску, сила Кулона взаємодії між зарядами, ці сили залежать від відстані між тілами (зарядами).

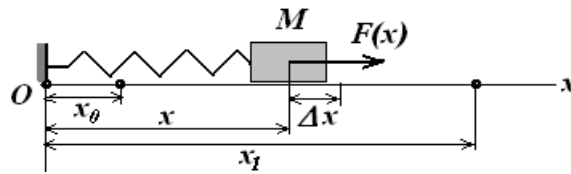


Рис. 3.22.

Введемо спочатку поняття про елементарну роботу сили F на нескінченно малому переміщенні Δx

$$\Delta A = F \cdot \Delta x.$$

Робота сили на будь-якому кінцевому переміщенні як інтегральна сума відповідних елементарних робіт рівна

$$A_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x) dx. \quad (3.18)$$

Одиницею виміру роботи в системі СІ є джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ н м}$).

Потужність. Потужністю називається величина, що визначає роботу, яку виконує сила за одиницю часу. Якщо робота здійснюється рівномірно, то потужність є

$$N = \frac{A}{t}, \quad (3.19)$$

де t – час, протягом якого вироблена робота. У загальному випадку

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F dx}{dt} = Fv, \quad (3.20)$$

де v – швидкість тіла.

Одиницею виміру потужності в системі СІ є ват ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/сек}$).

Роботу, яку призводить машина, вимірюється добутком її потужності на час роботи. Звідси в техніці виникла одиниця виміру роботи кіловат.

Приклади. 1) Обчислити роботу, яку необхідно витратити, щоб підняти тіло маси m з поверхні Землі на висоту h (радіус Землі $R = 6400 \text{ км}$). За допомогою

отриманого результату визначити другу космічну швидкість (швидкість, при якій тіло, що вертикально піднімається, може піднятися на будь-яку висоту).

Розв'язання. На ракету, що має масу m , за законом унесвітнього тяжіння діє сила $F = G \frac{mM}{x^2}$, де G – гравітаційна постійна; M – маса Землі; m – маса ракети; x – відстань ракети до центру Землі, $g = G \frac{M}{R^2} = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Шукана робота сили тяжіння при виводі ракети з поверхні Землі на висоту h дорівнює

$$A_{R \rightarrow R+h} = \int_R^{R+h} G \frac{mM}{x^2} dx = GmM \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -\frac{GmM}{x} \Big|_R^{R+h} = GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GmMh}{R(R+h)}$$

або, враховуючи значення прискорення вільного падіння, маємо

$$A_{R \rightarrow R+h} = \frac{GmMh}{R(R+h)} = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$$

В той же час робота дорівнює зміні кінетичній енергії ракети

$$A_{R \rightarrow R+h} = T_{R+h} - T_R = \frac{mV^2}{2}, \text{ враховуючи, що стартова кінетична енергія дорівнює}$$

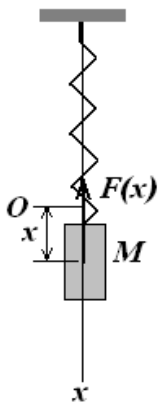
нулю, а V – швидкість ракети на висоті h над поверхнею Землі. Таким чином, швидкість ракети V на висоті h визначається з рівняння

$$A_{R \rightarrow R+h} = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}} = \frac{mV^2}{2}, \text{ звідки } V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{h}{R}}}.$$

Аби розрахувати другу космічну швидкість, яку треба надати ракеті на поверхні Землі для подолання земного тяжіння, потрібно перейти до границі $h \rightarrow \infty$ у останньому виразу

$$V^* = \sqrt{2gR} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ (м/с)}.$$

2) Обчислити роботу, яку треба витратити, щоб розтягнути пружину, яка знаходиться в положенні рівноваги, на 10 см. Відомо, що при розтягуванні пружини на 1 см сила натягнення дорівнює 5 Н.



Рішення. Пружна сила, з якою діє пружина на тіло, підкоряється закону Гука, згідно якому $F = c x$, де c – жорсткість пружини, а x – подовження пружини. З умови задачі знаходимо жорсткість пружини c . Оскільки при розтягуванні пружини на 0,01 м сила пружного натягнення рівна 5 Н, то $5 \text{ Н} = c \cdot 0,1 \text{ м}$. Отже, $c = 500 \text{ Н/м}$ і сила пружності пружини дорівнює $F(x) = 500 x$, Н

Шукана робота сили пружності при розтягуванні пружини на 10 см = 0,1 м обчислюється за формулою:

$$A_{0 \rightarrow 0,1} = \int_0^{0,1} 500 x dx = 250 x^2 \Big|_0^{0,1} = 2,5 \text{ (нм)} = 2,5 \text{ (дж)}$$

Приклади задач з економічним застосуванням

Задача 1. Нехай безперервна на відрізку $[0, 7]$ функція $y = f(x)$ встановлює продуктивність праці робітника в будь-який момент часу x , що відраховується від початку робочого дня в годинах ($f(x)$ вимірюється кількістю продукції за годину роботи). Виразити виробіток робітника за третю годину роботи.

Рішення. Проміжок часу $[2, 3]$ точками $2 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 3$ розбиваємо на n довільних елементарних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ з довжинами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Вироблення за третю годину роботи розглядаємо як суму виробіток за всі n відрізки. При досить великому n в кожному з них продуктивність не встигає змінитися, а тому вироблення за i -й проміжок часу приблизно дорівнює $f(x_i)\Delta x_i$. Сумуючи такі добутки по всім i від 1 до n і переходячи до межі при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, отримуємо шуканий виробіток за третю годину роботи:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_2^3 f(x) dx$$

(од. продукції).

Задача 2. Нехай $f(x)$ – навантаження в кіловатах на трансформаторну підстанцію у будь-який момент часу x , що відраховується у годинах від початку доби. Знайти витрати електроенергії споживачами за проміжок часу від 0 до 24 годин, якщо $f(x)$ є безперервною на цьому проміжку.

Рішення. Відрізок $[0, 24]$ розбиваємо на n елементарних відрізків. За досить короткий проміжок часу $[x_{i-1}, x_i]$, лежачий між 0 і 24 годинами, споживану потужність можна вважати постійною, тому витрата електроенергії протягом цього проміжку часу приблизно дорівнює $f(x_i) \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, тоді як витрата електроенергії за добу буде дорівнювати $A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_0^{24} f(x) dx$ (кВт.год.)

Задача 3. Нехай $f(x)$ – щільність руху вантажів у будь-якій точці залізниці, що знаходиться на відстані x від обраного початку залізниці (вимірюється вагою в тоннах всіх вантажів, що проходять за рік через цю точку). Знайти річний обсяг перевезень по залізниці від її початку до L -го кілометра, припускаючи $f(x)$ безперервної на відрізку $[0, L]$.

Рішення. Відрізок $[0, L]$ розбиваємо на n елементарних відрізків. При достатньо малій довжині $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i -го з них щільність руху вантажів в цьому проміжку не змінюється, а річний об'єм перевезень тут приблизно дорівнює $f(x_i) \Delta x_i$. тому шуканий об'єм перевезень по залізниці від її початку до L -го кілометра дорівнює

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_0^L f(x) dx$$

Задача 4. Функція $y = f(x)$ встановлює інтенсивність хлібозаготівлі в будь-який момент часу x , що відраховується від початку хлібозаготівельної кампанії ($f(x)$ вимірюється кількістю зерна, що надходить за одиницю часу). Знайти

обсяг хлібозаготівлі за період $[0, T]$, вважаючи $f(x)$ безперервною на цьому відрізку.

Рішення. У цьому прикладі ми маємо повне право говорити про швидкості потоку зерна в склади заготівельних пунктів в будь-який момент часу: потік цей тече безупинно. Відрізок $[0, T]$ розбиваємо на n елементарних відрізків. Протягом часу $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) буде прийнято зерна $f(x_i)\Delta x_i$. Тут ми помножимо час Δx_i на швидкість потоку $f(x_i)$, начебто зерно поступало рівномірно. Ми маємо на це право, так як за доволі малий проміжок $[x_{i-1}, x_i]$ величина швидкості $f(x_i)$ не встигає змінитися. Все ж таки за період $[0, T]$ буде заготовлено зерна

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_0^T f(x) dx$$

Це і є наростаючий результат заготовленого зерна.

Зауваження. Змінні, що фігурують у більшості розглянутих задач, на практиці змінюються дискретно. Однак, для того, щоб можна було при вирішенні задачі використовувати певний інтеграл, ми змушені складати ідеалізовану модель задачі, в якій зазначені змінні розглядаються як безперервні. Це слід враховувати і надалі, при вирішенні інших завдань із економіки із застосуванням визначного інтегралу та диференціальних рівнянь.

4. Диференціальні рівняння

4.1. Основні поняття і визначення

При дослідженні різних явищ і процесів взаємодії між різними середовищами (твердими, рідкими і газоподібними) в області механіки, фізики, хімічних і харчових технологій часто користуються математичними моделями, що виражають фундаментальні закони збереження. Як правило, ці математичні моделі призводять до рівнянь, які зв'язують незалежні змінні, що характеризують процес або явище, з будь-якою функцією цих змінних і похідними цієї функції різних порядків. Такі рівняння називаються *диференціальними*.

Як приклад можна розглянути простий випадок руху матеріальної точки. Основний закон механічної взаємодії описується законом Ньютона $m\ddot{x} = F$ або $-m\ddot{x} + F = 0$, який виражає баланс діючих на точку сил (сила інерції $-m\ddot{x}$ урівноважується фізичною силою F). З диференціального числення відомо, що прискорення точки при прямолінійному її русі визначається другою похідною від поточної координати $x(t)$, тобто $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Тому математична модель руху матеріальної точки представляється наступною залежністю

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, x'), \quad (4.1)$$

тут мається на увазі, що в загальному випадку діюча на точку сила F може залежати від часу t , переміщення x і швидкості x' цієї точки. Рівняння (4.1) є диференціальним рівнянням прямолінійного руху матеріальної точки.

Рішенням диференціального рівняння називається функція, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність. Так, для рівняння (4.1) у разі постійної сили, рішенням є функція $x(t) = \frac{at^2}{2} + c_1t + c_2$, де $a = \frac{F}{m}$ і c_1, c_2 - довільні постійні.

Розглянемо деякі загальні відомості про диференціальні рівняння (ДР).

Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається *звичайним* диференціальним рівнянням, якщо ж незалежних змінних дві або більш, то таке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням у *часткових похідних*.

Найвищий порядок похідних, таких, що входять в рівняння, називається порядком диференціального рівняння.

Приклади.

1. Рівняння (4.1) - звичайне рівняння другого порядку;

2. Закон зміни температури $T(t)$ тіла залежно від часу t , описується рівнянням $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, (T_0 - температура середовища, що охолоджує, k - коефіцієнт пропорційності) - рівняння першого порядку;

3. Залежність маси x речовини, яка вступає в хімічну реакцію, від часу t у багатьох випадках описується рівнянням $\frac{dx}{dt} = kx$ (k - коефіцієнт пропорційності) - звичайне диференціальне рівняння 1 - го порядку.

4. Рівняння конвективної дифузії, що описує процес масопереносу в рухомому середовищі, широко застосовується для опису функціонування технологічних систем, має вигляд

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V_x \frac{\partial c}{\partial x} + V_y \frac{\partial c}{\partial y} + V_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

тут c - концентрація речовини в потоці, V_x, V_y, V_z - компоненти швидкості середовища, D - коефіцієнт дифузії. Це рівняння є диференціальним рівнянням в часткових похідних другого порядку.

4.2. Диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення, що зв'язує функцію, її першу похідну і незалежну змінну, тобто співвідношення виду :

$$F(x, y, y') = 0. \quad (4.1)$$

Якщо таке співвідношення можна перетворити до виду

$$y' = f(x, y) \quad (4.2)$$

то це диференціальне рівняння першого порядку називається *рівнянням, яке розв'язане відносно похідної*.

Перетворимо такий вираз далі:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцію $f(x, y)$ представимо у виді: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$; тоді при

підстановці в отримане вище рівняння маємо:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4.3)$$

- це так звана *диференціальна форма* рівняння першого порядку.

Далі розглянемо детальніше типи рівнянь першого порядку і методи їх розв'язання.

Інтегрування диференціального рівняння в загальному випадку призводить до нескінченної множини рішень, які відрізняються один від одного постійною величиною. Наприклад, рішеннями рівняння $y' = 4x$ є функції $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 - \sqrt{3}$ і взагалі $y = 2x^2 + c$, $c - \text{const}$. Останній вираз є загальний розв'язок початкового диференціального рівняння. Так, щоб розв'язок диференціального рівняння було цілком визначеним, необхідно, щоб цей розв'язок задовольняють умовам однозначності. Умова того, що при $x = x_0$ шукана функція $y = y(x)$ (розв'язок диференціального рівняння) дорівнює заданому числу y_0 називається *початковою умовою*. Початкова умова для диференціального рівняння першого порядку записується у виді

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{чи} \quad y|_{x=x_0} = y_0. \quad (4.4)$$

Задача, яка полягає у визначенні рішення диференціального рівняння першого порядку (8.1) і яка задовольняє заданій початковій умові (8.4), називається *задачею Коші*.

Рівняння із змінними, що розділяються

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається рівнянням із змінними, що розділяються, якщо його можна записати у виді

$$y' = \alpha(x)\beta(y). \quad (4.5)$$

Таке рівняння можна представити також у виді:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0, \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0, \quad \text{чи}$$

$$\frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0, \quad \text{якщо } \beta(y) \neq 0.$$

Перейдемо до нових позначень $\alpha(x) = -X(x)$; $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$;

Отримуємо: $X(x)dx + Y(y)dy = 0$; або $\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$.

Після знаходження відповідних інтегралів виходить загальний розв'язок диференціального рівняння із змінними, що розділяються.

Якщо задані початкові умови, то при їх підстановці в загальний розв'язок знаходиться постійна величина C , а, відповідно, і частковий розв'язок.

Приклади. 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння :

$$yy' = \frac{-2x}{\cos y}.$$

Розділимо змінні

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \quad \text{чи} \quad y \cos y dy = -2x dx, \quad \text{тоді} \quad \int y \cos y dy = -2 \int x dx.$$

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться по частинах

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C \quad \text{і} \quad y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- це і є загальний інтеграл початкового диференціального рівняння. Щоб перевірити правильність отриманого результату здиференціюємо його по змінній x .

$$y' \sin y + yy' \cos y - y' \sin y + 2x = 0 \quad \text{чи} \quad yy' = -\frac{2x}{\cos y}, \quad \text{що підтверджує}$$

вірність рішення.

2.⁰ Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{y}{y'} = \ln y$ за умовою $y(2) =$

1 (задача Коші).

$$\text{Маємо } \frac{y dx}{dy} = \ln y, \quad dx = \frac{\ln y dy}{y} \quad \text{або} \quad \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y} \quad \text{звідки}$$

$$x + C = \int \ln y d(\ln y) \quad \text{і} \quad x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при $y(2) = 1$ отримуємо $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}$; $\Rightarrow 2 + C = 0$; $\Rightarrow C = -2$;

Разом: $2(x - 2) = \ln^2 y$; або $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частковий розв'язок;

Перевірка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, разом

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}} (\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y.$$

3. Розв'язати рівняння $y' = y^{2/3}$.

Маємо $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$, $y^{-2/3} dy = dx$, $\int y^{-2/3} dy = \int dx$ або

$$3y^{1/3} = x + C. \quad \text{Загальний розв'язок має вигляд } y = \frac{1}{27}(x + C)^3.$$

4. Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Маємо $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$, $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$, $\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ за умовою $y(1) = 0$ (задача Коші).

Маємо $\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$, $ydy + xe^y dx = 0$, $\frac{y}{e^y} dy = -x dx$, $\int \frac{y}{e^y} dy = -\int x dx$;

Інтеграл, що стоїть в лівій частині братимемо по частинах

$$\int ye^{-y} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y \quad e^{-y} dy = dv \\ du = dy \quad v = -e^{-y} \end{array} \right\} = -e^{-y} y - \int -e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y}(y + 1).$$

$$e^{-y}(y + 1) = \frac{x^2}{2} + C_0, \quad 2e^{-y}(y + 1) = x^2 + C.$$

Якщо $y(1) = 0$, то $2e^0(0 + 1) = 1 + C$; $\Rightarrow 2 = 1 + C$; $\Rightarrow C = 1$;

Таким чином, розв'язок задачі Коші є $2e^{-y}(y + 1) = x^2 + 1$.

6.⁰ Розв'язати рівняння $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

$y' + \sin(x + y) - \sin(x - y) = 0$. Спростимо це рівняння

$$y' - 2 \sin \frac{x - y - x - y}{2} \cos \frac{x - y + x + y}{2} = 0 \quad \text{чи} \quad y' + 2 \sin y \cos x = 0, \text{ або}$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2 \cos x dx; \quad \int \frac{dy}{\sin y} = -2 \int \cos x dx;$$

Проводячи інтегрування, отримуємо загальний інтеграл:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = -2 \sin x + C.$$

7. Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$.

Перетворимо задане рівняння: $2xe^{-x^2} + \frac{dy}{y dx} = 0$, $2xe^{-x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0$

чи $\int 2xe^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{y} = C$, $-e^{-x^2} + \ln|y| = C$.

Отримали загальний інтеграл цього диференціального рівняння. Якщо з цього співвідношення виразити шукану функцію y , то отримаємо загальний розв'язок.

Однорідні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ називається однорідним диференціальним рівнянням першого порядку, якщо функція $f(x, y)$ може бути представлена у виді

$$y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.6)$$

В цьому випадку вводиться нова змінна $u = \frac{y}{x}$ або $y = ux$, звідки

$y' = u'x + ux'$ і початкове диференціальне рівняння перетвориться до виду

$$u'x + ux' = \varphi(u), \quad u'x + u = \varphi(u), \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

Таким чином, отримали рівняння із змінними, що розділяються, відносно невідомої функції u .

$$\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Далі, замінивши допоміжну функцію u на її вираз через x і y і, якщо знайти інтеграли, отримаємо загальне рішення однорідного диференціального рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Введемо допоміжну функцію u

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Відмітимо, що введена нами функція u завжди позитивна, оскільки інакше втрачає зміст початкове диференціальне рівняння, що містить $\ln u = \ln \frac{y}{x}$.

Підставляємо в початкове рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1), \quad u'x + u = u \ln u + u, \quad u'x = u \ln u.$$

Розділяємо змінні: $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x}.$

Інтегруючи, отримуємо: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходячи від допоміжної функції назад до функції y , отримуємо загальне рішення:

$$y = xe^{Cx}.$$

Лінійні рівняння

Диференціальне рівняння називається *лінійним* відносно невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у виді:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{4.7}$$

при цьому, якщо права частина $Q(x)$ дорівнює нулю, то таке рівняння називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням, якщо права частина $Q(x)$ не дорівнює нулю, то таке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням.

$P(x)$ і $Q(x)$ - функції безперервні на деякому проміжку $a < x < b$.

Для інтегрування лінійних неоднорідних рівнянь ($Q(x) \neq 0$) застосовуються в основному два методи: метод Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод Бернуллі.

Суть методу полягає в тому, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

$$\text{При цьому очевидно, що } y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Підставляючи y' в початкове рівняння, отримуємо:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x) \quad \text{чи} \quad u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x).$$

Далі слідує важливе зауваження - оскільки первісна функція була представлена нами у вигляді добутку, то кожен із співмножників, що входять в цей добуток, може бути довільним, вибраним на наш розсуд.

$$\text{Виберемо функцію } u \text{ так, щоб виконувалася умова } \frac{du}{dx} + P(x)u = 0.$$

Таким чином, можна отримати функцію u , зінтегруючи отримане диференціальне рівняння:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx, \quad \ln|u| = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C = 1/C_1.$$

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо одержаний вираз для функції u в початкове рівняння $u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$ з урахуванням того, що вираз, якій стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x), \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx.$$

Інтегруванням, можемо знайти функцію v :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1, \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2.$$

Тобто була отримана друга складова добутку $y = uv$, який і визначає шукану функцію.

Підставляючи набутих значень, отримуємо:

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа рішення неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають методом *варіації довільної постійної*.

Шукається розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку :

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Перший крок цього методу полягає у відкиданні правої частини рівняння і заміні її нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далі знаходиться розв'язок цього однорідного диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, щоб знайти відповідне рішення неоднорідного диференціального рівняння, вважатимемо постійну C_1 деякою функцією від x .

Тоді за правилами диференціювання добутку функцій отримуємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Підставляємо отримане співвідношення в початкове рівняння

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

З цього рівняння визначимо змінну функцію $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx;$$

Інтегруванням, отримуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C;$$

Підставляючи це значення в початкове рівняння, отримуємо:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

Таким чином, ми отримали результат, повністю співпадаючий з результатом розрахунку по методу Бернуллі.

При виборі методу рішення лінійних диференціальних рівнянь слід керуватися простотою інтегрування функцій, що входять в початковий інтеграл.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Спочатку приведемо це рівняння до стандартного виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Застосуємо отриману вище формулу: $P = \frac{1}{x^2}$, $Q = ae^{\frac{1}{x}}$. Тоді

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right) \quad \text{чи} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\int a dx + C \right)$$

звідки $y = e^{\frac{1}{x}} (ax + C)$.

Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + Py = Q \cdot y^n, \tag{4.8}$$

де P і Q - функції від x або постійні числа, а n - постійне число, не рівне 1.

Для розв'язання рівняння Бернуллі застосовують підстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, за

допомогою якої, рівняння Бернуллі приводиться до лінійного.

Для цього розділимо початкове рівняння на y^n .

$$\frac{y'}{y^n} + P \frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Застосуємо підстановку, врахувавши, що $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q \quad \text{чи} \quad z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q.$$

Тобто отримано лінійне рівняння відносно невідомої функції z .

Рішення цього рівняння шукатимемо у виді:

$$z = e^{-\int P dx} \left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C \right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q, \quad P_1 = -(n-1)P.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Розділимо рівняння на xy^2 : $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

$$\text{Вважаємо } z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{y'}{y^2}. \quad -z' + \frac{1}{x}z = \ln x, \quad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Вважаючи $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$, знайдемо

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right), \quad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right),$$

$$z = x \left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right), \quad z = x \left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right),$$

$$z = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

Виробивши зворотну підстановку, отримуємо:

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

Розділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x.$$

Вважаємо $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y'$, $y' = 2\sqrt{y} z'$,

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y} z' - \frac{4}{x} z = x, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Розглянемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dx}{x} + C_1, \quad \ln z = 2 \ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Вважаємо $C = C(x)$ і підставляємо отриманий результат в лінійне неоднорідне рівняння, з урахуванням того, що:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2 C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \quad C(x) = \frac{1}{2} \ln x + C_2;$$

Отримуємо: $z = x^2 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right);$

Застосовуючи зворотну підстановку, знаходимо остаточну відповідь:

$$y = x^4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2.$$

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати задачу Коші :

1) $y' + \frac{y}{1+x^2} = 0, \quad y(1) = 1.$

2) $y' + \frac{xe^y}{y} = 0, \quad y(1) = 0.$

- 3) $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0$, $y(-\frac{15}{16}) = e$. 4) $y' = 2^{x+y} + 2^{x-y} = 0$, $y(0) = 0$.
- 5) $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$. 6) $xy' = y + x$, $y(1) = 0$.
- 7) $y^2 + x^2 y' = xy y'$, $y(1) = 1$. 8) $x^2 - 3y^2 + 2xy y' = 0$, $y(-2) = 2$.
- 9) $xy' - y - x^3 = 0$, $y(2) = 4$. 9) $y' - \frac{y}{x} = -y^2$, $y(1) = -1$.
- 10) $(y' + y)(x^2 + 1) = e^{-x}$, $y(0) = 1$; 11) $y' - y \sin x = 2 \sin 2x$, $y(0) = 4$.

4.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку - це рівняння виду

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (4.9)$$

де x - незалежна змінна, y - шукана функція, y' і y'' - відповідно, її перша і друга похідні.

Приклади диференціальних рівнянь другого порядку :

$mx'' = F(t, x, x')$ - диференціальне рівняння руху матеріальної точки маси m під дією сили $F(t, x, x')$ ($x(t)$ - закон руху).

$y'' + 2ny' + k^2 x = \sin(\omega t + \beta)$ - рівняння вимушених коливань динамічних систем.

Слід також відмітити, що велика частина диференціальних рівнянь, що описують процеси для динамічних систем, є рівняннями другого порядку.

Далі ми розглядатимемо теорію диференціальних рівнянь другого порядку, які розв'язані відносно другої похідної

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (4.10)$$

Як і для рівнянь першого порядку, не існує загальних методів розв'язання рівнянь другого порядку. Для деяких важливих класів функцій $f(x, y, y')$ такі методи відомі.

Рівняння, що допускають зниження порядку

Для деяких функцій $f(x, y, y')$ рівняння другого порядку за допомогою відповідної заміни змінною може бути зведене до рівняння першого порядку.

1.⁰ Якщо права частина рівняння містить тільки незалежну змінну, тобто рівняння має вигляд $y'' = f(x)$.

а) Найпростіше, розв'язання такого рівняння можна знайти двократним його інтегруванням, а саме, маємо $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, розділяючи змінні, отримуємо $dy' = f(x)dx$, або $\int dy' = \int f(x)dx$, звідки $y' = \int f(x)dx + C_1$ і наступне інтегрування дає $\int dy = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx$.

В результаті шукане розв'язок має вигляд $y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2$.

Приклади.

1) Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = x$

$$\frac{dy'}{dx} = x, \quad dy' = x dx, \quad \int dy' = \int x dx, \quad y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx, \quad \int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx, \quad \text{звідки } y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

2) Знайти загальне розв'язання рівняння $y'' = \sin x$

$$dy' = \sin x dx, \quad y' = -\cos x + C_1, \quad dy = (-\cos x + C_1) dx$$

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

б). Інакше, початкове диференціальне рівняння $y'' = f(x)$ формально може бути зведене до рівняння першого порядку за допомогою заміни змінної $y'(x) = p(x)$.

2.⁰ Наступний випадок, коли диференціальне рівняння другого порядку зводиться до рівняння першого порядку, пов'язаний з тим, що права частина рівняння містить тільки незалежну змінну x і похідну шуканої функції y' $y'' = f(x, y')$, тобто рівняння (8.10.) має вигляд $y'' = f(x, y')$. Зведення цього рівняння до рівняння першого порядку досягається за допомогою заміни змінною $y'(x) = p(x)$. А саме, маємо $y'' = f(x, p)$ або $p' = f(x, p)$, нехай $p(x) = \varphi(x, C_1)$ - загальний розв'язок попереднього рівняння, тоді шукане

рішення $y = y(x)$ початкового рівняння $y'' = f(x, y')$ визначається із розв'язання рівняння першого порядку $y'(x) = \varphi(x, C_1)$.

Приклади.

1). Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y'$.

Запишемо початкове рівняння у виді $y'' = y' \frac{1}{x}$. Позначимо $y'(x) = p(x)$, тоді

$$p' = \frac{p}{x} \text{ або, розділяючи змінні, знаходимо } \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \text{ звідки } \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \text{ і}$$

$$\ln p = \ln x + \ln C_1, \text{ тобто } p = C_1 x. \text{ І, нарешті, оскільки } y' = p = C_1 x, \text{ то } dy = C_1 x dx$$

$$\text{і } y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

2). Знайти загальне рішення рівняння $y'' x \ln x = y'$.

Позначимо $y'(x) = p(x)$. Тоді $p' x \ln x = p$ і для функції $p(x)$ отримаємо рівняння

$$\text{першого порядку } \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x \ln x}. \text{ Це рівняння із змінними, що розділяються. Після}$$

розділення змінних і інтегрування, отримаємо

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x), \quad \ln p = \ln \ln x + \ln C_1 \quad \text{або} \quad p(x) = C_1 \ln x.$$

Звідси $y' = C_1 \ln x$ і $y = C_1 \int \ln x dx$. Останній інтеграл вчислимо по частинах,

вважаючи $u = \ln x, dv = dx$. Тоді $du = 1/x dx, v = x$ і

$$y = C_1 \int \ln x dx = C_1 \left(x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \right) = C_1 (x \ln x - x) + C_2$$

3.⁰ Розглянемо ще один випадок, коли диференціальне рівняння (8.10) допускає зниження порядку. Нехай права частина рівняння (8.10) не містить незалежної змінної x . тобто має вигляд $y'' = f(y, y')$. Вводиться заміна змінною

$y' = p(y(x))$, тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'' = (y'(x))' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Заміна змінною : $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy} p$;

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

$$1) \quad y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для розв'язання отриманого диференціального рівняння виробимо заміну

$$\text{змінною: } u = \frac{p}{y}, \text{ тоді } u + \frac{du}{dy} y = 4 + u, \quad du = 4 \frac{dy}{y}, \quad \int du = 4 \int \frac{dy}{y},$$

$$u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1, \quad u = 4 \ln|C_1 y|, \quad p = 4y \ln|C_1 y|.$$

$$\text{З урахуванням того, що } p = \frac{dy}{dx}, \text{ отримуємо: } \frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|, \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx,$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2.$$

Загальний інтеграл має вигляд: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C$;

$$2) \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C;$$

Таким чином, отримали два загальних розв'язка.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Багато задач в області механіки, фізики, електротехніки, робототехніки, систем управління, хімічної технології і інших технічних систем призводять до лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x), \quad (4.11)$$

де $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ - задані функції, називається *лінійним ДР другого порядку*.

Це рівняння містить невідому функцію $y = y(x)$ і її похідні y'' , y' в першій степені. Функції $p(x)$, $g(x)$ називаються *коефіцієнтами* рівняння (4.11), а $f(x)$ - *вільним членом*.

Якщо вільний член $f(x) = 0$, то рівняння (4.11) називається *лінійним однорідним*, а якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (4.11) *неоднорідно*.

Лінійні однорідні диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку :

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \quad (4.12)$$

і встановимо деякі властивості розв'язків цього рівняння.

Теорема. Якщо функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є розв'язки рівняння (8.12), то розв'язок цього рівняння є також лінійна комбінація цих функцій

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (4.13)$$

де c_1 і c_2 - довільні постійні.

Доведення. Підставимо функцію (8.13) і її похідні в ліву частину (4.12).

Отримаємо

$$\begin{aligned} (c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x))'' + p(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x))' + g(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + g(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1(y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1) + \\ c_2(y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, функція $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ являється також розв'язком рівняння (8.12).

Отже, функція виду $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ з довільними постійними c_1 і c_2 є розв'язок рівняння (4.12). Доведемо надалі, що (4.13) за деяких умов є загальним розв'язанням (4.12). Для цього розглянемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції і називаються *лінійно залежними* на (a, b) , якщо існують такі числа c_1 і c_2 , з яких хоч би одне відмінне від нуля, що для будь-кого $x \in (a, b)$ має місце рівність

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0. \quad (4.14)$$

Очевидно, що якщо функції і лінійно залежні, то вони пропорційні. Дійсно, якщо $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, причому $c_1 \neq 0$ і $y_2(x) \neq 0$, то

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{c_2}{c_1} = \text{const}. \text{ Вірно і зворотне.}$$

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називається *лінійно незалежними* на (a, b) , якщо не існує таких чисел c_1 і c_2 , з яких хоч би одне відмінне від нуля, що для будь-якого $x \in (a, b)$ має місце рівність (4.14).

Іншими словами, рівність (4.14) виконується відразу для усіх $x \in (a, b)$, якщо тільки $c_1 = c_2 = 0$.

Очевидно, що якщо функції і лінійно незалежні, то їх відношення $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, тобто вони не пропорційні.

Так, наприклад, функції $y_1(x) = x^2$ і $y_2(x) = x^3$ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі (a, b) , оскільки $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{x} \neq \text{const}$, а функції $y_1(x) = 3x^2$ і $y_2(x) = 2x^2$ лінійно залежні на будь-якому інтервалі (a, b) , оскільки $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{3}{2} \neq \text{const}$.

Ознака лінійної залежності системи функцій пов'язана з так званим *визначником Вронського* або *вронскіаном*. Для двох диференційованих функцій і вронскіан має наступний вигляд

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Якщо диференційовані функції і лінійно залежні на (a, b) , то визначник Вронського на цьому інтервалі дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки функцій і лінійно залежні, то вони пропорційні $y_1 = \alpha y_2$ и $y_1' = \alpha y_2'$, тоді визначник Вронського

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha y_2 & y_2 \\ \alpha y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 2. Для того, щоб дві диференційовані функції y_1 і y_2 були лінійно незалежні на $[a, b]$ необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського на цьому сегменті був би відмінний від нуля.

$$W(y_1, y_2) \neq 0.$$

Теорема (про структуру загального рішення ЛОДР другого порядку)
Якщо два розв'язки y_1 і y_2 ЛОДР $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$ лінійно незалежні, то їх лінійна комбінація

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

є загальним розв'язком цього рівняння.

Доведення. Оскільки y_1 і y_2 є рішеннями рівняння (4.12), то їх лінійна комбінація $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ також - розв'язок цього рівняння. Залишається довести, що цей розв'язок є загальним, тобто, що з нього можна виділити єдиний частковий розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (4.15)$$

Підставляємо ці умови в розв'язок $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) \end{cases}, \quad (4.16)$$

відносно невідомих c_1 і c_2 .

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

дорівнює значенню вронскіана в точці $x = x_0$. Але оскільки y_1 і y_2 є лінійно незалежними на $[a, b]$, те згідно з теоремою 2, $W(x_0) \neq 0$. А це означає, що система (8.16) має єдиний розв'язок:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ є єдиним частковим розв'язком рівняння (8.12), якій задовольняє початковим умовам (4.15). Теорема доведена.

**Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку
з постійними коефіцієнтами**

Розглянемо окремий випадок ДР (8.12), коли коефіцієнти рівняння p і g є постійними величинами. Таким чином, дано лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку

$$y'' + p y' + g y = 0, \quad (4.17)$$

де p і g постійні.

Це рівняння може мати безліч розв'язків, проте серед них необхідно виділити два лінійно незалежних (базисних) розв'язки.

Шукатимемо розв'язок рівняння (4.17) у виді $y = e^{kx}$, де k - деяке число. Підставляючи цю функцію в рівняння, отримуємо:

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + g e^{kx} = 0$$

і після скорочення цієї рівності на e^{kx} , знайдемо, що число k повинне задовольняти рівнянню

$$k^2 + p k + g = 0. \quad (4.18)$$

Рівняння (4.18) називається *характеристичним рівнянням* для диференціального рівняння (4.17).

При розв'язанні характеристичного рівняння може представитися три випадки.

В и п а д о к 1. Дискримінант характеристичного рівняння (4.18)

$D = \frac{p^2}{4} - g > 0$, в цьому випадку рівняння (4.18) має два нерівні дійсні корені k_1

і k_2 ($k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - g}$). І частковим розв'язком рівняння (4.17) є функції

$y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$. Вони утворюють базисну систему розв'язків (лінійно незалежні), оскільки їх вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (4.17) має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}. \quad (4.19)$$

В и п а д о к 2. Дискримінант характеристичного рівняння (4.18)

$D = \frac{p^2}{4} - g = 0$, в цьому випадку рівняння (7.18) має два рівні корені $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. І частковим розв'язком являється лише один розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$. Покажемо,

що разом з $y_1 = e^{k_1 x}$ розв'язком рівняння (4.17) буде також функція $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Дійсно, підставимо функцію $y_2 = x e^{k_1 x}$ в диференціальне рівняння (4.17).

$$\begin{aligned} y_2'' + p y_2' + g y_2 &= (x e^{k_1 x})'' + p (x e^{k_1 x})' + g (x e^{k_1 x}) = \\ &= (2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}) + p (e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}) + g (x e^{k_1 x}) = \\ &= e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 + p + p x k_1 + g x) = e^{k_1 x} (x (k_1^2 + p k_1 + g) + (p + 2k_1)). \end{aligned}$$

Але $k_1^2 + p k_1 + g = 0$, оскільки k_1 є корінь рівняння (4.18); $p + 2k_1 = 0$,

оскільки $k_1 = -\frac{p}{2}$. Тому $y_2'' + p y_2' + g y_2 = 0$, тобто функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ являється розв'язком рівняння (4.17).

Часткові розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = x e^{k_1 x}$ утворюють базисну систему розв'язків: визначник Вронського $W(x) = e^{2k_1 x} \neq 0$. Отже, в цьому випадку загальне рішення ЛОДР являється функція

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{k_1 x}. \quad (4.20)$$

В и п а д о к 3. Дискримінант характеристичного рівняння (4.18)

$D = \frac{p^2}{4} - g < 0$, в цьому випадку рівняння (4.18) має два комплексні корені $k_1 =$

$= \alpha + i\beta$ і $k_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{g - \left(\frac{p}{2}\right)^2} > 0$). І часткові розв'язки

рівняння (4.17) є функції $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ і $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. В цьому випадку легко

переконатися, що функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є розв'язки рівняння

(4.17) і утворюють базисну систему рішень. Передусім, переконаємося, що ці

функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є розв'язки диференціального рівняння (8.17). Підставимо значення $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ в рівняння:

$$\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + g y_1 &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)'' + p(e^{\alpha x} \cos \beta x)' + g(e^{\alpha x} \cos \beta x) = \\ &= (\alpha^2 e^{\alpha x} \cos \beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x} \sin \beta x - \beta^2 e^{\alpha x} \cos \beta x) + p(\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x) + \\ &+ g(e^{\alpha x} \cos \beta x) = e^{\alpha x} [(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + g) \cos \beta x - \beta(2\alpha + p) \sin \beta x]. \end{aligned}$$

Але $\alpha = -\frac{p}{2}$ і $\beta = \sqrt{g - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$, тоді $\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + g = 0$ і $2\alpha + p = 0$. Тому

$y_1'' + p y_1' + g y_1 = 0$, тобто функція $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ є розв'язок рівняння (4.17).

Аналогічним чином доводиться, що функція $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ також є розв'язок рівняння (8.17). Крім того, ці функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є лінійно незалежними: їх вронскіан $W(x) = \beta e^{2\alpha x} \cos 2\beta x \neq 0$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (4.17) в даному випадку запишеться у виді

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad (4.21)$$

Приклади.

1. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

2. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 5 = 0; \quad D = -16; \quad k_1 = -1 + 2i; \quad k_2 = -1 - 2i.$$

Загальний розв'язок: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

3. Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - k - 2 = 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = 2$;

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого

порядку (ЛНДР)

Так називаються рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$$

де $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ - задані, безперервні на (a, b) функції.

Відповідне йому рівняння (з нульовою правою частиною)

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \quad (4.23)$$

називається *однорідним рівнянням*.

Теорема (про структуру загального рішення ЛНДР). Загальний розв'язок рівняння $y(x)$ (4.22) представляється сумою загального розв'язку $y_0(x)$ відповідного йому однорідного рівняння (4.23) і часткового розв'язку $\tilde{y}(x)$ неоднорідного рівняння (4.22)

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x). \quad (4.24)$$

Доведення. Оскільки $y_0(x)$ - загальний розв'язок однорідного рівняння (4.23), а $\tilde{y}(x)$ - частковий розв'язок неоднорідного рівняння (4.22), то $y_0'' + p(x)y_0' + g(x)y_0 = 0$ і $\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + g(x)\tilde{y} = f(x)$.

У такому разі

$$\begin{aligned} (y_0 + \tilde{y})'' + p(x)(y_0 + \tilde{y})' + g(x)(y_0 + \tilde{y}) &= (y_0'' + p(x)y_0' + g(x)y_0) + \\ &+ (\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + g(x)\tilde{y}) = f(x) + 0. \end{aligned}$$

А це означає, що функція $(y_0 + \tilde{y})$ є рішенням рівняння (4.22). Тепер необхідно показати, що функція

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y} \quad (4.25)$$

є загальний розв'язок рівняння (7.22). Переконаємося, що з розв'язку (4.25) можна виділити єдине частковий розв'язок, якій задовольняє заданим початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad (4.26)$$

Підставляємо ці умови в рішення (7.25), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 - \tilde{y}(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' - \tilde{y}'(x_0) \end{cases},$$

відносно невідомих c_1 і c_2 .

Визначником цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

дорівнює значенню вронскіана в точці $x = x_0$. Але оскільки y_1 і y_2 є лінійно незалежними на (a, b) , то $W(x_0) \neq 0$. А це означає, що система (7.16) має єдиний розв'язок: $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$.

Розв'язок $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) + \tilde{y}$ є єдиним частковим розв'язком рівняння (8.22), який задовольняє початковим умовам (4.26). Теорема доведена.

Метод варіації довільних постійних

Розглянемо ЛНДР (4.22). Його загальний розв'язок представляється сумою загального розв'язку y_0 однорідного рівняння (4.23) і часткового розв'язку $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння (4.22). Якщо відом загальний розв'язок y_0 однорідного рівняння, то частковий розв'язок $\tilde{y}$ можна знайти *методом варіації довільних постійних*, суть якого полягає в наступному. Нехай $y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ - загальний розв'язок однорідного рівняння. Замінімо в цьому виразі постійні c_1 і c_2 невідомими функціями $c_1(x)$ і $c_2(x)$ так, щоб $\tilde{y} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ було б розв'язком рівняння (4.22). Знайдемо похідну

$$(\tilde{y})' = c_1'(x) y_1(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_2(x) y_2'(x).$$

Підберемо функції $c_1(x)$ і $c_2(x)$ так, щоб

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Тоді $(\tilde{y})' = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$

$$(\tilde{y})'' = c_1'(x) y_1'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_2(x) y_2''(x).$$

Підставляючи вирази $\tilde{y}$, $(\tilde{y})'$ і $(\tilde{y})''$ в рівняння (4.22), отримаємо

$$\begin{aligned} & c_1'(x) y_1'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_2(x) y_2''(x) + \\ & + p(x) [c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)] + q(x) [c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)] = f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{або } c_1(x) \cdot [y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x)] + \\ &+ c_2(x) \cdot [y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x)] + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x)/ \end{aligned}$$

Оскільки y_1 і y_2 - розв'язки рівняння (4.23), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, то

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (4.27)$$

Таким чином, функція $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ буде частковим розв'язком y рівняння (8.22), якщо функції $c_1(x)$ і $c_2(x)$ задовольняють системі

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (4.28)$$

Визначник цієї системи - вронскіан $W(y_1, y_2) \neq 0$, оскільки функції y_1 і y_2 лінійно незалежні. Тому система (8.28) має єдиний розв'язок: $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$. Інтегруванням цих функцій, знаходимо $c_1(x)$ і $c_2(x)$, в результаті вираз $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ є частковим розв'язком неоднорідного рівняння (4.22).

ЛНДР другого порядку з постійними коефіцієнтами

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' + p y' + g y = f(x), \quad (4.29)$$

де p і g постійні величини, а $f(x)$ - задана функція.

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР воно представляється сумою загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння з постійними коефіцієнтами розглянуте раніше у відповідному розділі.

Що стосується визначення часткового розв'язку неоднорідного рівняння з постійними коефіцієнтами, то воно може бути визначене за допомогою методу варіації довільних постійних, описаного в попередньому розділі. Проте якщо в правій частині рівняння (4.29) - многочлен, або показникова функція, або тригонометрична функція $\sin \beta x$ або $\cos \beta x$, або лінійна комбінація перелічених функцій, то частковий розв'язок може бути знайдено методом невизначених

коефіцієнтів, що не містить процедуру інтегрування. Загальний підхід тут такий: частковий розв'язок неоднорідного рівняння, як правило, шукається в тому ж виді, яка його права частина (тобто, функція $f(x)$). Проте, за цим "як правило" криються численні виключення.

Розглянемо різні види правих частин рівняння (4.29)

1. Якщо права частина рівняння є многочлен степені n ($f(x) = P_n(x)$) і $x = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок так само слід шукати у вигляді многочлена степені n $\tilde{y}(x) = Q_n(x)$. Якщо ж число $x = 0$ є корінь характеристичного рівняння кратності r , то частковий розв'язок слід шукати у вигляді $\tilde{y}(x) = x^r Q_n(x)$.
2. Якщо права частина рівняння має вигляд $f(x) = ae^{mx}$ і число m не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок слід шукати у вигляді $\tilde{y}(x) = Ae^{mx}$. Якщо ж m є корінь характеристичного рівняння кратності r , то $\tilde{y}(x) = Ax^r e^{mx}$.
3. Якщо права частина рівняння має вигляд $f(x) = a \cos mx + b \sin mx$ і число m не є корінь характеристичного рівняння, то частковий розв'язок слід шукати у виді $\tilde{y}(x) = A \cos mx + B \sin mx$. Якщо ж m є корінь характеристичного рівняння кратності r , то частковий розв'язок слід шукати у виді $\tilde{y}(x) = x^r (A \cos mx + B \sin mx)$. Навіть у разі, коли права частина рівняння містить тільки синус, або тільки косинус, приватне рішення все одно слід шукати у вигляді комбінації і синуса і косинуса.
4. Якщо права частина рівняння є сума, або добуток функцій, розглянутих вище, то частковий розв'язок слід шукати у вигляді суми, або добутку, відповідних часткових розв'язувань.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші $y'' - 2y' + y = x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має коріння $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$y_0(x) = e^x(c_1 + c_2x)$. Права частина неоднорідного рівняння є многочлен першої степені $f(x) = P_1(x) = x + 1$. Оскільки нуль не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок неоднорідного рівняння так само шукатимемо у вигляді многочлена першого степені $y(x) = Q_1(x) = Ax + B$. Підберемо константи A і B так, щоб функція y задовольняла неоднорідному рівнянню. Для цього підставимо функцію $y(x) = Q_1(x) = Ax + B$ і її похідні $y' = A$, $y'' = 0$ в рівняння $y'' - 2y' + y = x + 1$, отримаємо

$$-2A + Ax + B = x + 1 \quad \text{або} \quad Ax + (-2A + B) = x + 1.$$

Остання рівність повинна виконуватися при усіх значеннях x , що можливо лише у тому випадку, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x в його лівій і правій частинах. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення величин A і B

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \end{cases}$$

Звідси $A = 1$, $B = 3$ і, значить, частковим розв'язком неоднорідного рівняння є функція $y(x) = x + 3$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x) = y_0(x) + y(x) = e^x(c_1 + c_2x) + (x + 3).$$

Тепер підберемо константи c_1 і c_2 так, щоб ця функція задовольняла заданим початковим умовам. Оскільки $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ то, підставивши у функцію $y(x)$ і в її похідну $y'(x)$ задані початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення постійних c_1 і c_2

$$\begin{cases} y(0) = e^0 c_1 + 3 = 2 \\ y'(0) = e^0 (c_1 + c_2) + 1 = -3 \end{cases}$$

Звідси $c_1 = -1$ і $c_2 = -3$. Значить, розв'язок задачі є функція

$$y(x) = -e^x(1 + 3x) + x + 3.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}$.

Розв'язок. Коріння характеристичного рівняння $k^2 + 2k + 1 = 0$ $k_1 = k_2 = -1$ рівні між собою, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$y_0(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x)$. Права частина рівняння є функція типу ae^{mx} зі значенням $m = -1$, яке є коренем характеристичного рівняння кратності два $m = k_1 = k_2 = -1$. Тому, частковий розв'язок рівняння шукатимемо у виді $\tilde{y}(x) = Ax^2e^{-x}$. Знайдемо похідні цієї функції

$$(\tilde{y}(x))' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}, \quad (\tilde{y}(x))'' = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}$$

і підставимо ці похідні і саму функцію в початкове рівняння

$$(2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}) + 2(2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}) + Ax^2e^{-x} = 5e^{-x},$$

$$2Ae^{-x} = 5e^{-x}$$

Остання рівність можлива лише у тому випадку, коли $A = 5/2$. Таким чином, частковий розв'язок рівняння є функція $\tilde{y}(x) = \frac{5}{2}x^2e^{-x}$, а його загальний

розв'язок має вигляд $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x) + \frac{5}{2}x^2e^{-x}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 9y = 5\cos 2x$.

Розв'язок. Коріння характеристичного рівняння $k^2 + 9 = 0$ рівне $k_{1,2} = \pm 3i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 3$), тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_0(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$. Права частина нашого рівняння є комбінація синуса і косинуса $f(x) = a \cos mx + b \sin mx$ при $a = 5$, $b = 0$ і $m = 2$.

Оскільки число $2i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок рівняння шукатимемо у виді $\tilde{y}(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$. Знайдемо похідні цієї функції

$$(\tilde{y}(x))' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad (\tilde{y}(x))'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

і підставимо їх разом з функцією в початкове рівняння

$$(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + 9 \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \cos 2x,$$

$$5A \cos 2x + 5B \sin 2x = 5 \cos 2x + 0 \sin 2x.$$

Остання рівність можлива лише у тому випадку, коли $A = 1$ і $B = 0$. Значить, частковим розв'язком рівняння є функція $\tilde{y}(x) = \cos 2x$, а його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \cos 2x.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$.

Розв'язок. Тут характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має коріння $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння таке: $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. В правій частині початкового рівняння - добуток показникової і тригонометричної функцій. Число $\alpha + i\beta = 2 + i1$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частковий розв'язок шукаємо у виді $\tilde{y}(x) = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$. Диференціюючи і підставляючи в рівняння, отримаємо

$$(2A + 4B) \cos x + (2B - 4A) \sin x = 3 \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, знаходимо

$$2A + 4B = 3, \quad 2B - 4A = 0,$$

звідки $A = 3/10$, $B = 3/5$. Таким чином, частковий і загальний розв'язок

$$\text{відповідно: } \tilde{y}(x) = e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right)$$

$$\text{і } y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x} (0,3 \cos x + 0,6 \sin x).$$

Завдання для самостійного розв'язку

Розв'язати задачу Коші :

- 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$; 2) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$;
- 3) $y'' - 5y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$; 4) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;
- 5) $y'' - 6y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$; 6) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

Приклади задач з економічним застосуванням

Задача 1. Щоденний рівень випуску продукції у зростає із середнім темпом 0,33%. Визначити закон зміни рівня випуску продукції в часі та сумарний випуск продукції за 30 днів, якщо рівень випуску на початку місяця становив 1000 одиниць на день.

Рішення.

Задача 2. Зі статистичних матеріалів відомо, що число новонароджених за одиницю часу (один рік) пропорційно чисельності населення з коефіцієнтом пропорційності k_1 , а число померлих за одиницю часу також пропорційно чисельності населення з коефіцієнтом пропорційності k_2 . Знайти формулу, що визначає чисельність населення в будь-який момент часу t , якщо відома чисельність в момент $t = 0$. Передбачається, що не має місця еміграції та імміграції.

Рішення. Позначимо чисельність населення в момент часу t через y , тоді як за умовою завдання кількість народжених за одиницю часу дорівнює $k_1 y$, а померлих $k_2 y$. Приріст населення за одиницю часу виражатиметься різницею $k_1 y - k_2 y = (k_1 - k_2)y$, а за малий проміжок часу dt

$$dy = (k_1 - k_2)ydt$$

Число $k_1 - k_2 = k$ називають коефіцієнтом природного приросту.

Проінтегрувавши рівняння ($dy = (k_1 - k_2)ydt$), отримаємо $y = Ce^{kt}$. Використовуючи початкову умову $y(0) = y_0$, знаходимо: $C = y_0$. Тому шукана формула набуває вигляд: $y = y_0 e^{kt}$. При $k > 0$ отримуємо зростання чисельності населення, при $k < 0$ – спадання, при $k = 0$ чисельність населення зберігається постійною в часі.

Рекомендована література:

1. Кирилащук С. А. Вища математика. Частина 1. Індивідуальні завдання : навч. посіб. / С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Ключко. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 93 с.
2. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами : навч. посіб. / Р. В. Скуратовський. – Київ : Нац. акад. управління, 2021. – 205 с.
3. Бондар О. П. Вища математика. Частина I : конспект лекцій / О. П. Бондар, І. Л. Якуніна. – Кропивницький : ЛА НАУ, 2021. – 83 с.
4. Кузьмін В. А. Вища математика : конспект лекцій. Ч. 1 / В. А. Кузьмін. – Мелітополь : ФОП Кузьмін, 2021. – 124 с.
5. Клепко В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. Клепко, В. Голєць. – Київ : Каравела, 2020. – 594 с.
6. Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / О. В. Доля, Л. І. Турчанінова. – Київ : Каравела, 2021. – 348 с.
7. Литвин І. І. Вища математика. Частина I : навч. посіб. / І. І. Литвин. – 2-ге вид. – Київ : ЦУЛ, 2019. – 368 с.
8. Зайцев Є. П. Вища математика : навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – Київ : ЦУЛ, 2022. – 412 с.
9. Барковський В. М. Вища математика : практикум / В. М. Барковський. – Київ : КНЕУ, 2023. – 536 с.
10. Бескровний О. І. Вища та прикладна математика : навч. посіб. / О. І. Бескровний, В. В. Фортуна. – Київ : КНЕУ, 2024. – 648 с.
11. Дахно Н. Б. Дискретна математика : навч. посіб. / Н. Б. Дахно, Ю. В. Кравченко, О. О. Лещенко, А. С. Дуднік. – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2025. – 312 с.
12. Кузьма О. В. Конспект лекцій з вищої математики / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та ін. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 97 с.
13. Strang G. Introduction to Linear Algebra / G. Strang. – 6th ed. – Wellesley : Wellesley-Cambridge Press, 2023. – 600 p. – ISBN 978-0980232776.

14. Axler S. Linear Algebra Done Right / S. Axler. – 4th ed. – Cham : Springer, 2024. – 500 p. – ISBN 978-3319910790.
15. Bartle R. G. Introduction to Real Analysis / R. G. Bartle, D. R. Sherbert. – 4th ed. – Hoboken : Wiley, 2011. – 512 p. – ISBN 978-0471433316.
16. Lay D. C. Linear Algebra and Its Applications / D. C. Lay. – 5th ed. – Boston : Pearson, 2015. – 576 p.
17. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals / J. Stewart. – 8th ed. – Boston : Cengage Learning, 2016. – 1368 p. – ISBN 978-1-305-13364-1.
18. Apostol T. M. Mathematical Analysis / T. M. Apostol. – 2nd ed. – Reading : Addison-Wesley, 1974. – 492 p.
19. Spivak M. Calculus / M. Spivak. – 4th ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008. – 670 p.
20. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis / W. Rudin. – 3rd ed. – New York : McGraw-Hill, 1976. – 342 p.

Інтернет-ресурси для вивчення вищої математики

1. Курс "Вища математика" [Електронний ресурс] // Prometheus. – Режим доступу: https://courses.prometheus.org.ua/courses/course-v1:NURE+MATH101+2021_T1/about.
2. Курс "Вища математика для технічних спеціальностей" [Електронний ресурс] // EdEra. – Режим доступу: https://courses.ed-era.com/courses/course-v1:EdEra+Math101+2018_T1/about.
3. Single Variable Calculus [Електронний ресурс] // MIT OpenCourseWare. – Режим доступу: <https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/>. – Дата звернення: 16.07.2025.
4. Paul's Online Math Notes [Електронний ресурс] // Paul's Online Math Notes. – Режим доступу: <https://tutorial.math.lamar.edu/>.
5. Математика [Електронний ресурс] // Khan Academy. – Режим доступу: <https://uk.khanacademy.org/math>. – Дата звернення: 16.07.2025.

6. Essence of Linear Algebra [Электронный ресурс] // 3Blue1Brown. – Режим доступа: <https://www.3blue1brown.com/essence-of-linear-algebra>. – Дата звернення: 16.07.2025.
7. Mathigon [Электронный ресурс] // Mathigon. – Режим доступа: <https://mathigon.org/>.
8. Calculus, Algebra, Statistics [Электронный ресурс] // OpenStax. – Режим доступа: <https://openstax.org/subjects/math>.
9. Advanced Mathematics [Электронный ресурс] // Coursera. – Режим доступа: <https://www.coursera.org/browse/math-and-logic>.
10. Mathematics Courses [Электронный ресурс] // Brilliant.org. – Режим доступа: <https://brilliant.org/courses/mathematics/>

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
частина 2
для підготовки бакалаврів
у галузі знань D – «Бізнес, адміністрування та право»

Чепурна О.Є.

Черевко Є.В.

Баландіна Н.М.

Овчинников М.Ю.

© О.Є. Чепурна, Є.В. Черевко, Н.М. Баландіна, М.Ю. Овчинников

© Національний університет «Одеська юридична академія» »