

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра інформаційних технологій

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ ФАХІВЦІВ
У ГАЛУЗІ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Одеса 2023

УДК 514.12

Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. Лінійна алгебра. Навчальний посібник для фахівців у галузі інформаційних технологій – Одеса. Міжнародний гуманітарний університет, 2023. – 182 с.

В навчальному посібнику викладено основні теоретичні положення по темі «Лінійна алгебра». Розглянуто методи розв’язування прикладів. Навчальний посібник містить контрольні запитання, перевірні тести, задачі для самостійного розв’язування з відповідями.

Навчальний посібник призначено для фахівців у галузі інформаційних технологій.

Схвалено на засіданні
Вченої ради
Міжнародного гуманітарного університету.
Протокол № 6 від 4 квітня 2023

ЗМІСТ

ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1. Визначники.....	5
1.1 Поняття визначників другого та третього порядків та їх обчислювання.....	5
1.2 Поняття мінора та алгебраїчного доповнення елементів матриці другого та третього порядків.....	6
1.3 Властивості визначників другого та третього порядків.....	7
1.4 Поняття визначника n -го порядку.....	11
1.5 Множення визначників.....	12
1.6 Приклади.....	13
2. Матриці.....	27
2.1 Матриці. Види матриць.....	27
2.2 Лінійні операції над матрицями.....	30
2.3 Множення матриць.....	32
2.4 Обернена матриця.....	34
2.4.1 Основні поняття та теореми.....	34
2.4.2 Знаходження оберненої матриці табличним методом.....	37
2.5 Ранг матриці.....	39
2.5.1 Мінор матриці.....	39
2.5.2 Знаходження рангу матриці методом обвідних мінорів.....	39
2.5.3 Елементарні перетворення матриці.....	40
2.5.4 Знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень.....	41
2.5.5 Поняття про лінійну залежність рядків чи стовпчиків матриці.....	42
2.6 Приклади.....	45
2.6.1 Матриці. Дії над матрицями.....	45
2.6.2 Обернена матриця.....	53
2.6.3 Ранг матриці.....	68
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	76
3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, основні поняття....	76

3.2 Застосовування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера.....	76
3.3 Розв'язування систем n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими за допомогою матриць.....	78
3.4 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом вилучення невідомих.....	79
3.4.1 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного вилучення невідомих.....	79
3.4.2 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою таблиць Гаусса.....	82
3.4.3 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом повного вилучення невідомих.....	83
3.5 Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	83
3.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	86
3.7 Зв'язок між розв'язками неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та відповідних до них однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	92
3.8 Приклади.....	92
3.8.1 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера.....	92
3.8.2 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою матриць.....	102
3.8.3 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного вилучення невідомих.....	113
3.8.4 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом повного вилучення невідомих.....	124
3.8.5 Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь...	131
3.8.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	144
4 Деякі застосування лінійної алгебри в теорії електричних кіл.....	159
Контрольні запитання.....	164
Перевірні тести.....	166
Задачі для самостійного розв'язування.....	170
Відповіді до задач для самостійного розв'язування.....	178
Література.....	182

ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ

1 ВИЗНАЧНИКИ

1.1 Поняття визначників другого та третього порядків та їх обчислювання

Розглянемо таблицю чисел вигляду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Така таблиця чисел

називається **матрицею другого порядку**, а числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} називаються **елементами матриці**. Числа a_{11} , a_{12} утворюють перший рядок матриці, а числа a_{21} , a_{22} – другий рядок; числа a_{11} , a_{21} утворюють перший стовпчик матриці, а числа a_{12} , a_{22} – другий стовпчик; числа a_{11} , a_{22} утворюють головну діагональ матриці, а числа a_{12} , a_{21} – допоміжну діагональ. Нескладно помітити, що перший індекс кожного елемента означає номер рядка, в якому міститься цей елемент, а другий індекс – номер стовпчика.

Визначення. *Визначником другого порядку* матриці A другого порядку називається число, подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Таблиця чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається **матрицею третього**

порядку.

Визначення. *Визначником третього порядку* матриці A третього порядку називається число, подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.2)$$

Така формула є не надто зручна для запам'ятовування. Далі будуть розглянуті більш оптимальні методи обчислювання визначників третього порядку.

1. Правило трикутника (правило Саррюса)

Зобразимо схематично визначник (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Схема обчислення визначника

На кожному з рисунків 1.1 зображено три штрихові лінії (два трикутники та відрізок), на яких містяться елементи визначника. Якщо ці три елементи помножити, то за допомогою рис. 1.1 а дістанемо три доданки – $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{13}a_{21}a_{32}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$, які входять до правої частини формули (1.2). Скориставшись рисунком 1.1 б та змінивши на протилежні знаки знайдених добутоків, дістанемо решту доданків, які входять до правої частини формули (1.2), а саме: $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$; $-a_{12}a_{21}a_{33}$.

2. *Обчислювання визначника за допомогою дописування стовпчиків чи рядків*

Складемо допоміжну таблицю, для чого допишемо праворуч у визначнику перший та другий стовпчики або знизу перший та другий рядки (рис. 1.2).

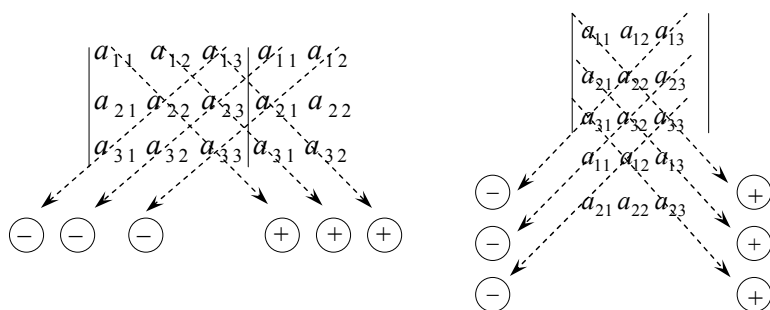


Рисунок 1.2 – Схема зображення обчислювання визначника за допомогою дописування стовпчиків та рядків

Помноживши елементи, розміщені на штрихових лініях, позначених знаком „+”, дістанемо перші три доданки правої частини формули (1.2), а за допомогою трьох штрихових ліній, позначених знаком „-”, дістанемо решту – три доданки формули (1.2), якщо змінити на протилежні знаки добутоків.

1.2 Поняття мінора та алгебраїчного доповнення елементів визначників другого та третього порядків

Визначення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається визначник матриці, яка дістана з матриці A після викреслювання рядка та стовпчика, на перетині яких розміщено елемент a_{ij} .

Визначення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається мінор M_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.3)$$

Беручи до уваги поняття алгебраїчного доповнення, можна навести інше визначення визначника.

Визначення. *Визначником другого порядку* матриці другого порядку називається число, подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \quad (1.1')$$

В и з н а ч е н н я. *Визначником третього* порядку матриці третього порядку називається число, подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (1.2')$$

Покажемо, що формули (1.1) та (1.1'), (1.2) та (1.2') є еквівалентними. Як відомо,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

З іншого боку,

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^2 a_{22} + a_{12}(-1)^3 a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже, виходить, що формула (1.1') еквівалентна формулі (1.1).

Далі,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Тобто і формула (1.2') є еквівалентною формулі (1.2).

1.3 Властивості визначників другого та третього порядків

В л а с т и в і с т ь 1. Якщо рядки визначника замінити на стовпчики, то значення визначника не зміниться.

Таке перетворення матриці визначника називається *т р а н с п о н у в а н н я м* та визначає рівноправність рядків та стовпчиків визначника.

Д о в е д е н н я

Нехай d – заданий визначник, а d^T – визначник транспонованої матриці, в якій стовпчики поміняні з рядками:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad d^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що $d = d^T$. Користуючись формулою (1.2), маємо

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$d^T = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Праві частини здобутих рівностей є однаковими. Отже, поміж собою є рівними й ліві частини, тобто $d = d^T$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зважаючи на доведену властивість, будемо всю решту властивостей формулювати й доводити лише для рядків, маючи на увазі, що вони справедливі і для стовпчиків.

В л а с т и в і с т ь 2. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я

Нехай нулю дорівнюють елементи другого рядка визначника

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді за формулою (1.2)

$$d = a_{11} \cdot 0 \cdot a_{33} + a_{13} \cdot 0 \cdot a_{32} + a_{12} \cdot 0 \cdot a_{31} - a_{13} \cdot 0 \cdot a_{31} - a_{11} \cdot 0 \cdot a_{32} - a_{12} \cdot 0 \cdot a_{33} = 0.$$

Завдання для самостійної роботи. Перевірити властивість 2 для випадків, коли нулю дорівнюють усі елементи першого або третього рядків.

В л а с т и в і с т ь 3. При переставленні двох рядків у визначнику знак визначника змінюється на протилежний.

Д о в е д е н н я

Розглянемо визначник

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і поміняємо в ньому місцями два сусідні рядки, приміром, другий та третій. Дістанемо визначник

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$d_1 = a_{11}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Неважко помітити, що праві частини дістаних рівностей є протилежними за знаком. Отже, $d = -d_1$. Тепер у визначнику d змінимо місцями не сусідні рядки, тобто перший та третій. Дістанемо визначник

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix},$$

який дорівнює

$$d_2 = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Вочевидь, що $d = -d_2$.

Отже, властивість доведено.

Інші варіанти рекомендуємо розглянути самостійно.

В л а с т и в і с т ь 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я

Нехай у визначнику d є два однакові рядки. Поміняємо їх місцями і дістанемо визначник d_1 . У відповідності до властивості 3 маємо:

$$d = -d_1. \quad (*)$$

Але оскільки рядки у визначнику змінювались однаково, виходить, що

$$d = d_1. \quad (**)$$

Обидві рівності – (*) та (**) є справедливими, а сумісні вони бувають лише тоді, коли $d = 0$, що й треба було довести.

В л а с т и в і с т ь 5. Якщо усі елементи будь-якого рядка визначника мають спільний множник, то його можна виносити за знак визначника.

Д о в е д е н н я

Розглянемо такий визначник, в якому всі елементи одного з рядків мають спільний множник k (вибір рядка не впливає на доведення).

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{11}a_{23}a_{32} - ka_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

що й треба було довести.

Н а с л і д о к. Якщо у визначнику є два рядки, елементи яких є пропорційними, то такий визначник дорівнює нулю. Приміром з наслідків 4 та 5 випливає така рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

В л а с т и в і с т ь 6. Якщо кожний елемент будь-якого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати як суму двох визначників, у кожному з яких усі елементи будуть такі самі, що і в заданому визначнику, окрім елементів зазначеного рядка. У першому визначнику зазначений рядок складається з перших доданків, а у другому – з других.

Д о в е д е н н я

Проведемо доведення у випадку, коли сумою є подані елементи першого рядка.

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Обчислимо усі визначники. Позначимо визначник, який стоїть ліворуч у рівності (1.5), через d , а визначники праворуч – через d_1 та d_2 . Тоді

$$\begin{aligned} d &= (b_{11} + c_{11})a_{22}a_{33} + (b_{12} + c_{12})a_{23}a_{31} + (b_{13} + c_{13})a_{21}a_{32} - (b_{13} + c_{13})a_{22}a_{31} - \\ &\quad - (b_{11} + c_{11})a_{23}a_{32} - (b_{12} + c_{12})a_{21}a_{33}; \\ d_1 + d_2 &= b_{11}a_{22}a_{33} + b_{12}a_{23}a_{31} + b_{13}a_{21}a_{32} - b_{13}a_{22}a_{31} - b_{12}a_{21}a_{33} - b_{11}a_{23}a_{32} + \\ &\quad + c_{11}a_{22}a_{33} + c_{12}a_{23}a_{31} + c_{13}a_{21}a_{32} - c_{13}a_{22}a_{31} - c_{12}a_{21}a_{33} - c_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= (b_{11} + c_{11})a_{22}a_{33} + (b_{12} + c_{12})a_{23}a_{31} + (b_{13} + c_{13})a_{21}a_{32} - (b_{13} + c_{13})a_{22}a_{31} - \\ &\quad - (b_{11} + c_{11})a_{23}a_{32} - (b_{12} + c_{12})a_{21}a_{33} = d, \end{aligned}$$

тобто $d = d_1 + d_2$. Аналогічно доводяться інші випадки.

В л а с т и в і с т ь 7. Сума добутоків елементів будь-якого рядка визначника на їхні відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює значенню визначника.

Д о в е д е н н я

Належить довести рівності

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{cases}$$

Доведемо одну з них, приміром, першу.

Ліва частина цієї рівності має вигляд

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$, а права частина є такою

$$\begin{aligned} &a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

що і підтверджує справедливість початкової рівності.

Аналогічно доводяться друга та третя рівності.

В л а с т и в і с т ь 8. Сума добутоків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення до відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я

Нехай $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – заданий визначник.

Не зменшуючи спільності, проведемо доведення для випадку:

$$d = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}.$$

Тоді

$$d = a_{21}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} d &= a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{22}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{21}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{21}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} - a_{23}a_{22}a_{31} = 0, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

В л а с т и в і с т ь 9. Визначник не зазнає зміни, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи другого рядка, помножені на одне й те саме число.

Д о в е д е н н я

Не зменшуючи спільності, проведемо доведення для випадку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Позначимо через d визначник, який міститься ліворуч, а через d_1 – визначник, розміщений праворуч у рівності (1.6), і перетворимо визначник d_1 , застосовуючи властивості 5 та 6.

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Застосувавши властивість 4, бачимо, що $d_1 = d + k \cdot 0$ або $d_1 = d$.

1.4 Поняття визначника n -го порядку

Таблиця вигляду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається матрицею n -го

порядку.

В и з н а ч е н н я . *Визначником порядку n* називається число, що дорівнює сумі добутків елементів першого рядка матриці A на відповідні алгебраїчні доповнення, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}. \quad (1.7)$$

З цієї формули виходить, що обчислення визначника n -го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку.

Можна показати, що визначники n -го порядку мають аналогічні властивості, що й визначники другого та третього порядків.

Визначники можна обчислювати, користуючись рівністю (1.7) або (1.8).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{im} & \cdots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}; \\ a_{1m} \cdot A_{1m} + a_{2m} \cdot A_{2m} + \dots + a_{nm} \cdot A_{nm}, \end{cases} \quad (1.8)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$; $m = 1, 2, \dots, n$.

1.5 Множення визначників

Нехай дано два визначники одного й того самого порядку n :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Добуток визначників $|A|$ та $|B|$ дорівнює визначнику $|C|$ того ж порядку n , де елементи матриці

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

визначаються за однією з чотирьох формул:

$$1) c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{jn};$$

$$2) c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj};$$

$$3) c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \dots + a_{ni}b_{jn};$$

$$4) c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \dots + a_{ni}b_{nj}.$$

У першому випадку елемент c_{ij} визначається як сума добутків i -го рядка визначника $|A|$ на j -й рядок визначника $|B|$. Кажуть, що в даному разі добуток здобуто множенням рядків першого визначника на рядки другого визначника. У другому випадку елемент c_{ij} здобуто множенням рядків на стовпчики, у третьому – стовпчиків на рядки, у четвертому – стовпчиків на стовпчики. Значення визначника $|C|$ є одне й те саме у всіх чотирьох випадках, незважаючи на те, що елементи c_{ij} неоднакові.

Тобто

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

1.6 Приклади

Приклад 1.1 Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$d = 1 \cdot 4 - (-3)2 = 4 + 6 = 10.$$

Відповідь: 10.

Приклад 1.2 Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

за формулою (1.2).

Розв'язання

$$d = 1 \cdot 5 \cdot 7 + (-3)4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 6 - (-3)5 \cdot 6 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45.$$

Відповідь: 45.

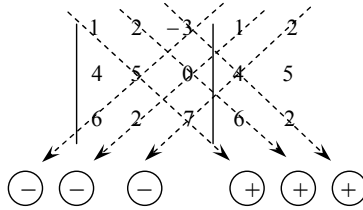
Приклад 1.3 Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

за допомогою дописування стовпчиків чи рядків.

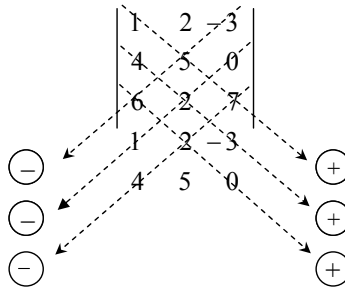
Розв'язання

1. Розв'яжемо приклад, дописуючи праворуч стовпчики (див. рис. 1.2):



$$d = 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45.$$

2. Розв'яжемо приклад, дописуючи знизу рядки:



$$d = 1 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 \cdot 0 - (-3) \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 4 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45.$$

Відповідь: 45.

Приклад 1.4 Знайти мінор M_{23} елемента a_{23} матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Викреслимо у матриці другий рядок та третій стовпчик:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 6 = -10.$$

Відповідь: -10.

Приклад 1.5 Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{23} матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$M_{23} = -10, \text{ то } A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 (-10) = 10.$$

Відповідь: 10.

Приклад 1.6 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

1) безпосередньо за визначенням;

2) за правилом трикутника.

Розв'язання

1) За формулою (1.2) матимемо:

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot (-1) + (-2)2(-3) - (-2)3(-1) - 4 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot (-3) = \\ = 12 + 12 - 6 - 32 = -14.$$

2) Обчислимо той самий визначник, користуючись правилом трикутника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot (-1) + (-2)2(-3) - (-2)3(-1) - 1 \cdot 0 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -14.$$

Відповідь: -14.

Приклад 1.7 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

1) безпосередньо за визначенням;

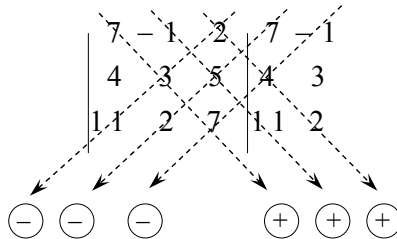
2) методом дописування стовпчиків (див. рис. 1.2);

3) методом дописування рядків (див. рис. 1.2).

Розв'язання

$$1. \Delta = 7 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1)5 \cdot 11 - 2 \cdot 3 \cdot 11 - 7 \cdot 5 \cdot 2 - 4(-1)7 = 0.$$

2.



$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 \cdot 11 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 11 - 7 \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot 7 = 0.$$

3. Під визначником допишемо перший та другий рядки.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 7 & -1 & 2 \\
 4 & 3 & 5 \\
 11 & 2 & 7 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 \swarrow & & \searrow \\
 \ominus & & \oplus \\
 \ominus & & \oplus \\
 \ominus & & \oplus
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 \cdot 11 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 11 - 7 \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot 7 = 0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 1.8 Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$;

1) безпосередньо за визначенням;

2) розкладанням за елементами будь-якого рядка чи стовпчика.

Р о з в ' я з а н н я

1. За формулою (1.2) маємо:

$$\Delta = 35 + 18 - 60 + 84 = 77.$$

2. Як виходить з формули (1.8), визначник можна розкласти чи за елементами будь-якого рядка чи за елементами будь-якого стовпчика. Аналізуючи умову, доходимо висновку, що найоптимальніше розкласти визначник за елементами третього рядка або другого стовпчика, оскільки там один з елементів дорівнює нулю. Отже, розкладатимемо визначник за елементами другого стовпчика, тобто за формулою $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

Нам треба знайти алгебраїчні доповнення елементів другого стовпчика:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(28 + 6) = -34; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5.$$

Алгебраїчне доповнення A_{32} можна не знаходити, оскільки його доведеться множити на 0. Отже, за формулою (1.8)

$$\Delta = -3(-34) + 5(-5) = 77.$$

В і д п о в і д ь: 77.

Ми розглянули способи обчислювання визначників лише третього порядку. Розглянемо тепер спосіб, який можна застосовувати до визначників будь-якого порядку, а саме метод розкладання визначника за елементами будь-якого рядка чи стовпчика [див. 1.4, формули (1.7), (1.8)].

Приклад 1.9 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

користуючись формулою (1.8).

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами третього стовпчика за формулою $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}$. Це зручно, тому що один з елементів цього стовпчика дорівнює 0.

Знайдемо відповідні алгебраїчні доповнення:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-30 - 6 - 1 - 3 - 15 + 4) = -51;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 (-4 - 60 - 11 - 4 + 6 + 10) = -51;$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^7 (2 - 60 - 2 + 8 + 6 - 5) = -(-51) = 51.$$

Тоді

$$\Delta = -3(-51) + 5(-51) + 2 \cdot 51 = 0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 1.10 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\Delta = 0(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& +4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
& +0(-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \\
& - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta_1 - 4\Delta_2 + 2\Delta_3,
\end{aligned}$$

де через Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 позначені визначники 4-го порядку, які обчислені нижче.

Розкладемо визначник Δ_1 за елементами четвертого рядка.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \\
& + 0(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\
& = -2(-2+3+6-(-12+3)) + 1(-1-15+6-1-6-15) + 1(-3+15-2+3+1-30) = \\
& = -2(-3) + 1(-8) + 1(-16) = -42.
\end{aligned}$$

Розкладемо визначник Δ_2 за елементами другого рядка.

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\
& = -5(9+3+3+3) + (-1-1+6-2-1-3) + 2(3+18+6-3) = -44.
\end{aligned}$$

Розкладемо визначник Δ_3 за елементами другого рядка.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(3+2+2+1-3+2) + (-1-1+6-2-1-3) + 2(-1+2+6+4-1-3) = -18.$$

Отже, $\Delta = 2(-42) - 4(-44) + 2(-18) = 56$.

В і д п о в і д ь: 56.

Розглянемо тепер інший метод обчислювання визначників, використовуючи їхні властивості, на цьому самому прикладі.

Звернемо увагу на те, що при виборі рядка чи стовпчика було обрано такий стовпчик, у якого був елемент, що дорівнює 0. Це звільнило нас від потреби обчислювати ще одне алгебраїчне доповнення. Зрозуміло, що чим більше нулів має рядок чи стовпчик, тим легше обчислювати визначник. Іноді, використовуючи властивості визначників, ці нулі утворюють навмисне.

Приклад 1.11 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Поставимо за мету в якомусь з рядків чи стовпчиків визначника створити щонайбільше нулів. Якщо ми вирішили зробити нулі в рядку, то треба обрати робочий стовпчик, а для того, щоб створити нулі у стовпчику, треба обрати робочий рядок. У даному разі зручно створити нулі у другому рядку, оскільки два нулі у ньому вже є, а за робочий візьмемо, приміром, другий стовпчик.

Помножимо елементи другого стовпчика на (-2) і додамо до відповідних елементів третього стовпчика та здобуті результати запишемо замість відповідних елементів третього стовпчика, а потім помножимо елементи другого стовпчика на (-1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика та здобуті результати запишемо замість відповідних елементів четвертого стовпчика. Дістанемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник Δ за елементами другого рядка:

$$\Delta = 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знову створюватимемо нулі в першому рядку дістаного визначника, а за робочий візьмемо перший стовпчик. Помножимо елементи першого стовпчика на 4 й додамо до відповідних елементів другого стовпчика та здобуті результати запишемо замість відповідних елементів другого стовпчика, далі елементи першого стовпчика додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика та здобуті результати запишемо замість відповідних елементів четвертого стовпчика. Дістанемо:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & -1 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник розкладемо за елементами першого рядка.

$$\Delta = 2 \cdot 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 19 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(228 - 49 - 14 - 196 + 38 + 21) = 56.$$

В і д п о в і д ь: 56.

Розглянемо ще один метод обчислювання визначників на цьому ж прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

П о р я д о к р о б о т и

1. Елемент a_{11} , який відрізняється від нуля, називатимемо провідним елементом. Залишаємо без змін перший рядок, а в першому стовпчику всі елементи, за винятком першого, замінимо на нулі. Решту елементів a'_{ij} визначника обчислюємо за так званим правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = a_{ij} \cdot a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j}.$$

Це правило зручно розглядати в такий спосіб. Вважатимемо, що елемент a_{ij} разом з провідним елементом a_{11} є вершинами прямокутника, які лежать на його діагоналі, званій головною діагоналлю цього прямокутника. Нескладно визначити дві інші вершини прямокутника, які лежать на його другій діагоналі a_{i1} та a_{1j} . Далі

знаходимо добутки елементів, які символізують вершини, що належать до головної діагоналі прямокутника, а потім – до іншої діагоналі.

Різниця цих добутків дає значення елемента a'_{ij} .

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} a'_{32} &= 0 \cdot 1 - 5 \cdot 3 = -15; & a'_{42} &= -1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -4; & a'_{52} &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5; \\ a'_{33} &= -1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -11; & a'_{43} &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1; & a'_{53} &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3; \\ a'_{34} &= -1 \cdot 1 - 5 \cdot 3 = -16; & a'_{44} &= 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0; & a'_{54} &= 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -6; \\ a'_{35} &= 2 \cdot 1 - 5(-1) = 7; & a'_{45} &= 1 \cdot 1 - 1(-1) = 2; & a'_{55} &= 1 \cdot 1 - 2(-1) = 3. \end{aligned}$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо в якомусь рядку елемент, який міститься під провідним елементом, дорівнює нулю, то елементи цього рядка слід переписувати без змін.

2. Записуємо після проведених перетворювань визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & -11 & -16 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Записуючи визначник Δ після перетворень, перед визначником слід записати множник, який дорівнює $\frac{1}{a_{ij}^k}$, де a_{ij} – провідний елемент, а k – кількість рядків визначника під рядком з провідним елементом, якщо у цьому рядку елемент, розміщений під провідним елементом, відрізняється від нуля.

У даному разі провідний елемент $a_{11} = 1$, отже, означений множник дорівнює одиниці у степені $k = 3$.

3. Подальші перетворювання складаються з таких етапів:

- перший та другий рядки переписуємо без змін;
- перший стовпчик переписуємо без змін;
- у другому стовпчику усі елементи, розпочинаючи з третього, замінюємо на нулі;
- елемент $a'_{22} = 2$ вважаємо за провідний;
- решту елементів a''_{ij} обчислюємо за правилом прямокутника, за умови,

що однією з вершин неодмінно буде провідний елемент $a'_{22} \neq 0$.

$$\begin{aligned} a''_{33} &= 2(-11) - (-15)4 = 38; & a''_{43} &= 2(-1) - (-4)4 = 14; & a''_{53} &= 2(-3) - (-5)4 = 14; \\ a''_{34} &= 2(-16) - (-15)2 = -2; & a''_{44} &= 2 \cdot 0 - (-4)2 = 8; & a''_{54} &= 2(-6) - (-5)2 = -2; \\ a''_{35} &= 2 \cdot 7 - (-15)0 = 14; & a''_{45} &= 2 \cdot 2 - (-4)0 = 4; & a''_{55} &= 2 \cdot 3 - (-5)0 = 6. \end{aligned}$$

4. Знову запишемо після перетворювань визначник

$$\Delta = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Для спрощення подальших обчислень з другого, третього, четвертого та п'ятого рядків можна винести спільні множники:

$$\Delta = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2^3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Продовжимо аналогічні перетворення, призначивши за провідний елемент $a''_{33} = 19$, знаходимо

$$a'''_{44} = 19 \cdot 4 - 7(-1) = 83; \quad a'''_{54} = 19(-1) - 7(-1) = -12;$$

$$a'''_{45} = 19 \cdot 2 - 7 \cdot 7 = -13; \quad a'''_{55} = 19 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 8.$$

6. Запишемо після перетворювань визначник

$$\Delta = \frac{2}{19^2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 83 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 8 \end{vmatrix}$$

7. Тепер за провідний елемент візьмемо $a'''_{44} = 83$.

$$a''''_{55} = 8 \cdot 83 - (-12)(-11) = 532.$$

8. Запишемо визначник

$$\Delta = \frac{2}{19^2 \cdot 83} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 83 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 532 \end{vmatrix}$$

9. Дістаний визначник розкладаємо за елементами останнього рядка:

$$\Delta = \frac{532 \cdot 2}{19^2 \cdot 83} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 83 \end{vmatrix}.$$

Знову розкладемо визначник за елементами останнього рядка:

$$\Delta = \frac{532 \cdot 2 \cdot 83}{19^2 \cdot 83} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} = \frac{532 \cdot 2 \cdot 19}{19^2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{532 \cdot 2}{19} = 56.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Особливістю визначника, дістаного у п. 8, є те, що всі його елементи, розміщені під головною діагоналлю, дорівнюють нулю. Такі визначники дорівнюють добутку елементів головної діагоналі. Тоді

$$\Delta = \frac{2}{19^2 \cdot 83} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 83 \cdot 532 = 56.$$

Приклад 1.12 Знайти добуток визначників $|A|$ та $|B|$ у чотири способи, якщо

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 & 7 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 31 & 2 \\ 58 & 5 \end{vmatrix} = 39; \\ 2) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \\ 7 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) & 7 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 22 & 47 \end{vmatrix} = 39; \\ 3) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot 4 + 7 \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \\ 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 51 & 42 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 39; \\ 4) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot 4 + 7 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) & 3 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 34 \\ 6 & 27 \end{vmatrix} = 39. \end{aligned}$$

Відповідь: 39.

Множення визначників можна використовувати для обчислювання певних визначників спеціального вигляду.

Приклад 1.13 Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} x_2 & -x_1 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_2 & -x_1 \\ x_4 & -x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Піднесемо визначник D до квадрата, помноживши стовпчики на стовпчики, і дістанемо визначник

$$D^2 = \begin{vmatrix} x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 + x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 \end{vmatrix} = \\ = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^4.$$

Звідси

$$D = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2.$$

В і д п о в і д ь: $D = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$.

Приклад 1.14 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо другий рядок та утворимо у ньому ще два нулі. За робочий вважатимемо четвертий стовпчик. Помножимо елементи четвертого стовпчика на (-5) та додамо до елементів першого стовпчика, дістаний результат запишемо у перший стовпчик. Потім помножимо елементи четвертого стовпчика на (-1) та додамо до елементів другого стовпчика, дістаний результат запишемо у другий стовпчик.

Дістанемо такий визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -18 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 5 & -1 \\ -11 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Після цього здобутий визначник розкладемо за елементами другого рядка.

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + (-1) \cdot A_{24} = \\ = -1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -18 & -3 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^6(-3) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(48 + 7 - 55 + 44 - 30 - 14) = 0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 1.15 За правилом прямокутника обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Відповідно до порядку роботи, запропонованого у 1.4, маємо:

$$\Delta = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 0 & 4 & 16 & -10 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

З другого та третього рядків винесемо спільні множники:

$$\Delta = \frac{3 \cdot 2}{2^3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Далі продовжуємо користуватися правилом прямокутника:

$$\Delta = \frac{3}{2^2 \cdot 1^2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & -17 \\ 0 & 0 & 36 & -34 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.11)$$

Більш детальне, покрокове роз'яснення усього процесу розв'язання наведено у наступних поясненнях.

Пояснення переходу від формули (1.9) до (1.10)

1) Елемент $a_{11} = 2$ вважаємо за провідний елемент, перший рядок – за провідний рядок; перший стовпчик – за провідний стовпчик.

2) Перший рядок переносимо до нового визначника без змін.

3) У першому стовпчику всі елементи, які лежать нижче a_{11} , замінимо на нулі.

4) Знаходимо інші елементи визначника за правилом прямокутника, тобто як різницю добутків елементів, що лежать на кінцях діагоналі прямокутника з провідним елементом та добутків елементів другої діагоналі цього прямокутника:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= -1 \cdot 2 - (-5 \cdot 1) = 3; & a'_{23} &= 0 \cdot 2 - (-5)(-3) = -15; & a'_{24} &= -1 \cdot 2 - (-5)4 = 18; \\ a'_{32} &= 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4; & a'_{33} &= 5 \cdot 2 - 2(-3) = 16; & a'_{34} &= -1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -10; \\ a'_{42} &= 3 \cdot 2 - (-1)1 = 7; & a'_{43} &= 2 \cdot 2 - (-1)(-3) = 1; & a'_{44} &= 2 \cdot 2 - (-1)4 = 8. \end{aligned}$$

5) Перед визначником запишемо множник $\frac{1}{2^3}$, де 2 – провідний елемент, а 3 – кількість рядків, що залишаються під провідним рядком.

Пояснення переходу від формули (1.10) до (1.11)

1) Перший рядок та перший стовпчик перенесемо без змін до нового визначника.

2) Вважаємо за провідний елемент $a'_{22} = 3$, другий рядок та другий стовпчик – провідними рядком і стовпчиком.

3) Другий рядок переносимо без змін, при цьому спільний множник 3 вносимо за знак визначника.

4) У другому стовпчику всі елементи, які лежать нижче a'_{22} , замінимо на нулі.

5) Знаходимо інші елементи визначника за правилом прямокутника:

$$a''_{33} = 8 \cdot 1 - 2(-5) = 18; \quad a''_{34} = -5 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -17;$$

$$a''_{43} = 1 \cdot 1 - 7(-5) = 36; \quad a''_{44} = 8 \cdot 1 - 7 \cdot 6 = -34.$$

6) Запишемо перед визначником множник $\frac{1}{1^2}$, де 1 – провідний елемент, а 2 – кількість рядків, що залишаються перед провідним рядком.

Нескладно помітити, що третій та четвертий рядки мають пропорційні елементи, отже, виходить, що

$$\Delta = 0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 1.16 Довести, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

дорівнює $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$.

Р о з в ' я з а н н я

Розкладемо визначник за елементами п'ятого стовпчика:

$$\Delta = (-1)^{5+5} a_{55} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Знову розкладемо визначник за елементами четвертого стовпчика:

$$\Delta = (-1)^{4+4} a_{44} a_{55} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно

$$\Delta = (-1)^{3+3} a_{33} a_{44} a_{55} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} a_{11} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55}.$$

2 МАТРИЦІ

2.1 Матриці. Види матриць

Визначення. *Матрицею вимірності $m \times n$* називається прямокутна таблиця чисел з m рядків та n стовпчиків.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Для будь-якого елемента a_{ij} матриці перший індекс означає номер рядка, а другий – номер стовпчика. Скорочено матриці позначають в такий спосіб

$$A = (a_{ij}),$$

де $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Визначення. Якщо кількість рядків матриці не дорівнює кількості стовпчиків, то матриця називається *прямокутною*.

Приміром, матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

є прямокутними.

Визначення. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпчиків і дорівнює n , то вона називається *квадратною* матрицею порядку n .

Приміром, матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

є квадратними матрицями відповідно другого та третього порядків.

В и з н а ч е н н я. Кожній квадратній матриці відповідає визначник, складений з елементів матриці, який називається **детермінантом** матриці і позначається $|A|$ чи то $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю порядку n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ становлять її головну діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ становлять допоміжну діагональ матриці.

В и з н а ч е н н я. Квадратна матриця, всі елементи якої, окрім, може бути, розміщених на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною** матрицею і позначається D :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В и з н а ч е н н я. Квадратна матриця, елементи якої задовольняють умову $a_{mn} = a_{nm}$, називається **симетричеською** матрицею і позначається S :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

В и з н а ч е н н я. Діагональна матриця, у якої $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$, називається **скалярною** матрицею і позначається C :

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В и з н а ч е н н я. Скалярна матриця, у якої $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, називається **одиничною** матрицею і позначається E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Визначник одиничної матриці дорівнює одиниці, тобто $\det E = 1$.

В и з н а ч е н н я. Квадратна матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою** матрицею і позначається O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Визначник нульової матриці дорівнює нулю.

В и з н а ч е н н я. Прямокутні матриці вимірності $1 \times n$ або $m \times 1$ називаються відповідно **матриця-рядок** та **матриця-стовпчик**:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \quad (2.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Такі матриці ще називають **векторами**.

В и з н а ч е н н я. Дві матриці називаються **рівними** поміж собою, якщо ці матриці однієї вимірності та їхні відповідні елементи рівні між собою.

В и з н а ч е н н я. Якщо у матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

вимірності $m \times n$ рядки замінити стовпчиками, то здобута матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

вимірності $n \times m$ називається **транспонованою** матрицею по відношенню до матриці A .

ЗАУВАЖЕННЯ. Для симетричеської матриці A справедлива рівність $A = A^T$.

Зв'язок між A та A^T зручно показати на схемі (рис. 2.1).

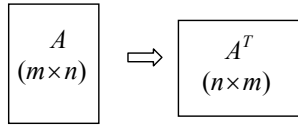


Рисунок 2.1 – Схематичне зображення зв'язку між матрицями A та A^T

Для матриці-рядка $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ транспонованою матрицею є матриця-стовпчик.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Для матриць A та A^T є справедливою рівність

$$(A^T)^T = A. \quad (2.10)$$

В и з н а ч е н н я. Квадратна матриця A називається **симетричеською** матрицею, якщо $A = A^T$, та **кососиметричною**, якщо

$$A = -A^T. \quad (2.11)$$

2.2 Лінійні операції над матрицями

В и з н а ч е н н я. **Сумою матриць A та B** однієї вимірності називається така матриця $C = A + B$ тієї ж вимірності, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B .

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тоді сума матриць $C = A + B$ має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості додавання матриць

Властивість 1. Додавання матриць є *комутативним*, тобто для будь-яких матриць A та B справедлива рівність

$$A + B = B + A, \quad (2.12)$$

де A та B – матриці однієї вимірності.

Властивість 2. Додавання матриць є *асоціативним*, тобто для будь-яких матриць A , B та C справедлива рівність

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (2.13)$$

де A , B , C – матриці однієї вимірності.

Властивість 3. Додавання матриць підпорядковується закону *поглинання нуля*, тобто для будь-якої матриці A справедлива рівність

$$A + O = A, \quad (2.14)$$

де A та O – матриці однієї вимірності.

Властивість 4. Для будь-якої матриці A існує протилежна їй матриця, позначувана $(-A)$, тобто завжди справедлива рівність

$$A + (-A) = O, \quad (2.15)$$

де A та $(-A)$ – матриці однієї вимірності.

Властивість 5. Для будь-якої матриці справедлива рівність

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

де A та B – матриці однієї вимірності.

Визначення. *Добутком матриці A на число k* називається така матриця kA , кожен елемент якої дорівнює відповідному елементові матриці A , помноженому на число k .

Нехай,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{тоді} \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриці на число

Властивість 1. Для будь-якої матриці A та будь-якого дійсного числа α справедлива рівність

$$\alpha A = A\alpha. \quad (2.16)$$

Властивість 2. Для будь-якої матриці A та будь-яких дійсних чисел α та β справедлива рівність

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A). \quad (2.17)$$

Властивість 3. Для будь-яких матриць A та B та будь-яких дійсних чисел α та β справедлива рівність

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A. \quad (2.18)$$

Властивість 4. Для будь-яких матриць A та B та будь-якого дійсного числа α справедлива рівність

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (2.19)$$

де A та B – матриці однієї вимірності.

В л а с т и в і с т ь 5. Для будь-якої матриці A та будь-якого дійсного числа λ справедлива рівність

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T. \quad (2.20)$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливості властивостей 1...5.

2.3 Множення матриць

Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

такі, що кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

В и з н а ч е н н я. *Добутком* матриці A вимірності $m \times p$ на матрицю B вимірності $p \times n$ називається матриця C вимірності $m \times n$, де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

тобто матриця, кількість рядків якої збігається з кількістю рядків першої матриці, а кількість стовпчиків – з кількістю стовпчиків другої матриці.

Елемент c_{ij} матриці C дорівнює сумі добутків елементів i -того рядка першої матриці на відповідні елементи j -того стовпчика другої матриці, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}. \quad (2.21)$$

Зрозуміти процес множення матриць можна за схемою (рис. 2.2)

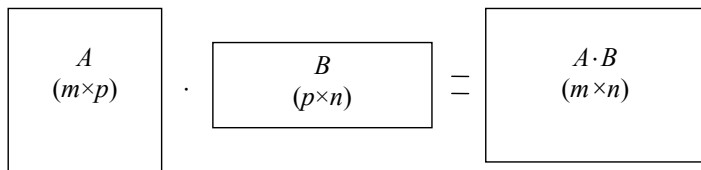


Рисунок 2.2 – Схематичне зображення множення матриць

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Рисунок 2.3 – Множення матриць

В л а с т и в о с т і м н о ж е н н я м а т р и ц ь

В л а с т и в і с т ь 1. Добуток матриць може бути нульовою матрицею, хоча обидва множники не є нульовими матрицями.

В л а с т и в і с т ь 2. Множення матриць не є комутативним, тобто якщо добутки AB та BA існують, то в загальному випадку

$$AB \neq BA.$$

П р и м і т к а. Ті матриці, які задовольняють умову

$$AB = BA,$$

називаються *переставними* або *комутативними*, якщо AB та BA існують.

В л а с т и в і с т ь 3. Множення матриць є асоціативним, тобто для будь-яких матриць A , B , C , справедлива рівність

$$(AB)C = A(BC), \quad (2.22)$$

якщо добутки AB , $(AB)C$, BC та $A(BC)$ існують.

В л а с т и в і с т ь 4. Для будь-яких матриць A та B і для будь-якого дійсного числа α справедлива рівність

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad (2.23)$$

якщо добуток AB існує.

В л а с т и в і с т ь 5. Множення матриць є дистрибутивним відносно додавання, тобто для будь-яких матриць A , B , C , справедлива рівність

$$(A + B)C = AC + BC \quad (2.24)$$

та рівність

$$C(A + B) = CA + CB, \quad (2.25)$$

якщо добутки $(A + B)C$, AC , BC , $C(A + B)$, CA та CB існують

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливості властивостей 1...5.

В л а с т и в і с т ь 6. Для транспонування добутку матриць справедлива формула

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (2.26)$$

якщо існує добуток AB .

Д о в е д е н н я

Для доведення цієї властивості знайдемо елементи матриць $(AB)^T$ та $B^T A^T$, розміщені в i -тому рядку та j -ому стовпчику.

Нехай матриці $A = (a_{ij})$, $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, p$; $B = (b_{ij})$, $i=1, 2, \dots, p$; $j=1, 2, \dots, n$. Позначимо через $(ab)_{ij}^T$ та $(b^T a^T)_{ij}$ елементи відповідно матриць $(AB)^T$ та $B^T A^T$, які знаходяться на перетині i -го рядка та j -го стовпчика.

Тоді

$$(ab)_{ij}^T = (ab)_{ji} = (a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jn}b_{ni}),$$

де $j=1, 2, \dots, m$; $i=1, 2, \dots, n$.

$$(b^T a^T)_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{ni}a_{jn},$$

де $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$.

Порівнюючи дістані результати для елементів матриць $(AB)^T$ та $B^T A^T$, розміщені в i -тому рядку та j -тому стовпчику, бачимо, що ці елементи є рівними між собою. Виходить, що й матриці теж рівні між собою.

ЗАУВАЖЕННЯ. За правилом транспонування добутку матриць маємо:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T A^T = A \cdot A^T, \quad (2.27)$$

тобто матриця $A \cdot A^T$ при транспонуванні не змінюється. Виходить, що у матриці $A \cdot A^T$ елементи є симетричними відносно головної діагоналі. Такі матриці, як уже відомо, називаються симетричеськими.

В л а с т и в і с т ь 7 (т е о р е м а Л а п л а с а). Визначник добутку двох квадратних матриць одного порядку дорівнює добутку їхніх визначників:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (2.28)$$

2.4 Обернена матриця

2.4.1 Основні поняття та теореми

В и з н а ч е н н я. Матриця називається *неособливою* або *невиродженою*, якщо її визначник не дорівнює нулю, і *особливою* або *виродженою*, якщо її визначник дорівнює нулю.

В и з н а ч е н н я. Матриця B називається *оберненою* по відношенню до квадратної матриці A , якщо

$$AB = BA = E,$$

де E – одинична матриця.

Матриця, обернена до матриці A , позначається через A^{-1} , отже,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

В и з н а ч е н н я. Якщо обернена матриця A^{-1} існує, то матриця A називається *оборотною*.

Знаходження оберненої матриці за умови, що вона існує, називається оберненням матриці. Знаходження оберненої матриці використовується при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а також при розв'язуванні задач лінійного програмування тощо.

Теорема. Для існування оберненої матриці необхідно та достатньо, щоб матриця була неособливою.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь

Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1} = E$;

$$\det(AA^{-1}) = \det E; \quad \det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Виходить, що $\det A \neq 0$ і, отже, матриця A – неособлива.

Д о с т а т н і с т ь

Нехай $\det A \neq 0$, доведемо, що існує обернена матриця A^{-1} .

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побудуємо матрицю, яка буде оберненою. Для цього складемо матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

звану **долученою** по відношенню до матриці A .

Долучену матрицю транспонуємо

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Помножимо цю матрицю на $\frac{1}{\det A}$, дістанемо матрицю $\frac{1}{\det A} \tilde{A}^T = B$. Покажемо, що дістана матриця є оберненою для матриці A . Для цього перевіримо дві умови:

$$AB = E \quad \text{та} \quad BA = E.$$

Знайдемо добуток матриць A та B .

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

оскільки із властивостей визначників виходить, що

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Отже, усі діагональні елементи матриці $A\tilde{A}$ дорівнюють $\det A$, а недіагональні – нулю.

Виходить, $A\tilde{A} = (\det A) \cdot E$. За умовою $\det A \neq 0$, тоді

$$\frac{1}{\det A} A\tilde{A} = \frac{\det A}{\det A} E, \quad \text{або} \quad A \left(\frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) = E.$$

Отже, матриця $\frac{1}{\det A} \tilde{A} = B$ є правою оберненою матрицею для неособливої матриці A .

Аналогічно перевіряється, що $BA = E$ або $\tilde{A}A = (\det A) \cdot E$, тобто матриця

$\frac{1}{\det A} \tilde{A} = B$ є лівою оберненою матрицею для неособливої матриці A .

Це означає, що $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$.

Теорему доведено.

Тепер покажемо, що для кожної неособливої матриці існує лише одна обернена матриця. Припустимо, що існує ще одна обернена матриця A' . Тоді

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \quad \text{та} \quad A'A = AA' = E;$$

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA') = (A^{-1}A)A' = EA' = A'.$$

Виходить, $A^{-1} = A'$, тобто обернена матриця може бути лише одна.

Таким способом дістали формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

С х е м а з н а х о д ж е н н я о б е р н е н о ї м а т р и ц і

1. Знайти визначник матриці A , якщо $\det A \neq 0$, то перейти до п. 2.
2. Знайти алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A .
3. Скласти допоміжну матрицю $\tilde{A}^T$.
4. Помножити допоміжну матрицю на число $\frac{1}{\det A}$.
5. Дістати обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$.

За допомогою обернених матриць можна розв'язувати матричні рівняння. Якщо $AX = B$, то $X = A^{-1}B$. Якщо $YA = B$, то $Y = BA^{-1}$.

2.4.2 Знаходження оберненої матриці табличним методом

Розглянемо знаходження оберненої матриці табличним методом.

1. Складемо таблицю 1, у лівій частині якої запишемо елементи матриці A , а у правій – елементи одиничної матриці E того ж порядку, що і матриця A .

Таблиця 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	0	$\cdots$	0
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	0	$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\cdots$	a_{nn}	0	0	0	$\cdots$	1

2. Діагональні елементи матриці A послідовно вважаються за провідні елементи, при цьому на відповідному етапі за провідні вважаються ті рядок та стовпчик, на перетині яких міститься провідний елемент.

3. Далі переходимо до складання таблиці 2. У таблиці 1 провідними є елемент a_{11} та перший рядок. Провідний рядок ділимо на провідний елемент і дістаний рядок переносимо до таблиці 2. У таблиці 1 провідним стовпчиком є перший стовпчик. Цей стовпчик у таблицю 2 записується в такий спосіб, що всі елементи, які містились під провідним елементом, замінюються на нулі. Тепер розглянемо, в який спосіб відшуковуються ті елементи таблиці 2, що не належали провідному рядку чи стовпчику. У таблиці 1 виокремлюємо прямокутник, у якому даний елемент та провідний елемент є вершинами прямокутника, що лежать на одній з діагоналей прямокутника, званій головною діагоналлю прямокутника. Дістаємо добуток елементів, що належать до головної діагоналі пря-

мокутника, і від знайденого добутку віднімаємо добуток елементів, які належать до допоміжної діагоналі прямокутника. Результат ділимо на провідний елемент і заносимо до таблиці 2 замість даного елемента.

Такий метод обчислювання елементів нової таблиці називається **правилом прямокутника**. Але нові елементи можна відшукувати і за формулою

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}a_{ii} - a_{ki}a_{ij}}{a_{ii}}, \quad (2.32)$$

де a_{ii} – провідний елемент.

Таблиця 2	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	1	0	0	$\dots$	0
	0	a'_{22}	a'_{23}	$\dots$	a'_{2n}	$a'_{2,n+1}$	$a'_{2,n+2}$	$a'_{2,n+3}$	$\dots$	$a'_{2,2n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	0	a'_{n2}	a'_{n3}	$\dots$	a'_{nn}	$a'_{n,n+1}$	$a'_{n,n+2}$	$a'_{n,n+3}$	$\dots$	$a'_{n,2n}$

У такий же спосіб переходимо і до наступної таблиці. Продовжуємо цей процес доти, поки ліворуч не дістанемо одиничну матрицю, тоді матриця праворуч буде оберненою до заданої матриці.

Таблиця 1	1	0	0	$\dots$	0	$a'_{1,n+1}$	$a'_{1,n+2}$	$a'_{1,n+3}$	$\dots$	$a'_{1,2n}$
	0	1	0	$\dots$	0	$a'_{2,n+1}$	$a'_{2,n+2}$	$a'_{2,n+3}$	$\dots$	$a'_{2,2n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	0	0	0	$\dots$	1	$a'_{n,n+1}$	$a'_{n,n+2}$	$a'_{n,n+3}$	$\dots$	$a'_{n,2n}$

Іноді виходить так, що елемент, який в перебігу перетворень слід вважати за провідний, дорівнює нулю. У цьому разі належить скористатись одним з таких способів.

1. До рядка, що утримує нульовий провідний елемент, слід додати інший рядок в такий спосіб, щоб при цьому збереглися утворені раніше нулі, а новий провідний елемент вже відрізнявся від нуля.

2. Поміняти місцями два рядки.

3. До стовпчика, що містить нульовий провідний елемент, додати інший стовпчик у такий спосіб, щоб збереглися утворені раніше нулі, а новий провідний елемент відрізнявся від нуля.

4. Поміняти місцями два стовпчики.

5. У провідному рядку обрати за провідний не діагональний, а будь-який інший елемент, що відрізняється від нуля і розміщується праворуч діагонального.

Зробивши одне з рекомендованих перетворень 1...5, слід продовжити процес пошуку оберненої матриці. При цьому слід мати на увазі, що коли перетворення виконується з рядками, то дістана праворуч матриця і є оберненою. Якщо ж перетворення виконуються зі стовпчиками, то утворена матриця ще не

є оберненою. Наприклад, коли в перебігу перетворювань змінити місцями i -й та j -й стовпчики, то в утвореній праворуч матриці слід поміняти місцями i -й та j -й рядки. Після цього матриця стане оберненою.

Якщо в перебігу перетворювань до i -го стовпчика додавався j -й, то в утвореній праворуч матриці слід до j -го рядка додати i -й, після чого матриця стане оберненою.

Якщо замість нульового провідного елемента було обрано інший, недіагональний елемент, то після виконання усіх перетворювань ліворуч виходить не одинична матриця, а така, з якої переставленням рядків можна дістати одиничну матрицю. При цьому аналогічне переставлення має виконуватись і над матрицею, розміщеною праворуч. Тоді утворена праворуч матриця буде оберненою.

2.5 Ранг матриці

2.5.1 Мінор матриці

Розглянемо матрицю вимірності $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. *Мінором k -го порядку* матриці A вимірності $m \times n$ називається визначник порядку k ($k \leq \min\{m, n\}$), складений з елементів матриці A , розміщених на перетині будь-яких k рядків та будь-яких k стовпчиків матриці A .

Матриця вимірності $m \times n$ має мінори порядку $1, 2, \dots, p$, де $p \leq \min\{m, n\}$. При цьому під мінорами першого порядку розуміють власні елементи матриць.

2.5.2. Знаходження рангу матриці методом обвідних мінорів

Визначення. *Рангом* матриці A називається найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля. При цьому використовується позначення $r(A)$ або $\text{rang}(A)$.

Ранг нульової матриці дорівнює нулю. При обчислюванні ранга матриці слід переходити від обчислення мінорів менших порядків до обчислення мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено один мінор M порядку k , що не дорівнює нулю, то в цьому разі слід переходити до обчислювання мінорів $k + 1$ -го порядку, що

обводять цей мінор. Якщо всі обвідні мінори $k+1$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k .

2.5.3 Елементарні перетворення матриці

Нехай A та $\tilde{A}$ – будь-які матриці вимірності $m \times n$. Позначимо рядки матриці A через $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots, l_l, \dots, l_m$, де $l_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Розглянемо такі перетворення матриці A , наслідком яких є матриця $\tilde{A}$.

1. Матрицю $\tilde{A}$ утворено з матриці A переставленням двох рядків, якщо її рядки мають таку послідовність

$$l_1, l_2, \dots, l_k, \dots, l_l, \dots, l_m.$$

2. Матрицю $\tilde{A}$ утворено з матриці A множенням k -го рядка матриці A на число $\lambda \neq 0$, якщо рядки матриці $\tilde{A}$ мають послідовність

$$l_1, l_2, \dots, \lambda l_k, \dots, l_l, \dots, l_m.$$

3. Матрицю $\tilde{A}$ утворено з матриці A додаванням до елементів k -го рядка матриці A відповідних елементів l -го рядка, помножених на число λ , якщо рядки матриці $\tilde{A}$ мають послідовність

$$l_1, l_2, \dots, l_k + \lambda l_l, \dots, l_l, \dots, l_m.$$

Операції над матрицями, перелічені у п.п. 1, 2, 3, називаються елементарними перетвореннями рядків матриці. Аналогічні операції можна впровадити і для стовпчиків.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо матрицю $\tilde{A}$ утворено з матриці A елементарними перетвореннями, то й матриця A може бути утворена з матриці $\tilde{A}$ елементарними перетвореннями і ранги цих матриць збіжні.

За допомогою елементарних перетворень матриці можна приводити до більш простої форми. Розглянемо один з методів такого перетворення.

І етап.

Нехай A – ненульова матриця. Може так бути, що в цій матриці є нульові стовпчики. Тоді за допомогою елементарного перетворення 1 запишемо їх першими.

II етап.

Далі працюємо з тією частиною матриці, де залишилися ненульові стовпчики. Нехай перший ненульовий стовпчик є k -м стовпчиком. Якщо його перший елемент дорівнює нулю, то перший рядок матриці за допомогою елементарного перетворення 1 змінимо на такий, в якому k -й елемент відрізняється від нуля.

Подальші перетворення спрямовано на те, щоб у k -му стовпчику всі елементи, які розміщено нижче за перший рядок, стали нулями. Приміром, щоб елемент a_{2k} дорівнював нулю, слід елементи другого рядка поділити на a_{2k} та помножити на $(-a_{1k})$ за допомогою елементарного перетворення 2, після чого

елементи першого рядка за допомогою елементарного перетворення 3 додати до відповідних елементів другого рядка. В такий спосіб можна утворити нулі в усіх інших рядках k -го стовпчика.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m,k+1} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Ш е т а п.

Перший рядок дістаной матриці залишаємо надалі без змін, і в наступних перетвореннях він участі не бере. До тієї частини матриці, що складається з другого, третього, ..., m -го рядків, $k+1$, $k+2$, ..., k_n стовпчиків, застосуємо перетворення такі, як і на I та II етапах.

Продовжуючи цей процес, матрицю A через r кроків можна буде привести до ступінчастої форми:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k}^{(r)} & a_{1,k+1}^{(r)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(r)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,k+r}^{(r)} & \cdots & a_{2n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{j,k+r}^{(r)} & \cdots & a_{jn}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

З цього виходить така теорема:

Теорема. Будь-яку ненульову матрицю можна привести до ступінчастої форми.

2.5.4. Знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень

Одним з методів знаходження рангу матриці є метод, побудований на елементарних перетвореннях матриці, що не змінюють рангу матриці. До таких перетворень матриці належать:

- 1) транспонування матриці;
- 2) переставляння двох рядків чи двох стовпчиків;
- 3) викреслювання рядка чи стовпчика, всі елементи яких дорівнюють нулю;
- 4) викреслювання рядка чи стовпчика, елементи яких є пропорційні до відповідних елементів іншого рядка чи стовпчика;
- 5) множення усіх елементів рядка чи стовпчика на одне й те саме число, відмінне від нуля;

б) додавання до елементів рядка чи стовпчика відповідних елементів іншого рядка чи стовпчика, помножених на одне й те саме число.

В и з н а ч е н н я. Ненульовий мінор найбільшого порядку матриці називається **базисним**, а його рядки та стовпчики – відповідно **базисними рядками** та **стовпчиками**.

Базисних мінорів у матриці може бути декілька.

2.5.5 Поняття про лінійну залежність рядків чи стовпчиків матриці

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Знов позначимо рядки цієї матриці у такий спосіб:

$$e_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n});$$

$$e_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n});$$

.....

$$e_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Вираз вигляду

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{m-1} e_{m-1},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ – деякі дійсні числа, називається **лінійною комбінацією рядків** $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$.

Припустимо, що справедливою є рівність

$$e_m = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{m-1} e_{m-1}$$

або

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{m-1} e_{m-1} - e_m = O,$$

де під символом O розуміється нульовий рядок з n елементів

$$O = (0, 0, \dots, 0).$$

Тоді це означає, що рядок e_m лінійно виражається через рядки $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$.

В и з н а ч е н н я. Рядки $e_1, e_2, \dots, e_m$ матриці A називаються **лінійно залежними**, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, та є справедливою рівність

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0.$$

Якщо така рівність є можлива лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то рядки $e_1, e_2, \dots, e_m$ називаються **лінійно незалежними**.

Із сказаного виходить, що коли один з рядків матриці лінійно виражається через інші рядки матриці, то рядки цієї матриці між собою є лінійно залежними.

Є справедливим і зворотне твердження. Нехай між рядками матриці існує лінійна залежність, тобто

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0 - \text{нульовий рядок,}$$

а хоча б одне з чисел, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ не дорівнює нулю. Припустимо, що $\lambda_m \neq 0$, тоді, поділивши на λ_m обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$e_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} e_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} e_{m-1},$$

а це й означає, що один з рядків матриці виражається через лінійну комбінацію інших рядків.

Усі розглянуті твердження щодо рядків матриці поширюються і на її стовпчики.

Теорема (про ранг матриці). Якщо ранг матриці дорівнює r , то в цій матриці існує r лінійно незалежних рядків та r лінійно незалежних стовпчиків.

Д о в е д е н н я

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нехай ранг матриці A дорівнює r . Не зменшуючи спільності, припустимо, що ненульовий мінор r -го порядку, названий базисним мінором, розміщується у лівому верхньому куті матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Детермінант D базисного мінора відрізняється від нуля:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Слід довести, що рядки базисного мінора є лінійно незалежними. Припустимо, що ці рядки є лінійно залежними. Тоді справедлива рівність

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}.$$

Помножимо елементи першого рядка матриці A на $(-\lambda_1)$ й додамо їх до відповідних елементів r -го рядка. У новій матриці помножимо елементи другого рядка на $(-\lambda_2)$ й додамо їх до відповідних елементів r -го рядка. Продовжуючи цей процес, нарешті, елементи $r-1$ -го рядка помножимо на $(-\lambda_{r-1})$ і додамо їх до відповідних елементів r -го рядка. Після таких перетворень, які, до речі, не змінюють рангу матриці, виходить, що r -й рядок останньої матриці складається лише з нулів. Визначник D від цих перетворень також не змінює свого значення, але, оскільки в ньому останній рядок став нульовим, то $D=0$. Такий результат суперечить умові, і це пов'язано з помилковим припущенням про те, що базисні рядки матриці є лінійно залежні.

Отже, доведено, що базисні рядки матриці є лінійно незалежними. Залишається довести, що решта рядків матриці лінійно виражаються через її базисні рядки.

Розглянемо такий визначник Δ , в якому до базисних рядків долучився k -й рядок, а до базисних стовпчиків – l -й стовпчик:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{ml} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix},$$

де $1 \leq l \leq n$; $r \leq k \leq m$.

Якщо $l \leq r$, то в Δ буде два однакових стовпчики, і тоді $\Delta = 0$. Якщо $l > r$, то Δ – це мінор $r+1$ -го порядку, отже, він дорівнює нулю.

Розкладемо визначник Δ за елементами останнього стовпчика.

$$\Delta = a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \dots + a_{rl}A_{rl} + a_{kl}A_{kl},$$

де $A_{1l}, A_{2l}, \dots, A_{rl}, A_{kl}$ – алгебраїчні доповнення елементів останнього стовпчика. Звідси маємо

$$a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \dots + a_{rl}A_{rl} + a_{kl}A_{kl} = 0.$$

Слід звернути увагу на те, що до алгебраїчних доповнень не входять елементи останнього стовпчика. До речі, A_{kl} збігається з D :

$$A_{kl} \neq 0.$$

У зв'язку з цим обидві частини рівності можна поділити на $A_{kl} \neq 0$:

$$a_{kl} = -\frac{A_{1l}}{A_{kl}}a_{1l} - \frac{A_{2l}}{A_{kl}}a_{2l} - \dots - \frac{A_{rl}}{A_{kl}}a_{rl}.$$

Позначимо:

$$\lambda_1 = -\frac{A_{1l}}{A_{kl}}; \quad \lambda_2 = -\frac{A_{2l}}{A_{kl}}; \quad \dots; \quad \lambda_r = -\frac{A_{rl}}{A_{kl}}.$$

Тоді

$$a_{kl} = \lambda_1 a_{1l} + \lambda_2 a_{2l} + \dots + \lambda_r a_{rl}.$$

Як уже зазначалось, l може набувати значень від 1 до n . Надаючи l тих чи інших значень, дістанемо рівності

$$a_{k1} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21l} + \dots + \lambda_r a_{r1};$$

$$a_{k2} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_r a_{r2};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{kn} = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_r a_{rn}.$$

Зрозуміло, що k -й рядок матриці A лінійно виражається через перші r рядків. Аналогічно можна довести, що така сама залежність має місце і для стовпчиків

$$l_k = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_r l_r.$$

Н а с л і д о к 1. Максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних стовпчиків.

Н а с л і д о к 2. Для того щоб визначник дорівнював нулю, необхідно та достатньо, щоб його рядки чи стовпчики були лінійно залежними.

2.6 Приклади

2.6.1 Матриці. Дії над матрицями

Приклад 2.1 Помножити матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на число $k=3$.

Р о з в ' я з а н н я

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3(-1) & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 & 3(-3) \\ 3(-2) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В і д п о в і д ь: $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.2 Знайти матрицю, протилежну до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для того щоб знайти матрицю $(-A)$, протилежну до матриці A , треба матрицю A помножити на (-1) .

$$-A = -1 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.3 Скласти матриці $A + B$, якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$1) C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2) C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.4 Знайти лінійну комбінацію $3A - 2B$ матриць A та B , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$3A = \begin{pmatrix} 6-12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}; \quad -2B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.5 Задано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю C , якщо:

- 1) $C = 2A$; 2) $C = 3B$; 3) $C = -3A + 4B$; 4) $4A + 2C = 5B$.

Розв'язання

- 1) За умовою $C = 2A$. Тому

$$C = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) За умовою $C = 3B$. Аналогічно маємо

$$C = 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 3) Оскільки $C = -3A + 4B$, знаходимо матриці $(-3A)$ та $4B$:

$$-3A = -3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -12 \\ -6 & -15 & 0 \end{pmatrix},$$

$$4B = 4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -16 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб знайти суму цих матриць, потрібно скласти їхні відповідні елементи:

$$C = \begin{pmatrix} -9+4 & 3-4 & -12-16 \\ -6+12 & -15+8 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -28 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 4) Розв'язавши матричне рівняння $4A + 2C = 5B$, знаходимо матрицю C :

$$2C = 5B - 4A; \quad C = \frac{5}{2}B - 2A$$

або

$$C = \frac{5}{2}B + (-2)A.$$

Тоді

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -10 \\ \frac{15}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ -4 & -10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-6 & -\frac{5}{2}+2 & -10-8 \\ \frac{15}{2}-4 & 5-10 & \frac{5}{2}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -18 \\ \frac{7}{2} & -5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь: 1) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -28 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -18 \\ \frac{7}{2} & -5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 2.6 Знайти добуток матриць A та B , якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Р о з в ' я з а н н я

У кожному з трьох випадків кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B . Отже, існує добуток цих матриць. Шукатимемо добуток у відповідності з правилом множення матриць (див. п. 2.3).

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 4(-3) + 5(-1) + 7 \cdot 4) = (15).$

Дістана матриця є скалярною.

2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1(-1) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2(-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3(-1) \\ -5 \cdot 2 & -5 \cdot 3 & -5(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}.$

3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 - 4(-1) \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}.$

В і д п о в і д ь: 1) 15; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.7 Знайти добутки матриць AE та EA , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результати порівняти.

Розв'язання

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Висновок: $AE = EA = A$.

В і д п о в і д ь: $AE = EA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.8 Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знаходимо кожний з елементів матриці $C = AB$.

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2;$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6;$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1;$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1;$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8;$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1;$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Виходить, $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

В і д п о в і д ь: $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.9 Знайти добутки матриць AB та BA . Результати порівняти.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

В обох випадках множниками є квадратні матриці одного порядку, отже, добутки існують і мають такий самий порядок.

$$1) AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3(-2) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 18 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$2) AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В обох випадках $AB \neq BA$, тобто матриці A та B не є комутативні.

$$\text{Відповідь: } 1) AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}; \quad 2) AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.10 Знайти добуток матриць A та B , якщо він існує, у кожному з випадків:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad 4) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1) Матриці A та B – це квадратні матриці одного порядку. Отже, існує і має такий самий порядок їхній добуток.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 7 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot 7 - 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) & 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}.$$

2) Вимірність матриць A та B відповідно є 3×3 та 3×1 . Добуток матриць існує і має вимірність 3×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

3) Вимірність матриць A та B відповідно є (3×1) та (1×3) . Отже, вимірність добутку є 3×3 .

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3(-2) & 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 & 4(-2) & 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 & 2(-2) & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

4) У цьому разі добуток теж існує і має вимірність 1×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \cdot 3 + (-2)4 + 3 \cdot 2) = (13).$$

В і д п о в і д ь: 1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; 4) 13.

Приклад 2.11 Знайти добуток AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + (-1)2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1)1 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

В і д п о в і д ь: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$

Якщо ми спробуємо знайти добуток BA , то дійдемо висновку, що це неможливо.

Приклад 2.12 Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

- 1) вимірність матриць AC , DA , AD , DAC , $BCDA$;
- 2) k_{23} – елемент матриці $K = AB$;
- 3) r_{31} – елемент матриці $R = CD$;

Розв'язання

1) При множенні матриці вимірності $m \times n$ на матрицю вимірності $n \times p$ виходить матриця-добуток вимірністю $m \times p$. За умовою вимірність матриць A, B, C, D дорівнює відповідно 2×4 , 4×4 , 4×4 , 4×2 . Отже, виходить, що вимірність матриць $A \cdot C$, $D \cdot A$, $A \cdot D$ відповідно дорівнює 2×4 ; 4×4 ; 2×2 .

Матриця $D \cdot A \cdot C$ – це добуток матриць $D \cdot A$ і C , отже, її вимірність є 4×4 а матриця $B \cdot C \cdot D \cdot A$ – це добуток матриць $B \cdot C$ та $D \cdot A$ і її вимірність є 4×4 .

2) Елемент k_{23} матриці K є сумою добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи третього стовпчика матриці B .

Отже,

$$k_{23} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -7.$$

3) Елемент r_{31} матриці R – це сума добутків елементів третього рядка матриці C на перший стовпчик матриці D , тобто

$$r_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 17.$$

В і д п о в і д ь: 1) 2×4 , 4×4 , 2×2 , 4×4 , 4×4 ; 2) $k_{23} = -7$; 3) $r_{31} = 17$.

Приклад 2.13 Знайти матрицю $C = AE + OB$: 1) безпосередньо;

2) користуючись властивостями матриць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Знайти матриці A^2 , E^3 , O^2 .

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 1) \ C = AE + OB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$2) \ C = AE + OB = A + O = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$3) \ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 E^3 = E \cdot E \cdot E &= (E \cdot E) \cdot E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E
 \end{aligned}$$

або, якщо користуватись властивостями добутків, $E^3 = E(E \cdot E) = E \cdot E = E$;

$$O^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

або, якщо користуватись властивостями добутків, то $O^2 = O \cdot O = O$.

$$\text{В і д п о в і д ь: } AE + OB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}; \quad E^3 = E; \quad O^2 = O.$$

2.6.2 Обернена матриця

Приклад 2.14 Перевірити, чи є матриця A неособливою:

$$1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб дізнатися, чи є матриця A неособливою, потрібно дізнатися, чи не дорівнює нулю $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Визначник матриці A відрізняється від нуля, а це означає, що матриця A є неособливою.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Оскільки } \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ то це означає, що } A -$$

особлива матриця.

В і д п о в і д ь: 1) неособлива; 2) особлива.

Приклад 2.15 Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

$$1. \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Виходить, } A - \text{ неособлива матриця.}$$

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = 3; \quad A_{21} = 1; \quad A_{12} = -4; \quad A_{22} = 2.$$

3. Знаходимо матрицю $\tilde{A}^T$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Складаємо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогічно перевіряється рівність $A^{-1}A = E$.

$$\text{В і д п о в і д ь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.16 Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

$$1. \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0. \text{ Отже } A - \text{ неособлива матриця.}$$

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7; & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14; & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6; & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2; & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6; & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

$$3. \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \text{ або } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7+12+9 & -14-4+18 & 7-4-3 \\ 0-6+6 & 0+2+12 & 0+2-2 \\ -21+0+21 & -42+0+42 & 21+0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряється рівність $A^{-1}A = E$.

$$\text{В і д п о в і д ь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.17 Знайти матрицю A^{-1} , якщо

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

A – неособлива матриця. Отже, існує обернена матриця. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A .

$$A_{11} = (-1)^2 4 = 4, \quad A_{21} = (-1)^3 3 = -3, \quad A_{12} = (-1)^3 (-2) = 2, \quad A_{22} = (-1)^4 1 = 1.$$

Запишемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення матриці A :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 20 & 8 & -12 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{24} & \frac{8}{24} & \frac{-12}{24} \\ \frac{-5}{24} & \frac{4}{24} & \frac{3}{24} \\ \frac{-7}{24} & \frac{-4}{24} & \frac{9}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 20 & 8 & -12 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 20 & 8 & -12 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: 1) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad 2) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.18 Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

табличним методом.

Р о з в ' я з а н н я

1. Складемо таблицю 1.

Таблиця 1.

	<u>2</u>	2	-3	1	0	0
1	1	-1	0	0	1	0
	-1	0	1	0	0	1

2. Перейдемо до таблиці 2.

Елементи першого рядка ділимо на провідний елемент 2, результати записуємо до першого рядка таблиці 2.

Усі елементи першого стовпчика, що лежать нижче першого рядка, замінимо на 0.

Решту елементів таблиці 2 знаходимо за формулою (2.32).

$$a'_{22} = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} = -2; \quad a'_{23} = \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{11}} = -\frac{3}{2}; \quad a'_{24} = \frac{a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}}{a_{11}} = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{25} = \frac{a_{25}a_{11} - a_{21}a_{15}}{a_{11}} = 1; \quad a'_{26} = \frac{a_{26}a_{11} - a_{21}a_{16}}{a_{11}} = 0;$$

$$a'_{32} = \frac{a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12}}{a_{11}} = 3; \quad a'_{33} = \frac{a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}}{a_{11}} = \frac{5}{2}; \quad a'_{34} = \frac{a_{34}a_{11} - a_{31}a_{14}}{a_{11}} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{35} = \frac{a_{35}a_{11} - a_{31}a_{15}}{a_{11}} = 0; \quad a'_{36} = \frac{a_{36}a_{11} - a_{31}a_{16}}{a_{11}} = 1.$$

Тепер можна записати таблицю 2.

Таблиця 2

2	1	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	0	$\textcircled{-2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
	0	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

3. У таблиці 2 провідний елемент $a'_{22} = -2$. Перший стовпчик таблиці 2 переходить без змін до таблиці 3. Другий рядок таблиці 2 ділимо на $a'_{22} = -2$, результат заносимо до таблиці 3. Також записуємо до таблиці 3 другий стовпчик, в якому усі елементи, що містяться нижче та вище другого рядка, дорівнюють 0.

Інші елементи знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}
 a''_{13} &= \frac{a'_{13}a'_{22} - a'_{12}a'_{23}}{a'_{22}} = \frac{3}{4}; & a''_{14} &= \frac{a'_{14}a'_{22} - a'_{12}a'_{24}}{a'_{22}} = \frac{1}{4}; \\
 a''_{15} &= \frac{a'_{15}a'_{22} - a'_{12}a'_{25}}{a'_{22}} = \frac{1}{2}; & a''_{16} &= \frac{a'_{16}a'_{22} - a'_{12}a'_{26}}{a'_{22}} = 0; \\
 a''_{33} &= \frac{a'_{33}a'_{22} - a'_{12}a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{1}{4}; & a''_{34} &= \frac{a'_{34}a'_{22} - a'_{12}a'_{24}}{a'_{22}} = -\frac{1}{4}; \\
 a''_{35} &= \frac{a'_{35}a'_{22} - a'_{12}a'_{25}}{a'_{22}} = \frac{3}{2}; & a''_{36} &= \frac{a'_{36}a'_{22} - a'_{12}a'_{26}}{a'_{22}} = 1.
 \end{aligned}$$

Таблиця 3

3	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
	0	0	$\textcircled{\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1

4. У таблиці 3 провідним елементом є $a''_{33} = \frac{1}{4}$. До таблиці 4 переходимо за аналогічними правилами:

$$\begin{aligned}
 a'''_{14} &= \frac{a''_{14}a''_{33} - a''_{13}a''_{34}}{a''_{33}} = 1; & a'''_{15} &= \frac{a''_{15}a''_{33} - a''_{13}a''_{35}}{a''_{33}} = -4; & a'''_{16} &= \frac{a''_{16}a''_{33} - a''_{13}a''_{36}}{a''_{33}} = -3; \\
 a'''_{24} &= \frac{a''_{24}a''_{33} - a''_{13}a''_{34}}{a''_{33}} = 1; & a'''_{25} &= \frac{a''_{25}a''_{33} - a''_{13}a''_{35}}{a''_{33}} = -5; & a'''_{26} &= \frac{a''_{26}a''_{33} - a''_{13}a''_{36}}{a''_{33}} = -3.
 \end{aligned}$$

Таблиця 4

4	1	0	0	1	-4	-3
	0	1	0	1	-5	-3
	0	0	1	-1	6	4

5. У лівій частині вийшла одинична матриця; це означає, що у правій частині ми дістали обернену матрицю. Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Перевіримо одну з умов $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.19 Знайти обернену матрицю до заданої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

табличним методом.

Розв'язання

Починаємо розв'язання, як і у прикладі 2.18: побудуємо таблиці 1 та 2.

Таблиця 1	1	0	2	1	0	0
	3	0	5	0	1	0
	-1	1	1	0	0	1
Таблиця 2	1	0	2	1	0	0
	0	0	-1	-3	1	0
	0	1	3	1	0	1

Пояснення до переходу від таблиці 2 до таблиці 3.

У таблиці $2a'_{22} = 0$, тому він не може бути провідним елементом, у зв'язку з чим необхідно виконати одне з перетворень, рекомендованих у п. 2.4.2. Пріміром, зробимо перетворення 1, після цього дістанемо таблицю 3, у якій провідний елемент уже відрізняється від нуля.

Таблиця 3	1	0	2	1	0	0
	0	1	2	-2	1	1
	0	1	3	1	0	1

Далі маємо

Таблиця 4	1	0	2	1	0	0
	0	1	2	-2	1	1
	0	0	1	3	-1	0
Таблиця 5	1	0	0	-5	2	0
	0	1	0	-8	3	1
	0	0	1	-3	-1	0

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо одну з умов $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1}A = E.$$

В і д п о в і д ь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Завдання для самостійної роботи. Розв'язати приклад 2.19, змінивши місцями другий та третій рядки на другому етапі перетворення.

Розв'яжемо тепер цей же приклад ще раз за допомогою перетворень 3 та 4 (2.4.2).

Якщо користуватись перетворенням 3, то матимемо таку таблицю:

Таблиця 1	①	0	2	1	0	0
	3	0	5	0	1	0
	-1	1	1	0	0	1
Таблиця 2	1	0	2	1	0	0
	0	0	-1	-3	1	0
	0	1	3	1	0	1
Таблиця 3	1	2	0	1	0	0
	0	⊖1	0	-3	1	0
	0	3	1	1	0	1
Таблиця 4	1	0	0	-5	2	0
	0	1	0	3	-1	0
	0	0	1	-8	3	0

Випадково так сталося, що ліворуч вже утворилася одинична матриця, отже, необхідність у завершальному етапі перетворень для елемента a'''_{33} відпала. У матриці, що утворилася праворуч, слід поміняти місцями другий та третій рядки, внаслідок чого дістанемо обернену матрицю.

Тепер будемо користуватись перетворенням 4 (2.4.2). Таблиця у цьому разі матиме вигляд:

Таблиця 1	① 0 2	1 0 0
	3 0 5	0 1 0
	-1 1 1	0 0 1
Таблиця 2	1 0 2	1 1 0
	0 0 -1	-3 0 0
	0 1 3	1 1 1
Таблиця 3	1 2 2	1 0 0
	0 -1 -1	-3 1 0
	0 4 3	1 0 1
Таблиця 4	1 0 0	-5 2 0
	0 1 1	3 -1 0
	0 0 ①	-11 4 -1
Таблиця 5	1 0 0	-5 2 0
	0 1 0	-8 3 1
	0 0 1	11 4 -1

Перетворення здійснено. Ліворуч утворено одиничну матрицю, а от праворуч ще не дістано обернену матрицю. Для її знаходження слід до третього рядка додати другий рядок, що і дасть обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер перетворення 5 п. 2.4.2. Таблиця буде такою:

Таблиця 1	① 0 2	1 0 0
	3 0 5	0 1 0
	-1 1 1	0 0 1
Таблиця 2	1 0 2	1 0 0
	0 0 ①	-3 1 0
	0 1 3	1 0 1

Таблиця 3	1	0	0	-5	2	0
	0	0	1	3	-1	0
	0	1	0	-8	3	1

Для того, щоб ліворуч вийшла одинична матриця, слід другий та третій рядки таблиці 3 змінити місцями.

Отже, обернена матриця матиме вигляд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Слід мати на увазі, що табличний метод має сенс застосовувати до матриць вимірності $n \geq 4$.

Приклад 2.20 Знайти матрицю, обернену до даної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

табличним методом.

Розв'язання

Побудуємо таблиці 1...5. Відповідні пояснення процесу побудування цих таблиць знаходяться нижче.

Таблиця 1	②	4	0	6	1	0	0	0
	-1	2	1	3	0	1	0	0
	5	0	-1	2	0	0	1	0
	-2	-3	1	0	0	0	0	1
Таблиця 2	1	2	0	3	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	0	④	1	6	$\frac{1}{2}$	1	0	0
	0	-10	-1	-13	$-\frac{5}{2}$	0	1	0
	0	1	1	6	1	0	0	1

Таблиця 3	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{2}\right) & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{2} \end{array}$	$\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}$
Таблиця 4	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \left(\frac{4}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array}$	$\begin{array}{cccc} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$
Таблиця 5	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}$

Пояснення

1. Вважатимемо в таблиці 1 за провідний елемент $a_{11} = 2$.
2. Усі елементи першого, провідного, рядка поділимо на $a_{11} = 2$ і дістані результати занесемо до таблиці 2.
3. Усі елементи провідного стовпчика таблиці 2, за винятком $a'_{11} = 1$, замінимо на нулі й занесемо до таблиці 3.
4. Переходимо до розрахунків решти елементів таблиці 2 за правилом прямокутника:

$$a'_{22} = (2 \cdot 2 - (-1)4) \frac{1}{2} = 4; \quad a'_{32} = (0 \cdot 2 - 5 \cdot 4) \frac{1}{2} = -10; \quad a'_{42} = (-3 \cdot 2 - (-2)4) \frac{1}{2} = 1;$$

$$a'_{23} = (1 \cdot 2 - (-1)0) \frac{1}{2} = 1; \quad a'_{33} = (-1 \cdot 2 - 5 \cdot 0) \frac{1}{2} = -1; \quad a'_{43} = (1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) \frac{1}{2} = 1;$$

$$a'_{24} = (3 \cdot 2 - (-1)6) \frac{1}{2} = 6; \quad a'_{34} = (2 \cdot 2 - 5 \cdot 6) \frac{1}{2} = -13; \quad a'_{44} = (0 \cdot 2 - (-2)6) \frac{1}{2} = 6;$$

$$\begin{aligned}
a'_{25} &= (0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; & a'_{35} &= (0 \cdot 2 - 5 \cdot 1) \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}; & a'_{45} &= (0 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) \frac{1}{2} = 1; \\
a'_{26} &= (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) \frac{1}{2} = 1; & a'_{36} &= (0 \cdot 2 - 5 \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; & a'_{46} &= (0 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; \\
a'_{27} &= (0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; & a'_{37} &= (1 \cdot 2 - 5 \cdot 0) \frac{1}{2} = 1; & a'_{47} &= (0 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; \\
a'_{28} &= (0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; & a'_{38} &= (0 \cdot 2 - 5 \cdot 0) \frac{1}{2} = 0; & a'_{48} &= (1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

5. Вважатимемо в таблиці 2 за провідний елемент $a'_{22} = 4$.

6. Поділимо елементи провідного рядка в таблиці 2 на елемент $a'_{22} = 4$ і результати занесемо до таблиці 3.

7. Перший стовпчик таблиці 2 перенесемо до таблиці 3 без змін.

8. Другий стовпчик таблиці 3 складається з нулів, за винятком елемента $a'_{22} = 1$.

9. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$\begin{aligned}
a''_{13} &= (0 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}; & a''_{33} &= (-1 \cdot 4 - (-10) \cdot 1) \frac{1}{4} = \frac{3}{2}; & a''_{43} &= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 1) \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \\
a''_{14} &= (3 \cdot 4 - 2 \cdot 6) \frac{1}{4} = 0; & a''_{34} &= (-13 \cdot 4 - (-10) \cdot 6) \frac{1}{4} = 2; & a''_{44} &= (6 \cdot 4 - 1 \cdot 6) \frac{1}{4} = \frac{9}{2}; \\
a''_{15} &= \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; & a''_{35} &= \left(-\frac{5}{2} \cdot 4 - (-10) \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}; & a''_{45} &= \left(1 \cdot 4 - 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{4} = \frac{7}{8}; \\
a''_{16} &= (0 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}; & a''_{36} &= (0 \cdot 4 - (-10) \cdot 1) \frac{1}{4} = \frac{5}{2}; & a''_{46} &= (0 \cdot 4 - 1 \cdot 1) \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}; \\
a''_{17} &= \left(0 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \frac{1}{4} = 0; & a''_{37} &= (1 \cdot 4 - (-10) \cdot 0) \frac{1}{4} = 1; & a''_{47} &= (0 \cdot 4 - 1 \cdot 0) \frac{1}{4} = 0; \\
a''_{18} &= \left(0 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \frac{1}{4} = 0; & a''_{38} &= (0 \cdot 4 - (-10) \cdot 0) \frac{1}{4} = 0; & a''_{48} &= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 0) \frac{1}{4} = 1.
\end{aligned}$$

10. Вважатимемо в таблиці 3 за провідний елемент $a''_{33} = \frac{3}{2}$.

11. Елементи провідного рядка таблиці 3 поділимо на елемент $a''_{33} = \frac{3}{2}$ і результати запишемо до таблиці 4.

12. Перший та другий стовпчики таблиці 3 перенесемо без змін до таблиці 4.

13. Третій стовпчик таблиці 4 складається з нулів, за винятком елемента $a'''_{33} = 1$.

14. Знаходимо решту елементів таблиці 4:

$$a'''_{14} = \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 2 \right) \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad a'''_{24} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2 \right) \frac{2}{3} = \frac{7}{6}; \quad a'''_{44} = \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot 2 \right) \frac{2}{3} = \frac{7}{2};$$

$$\begin{aligned}
a_{15}''' &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{5}{4} \right) \right) \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}; & a_{25}''' &= \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \left(-\frac{5}{4} \right) \right) \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; & a_{45}''' &= \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \left(-\frac{5}{4} \right) \right) \frac{2}{3} = \frac{3}{2}; \\
a_{16}''' &= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{5}{2} \right) \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; & a_{26}''' &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} \right) \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}; & a_{46}''' &= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} \right) \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}; \\
a_{17}''' &= \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1 \right) \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; & a_{27}''' &= \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 \right) \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}; & a_{47}''' &= \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot 1 \right) \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}; \\
a_{18}''' &= \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 \right) \frac{2}{3} = 0; & a_{28}''' &= \left(0 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 \right) \frac{2}{3} = 0; & a_{48}''' &= \left(1 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot 0 \right) \frac{2}{3} = 1.
\end{aligned}$$

15. Переходимо до таблиці 5. Для цього в таблиці 4 вважатимемо за провідний елемент $a_{44}''' = \frac{7}{2}$.

16. Елементи провідного рядка таблиці 3 поділимо на $a_{44}''' = \frac{7}{2}$ і результати запишемо до таблиці 4.

17. Перші три стовпчики таблиці 4 перенесемо без змін до таблиці 5.

18. Четвертий стовпчик таблиці 4 складається з нулів, за винятком елемента $a_{44}'''' = 1$.

19. Знаходимо решту елементів таблиці 5:

$$\begin{aligned}
a_{15}'''' &= \left(-\frac{19}{42} \cdot \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{6} \right) \right) \frac{2}{7} = -\frac{19}{42}; & a_{16}'''' &= \left(\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{21}; \\
a_{17}'''' &= \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \frac{2}{7} = \frac{3}{7}; & a_{18}'''' &= \left(\frac{4}{21} \cdot \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \cdot 0 \right) \frac{2}{7} = \frac{4}{21}; \\
a_{25}'''' &= \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{3} \right) \frac{2}{7} = -\frac{1}{6}; & a_{26}'''' &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{7}{6} \left(-\frac{1}{6} \right) \right) \frac{2}{7} = \frac{1}{3}; \\
a_{27}'''' &= \left(0 \cdot \frac{7}{2} - \frac{7}{6} \left(-\frac{1}{6} \right) \right) \frac{2}{7} = 0; & a_{28}'''' &= \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{7}{6} \cdot 0 \right) \cdot \frac{2}{7} = -\frac{1}{3}; \\
a_{35}'''' &= \left(-\frac{59}{42} \cdot \frac{7}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \frac{2}{7} = -\frac{59}{42}; & a_{36}'''' &= \left(\frac{47}{21} \cdot \frac{7}{2} - \frac{4}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) \right) \frac{2}{7} = \frac{47}{21}; \\
a_{37}'''' &= \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{2} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \frac{2}{7} = \frac{6}{7}; & a_{38}'''' &= \left(-\frac{8}{21} \cdot \frac{7}{2} - \frac{4}{3} \cdot 1 \right) \frac{2}{7} = -\frac{8}{21}.
\end{aligned}$$

20. У лівій частині таблиці 5 вийшла одинична матриця. Це означає, що в правій частині таблиці 5 ми маємо матрицю, обернену до заданої.

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

21. Перевіримо одну з умов $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(-\frac{19}{42}\right) + 4\left(-\frac{1}{6}\right) + 0\left(-\frac{59}{42}\right) + 6\cdot\frac{3}{7} & 2\cdot\frac{13}{21} + 4\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{47}{21} + 6\cdot\frac{3}{14} \\ -1\left(-\frac{19}{42}\right) + 2\left(-\frac{1}{6}\right) + 1\left(-\frac{59}{42}\right) + 3\cdot\frac{3}{7} & -1\cdot\frac{13}{21} + 2\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{47}{21} + 3\cdot\frac{3}{14} \\ 5\left(-\frac{19}{42}\right) + 0\left(-\frac{1}{6}\right) - 1\left(-\frac{59}{42}\right) + 2\cdot\frac{3}{7} & 5\cdot\frac{13}{21} + 0\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\frac{47}{21} + 2\cdot\frac{3}{14} \\ -2\left(-\frac{19}{42}\right) - 3\left(-\frac{1}{6}\right) + 1\left(-\frac{59}{42}\right) + 0\cdot\frac{3}{7} & -2\cdot\frac{13}{21} - 3\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{47}{21} + 0\cdot\frac{3}{14} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{3}{7} + 4\cdot 0 + 0\cdot\frac{6}{7} + 6\left(-\frac{1}{7}\right) & 2\cdot\frac{4}{21} + 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\left(-\frac{8}{21}\right) + 6\cdot\frac{2}{7} \\ -1\cdot\frac{3}{7} + 2\cdot 0 + 1\cdot\frac{6}{7} + 3\left(-\frac{1}{7}\right) & -1\cdot\frac{4}{21} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1\left(-\frac{8}{21}\right) + 3\cdot\frac{2}{7} \\ 5\cdot\frac{3}{7} + 0\cdot 0 - 1\cdot\frac{6}{7} + 2\left(-\frac{1}{7}\right) & 5\cdot\frac{4}{21} + 0\left(-\frac{1}{3}\right) - 1\left(-\frac{8}{21}\right) + 2\cdot\frac{2}{7} \\ -2\cdot\frac{3}{7} - 3\cdot 0 + 1\cdot\frac{6}{7} + 0\left(-\frac{1}{7}\right) & -2\cdot\frac{4}{21} - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1\left(-\frac{8}{21}\right) + 0\cdot\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.21 Розв'язати матричне рівняння

$$3A = XB,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

За умовою $3A = XB$. Обидві частини цього рівняння помножимо на B^{-1} праворуч. Тоді

$$3AB^{-1} = XBB^{-1}; \quad 3AB^{-1} = XE; \quad 3AB^{-1} = X.$$

Отже, потрібно знайти B^{-1} . Для цього спочатку знайдемо $\det B$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матриця B є неособлива.

$$B_{11}=1; \quad B_{12}=0; \quad B_{21}=4, \quad B_{22}=1: \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = 3A \cdot B^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } X = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}.$$

2.6.3 Ранг матриці

Приклад 2.22 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

На підставі визначення рангу матриці треба знайти мінор найбільшого порядку матриці, який відрізняється від нуля. Серед мінорів першого порядку, тобто серед елементів матриці, усі відрізняються від нуля. Так як матриця другого порядку, то вона має лише один мінор другого порядку, який збігається з її детермінантом.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Отже, $r(A) = 2$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 2$.

Приклад 2.23 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Мінори першого порядку, тобто елементи матриці, відрізняються від нуля. Переходимо до мінорів другого порядку.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, єдиний мінор другого порядку матриці A дорівнює нулю. Оскільки у матриці є ненульові елементи, то виходить, що ранг матриці дорівнює одиниці, тобто $r(A) = 1$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 1$.

Приклад 2.24 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Серед мінорів першого порядку є такі, що вони відрізняються від нуля. Тепер переходимо до мінорів другого порядку, яких у даній матриці 10. Нам треба перевірити, чи є такі серед них, що відрізняються від нуля.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 2, тобто, $r(A) = 2$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 2$.

Приклад 2.25 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Серед мінорів першого порядку є такі, що відрізняються від нуля. Шукатимемо ненульові мінори другого порядку.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Тепер можна розглянути обвідний для M_1 мінор.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -30 - 8 + 5 + 12 = -21 \neq 0.$$

Оскільки мінорів четвертого порядку в даній матриці немає, то, вочевидь, $r(A) = 3$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 3$.

Приклад 2.26 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки серед елементів матриці є такі, які відрізняються від нуля, то можна стверджувати, що серед мінорів першого порядку є відмінні від нуля. Розглянемо далі мінори другого порядку, утворені першим та другим рядками і першим та другим стовпчиками:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо інші мінори у першому та другому рядках:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Знайдено мінор, що відрізняється від нуля. Отже, можна переходити до обчислювання обвідних мінорів третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 101 \neq 0.$$

Знаходимо обвідний мінор 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

як визначник зі стовпчиками, елементи яких є пропорційними. Отже, ранг матриці дорівнює 3, тобто $r(A) = 3$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 3$.

Приклад 2.27 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо знаходити ранг матриці методом елементарних перетворень, які не змінюють ранг матриці

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

В матриці A перший, третій та четвертий рядки мають пропорційні елементи, тобто два рядки, приміром, перший та четвертий, можна викреслити. Тоді маємо

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементи другого стовпчика можна поділити на 2, а елементи третього стовпчика – на 3.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 6 & 52 & 7 & 9 & 17 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо послідовно елементи останнього стовпчика на -7 ; -3 ; -1 ; -4 та додамо результати множення відповідно до першого, другого, третього, четвертого стовпчиків:

$$r(A) = r \begin{pmatrix} -113 & 1 & -10 & -59 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поділимо елементи першого, третього, четвертого стовпчиків відповідно на -113 ; -10 ; -59 :

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна залишити четвертий та п'ятий стовпчики:

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо елементи першого стовпчика на (-17) та додамо до елементів другого стовпчика:

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник утвореної одиничної матриці завжди дорівнює одиниці, тобто відрізняється від нуля, то ранг матриці A дорівнює порядкові утвореної одиничної матриці:

$$r(A) = 2.$$

В і д п о в і д ь: $r(A) = 2$.

Приклад 2.28 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо ненульовий міnor другого порядку.

$$M = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Тепер шукатимемо обвідний міnor третього порядку матриці A :

$$M_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Отже, $r(A) = 3$.

Ми знайшли ранг матриці, користуючись визначниками матриці. Якщо вимірність матриці велика, то відшукувати її ранг в такий спосіб є вельми складно. Ранг матриці можна відшукати за допомогою елементарних перетворень матриці, які не змінюють її рангу. Розглянемо, як це робиться на цьому самому прикладі. Шукатимемо ранг матриці A , але вже за допомогою елементарних перетворень (див. п. 2.5).

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

1) Будемо створювати нулі у третьому рядку, другий стовпчик будемо вважати робочим стовпчиком.

2) Помножимо елементи третього стовпчика на 5 та додамо до відповідних елементів першого стовпчика.

3) Помножимо елементи третього стовпчика на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпчика.

4) Помножимо елементи третього стовпчика на 4 та додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

5) Поділимо елементи першого стовпчика на 14, а другого – на 7.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

6) Один із двох однакових стовпчиків (перший чи другий) можна викреслити.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

7) Утворюватимемо нулі у другому стовпчику, другий рядок вважатимемо за робочий.

8) Помножимо елементи другого рядка на 2 й додамо до відповідних елементів першого рядка.

9) Елементи другого рядка додамо до відповідних елементів третього рядка.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

10) Помножимо елементи першого рядка на (-1) й додамо до відповідних елементів третього рядка.

11) Елементи другого рядка помножимо на (-1) .

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12) Поділимо елементи третього рядка на 2.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) Помножимо елементи першого стовпчика на (-9) та додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виходить, що ранг матриці A дорівнює рангові одиничної матриці третього порядку. Оскільки визначник такої матриці дорівнює 1, тобто відрізняється від нуля, то $r(A) = 3$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 3$.

Приклад 2.29 Користуючись методом елементарних перетворень, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Елементи другого та четвертого рядків є пропорційні. Отже, четвертий рядок можна викреслити.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Створюватимемо нулі у другому рядку, перший стовпчик вважатимемо за робочий. Додамо елементи першого стовпчика до відповідних елементів четвертого стовпчика. Помножимо елементи першого стовпчика на 2 й додамо до відповідних елементів п'ятого стовпчика.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Створюватимемо нулі у першому рядку, другий стовпчик вважатимемо за робочий. Елементи другого стовпчика помножимо на 2 й додамо до відповідних елементів першого стовпчика. Елементи другого стовпчика помножимо на 3 й додамо до відповідних елементів третього стовпчика. Елементи другого стовпчика помножимо на 6 і додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика. Елементи другого стовпчика помножимо на 9 і додамо до відповідних елементів п'ятого стовпчика

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

4) Елементи першого рядка помножимо на (-1) . Елементи другого рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

5) Елементи першого та третього стовпчиків поділимо на (-1) . Елементи четвертого стовпчика поділимо на (-5) . Елементи п'ятого стовпчика поділимо на (-11) .

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Елементи третього стовпчика помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпчика. Оскільки третій, четвертий та п'ятий стовпчики є однаковими, то четвертий та п'ятий стовпчики можна викреслити.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Поміняємо місцями перший та другий рядки. Така операція на ранг матриці не впливає.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранги заданої за умовою матриці A та матриці, утвореної внаслідок елементарних перетворень, збігаються.

Оскільки

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то $r(A) = r(E) = 3$.

В і д п о в і д ь: $r(A) = 3$.

Приклад 2.30 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

користуючись правилом прямокутника.

Р о з в ' я з а н н я

Правилом прямокутника ми вже користувались при обчислюванні визначників. У підґрунтя цього правила покладено елементарні перетворення, які не змінюють рангу матриці. Користуватимемось цим правилом так само, як і при обчислюванні визначників, але не враховуватимемо ті множники, які з'являються перед визначником після проведених перетворень.

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -13 \\ 0 & 2 & -6 & -12 & -2 \end{pmatrix}; \quad (*)$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

1) За провідні в матриці A вважатимемо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок. Перший рядок без змін переносимо в матрицю з рівності (*).

2) Усі елементи першого стовпчика, за винятком першого, замінюємо на нулі.

3) Решту елементів матриці з рівності (*) знаходимо за правилом прямокутника:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= 2 \cdot 0 - (-1)(-1) = -1; & a'_{32} &= 2(-2) - 3(-1) = -1; & a'_{42} &= 2 \cdot 0 - 2(-1) = 2; \\ a'_{23} &= 2 \cdot 0 - (-1)3 = 3; & a'_{33} &= 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1; & a'_{43} &= 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6; \\ a'_{24} &= 2 \cdot 1 - (-1)4 = 6; & a'_{34} &= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = -4; & a'_{44} &= 2(-2) - 2 \cdot 4 = -12; \\ a'_{25} &= 2 \cdot 2 - (-1)5 = 9; & a'_{35} &= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = -13; & a'_{45} &= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = -2. \end{aligned}$$

4) Записуємо матрицю з рівності (*).

5) Елемент $a'_{22} = -1$ вважатимемо за провідний, а другий рядок називатимемо провідним рядком.

Впровадимо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

За допомогою цих матриць систему рівнянь (3.2) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B. \quad (3.9)$$

Нехай A – неособлива матриця. Тоді існує обернена матриця A^{-1} . Обидві частини рівняння (3.9) помножимо ліворуч на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B; \quad EX = A^{-1}B.$$

Оскільки $EX = X$, то виходить, що

$$X = A^{-1}B. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) визначає розв'язок системи (3.2) у матричній формі.

Виходить, для того щоб розв'язати систему (3.2) лінійних алгебраїчних рівнянь, слід додержуватись схеми.

1. Записати матриці A, B, X .
2. Знайти $\det A$ та з'ясувати, чи є матриця A неособливою, і якщо матриця є неособлива, то продовжити розв'язування системи.
3. Знайти обернену матрицю A^{-1} .
4. Знайти матрицю X за формулою (3.10).
5. Зробити перевірку знайденого розв'язку, підставляючи знайдені значення невідомих у систему рівнянь.

3.4 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом вилучання невідомих

3.4.1 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного вилучання невідомих

Виконаємо над лінійними алгебраїчними рівняннями системи (3.1) елементарні перетворення, які приводять до еквівалентних систем.

До згаданих перетворень належать:

1. Переставляння рівнянь системи.
2. Перенумерування невідомих.
3. Множення обох частин одного з рівнянь на одне й те саме відмінне від нуля число з подальшим додаванням до іншого рівняння.
4. Вилучення рівнянь типу

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0.$$

3.4.2 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою таблиць Гаусса

При розв'язуванні систем рівнянь (3.1) методом Гаусса зручно користуватися таблицями.

Складаємо таблицю з коефіцієнтів при невідомих та вільних членів у системі рівнянь. Також вводимо до таблиці контрольний стовпчик, який дорівнює сумі коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку (табл. 1).

Таблиця 1

Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрольний стовпчик
x_1	x_2	...	x_n		
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	$\sum_{i=1}^n a_{1i}$
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	$\sum_{i=1}^n a_{2i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m	$\sum_{i=1}^n a_{mi}$

Якщо в таблиці 1 коефіцієнт $a_{11} = 0$, то слід поміняти місцями стовпчики в такий спосіб, щоб вже перший коефіцієнт відрізнявся від нуля, або ж у системі рівнянь поміняти місцями рівняння.

Вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. Тоді його можна взяти за провідний елемент. Розпочинаємо складати таблицю 2.

Перший рядок до таблиці 2 переносимо без змін, при цьому всі елементи першого стовпчика, за винятком a_{11} , замінюємо на нулі.

Для того щоб обчислити інші елементи таблиці 2, скористуємось формулою

$$a'_{ij} = a_{ij}a_{11} - a_{11}a_{1j} \quad (3.15)$$

Можна також скористатися правилом прямокутника, за яким знаходимо всі елементи таблиці 2, включаючи елементи контрольного стовпчика. Після цього робимо перевірку обчислень за допомогою контрольного стовпчика. Сума нових коефіцієнтів при невідомих має дорівнювати числу у контрольному стовпчику. Якщо ця умова виконується, то можна переходити до складання таблиці 3. Елемент a'_{22} таблиці 2 беремо за провідний. До таблиці 3 переносимо без змін перший та другий рядки, перший стовпчик, а замість елементів другого стовпчика, розміщених нижче другого рядка, записуємо нулі.

Н а с л і д о к. Якщо в системі n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими визначник системи рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

дорівнює нулю, тоді $r(A) < n$.

Схема розв'язування систем m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

1. Знаходимо ранг матриці A системи лінійних рівнянь та ранг розширеної матриці B . Якщо $r(A) \neq r(B)$, то система рівнянь є несумісна. Якщо $r(A) = r(B) = r$, то продовжуємо розв'язувати систему рівнянь.

2. Оберемо будь-який базисний мінор.

3. Залишаємо в системі рівнянь лише ті рівняння, які відповідають базисним рядкам.

4. Ті r невідомих, які відповідають базисним стовпчикам, залишимо ліворуч і називатимемо базисними невідомими, а решту $n - r$ невідомих перенесемо праворуч і називатимемо вільними невідомими.

5. Дістану систему r рівнянь з r базисними невідомими розв'язуємо одним із розглянутих раніше методів, внаслідок чого дістанемо формули, які базисні невідомі виражають через вільні невідомі. Ці формули становлять загальний розв'язок системи рівнянь.

6. Надаючи вільним невідомим будь-які числові значення, за загальним розв'язком системи рівнянь можна знайти нескінченну множину розв'язків. Ці розв'язки називаються **частинними розв'язками** системи рівнянь. До того ж, у такий спосіб може бути дістано який завгодно частинний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо в системі рівнянь є кілька базисних мінорів, то, залежно від обраного базисного мінора, змінюватимуться формули, які становлять загальний розв'язок, але частинні розв'язки не залежать від вибору базисного мінора.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо ранг матриць A та B дорівнює кількості невідомих системи рівнянь, то всі невідомі є базисними невідомими, а система рівнянь має єдиний розв'язок.

3.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Визначення. *Однорідною* системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається така система рівнянь, в якій усі вільні члени дорівнюють нулю:

Д о в е д е н н я

Нехай $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ – деякий нетривіальний розв'язок однорідної системи рівнянь (3.19). Отже,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0, \quad (*)$$

де $i = 1, 2, \dots, m$.

Позначимо $l_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Нехай тепер $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_n = \beta_n$ – ще один нетривіальний розв'язок цієї ж системи рівнянь. Отже,

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0, \text{ де } i = 1, 2, \dots, m. \quad (**)$$

Позначимо $l_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Утворимо таку лінійну комбінацію:

$$c_1 l_1 + c_2 l_2 = (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1, c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2; \dots; c_1 \alpha_n + c_2 \beta_n).$$

Якщо взяти до уваги рівності (*) та (**), то можна стверджувати, що буде справедливою рівність

$$a_{i1}(c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1) + a_{i2}(c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2) + \dots + a_{in}(c_1 \alpha_n + c_2 \beta_n) = 0.$$

Остання рівність означає, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної системи рівнянь є також її розв'язком.

В и з н а ч е н н я. Лінійно незалежна система розв'язків $l_1, l_2, \dots, l_k$ однорідної системи рівнянь (3.19) називається **фундаментальною системою розв'язків** цієї системи рівнянь, якщо кожний інший розв'язок є лінійною комбінацією розв'язків $l_1, l_2, \dots, l_k$.

Теорема (про існування фундаментальних систем розв'язків). Якщо ранг r матриці однорідної системи рівнянь (3.19) є меншим за n , то ця система рівнянь має фундаментальні системи розв'язків.

Д о в е д е н н я

Матриця A системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Припустимо для зручності, що базисний мінор порядку r займає лівий верхній кут матриці A . Тоді можна стверджувати, що

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

У цьому разі за базисні невідомі вважатимемо невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$. Запишемо перші r рівнянь системи (3.19) у такий спосіб:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

цієї матриці відрізняється від нуля. Звідси виходить, що розв'язки (3.22) між собою лінійно незалежні.

Отже, маємо $k = n - r$ лінійно незалежних розв'язків.

Залишається показати, що решта розв'язків системи рівнянь лінійно виражається через них.

Візьмемо будь-який розв'язок системи рівнянь (3.19).

$$l = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n).$$

Утворимо лінійну комбінацію з розв'язків системи рівнянь (3.20):

$$l_0 = l - \mu_{r+1}l_1 - \mu_{r+2}l_2 - \dots - \mu_n l_k.$$

Ця лінійна комбінація є також розв'язком системи рівнянь (3.20). Нескладно помітити, що коли в l_0 провести спрощення, то всі елементи, які займають останні k місць, дорівнюють нулю. Тобто l_0 можна записати так

$$l_0 = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, 0, 0, \dots, 0),$$

де ρ_i — деякі числа.

Виходить, що всі вільні невідомі мають нульові значення і система рівнянь (3.20) — це однорідна система рівнянь, визначник якої відрізняється від нуля. Тоді існує лише тривіальний розв'язок цієї системи рівнянь. З цього твердження виходить, що l_0 — нульовий рядок:

$$l_0 = (0, 0, \dots, 0).$$

На підставі останнього висновку маємо

$$l_0 - \mu_{r+1}l_1 - \mu_{r+2}l_2 - \dots - \mu_n l_k = 0$$

або

$$l_0 = \mu_{r+1}l_1 + \mu_{r+2}l_2 + \dots + \mu_n l_k.$$

Отже, ми довели, що будь-який розв'язок системи рівнянь (3.19) може бути виражений через розв'язки системи рівнянь (3.20). Значить, систему (3.22) можна вважати за фундаментальну систему розв'язків.

Якщо в перебігу доведення вільним невідомим ми надавали б інші значення, за яких мінор M матриці Φ відрізнявся від нуля, то ми б дістали іншу фундаментальну систему розв'язків. Отже, виходить, що одна й та сама однорідна система рівнянь має нескінченну кількість фундаментальних розв'язків.

Кожна фундаментальна система розв'язків має $k = n - r$ лінійно незалежних розв'язків, і кожні $k = n - r$ лінійно незалежних розв'язків утворюють фундаментальну систему розв'язків.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо ранг r однорідної системи рівнянь (3.19) дорівнює n , то така система рівнянь не має фундаментальної системи розв'язків. Якщо ранг $r = n - 1$, то така система рівнянь має фундаментальну систему розв'язків, що складається з одного розв'язку, і тоді будь-який ненульовий розв'язок є фундаментальною системою розв'язків.

3.7 Зв'язок між розв'язками неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та відповідних до них однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Знову звернемося до систем n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (3.2) та (3.19). Ці системи рівнянь відрізняються лише вільними членами. При цьому система рівнянь (3.2) називається **н е о д н о р і д н о ю** системою рівнянь, а відповідна їй однорідна система рівнянь (3.19) – **п р и в е д е н о ю** системою рівнянь по відношенню до системи рівнянь (3.2).

Між розв'язками неоднорідної та приведеної систем рівнянь існує певний зв'язок.

1. Сума будь-якого розв'язку неоднорідної системи рівнянь та будь-якого розв'язку її приведеної системи рівнянь є розв'язком неоднорідної системи рівнянь.

2. Різниця двох будь-яких розв'язків неоднорідної системи рівнянь є розв'язком її приведеної системи.

3. Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи рівнянь та загального розв'язку її приведеної системи рівнянь.

3.8. Приклади

3.8.1 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера

Приклад 3.1 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 10; \\ 5x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Система рівнянь складається з двох рівнянь з двома невідомими. Таку систему рівнянь зручно розв'язувати за допомогою правила Крамера (п. 3.2).

Знаходимо визначники Δ , Δ_1 , Δ_2 .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 20 = -38 \neq 0.$$

Визначник Δ відрізняється від нуля, отже, система рівнянь є сумісна і має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -60 - 16 = -76; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 50 = -38.$$

Знаходимо невідомі за формулами (3.7):

$$x_1 = \frac{-76}{-38} = 2; \quad x_2 = \frac{-38}{-38} = 1.$$

В і д п о в і д ь: (2; 1).

Приклад 3.2 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 6; \\ x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 14; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9.$$

Тоді $x_1 = \frac{14}{1} = 14$; $x_2 = \frac{9}{1} = 9$.

Відповідь: $(14; 9)$.

Приклад 3.3 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 5; \\ 8x_1 - 6x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Користуємося правилом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0.$$

Оскільки визначник системи рівнянь дорівнює нулю, то система рівнянь або несутісна, або має нескінченну кількість розв'язків. Для з'ясування запиту щодо сумісності системи рівнянь знайдемо інші визначники.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0.$$

Якщо усі визначники системи рівнянь дорівнюють нулю, то система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків. У заданій системі друге рівняння є наслідком першого. З першого рівняння маємо формулу

$$x_1 = \frac{5 + 3x_2}{4},$$

де $x_2 \in (-\infty; +\infty)$.

Загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(5 + 3c); \\ x_2 = c, \end{cases} \quad \text{де } c \in \mathbb{R}.$$

Надаючи c будь-яких значень, будемо діставати відповідні значення x_1 та x_2 .

c	0	-1	1	...
x_1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	...
x_2	0	-1	1	...

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(5 + 3c); \\ x_2 = c, \end{cases} \quad \text{де } c \in \mathbb{R}.$

Приклад 3.4 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5; \\ 6x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Така система рівнянь є несутісній.

Відповідь: система рівнянь несутісна.

Приклад 3.5 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Це невизначена система рівнянь. Друге рівняння системи є наслідком першого рівняння.

З першого рівняння системи маємо $x_2 = 2x_1 - 3$.

За цією формулою можна знайти нескінченну множину розв'язків системи рівнянь. Якщо x_1 набуває довільних значень, то відповідних значень набуває x_2 .

x_1	-5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	10	...
x_2	-13	-3	-2	0	17	...

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = c; \\ x_2 = 2c - 3, \end{cases}$ де $c \in \mathbb{R}$.

Приклад 3.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 54; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 81; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27;$$

Знаходимо невідомі:

$$x_1 = \frac{54}{27} = 2; \quad x_2 = \frac{81}{27} = 3; \quad x_3 = -\frac{27}{27} = -1.$$

В і д п о в і д ь: $(2; 3; -1)$.

Приклад 3.5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Подальше обчислювання визначників непотрібне, оскільки з того, що $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ виходить, що система рівнянь є несумісна.

В і д п о в і д ь: система рівнянь є несумісною.

Приклад 3.6 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою правила Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 10 - 5 + 5 + 15 + 4 = 3 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система є сумісна і має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 5 - 5 + 5 = 3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 5 + 15 - 4 = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 + 5 - 10 = 0.$$

Тоді маємо: $x_1 = \frac{3}{3} = 1$; $x_2 = \frac{6}{3} = 2$; $x_3 = \frac{0}{3} = 0$.

В і д п о в і д ь: (1; 2; 0).

Приклад 3.7 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 4 - 6 - 4 - 2 = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 9 - 4 - 3 = -4 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, то система не має розв'язків.

В і д п о в і д ь: система рівнянь є несумісною.

Приклад 3.8 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Усі визначники дорівнюють нулю, але система рівнянь є несумісною. Насправді, з першого рівняння

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2,$$

а з третього рівняння виходить

$$x_1 - x_2 + x_3 = \frac{5}{3}.$$

Отже, перше та третє рівняння є суперечними.

В і д п о в і д ь: система рівнянь є несумісною.

Приклад 3.9 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

У цій системі рівнянь друге та третє рівняння є наслідком першого рівняння.

З першого рівняння маємо $x_1 = 2 + x_2 - x_3$.

Система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків.

Загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + c_1 - c_2; \\ x_2 = c_1; \\ x_3 = c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R.$$

Якщо змінним x_2 та x_3 надавати будь-яких значень, можна знайти відповідні значення x_1 :

c_1	c_2	x_1	x_2	x_3
0	0	2	0	0
-1	1	0	-1	1
1	1	2	1	1
-3	4	-5	-3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \begin{cases} x_1 = 2 + c_1 - c_2; \\ x_2 = c_1; \\ x_3 = c_2, \end{cases} \quad c_1, c_2 \in R.$$

Приклад 3.10 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо систему рівнянь за правилом Крамера. Знаходимо визначник системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+3) = 3. \end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ

1. Утворимо нулі у третьому стовпчику, а за робочий візьмемо перший рядок.

2. Елементи першого рядка визначника помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого рядка.

3. Елементи першого рядка визначника помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка.

4. Елементи першого рядка визначника помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

5. Дістаний визначник зручно обчислювати, розкладаючи за елементами третього стовпчика.

6. У визначнику третього порядку елементи першого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

7. Дістаний визначник зручно розкласти за елементами першого рядка.

Обчислимо визначник Δ_1 , який утворюється, якщо у визначнику Δ перший стовпчик замінити на стовпчик вільних членів:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3(7-4) = 9.\end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ_1

1. Утворимо нулі у другому рядку, а четвертий стовпчик візьмемо за робочий.

2. Елементи першого рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого рядка.

3. Дістаний визначник можна розкласти за елементами другого рядка;

4. Ми прийшли до визначника третього порядку, який зручно обчислити безпосередньо за формулою, але можна і створити додаткові нулі для спрощення розрахунків. З цією метою елементи другого рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів першого рядка.

5. У визначнику, який дістано внаслідок останнього перетворення, можна винести спільний множник (-3) за знак визначника.

6. Дістаний визначник можна розкласти за елементами третього стовпчика.

Переходимо до обчислення визначника Δ_2 , який виходить з визначника Δ , якщо у ньому другий стовпчик замінити на стовпчик вільних членів:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \\
&= 3(-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= -3(-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-3) = -6.
\end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ_2

1. Утворимо нулі у третьому стовпчику, а третій рядок візьмемо за робочий.

2. Елементи третього рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів першого рядка.

3. Елементи третього рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого рядка.

4. Елементи третього рядка помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

5. Внаслідок проведених перетворень дістали визначник, в якому елементи другого рядка мають спільний множник 3, який можна винести за знак визначника.

6. Дістаний визначник зручно розкласти за елементами третього стовпчика.

7. Ми вийшли на визначник третього порядку, для спрощення якого елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

8. Вийшов визначник третього порядку, який зручно розкласти за елементами другого рядка.

Переходимо до обчислення визначника Δ_3 . Цей визначник виходить з визначника Δ , якщо замість третього стовпчика підставити стовпчик вільних членів:

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(-3-0) = 6.
\end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ_3

1. Утворимо нулі у другому рядку, а за робочий візьмемо перший стовпчик.
2. Елементи першого рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого рядка.
3. Елементи першого стовпчика нового визначника помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика.
4. Дістаний визначник зручно розкласти за елементами другого рядка;
5. У визначнику третього порядку елементи першого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика.
6. Дістаний визначник третього порядку зручно розкласти за елементами другого рядка.

Залишається обчислити визначник Δ_4 , який виходить з визначника Δ , якщо в ньому четвертий стовпчик замінити на стовпчик вільних членів.

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9.\end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ_4

- 1 Утворимо нулі у третьому стовпчику, а за робочий рядок візьмемо перший рядок.
- 2 Елементи першого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого стовпчика.
- 3 Елементи першого рядка у цьому ж визначникові помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка.
- 4 Елементи першого стовпчика у цьому самому визначникові помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.
- 5 У визначнику, який дістано внаслідок перетворень 1...3, зручно здійснити розкладання за елементами третього стовпчика.

Після того як обчислено усі визначники, за формулами (3.7) (дивись п. 3.2) можемо знайти невідомі:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 3(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 2(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 + 2(-2) - 1 \cdot 2 - 1(-3) = 0; \\ 1 \cdot 3 + 2(-2) + 2 \cdot 2 - 1(-3) = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $(-3; -2; 2; -3)$.

Приклад 3.11 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - 11x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Обчислимо визначник системи рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -11 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Утворимо нулі у першому рядку, а за робочий стовпчик візьмемо четвертий. Помножимо елементи четвертого стовпчика на (-3) і додамо до відповідних елементів першого стовпчика, потім помножимо елементи четвертого стовпчика на (-2) і додамо до відповідних елементів другого стовпчика, нарешті, помножимо елементи першого стовпчика на (-3) і додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & -2 \\ 17 & 13 & 16 & -5 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 17 & 13 & 16 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-273 + 170 - 96 - 130 + \\ + 224 + 153) = -48 \neq 0.$$

В аналогічний спосіб обчислюємо інші визначники.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & -11 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -96; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 144;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -48; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -11 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 48.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{-96}{-48} = 2; \quad x_2 = \frac{144}{-48} = -3; \quad x_3 = \frac{-48}{-48} = 1; \quad x_4 = \frac{48}{-48} = -1.$$

В і д п о в і д ь: $(2; -3; 1; -1)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Вочевидь, за $n \geq 4$ застосовування правила Крамера пов'язане з великим обсягом обчислень.

Слід мати на увазі, що правило Крамера:

- дозволяє відповідати на запитання щодо сумісності системи рівнянь;
- дозволяє знаходити розв'язок системи рівнянь;
- застосовується лише до систем n рівнянь з n невідомими.

3.8.2 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою матриць

Приклад 3.12 Записати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ 3x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$$

у вигляді матричного рівняння і розв'язати це рівняння.

Р о з в ' я з а н н я

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою матриць (дивись п. 3.3). По-значимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь можна записати у вигляді матричного рівняння $AX = B$. Помноживши обидві частини цього рівняння на A^{-1} ліворуч, матимемо

$$X = A^{-1}B.$$

Відшукуємо A^{-1} .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17 \neq 0; \quad A_{11} = -4; \quad A_{21} = -3; \quad A_{12} = -3; \quad A_{22} = 2;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{17} \\ \frac{17}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

В і д п о в і д ь: (3; 1).

Приклад 3.13 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

за допомогою матриць.

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$. Тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Відшукуємо A^{-1} .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Алгебраїчні доповнення матриці A :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -9 & 14 & -12 \\ -5 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 14 & 12 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$.

В і д п о в і д ь: (2; 1; 0).

Приклад 3.14 Розв'язати систему рівнянь за допомогою матриць

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 1; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Р о з в ' я з а н н я

Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Отже, існує обернена матриця A^{-1} . Знайдемо її.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -26; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{20} \begin{pmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & 15 \\ -11 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -78 - 12 + 30 \\ -75 - 10 + 45 \\ -33 - 2 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3; \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 1; \\ 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3 = 3; \\ 1 = 1; \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Систему розв'язків розв'язано правильно.

В і д п о в і д ь: $(3; 2; 1)$.

Приклад 3.15 Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Отже, A – неособлива матриця. Відшукуємо обернену матрицю.

$$A_{11} = 4; \quad A_{21} = -2; \quad A_{12} = -3; \quad A_{22} = 1. \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 28 & -34 \\ -21 & 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Значить, $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

В і д п о в і д ь: $(3; 2)$.

Приклад 3.16 Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Відшукуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Доходимо висновку, що A – неособлива матриця. Далі відшукуємо обернену матрицю A^{-1} .

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 50 & -45 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

В і д п о в і д ь: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Приклад 3.17 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

за допомогою матриць.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0;$$

Доходимо висновку, що A – неособлива матриця. Далі відшукуємо обернену матрицю A^{-1} .

$$\begin{aligned} A_{11} &= 3; & A_{21} &= -4; & A_{31} &= 2; \\ A_{12} &= -6; & A_{22} &= 2; & A_{32} &= -1; \\ A_{13} &= 3; & A_{23} &= -1; & A_{33} &= -4. \end{aligned}$$

Тоді

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$X = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

В і д п о в і д ь: $(4; 3; 5)$.

Приклад 3.18 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Розв'яжемо систему рівнянь у матричний спосіб. Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A – матриця четвертого порядку. Обернену матрицю в цьому разі оптимально відшукувати табличним методом (дивись п. 2.5.2).

Таблиця 1	②	-1	-1	3	1	0	0	0
	1	-1	-1	2	0	1	0	0
	1	2	-1	-1	0	0	1	0
	1	3	2	-1	0	0	0	1

Таблиця 2	$\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \textcircled{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}$	$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}$
Таблиця 3	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \end{array}$
Таблиця 4	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -13 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}$
Таблиця 5	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}$

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. Складаємо таблицю 1.
2. За провідні беремо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок.
3. Елементи провідного рядка поділимо на $a_{11} = 2$ і дістані елементи зане-
семо до першого рядка таблиці 2.
4. Перший стовпчик таблиці 2 складається з нулів, за винятком елемента $a'_{11} = 1$.
5. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$a'_{22} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2}; \quad a'_{36} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{23} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{24} = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = \frac{1}{2};$$

$$a'_{25} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{26} = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 1;$$

$$a'_{27} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{28} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{32} = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - (-1)1) = \frac{5}{2};$$

$$a'_{33} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{34} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{5}{2};$$

$$a'_{35} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{37} = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 1;$$

$$a'_{38} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{42} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1)1) = \frac{7}{2};$$

$$a'_{43} = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - (-1)1) = \frac{5}{2};$$

$$a'_{44} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{5}{2};$$

$$a'_{45} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2};$$

$$a'_{46} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{47} = \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'_{48} = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 1.$$

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні вважатимемо елемент $a'_{22} = -\frac{1}{2}$, та другий рядок.

2. Поділимо елементи другого рядка таблиці 2 на $a'_{22} = -\frac{1}{2}$ і дістані елементи занесемо до другого рядка таблиці 3.

3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо до таблиці 3 без змін.

4. Другий стовпчик складається з усіх нулів, за винятком елемента $a''_{22} = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{13} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0; \quad a''_{36} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \cdot \frac{5}{2} \right) = 5;$$

$$a''_{14} = -2 \left(\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 1; \quad a''_{37} = -2 \left(1 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot \frac{5}{2} \right) = 1;$$

$$a''_{15} = -2 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 1; \quad a''_{38} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot \frac{5}{2} \right) = 0;$$

$$a''_{16} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = -1;$$

$$a''_{43} = -2 \left(\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{7}{2} \right) = -1;$$

$$a''_{17} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0;$$

$$a''_{44} = -2 \left(-\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \right) = 1;$$

$$a''_{18} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0;$$

$$a''_{45} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{7}{2} \right) = -4;$$

$$a''_{33} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{5}{2} \right) = -3;$$

$$a''_{46} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \frac{7}{2} \right) = 7;$$

$$a''_{34} = -2 \left(-\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \right) = 0;$$

$$a''_{47} = -2 \left(0 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot \frac{7}{2} \right) = 0;$$

$$a''_{35} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{5}{2} \right) = -3;$$

$$a''_{48} = -2 \left(1 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot \frac{7}{2} \right) = 1.$$

Пояснення стосовно переходу від таблиці 3 до таблиці 4

1. За провідні вважатимемо елемент $a''_{33} = -3$ та третій рядок таблиці 3.

2. Поділимо елементи третього рядка на $a''_{33} = -3$ і дістані елементи заносимо до третього рядка таблиці 4.

3. Перший та другий стовпчики переносимо без змін до таблиці 4.

4. Третій стовпчик таблиці 4 складається з усіх нулів, за винятком елемента $a'''_{33} = 1$.

5 Знаходимо решту елементів таблиці 4:

$$a'''_{14} = -\frac{1}{3} (1(-3) - 0 \cdot 0) = 1;$$

$$a'''_{27} = -\frac{1}{3} (0(-3) - 1 \cdot 1) = \frac{1}{3};$$

$$a'''_{15} = -\frac{1}{3} (1(-3) - (-3)0) = 1;$$

$$a'''_{28} = -\frac{1}{3} (0(-3) - 0 \cdot 1) = 0;$$

$$a'''_{16} = -\frac{1}{3} (-1(-3) - 5 \cdot 0) = -1;$$

$$a'''_{44} = -\frac{1}{3} (1(-3) - 0(-1)) = 1;$$

$$a'''_{17} = -\frac{1}{3} (0(-3) - 1 \cdot 0) = 0;$$

$$a'''_{45} = -\frac{1}{3} (-4(-3) - (-3)(-1)) = -3;$$

$$a'''_{18} = -\frac{1}{3} (0(-3) - 0 \cdot 0) = 0;$$

$$a'''_{46} = -\frac{1}{3} (7(-3) - 5(-1)) = \frac{16}{3};$$

$$a'''_{24} = -\frac{1}{3} (-1(-3) - 0 \cdot 1) = -1;$$

$$a'''_{47} = -\frac{1}{3} (0(-3) - 1(-1)) = -\frac{1}{3};$$

$$a'''_{25} = -\frac{1}{3} (1(-3) - (-3)1) = 0;$$

$$a'''_{48} = -\frac{1}{3} (1(-3) - 0(-1)) = 1.$$

$$a'''_{26} = -\frac{1}{3} (-2(-3) - 5 \cdot 1) = -\frac{1}{3};$$

Пояснення до побудови таблиці 5 за таблицею 4

1. За провідні вважатимемо елемент $a_{44}''' = 1$ та четвертий рядок таблиці 4 – провідним рядком.

2. Поділимо елементи четвертого рядка на $a_{44}''' = 1$ і дістанемо четвертий рядок таблиці 5.

3. Перший, другий та третій стовпчики переносимо без змін до таблиці 5.

4. Четвертий стовпчик таблиці 5 складається з усіх нулів, за винятком елемента $a_{44}''' = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 5:

$$a_{15}''' = (1 \cdot 1 - (-3)1) = 4; \quad a_{27}''' = \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)(-1)\right) = 0;$$

$$a_{16}''' = \left(-1 \cdot 1 - \frac{16}{3} \cdot 1\right) = -\frac{19}{3}; \quad a_{28}''' = (0 \cdot 1 - 1(-1)) = 1;$$

$$a_{17}''' = \left(0 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)1\right) = \frac{1}{3}; \quad a_{35}''' = (1 \cdot 1 - (-3)0) = 1;$$

$$a_{18}''' = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1; \quad a_{36}''' = \left(-\frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{16}{3} \cdot 0\right) = -\frac{5}{3};$$

$$a_{25}''' = (0 \cdot 1 - (-3)(-1)) = -3; \quad a_{37}''' = \left(-\frac{1}{3} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)0\right) = -\frac{1}{3};$$

$$a_{26}''' = \left(-\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{16}{3}(-1)\right) = 5; \quad a_{38}''' = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0.$$

Пояснення до таблиці 5

1. Ліва частина таблиці 5 являє собою одиничну матрицю, а це означає, що у правій частині таблиці 5 міститься матриця A^{-1} , обернена до заданої матриці A .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перевіримо, чи насправді дістана матриця є оберненою, для чого обмежимося перевіркою умови

$$AA^{-1} = E.$$

$$\begin{aligned}
 AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 1(-3) - 1 \cdot 1 + 3(-3) & 2\left(-\frac{19}{3}\right) - 1 \cdot 5 - 1\left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \cdot \frac{16}{3} \\ 1 \cdot 4 - 1(-3) - 1 \cdot 1 + 2(-3) & 1\left(-\frac{19}{3}\right) - 1 \cdot 5 - 1\left(-\frac{5}{3}\right) + 2 \cdot \frac{16}{3} \\ 1 \cdot 4 + 2(-3) - 1 \cdot 1 - 1(-3) & 1\left(-\frac{19}{3}\right) + 2 \cdot 5 - 1\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 \cdot \frac{16}{3} \\ 1 \cdot 4 + 3(-3) + 2 \cdot 1 - 1(-3) & 1\left(-\frac{19}{3}\right) + 3 \cdot 5 + 2\left(-\frac{5}{3}\right) - 1\left(\frac{16}{3}\right) \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot 0 - 1\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) & 2(-1) - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot 0 - 1\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) & 1(-1) - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 - 1\left(-\frac{1}{3}\right) - 1\left(-\frac{1}{3}\right) & 1(-1) + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1\left(-\frac{1}{3}\right) & 1(-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Знаходимо шукану матрицю X за формулою

$$X = A^{-1}B.$$

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(-3) - \frac{19}{3}(-3) + \frac{1}{3} \cdot 0 - 1 \cdot 4 \\ -3(-3) + 5(-3) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \\ 1(-3) - \frac{5}{3}(-3) - \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ -3(-3) + \frac{16}{3}(-3) - \frac{1}{3} \cdot 0 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Отже, виходить: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

4. Перевірка: підставляємо знайдені значення невідомих у задану систему рівнянь

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 0; \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $(3; -2; 2; -3)$.

3.8.3 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного вилучення невідомих

Приклад 3.19 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Перше рівняння заданої системи рівнянь помножимо на (-2) , а друге – на 3. Здобуті рівняння додамо. В такий спосіб дістанемо друге рівняння нової системи рівнянь. Далі перше рівняння заданої системи помножимо на (-1) , а третє – на 3. Здобуті рівняння почленно додамо і дістанемо третє рівняння нової системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -7x_2 + 11x_3 = 19; \\ -8x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$$

У здобутій системі рівнянь друге рівняння помножимо на 8, а третє – на (-7) . Дістані рівняння почленно додамо.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -7x_2 + 11x_3 = 19; \\ 39x_3 = 117. \end{cases}$$

Дістана система рівнянь має трикутну форму, отже, задана система рівнянь є визначеною системою рівнянь.

З н а х о д ж е н н я н е в і д о м и х

$$39x_3 = 117 \Rightarrow x_3 = 3.$$

$$-7x_2 + 11x_3 = 19 \Rightarrow -7x_2 = 19 - 11 \cdot 3 \Rightarrow x_2 = 2.$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow 3x_1 = 4 - 2 \cdot 2 + 3 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Отже, маємо розв'язок:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$$

В і д п о в і д ь: $(1; 2; 3)$.

Приклад 3.20 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання

Спиратимемося на описання табличного метода Гаусса у п. 3.4.

Складаємо таблицю.

№ таб- лиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	k_i – контроль- ний стов- пчик
	x_1	x_2	x_3		
1	3	-1	1	1	3
	2	-1	1	0	2
	5	-5	2	-5	2
2	3	-1	1	1	3
	0	-1	1	-2	0
	0	10	1	-20	-9
3	3	-1	1	1	3
	0	-1	1	-2	0
	0	0	9	0	9

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні вважатимемо елемент $a_{11} = 3$ та перший рядок.
2. Елементи провідного рядка таблиці 1 без змін заносимо до першого рядка таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика, розміщені нижче першого рядка, замінимо на нулі.
4. Знаходимо решту елементів таблиці 2, користуючись правилом прямокутника:

$$a'_{22} = -1 \cdot 3 - (-1)2 = -1;$$

$$b'_2 = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2;$$

$$a'_{23} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1;$$

$$b'_3 = -5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = -20;$$

$$a'_{32} = -5 \cdot 3 - (-1)5 = -10;$$

$$k'_2 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0;$$

$$a'_{33} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1;$$

$$k'_3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = -9.$$

5. Правильність знаходження коефіцієнтів в таблиці 2 перевіримо за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 1 + 1 = 0 = k'_2; \quad 0 - 10 + 1 = -9 = k'_3.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні вважатимемо елемент $a'_{22} = -1$ та другий рядок.
2. Перший та другий рядки таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо до таблиці 3 без змін.
4. Усі елементи другого стовпчика таблиці 3, розміщені нижче другого рядка, дорівнюють нулю.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = 1(-1) - 1(-10) = 9;$$

$$b''_3 = -20(-1) - (-2)(-10) = 0;$$

$$k''_3 = -9(-1) - 0(-10) = 9.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 1 = 1 = k''_3.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

Ця таблиця є останньою, оскільки в ній лише три рядки.

Знаходження невідомих

Утворена таблиця відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_2 + x_3 = -2; \\ 9x_3 = 0. \end{cases}$$

З третього рівняння маємо: $x_3 = 0$.

З другого рівняння маємо: $-x_2 + 0 = -2$, $x_2 = 2$.

З першого рівняння маємо: $3x_1 - 2 + 0 = 1$; $3x_1 = 3$; $x_1 = 1$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 2 + 0 = 1; \\ 2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0; \\ 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 0 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 1; \\ 0 = 0; \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Відповідь: $(1; 2; 0)$.

Приклад 3.21 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

за допомогою таблиць Гаусса.

Розв'язання

Розв'язуватимемо систему рівнянь за допомогою таблиць Гаусса.

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
1	③	2	-1	4	4
	2	-1	3	9	4
	1	-2	2	3	1
2	3	2	-1	4	4
	0	⊖7	11	19	4
	0	-8	7	5	-1
3	3	2	-1	4	4
	0	-7	11	19	4
	0	0	39	117	39

Як бачимо з таблиці, дістана внаслідок відображених у таблиці перетворень система рівнянь має трикутну форму, виходить, що ця система рівнянь є визначеною і має лише єдиний розв'язок.

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика відшукуємо як суму коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні беремо елемент $a_{11} = 3$ таблиці 1 та перший рядок.
2. Перший рядок таблиці 1 заносимо без змін до першого рядка таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика, розміщені нижче першого рядка, замінюємо на нулі.
4. Знаходимо решту елементів таблиці 2, користуючись правилом прямокутника:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= -1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -7; & a'_{32} &= -2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -8; \\ a'_{23} &= 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 11; & a'_{33} &= 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 7; \\ b'_2 &= 9 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 19; & b'_3 &= 3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 5; \\ k'_2 &= 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4; & k'_3 &= 1 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 7 + 11 = 4 = k'_2; \quad 0 - 8 + 7 = -1 = k'_3.$$

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні беремо елемент $a'_{22} = -7$ та перший рядок таблиці 2.
2. Перший та другий рядки таблиці 2 заносимо без змін до таблиці 3.
3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
4. Усі елементи другого стовпчика таблиці 2, розміщені нижче другого рядка, дорівнюють нулю.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = 7(-7) - 11(-8) = 39; \quad b''_3 = 5(-7) - 19(-8) = 117; \quad k''_3 = -1(-7) - 4(-8) = 39.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 39 = 39 = k''_3.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено. Ця таблиця є останньою.

Знаходження невідомих

Відповідно до таблиці 3 маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 4; \\ 0 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 = 19; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 39 \cdot x_3 = 117. \end{cases}$$

З третього рівняння маємо: $39x_3 = 117$ або $x_3 = 3$.

З другого рівняння маємо: $-7x_2 + 11 \cdot 3 = 19$ або $x_2 = 2$.

З першого рівняння маємо: $3x_1 + 2 \cdot 2 - 3 = 4$ або $x_1 = 1$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4; \\ 2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 11 \cdot 3 = 19; \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 4; \\ 9 = 9; \\ 3 = 3. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $(1; 2; 3)$.

Приклад 3.22 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

за допомогою таблиць Гаусса

Розв'язання

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
1	2	1	-4	5	-1
	③	2	1	7	6
	1	1	5	2	7
2	2	1	-4	5	-1
	0	①	14	-1	15
	0	1	14	-1	15
3	2	1	-4	5	-1
	0	1	14	-1	15

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні беремо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок таблиці.
2. Елементи першого рядка без змін переносимо до таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика, розміщені нижче першого рядка, дорівнюють нулю.

4. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1; & a'_{32} &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1; \\ a'_{23} &= 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 = 14; & a'_{33} &= 5 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 = 14; \\ b'_2 &= 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -1; & b'_3 &= 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1; \\ k'_2 &= 6 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 15; & k'_3 &= 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 15. \end{aligned}$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 1 + 14 = 15 = k'_2; \quad 0 + 1 + 14 = 15 = k'_3.$$

6. Особливість таблиці 2 полягає у тому, що до її складу входять два однакові рядки, отже, одного з них можна позбутись.

Пояснення до таблиці 3

1. Дістанемо таблицю 3, яка складається з перших двох рядків таблиці 2.
2. Таблиця 3 має трапецюїдну форму, тобто система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків.

Знаходження невідомих

Відповідно до таблиці 3 маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ x_2 + 14x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 - 14x_3; \\ 2x_1 = 5 - (-1 - 14x_3) + 4x_3. \end{cases}$$

Формули

$$\begin{cases} x_2 = -1 - 14x_3; \\ x_1 = 3 + 9x_3 \end{cases}$$

дозволяють знаходити нескінченну множину розв'язків. Тут x_3 – вільне невідоме, а x_1 та x_2 – базисні невідомі. Якщо вільному невідомому x_3 надавати ті чи інші значення, то дістанемо відповідні конкретні значення базисних невідомих x_1 та x_2 .

x_1	x_2	x_3
-6	13	-1
3	-1	0
21	-29	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Загальний розв'язок системи рівнянь буде таким

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 9c; \\ x_2 = -1 - 14c; \\ x_3 = c, \end{cases} \text{ де } c \in \mathbb{R}.$$

В і д п о в і д ь:
$$\begin{cases} x_1 = 3 + 9c; \\ x_2 = -1 - 14c; \\ x_3 = c, \end{cases} \text{ де } c \in \mathbb{R}.$$

Приклад 3.23 Розв'язати систему рівнянь за допомогою таблиць Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3; \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

№ таблиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – контроль-ний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	①	2	-1	3	3	5
	2	-5	4	-1	1	0
	4	-1	2	5	4	10
2	1	2	-1	3	3	5
	0	⓪	6	-7	-5	-10
	0	-9	6	-7	-8	-10
3	1	2	-1	3	3	5
	0	-9	6	-7	-5	-10
	0	0	0	0	27	0

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні беремо елемент $a_{11} = 1$ та перший рядок таблиці 1.
2. Перший рядок таблиці 1 без змін переносимо до таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика, розміщені нижче першого рядка, дорівнюють нулю.

4. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$a'_{22} = -5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -9; \quad a'_{23} = 4 \cdot 1 - (-1)2 = 6; \quad a'_{24} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -7;$$

$$a'_{32} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -9; \quad a'_{33} = 2 \cdot 1 - (-1)4 = 6; \quad a'_{34} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -7;$$

$$b'_2 = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5; \quad b'_3 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -8;$$

$$k'_2 = 0 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -10; \quad k'_3 = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -10.$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 9 + 6 - 7 = -10 = k'_2; \quad 0 - 9 + 6 - 7 = -10 = k'_3.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні беремо елемент $a'_{22} = -9$ та перший рядок таблиці 2.
2. Перший та другий рядки таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
4. Усі елементи другого стовпчика таблиці 3, розміщені нижче другого рядка, замінюємо на нулі.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = 6(-9) - 6(-9) = 0; \quad a''_{34} = -7(-9) - (-7)(-9) = 0;$$

$$k''_3 = -10(-9) - (-10)(-9) = 0; \quad b''_3 = -8(-9) - (-5)(-9) = 27.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 9 + 6 - 7 = -10 = k_2'', \quad 0 + 0 + 0 + 0 = 0 = k_3''.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

Особливість таблиці 3 полягає в тому, що її третьому рядку відповідає рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 27.$$

Наявність такого рівняння говорить про несумісність системи рівнянь. Таке рівняння не має розв'язків, отже, система несумісна.

В і д п о в і д ь: система рівнянь несумісна.

Приклад 3.24 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Р о з в ' я з а н н я

Складаємо таблицю:

№ таб- лиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – контроль- ний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	2	-1	-1	3	-3	3
	1	-1	-1	2	-3	1
	1	2	-1	-1	0	1
	1	3	2	-1	4	5
2	2	-1	-1	3	-3	3
	0	-1	-1	1	-3	-1
	0	5	-1	-5	3	-1
	0	7	5	-5	11	7
3	2	-1	-1	3	-3	3
	0	-1	-1	1	-3	-1
	0	0	6	0	12	6
	0	0	2	-2	10	0
4	2	-1	-1	3	-3	3
	0	-1	-1	1	-3	-1
	0	0	6	0	12	6
	0	0	0	-12	36	-12

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні беремо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок таблиці 1.
2. Переносимо перший рядок таблиці 1 без змін до таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика таблиці 2, розміщені нижче першого рядка, замінюємо на нулі.

4. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$a'_{22} = -1 \cdot 2 - (-1)1 = -1; \quad a'_{23} = -1 \cdot 2 - (-1)1 = -1; \quad a'_{24} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1;$$

$$a'_{32} = 2 \cdot 2 - (-1)1 = 5; \quad a'_{33} = -1 \cdot 2 - (-1)1 = -1; \quad a'_{34} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -5;$$

$$a'_{42} = 3 \cdot 2 - (-1)1 = 7; \quad a'_{43} = 2 \cdot 2 - (-1)1 = 5; \quad a'_{44} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -5;$$

$$b'_2 = -3 \cdot 2 - (-3)1 = -3; \quad b'_3 = 0 \cdot 2 - (-3)1 = 3; \quad b'_4 = 4 \cdot 2 - (-3)1 = 11;$$

$$k'_2 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1; \quad k'_3 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1; \quad k'_4 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7.$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 1 - 1 + 1 = -1 = k'_2; \quad 0 + 5 - 1 - 5 = -1 = k'_3; \quad 0 + 7 + 5 - 5 = 7 = k'_4.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні вважатимемо елемент $a'_{22} = -1$ та другий рядок таблиці 2. Переносимо перший та другий рядки таблиці 2 без змін до таблиці 3.
2. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
3. Усі елементи другого стовпчика таблиці 2, розміщені нижче другого рядка, дорівнюють нулю.

4. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = -1(-1) - (-1)5 = 6; \quad a''_{43} = 5(-1) - (-1)7 = 2;$$

$$a''_{34} = -5(-1) - 1 \cdot 5 = 0; \quad a''_{44} = -5(-1) - 1 \cdot 7 = -2;$$

$$b''_3 = 3(-1) - (-3)5 = 12; \quad b''_4 = 11(-1) - (-3)7 = 10;$$

$$k''_3 = -1(-1) - (-1)5 = 6; \quad k''_4 = 7(-1) - (-1)7 = 0.$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 6 + 0 = 6 = k''_3; \quad 0 + 0 + 2 - 2 = 0 = k''_4.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 3 до таблиці 4

1. За провідні вважатимемо елемент $a_{33}'' = 6$ та третій рядок таблиці 3.
2. Переносимо перший, другий та третій рядки з таблиці 2 до таблиці 3 без змін.
3. Перший та другий стовпчики таблиці 2 переносимо до таблиці 3 без змін.
4. Усі елементи третього стовпчика, розміщені нижче третього рядка, дорівнюють нулю.
5. Знаходимо решту елементів таблиці 4:

$$a_{44}''' = -2 \cdot 6 - 0 \cdot 2 = -12; \quad b_4''' = 10 \cdot 6 - 12 \cdot 2 = 36; \quad k_4''' = 0 \cdot 6 - 6 \cdot 2 = -12.$$
6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 4 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 0 - 12 = -12 = k_4'''.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 4 складено.

Знаходження невідомих

У відповідності з таблицею 4 дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = -3; \\ 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = -3; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 12; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 12 \cdot x_4 = 36. \end{cases}$$

З четвертого рівняння маємо: $-12x_4 = 36$ або $x_4 = -3$.

З третього рівняння маємо: $6x_3 = 12$ або $x_3 = 2$.

З другого рівняння маємо: $-x_2 - 2 - 3 = -3$ або $x_2 = -2$.

З першого рівняння маємо: $2x_1 + 2 - 2 - 9 = -3$ або $x_1 = 3$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 3(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 1(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 + 2(-2) - 1 \cdot 2 - 1(-3) = 0; \\ 1 \cdot 3 + 3(-2) + 2 \cdot 2 - 1(-3) = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $(3; -2; 2; -3)$.

3.8.4 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом повного вилучення невідомих

Приклад 3.25 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

методом повного вилучення невідомих

Розв'язання

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
1	3	2	-1	4	4
	2	-1	3	9	4
	1	-2	2	3	1
2		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
	1	$\frac{3}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$
	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{4}{3}$
3		$-\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	0	$-\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	0				
4	1	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{12}{7}$
	0	1	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{19}{7}$	$-\frac{4}{7}$
	0	0	$-\frac{13}{7}$	$-\frac{39}{7}$	$-\frac{13}{7}$
5	1	0	0	1	1
	0	1	0	2	1
	0	0	1	3	1

Пояснення до побудови таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 згідно з умовою.
2. Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні візьмемо елемент $a_{11} = 3$ та перший рядок.
2. Елементи провідного стовпчика поділимо на $a_{11} = 3$ і утворимо з них перший рядок таблиці 2.
3. Перший стовпчик таблиці 2 складається з усіх нулів, за винятком елемента $a'_{11} = 1$.

4. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$a'_{22} = \frac{-1 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{3} = -\frac{7}{3}; \quad a'_{32} = \frac{-2 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{3} = -\frac{8}{3};$$

$$a'_{23} = \frac{3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2}{3} = \frac{11}{3}; \quad a'_{33} = \frac{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1}{3} = \frac{7}{3};$$

$$b'_2 = \frac{9 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{3} = \frac{19}{3}; \quad b'_3 = \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3} = \frac{5}{3};$$

$$k'_2 = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}; \quad k'_3 = \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - \frac{7}{3} + \frac{11}{3} = \frac{4}{3} = k'_2; \quad 0 - \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} = k'_3.$$

Отже, коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні візьмемо елемент $a'_{22} = -\frac{7}{3}$ та другий рядок.
2. Усі елементи другого рядка таблиці 2 поділимо на $a'_{22} = -\frac{7}{3}$ і з дістаних елементів утворюємо другий рядок таблиці 3.
3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.
4. Усі елементи другого стовпчика таблиці 3 є нулями, за винятком елемента $a''_{22} = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{13} = \frac{-\frac{1}{3} \left(-\frac{7}{3} \right) - \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}} = \frac{5}{7}; \quad b''_3 = \frac{\frac{5}{3} \left(-\frac{7}{3} \right) - \frac{19}{3} \left(-\frac{8}{3} \right)}{-\frac{7}{3}} = -\frac{39}{7};$$

$$a''_{33} = \frac{\frac{7}{3} \left(-\frac{7}{3} \right) - \frac{11}{3} \left(-\frac{8}{3} \right)}{-\frac{7}{3}} = -\frac{13}{7}; \quad k''_1 = \frac{\frac{4}{3} \left(-\frac{7}{3} \right) - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}} = \frac{12}{7};$$

$$b_1'' = \frac{\frac{4}{3}\left(-\frac{7}{3}\right) - \frac{19}{3} \cdot \frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}} = \frac{22}{7}; \quad k_2'' = \frac{\frac{-1}{3}\left(-\frac{7}{3}\right) - \frac{4}{3}\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{7}{3}} = -\frac{13}{7}.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 - \frac{13}{7} = -\frac{13}{7} = k_3''.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 3 до таблиці 4

1. За провідні візьмемо елемент $a_{33}'' = -\frac{13}{7}$ та третій рядок.

2. Усі елементи третього рядка поділимо на $a_{33}'' = -\frac{13}{7}$ і дістані елементи

запишемо до третього рядка таблиці 4.

3. Перший та другий стовпчики таблиці 3 переносимо без змін до таблиці 4.

4. Усі елементи третього стовпчика таблиці 4 є нулями, за винятком елемента $a_{33}'' = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 4:

$$b_1''' = \frac{\frac{22}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{39}{7}\right)\frac{5}{7}}{-\frac{13}{7}} = 1; \quad b_3''' = \frac{-\frac{19}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{39}{7}\right)\left(-\frac{11}{7}\right)}{-\frac{13}{7}} = 2;$$

$$k_1''' = \frac{\frac{12}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{13}{7}\right)\frac{5}{7}}{-\frac{13}{7}} = 1; \quad k_2''' = \frac{-\frac{4}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{13}{7}\right)\left(-\frac{11}{7}\right)}{-\frac{13}{7}} = 1.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 4 за допомогою контрольного стовпчика:

$$1 + 0 + 0 = 1 = k_1'''; \quad 0 + 1 + 0 = 1 = k_2'''.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 4 складено.

Знаходження невідомих

З останньої таблиці маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1; \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3. \end{cases} \quad \text{Звідки} \quad \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 2; 3).

Як бачимо, у табличному методі обернений хід є винятково простий. Проте прямий хід більш зручно виконувати у методі Гаусса.

Приклад 3.26 Розв'язати систему рівнянь методом повного виключення невідомих

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Звернемося до п. 3.4.3.

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – кон-трольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	②	-1	-1	3	-3	3
	1	-1	-1	2	-3	1
	1	2	-1	-1	0	1
	1	3	2	-1	4	5
2	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	① $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$
3	1	0	0	1	0	2
	0	1	1	-1	3	1
	0	0	③ -3	0	-6	-3
	0	0	-1	1	-5	0

4	1	0	0	1	0	2
	0	1	0	-1	1	0
	0	0	1	0	2	1
	0	0	0	1	-3	1
5	1	0	0	0	3	1
	0	1	0	0	-2	1
	0	0	1	0	2	1
	0	0	0	1	-3	1

Пояснення до таблиці 1

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. За провідні візьмемо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок таблиці 1.
2. Елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент, а дістані результати запишемо до першого рядка таблиці 2.
3. Усі елементи першого стовпчика в таблиці 2 дорівнюють нулю, за винятком елемента $a'_{11} = 1$.
4. Знаходимо решту елементів таблиці 2.

Їх можна знаходити за правилом прямокутника, але при цьому дістаний результат треба поділити на провідний елемент.

Можна також скористатися формулою

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj} \cdot a_{ii} - a_{ki} \cdot a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \text{де } a_{ii} - \text{провідний елемент.}$$

$$\begin{aligned} a'_{22} &= \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2}; & a'_{23} &= \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2}; & a'_{24} &= \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = \frac{1}{2}; \\ a'_{32} &= \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{5}{2}; & a'_{33} &= \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - (-1)1) = -\frac{1}{2}; & a'_{34} &= \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{5}{2}; \\ a'_{42} &= \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1)1) = \frac{7}{2}; & a'_{43} &= \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - (-1)1) = \frac{5}{2}; & a'_{44} &= \frac{1}{2}(-1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{5}{2}; \\ b'_2 &= \frac{1}{2}(-3 \cdot 2 - (-3)1) = -\frac{3}{2}; & b'_3 &= \frac{1}{2}(0 \cdot 2 - (-3)1) = \frac{3}{2}; & b'_4 &= \frac{1}{2}(4 \cdot 2 - (-3)1) = \frac{11}{2}; \\ k'_2 &= \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{1}{2}; & k'_3 &= \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -\frac{1}{2}; & k'_4 &= \frac{1}{2}(5 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

5. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = k'_2; \quad 0 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} = k'_3; \quad 0 + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} = k'_4.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні візьмемо елемент $a'_{22} = -\frac{1}{2}$ та другий стовпчик.

2. Елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент $a'_{22} = -\frac{1}{2}$ і запишемо дістані результати до другого рядка таблиці 3.

3. Перший стовпчик таблиці 2 переносимо без змін до таблиці 3.

4. Усі елементи другого стовпчика таблиці 3, за винятком елемента $a''_{22} = 1$, замінюємо на нулі.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{13} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0; \quad b''_3 = -2 \left(\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{5}{2} \right) = -6;$$

$$a''_{14} = -2 \left(\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 1; \quad k''_3 = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{5}{2} \right) = -3;$$

$$b''_1 = -2 \left(-\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0; \quad a''_{43} = -2 \left(\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{7}{2} \right) = -1;$$

$$k''_1 = -2 \left(\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 2; \quad a''_{44} = -2 \left(-\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \right) = 1;$$

$$a''_{33} = -2 \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{5}{2} \right) = -3; \quad b''_4 = -2 \left(\frac{11}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{7}{2} \right) = -5;$$

$$a''_{34} = -2 \left(-\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \right) = 0; \quad k''_4 = -2 \left(\frac{7}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{7}{2} \right) = 0.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$1 + 0 + 0 + 1 = 2 = k''_1; \quad 0 + 0 - 3 + 0 = -3 = k''_3; \quad 0 + 0 - 1 + 1 = 0 = k''_4.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 3 до таблиці 4

1. За провідні вважатимемо елемент $a''_{33} = -3$ та третій рядок таблиці 3.

2. Елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент $a''_{33} = -3$ і дістані результати запишемо до третього стовпчика таблиці 4.

3. Перший та другий стовпчики таблиці 3 переносимо до таблиці 4 без змін.

4. Усі елементи третього стовпчика таблиці 4 дорівнюють нулю, за винятком елемента $a_{33}''' = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 4:

$$\begin{aligned} a_{14}''' &= -\frac{1}{3}(1(-3) - 0 \cdot 0) = 1; & k_2''' &= -\frac{1}{3}(1(-3) - (-3)1) = 0; \\ b_1''' &= -\frac{1}{3}(0(-3) - (-6)0) = 0; & a_{44}''' &= -\frac{1}{3}(1(-3) - 0(-1)) = 1; \\ k_1''' &= -\frac{1}{3}(2(-3) - (-3)0) = 2; & b_4''' &= -\frac{1}{3}(-5(-3) - (-6)(-1)) = -3; \\ a_{24}''' &= -\frac{1}{3}(-1(-3) - 0 \cdot 1) = -1; & k_4''' &= -\frac{1}{3}(0(-3) - (-3)(-1)) = 1; \\ b_2''' &= -\frac{1}{3}(3(-3) - (-6)1) = 1. \end{aligned}$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 4 за допомогою контрольного стовпчика:

$$1 + 0 + 0 + 1 = 2 = k_1'''; \quad 0 + 1 + 0 - 1 = 0 = k_2'''; \quad 0 + 0 + 0 + 1 = 1 = k_4'''$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 4 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 4 до таблиці 5

1. За провідні візьмемо елемент $a_{44}''' = 1$ і четвертий рядок таблиці 5.

2. Усі елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент і запишемо результати до четвертого рядка таблиці 5.

3. Перший, другий, третій стовпчики таблиці 4 без змін переносимо до таблиці 5.

4. Усі елементи четвертого стовпчика таблиці 5 дорівнюють нулю, за винятком елемента $a_{44}'''' = 1$.

5. Знаходимо решту елементів таблиці 5:

$$\begin{aligned} b_1'''' &= 0 \cdot 1 - (-3)1 = 3; & b_2'''' &= 1 \cdot 1 - (-3)(-1) = -2; & b_3'''' &= 2 \cdot 1 - (-3)0 = 2; \\ k_1'''' &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1; & k_2'''' &= 0 \cdot 1 - 1(-1) = 1; & k_3'''' &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 5 за допомогою контрольного стовпчика:

$$1 + 0 + 0 + 0 = 1 = k_1''''; \quad 0 + 1 + 0 + 0 = 1 = k_2''''; \quad 0 + 0 + 1 + 0 = 1 = k_3''''; \quad 0 + 0 + 0 + 1 = 1 = k_4''''.$$

Знаходження невідомих

Відповідно до таблиці 5 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3; \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -2; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 2; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \quad \text{Звідки} \quad \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -2; \\ x_3 = 2; \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 3(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 - 1(-2) - 1 \cdot 2 + 2(-3) = -3; \\ 1 \cdot 3 + 2(-2) - 1 \cdot 2 - 1(-3) = 0; \\ 1 \cdot 3 + 3(-2) + 2 \cdot 2 - 1(-3) = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $(3; -2; 2; -3)$.**3.8.5 Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь****Приклад 3.27** Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 9x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

і знайти її розв'язок, якщо вона є сумісна.

Розв'язання

Будемо досліджувати систему рівнянь на сумісність за допомогою теореми Кронекера–Капеллі (дивись п. 3.5).

Запишемо матриці A та B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & -12 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 9 & -12 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Зробимо еквівалентні перетворення матриць.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 9 & -12 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 9 & 6 & 15 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриць

1. Утворимо нулі у другому рядку. За робочий візьмемо четвертий стовпчик.

2. Елементи другого стовпчика поділимо на 3, а елементи третього стовпчика помножимо на (-1) .

3. В дістаній матриці елементи четвертого стовпчика:

а) помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

б) додамо до відповідних елементів другого та третього стовпчиків.

4. В дістаній матриці елементи першого стовпчика поділимо на 3, другого стовпчика – на 2, а третього – на 5.

5. У новій матриці вийшло три однакових стовпчики. Отже, двох із них можна позбутись.

6. Елементи першого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого стовпчика, а також до відповідних елементів третього стовпчика.

7. Елементи другого стовпчика помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

8. Елементи другого та третього стовпчика поділимо на (-1) .

9. Елементи третього стовпчика помножимо на (-3) та додамо до відповідних елементів першого стовпчика.

10. Аналізуючи здобутий результат, доходимо висновку, що $r(A) = 2$, а $r(B) = 3$.

11. Згідно з теоремою Кронекера–Капеллі робимо висновок, що задана система рівнянь є несумісною.

В і д п о в і д ь: система рівнянь несумісна.

Приклад 3.28 Дослідити на сумісність систему рівнянь і знайти розв'язок, якщо система рівнянь сумісна.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо матриці A та B .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зробимо еквівалентні перетворення матриць:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриць

1. Елементи четвертого стовпчика поділимо на 2.
2. Елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів:
 - а) першого стовпчика;
 - б) третього стовпчика.
3. Елементи другого рядка помножимо на:
 - а) 2 та додамо до відповідних елементів першого рядка;
 - б) 3 та додамо до відповідних елементів третього рядка;
 - в) 4 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка.
4. Елементи другого рядка помножимо на (-1) .
5. Елементи першого рядка додамо до відповідних елементів третього рядка.
6. Елементи третього рядка помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.
7. Четвертий нульовий рядок можна вилучити.
8. Елементи третього стовпчика помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів першого стовпчика.
9. Елементи першого стовпчика поділимо на (-2) .
10. Елементи третього рядка поділимо на 7.
11. Елементи третього рядка помножимо на (-5) і додамо до відповідних елементів першого рядка.
12. З останньої матриці виходить, що

$$r(A) = 3; \quad r(B) = 3.$$

Задана система рівнянь є сумісна. Оскільки в перебігу перетворювань став нульовим четвертий рядок, можна стверджувати, що четверте рівняння системи є лінійною комбінацією перших трьох. Отже, четвертого рівняння можна позбавитись.

Розв'яжемо тепер систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Таку систему рівнянь зручно розв'язати за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1+9+2+3-3+2=14; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2-4-6-6=-14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6+2+2+2=0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2+6+2+4=14.$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 1.$$

В і д п о в і д ь: $(-1; 0; 1)$.

Приклад 3.29 Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3. \end{cases}$$

Якщо система рівнянь сумісна, знайти її загальний розв'язок, а також три будь-яких частинних розв'язки.

Р о з в ' я з а н н я

Розв'яжемо систему рівнянь у відповідності до схеми з п. 3.5.

Складаємо матрицю та розширену матрицю системи рівнянь.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відшукуємо ранг кожної з матриць, виконуючи елементарні перетворення, які не змінюють рангу матриці. Оскільки матриці A та B відрізняються лише останнім стовпчиком, то зручно водночас шукати ранги обох матриць

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right).$$

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриці

1. Утворимо нулі у першому рядку, за робочий стовпчик візьмемо третій.
2. Поділимо елементи першого стовпчика на 2.
3. Помножимо елементи третього стовпчика на (-2) й додамо до відповідних елементів першого стовпчика.
4. Помножимо елементи третього стовпчика на 2 й додамо до відповідних елементів другого стовпчика.
5. Помножимо елементи третього стовпчика на (-1) і додамо до елементів четвертого стовпчика.
6. Помножимо елементи третього стовпчика на (-2) і додамо до елементів п'ятого стовпчика.
7. Помножимо елементи третього стовпчика на (-1) і додамо до елементів шостого стовпчика.

Дістали матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриці

1. Оскільки елементи другого, п'ятого та шостого стовпчиків є однаковими, а елементи першого стовпчика їм пропорційні, то можна перший, другий, шостий стовпчики вилучити.
2. Оскільки надалі нам треба буде визначити базисний мінор, то доцільно провадити надалі нумерацію стовпчиків відповідно до того положення, яке вони займають по відношенню до системи. Дістали таку матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

(3)(4)(5)

де в дужках позначені індекси змінних в заданій системі рівнянь.

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриці

1. Оскільки ми мали змогу вилучити шостий стовпчик, то це означає, що $r(A)=r(B)$, а отже, система є сумісною. Подальші перетворення здійснюються з метою знайти базисний мінор. Утворюватимемо нулі у першому рядку, вважаючи перший стовпчик за робочий. Елементи четвертого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до третього а також до п'ятого стовпчиків. Дістали таку матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) (4) (5)

2. Елементи другого рядка додамо до елементів четвертого рядка. Дістанемо таку матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (4) (5)

3. Елементи п'ятого стовпчика помножимо на (-4) і додамо до елементів четвертого стовпчика. Дістанемо таку матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (4) (5)

4. Елементи третього та четвертого рядків є пропорційні, отже, четвертий рядок можна вилучити і провести нумерування рядків. Дістанемо таку матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2). \\ (3) \end{matrix}$$

(3) (4) (5)

Дістана матриця може стати одиничною матрицею третього порядку, якщо в ній четвертий та п'ятий стовпчики поміняти місцями. Це означає, що $r(A)=r(B)=3$.

Базисним є мінор, утворений першим, другим та третім рядками і третім, четвертим та п'ятим стовпчиками. Базисними невідомими є x_3, x_4, x_5 , а вільними невідомими – x_1 та x_2 . Отже, четверте рівняння системи можна відкинути, оскільки воно є лінійною комбінацією решти рівнянь системи.

Запишемо систему рівнянь у такий спосіб:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 - 4x_1 + 2x_2; \\ 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 - 6x_1 + 3x_2; \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 - 2x_1 + x_2. \end{cases} \quad (*)$$

Розв'яжемо дистану систему рівнянь методом Гаусса.

№ таб-лиці	Коефіцієнти при базис-них невідомих			b_i	k_i – контрольний стовпчик	
	x_3	x_4	x_5		x_1	x_2
1	1	1	2	1	-4	2
	4	8	13	9	-6	3
	1	2	3	2	-2	1
2	1	1	2	1	-4	2
	0	4	5	5	10	-5
	0	1	1	1	2	-1
3	1	1	2	1	-4	2
	0	4	5	5	10	-5
	0	0	-1	-1	-2	1

Пояснення до таблиць

1. Складаємо таблицю 1 відповідно до системи (*).
2. За провідні беремо елемент $a_{11} = 1$ та перший рядок.
3. Перший рядок таблиці 1 без змін переносимо у таблицю 2.
4. Ті елементи першого стовпчика таблиці 1, які розміщено нижче елемента $a_{11} = 1$, замінимо на нулі і запишемо цей стовпчик до таблиці 2.

5. Відшукуємо решту елементів таблиці 2:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= 8 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 4; & a'_{32} &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1; & b'_3 &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1; \\ a'_{23} &= 13 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 5; & a'_{33} &= 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1; & b'_2 &= 9 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 5. \\ a'_{24} &= -6 \cdot 1 - (-4) \cdot 4 = 10; & a'_{34} &= -2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) = 2; \\ a'_{25} &= 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5; & a'_{35} &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1. \end{aligned}$$

6. За провідні беремо елемент $a'_{22} = 4$ та другий рядок таблиці 2.

7. Перший та другий рядки таблиці 2 без змін переносимо до таблиці 3.

8. Перший стовпчик таблиці 2 без змін переносимо до таблиці 3.

9. У другому стовпчику таблиці 2 той елемент, який розміщено нижче другого рядка, замінимо на нулі і запишемо до таблиці 3.

10. Відшукуємо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -1; \quad a''_{34} = 2 \cdot 4 - 10 \cdot 1 = -2;$$

$$b''_3 = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -1; \quad a''_{35} = -1 \cdot 4 - (-5)1 = 1.$$

Знаходження невідомих

Останньому рядку таблиці 3 відповідає рівняння

$$-x_5 = -1 - 2x_1 + x_2 \quad \text{або} \quad x_5 = 1 + 2x_1 - x_2.$$

Другому рядку таблиці 3 відповідає рівняння

$$4x_4 + 5x_5 = 5 + 10x_1 - 5x_2$$

або

$$4x_4 + 5(1 + 2x_1 - x_2) = 5 + 10x_1 - 5x_2, \quad 4x_4 = 5 - 5 + 10x_1 - 10x_1 - 5x_2 + 5x_2, \quad x_4 = 0.$$

Нарешті, на підставі першого рядка таблиці маємо

$$x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 - 4x_1 + 2x_2$$

або

$$x_3 + 2(1 + 2x_1 - x_2) = 1 - 4x_1 + 2x_2, \quad x_3 = 1 - 2 - 4x_1 - 4x_1 + 2x_2 + 2x_2, \quad x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2.$$

Загальний розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Прийmemo до уваги, що вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень. Тоді загальний розв'язок системи рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 1 + 2c_1 - c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R.$$

Тепер маємо можливість знайти кілька частинних розв'язків системи. Вільним невідомим надаватимемо конкретні числові значення і знайдемо відповідні значення базисних невідомих:

c_1	c_2	x_3	x_4	x_5
0	0	-1	0	1
1	4	7	0	-1
-2	-8	-17	0	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \begin{cases} x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 1 + 2c_1 - c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R;$$

$$(0, 0, -1, 0, 1); (1, 4, 7, 0, -1); (-2, -8, -17, 0, 5).$$

Приклад 3.30 Дослідити систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2; \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2; \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \end{cases}$$

на сумісність. У тому разі, якщо система рівнянь сумісна, знайти її загальний розв'язок та будь-які три частинних розв'язки, якщо вони існують.

Розв'язання

Складемо матрицю системи рівнянь та розширену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранги матриць A та B методом обвідних мінорів:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -56 \neq 0.$$

Отже, $r(A) = 3$.

В матриці B візьмемо мінор M_3 , який обводить мінор M_2 .

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Пояснення стосовно обчислення визначника M_3

1. Утворимо нулі у першому рядку, за робочий візьмемо другий стовпчик.
2. Елементи другого стовпчика помножимо на (-2) та додамо до елементів першого стовпчика.
3. Елементи другого стовпчика помножимо на 4 і додамо до елементів третього стовпчика.
4. Елементи другого стовпчика помножимо на (-5) і додамо до елементів четвертого стовпчика. Мінор M_3 набуває вигляду:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & 17 \\ -1 & 1 & 9 & -3 \\ -7 & 3 & 7 & -17 \end{vmatrix}.$$

5. Елементи першого стовпчика додамо до елементів третього стовпчика.
Дістанемо:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 17 \\ -1 & 1 & 8 & -3 \\ -7 & 3 & 0 & -17 \end{vmatrix}.$$

6. Елементи другого рядка додамо до елементів четвертого рядка. Дістаний визначник

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 17 \\ -1 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

як визначник з двома однаковими рядками.

Ми маємо ще один обвідний мінор для M_2 :

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Пояснення стосовно обчислення визначника M_4

1. Утворимо нулі у першому рядку, за робочий візьмемо другий стовпчик.

2. Елементи другого стовпчика помножимо на (-2) і додамо до елементів першого стовпчика.

3. Елементи другого стовпчика помножимо на 4 і додамо до елементів третього стовпчика.

4. Елементи другого стовпчика помножимо на (-5) і додамо до елементів четвертого стовпчика.

Дістанемо

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & 17 \\ -1 & 1 & 9 & -3 \\ -7 & 4 & 7 & -17 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -7 & 17 \\ -1 & 9 & -3 \\ -7 & 7 & -17 \end{vmatrix} = 0,$$

як визначник з двома рядками, елементи яких пропорційні.

Отже, $r(B) = 3$.

Оскільки $r(A) = r(B) = 3$, то система рівнянь є сумісною. Базисними є перший, другий та третій рядки і перший, другий та третій стовпчики. Четверте та п'яте рівняння не враховуватимемо.

Оскільки ранг матриць A та B дорівнює кількості невідомих, то система рівнянь має єдиний розв'язок.

Система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases} \quad (*)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь методом Гаусса:

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
1	②	1	-4	5	-1
	3	-2	1	7	2
	1	1	5	2	7
2	2	1	-4	5	-1
	0	Ⓣ7	14	-1	7
	0	1	14	-1	15
3	2	1	-4	5	-1
	0	-7	14	-1	7
	0	0	-112	8	-112

Пояснення стосовно переходу від таблиці 1 до таблиці 2

1. Таблицю 1 складаємо відповідно до системи (*).
2. Контрольний стовпчик дорівнює сумі коефіцієнтів при невідомих.
3. За провідні беремо елемент $a_{11} = 2$ та перший рядок.
4. Перший рядок таблиці 1 без змін переносимо до таблиці 2.
5. Елементи першого стовпчика таблиці 1, які розміщені нижче першого рядка, замінімо на нулі і запишемо цей стовпчик до таблиці 2.
6. Відшукуємо решту елементів таблиці 2:

$$\begin{aligned}
 a'_{22} &= -2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -7; & a'_{32} &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1; \\
 a'_{23} &= 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 = 14; & a'_{33} &= 5 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 = 14; \\
 b'_2 &= 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -1; & b'_3 &= 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1; \\
 k'_2 &= 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 7; & k'_3 &= 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 15.
 \end{aligned}$$

7. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 7 + 14 = 7 = k'_2; \quad 0 + 1 + 14 = 15 = k'_3.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 2 складено.

Пояснення стосовно переходу від таблиці 2 до таблиці 3

1. За провідні беремо елемент $a'_{22} = -7$ та другий рядок таблиці 2.
2. Перший та другий рядки таблиці 2 без змін переносимо до таблиці 3;
3. Перший стовпчик таблиці 2 без змін переносимо у таблицю 3.
4. Елемент другого стовпчика таблиці 2, розміщений нижче елемента $a'_{22} = 7$, замінимо на нуль і запишемо цей стовпчик до таблиці 3.
5. Відшукуємо решту елементів таблиці 3:
 $a''_{33} = 14(-7) - 14 \cdot 1 = -112$; $b''_3 = -1(-7) - (-1) \cdot 1 = 8$; $k''_3 = 15(-7) - 7 \cdot 1 = -112$.
6. Матрицю A приведено до трикутної форми. Можна розпочинати обернений хід.

Знаходження невідомих

Оскільки $-122x_3 = 8$, то $x_3 = -\frac{1}{14}$.

З рівняння $-7x_2 + 14x_3 = -1$ випливає $-7x_2 = -1 - 14\left(-\frac{1}{14}\right)$ або
 $-7x_2 = -1 + 1$; $-7x_2 = 0$; $x_2 = 0$.

З рівняння $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5$ випливає $2x_1 = 5 + 4\left(-\frac{1}{14}\right)$ або $2x_1 = \frac{33}{7}$;
 $x_1 = \frac{33}{14}$.

Отже, $x_1 = \frac{33}{14}$; $x_2 = 0$; $x_3 = -\frac{1}{14}$.

Це єдиний розв'язок системи рівнянь.

В і д п о в і д ь: $\left(\frac{33}{14}; 0; -\frac{1}{14}\right)$.

Приклад 3.31 Перевірити, чи сумісна система рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 8; \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

і розв'язати її, якщо вона сумісна.

Розв'язання

Складемо матрицю A та розширену матрицю B заданої системи рівнянь.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & -1 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранги цих матриць методом обвідних мінорів:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Можна переходити до обвідних мінорів третього порядку.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $r(A) = 2$.

Для матриці B маємо:

$$M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad M_6 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $r(B) = 2$.

Система рівнянь є сумісною. Базисними є перший та другий рядки, з чого виходить, що третє рівняння треба відкинути.

Базисними є другий та третій стовпчики, з чого виходить, що базисними невідомими є x_2 та x_3 , а x_1 та x_4 – вільні невідомі.

Система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 5 - 3x_1 - 2x_4; \\ 3x_2 - x_3 = 8 - 9x_1 - 6x_4. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь за правилом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 - 3x_1 - 2x_4 & 2 \\ 8 - 9x_1 - 6x_4 & -1 \end{vmatrix} = -21 + 21x_1 + 14x_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 - 3x_1 - 2x_4 \\ 3 & 8 - 9x_1 - 6x_4 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_2 = \frac{-21 + 21x_1 + 14x_4}{-7} \quad \text{або} \quad x_2 = 3 - 3x_1 - 2x_4; \quad x_3 = \frac{-7}{-7} \quad \text{або} \quad x_3 = 1.$$

Отже, система рівнянь має нескінченну множину розв'язків. Загальний розв'язок системи рівнянь задано формулами

$$\begin{cases} x_2 = 3 - 3x_1 - 2x_4; \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = 3 - 3c_1 - 2c_2; \\ x_3 = 1, \end{cases} \text{ де } c_1, c_2 \in R.$$

В і д п о в і д ь:
$$\begin{cases} x_1 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = 3 - 3c_1 - 2c_2; \\ x_3 = 1, \end{cases} c_1, c_2 \in R.$$

3.8.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 3.32 Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

У заданій системі рівнянь усі вільні члени дорівнюють нулю, отже, ця система є однорідною системою рівнянь. Знаходимо визначник системи рівнянь.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 9 + 3 - 1 - 6 = -10 \neq 0.$$

Оскільки визначник системи рівнянь відрізняється від нуля, то система має єдиний розв'язок, а саме – тривіальний розв'язок (дивись п. 3.6).

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

В і д п о в і д ь: $(0; 0; 0).$

Приклад 3.33 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо однорідну систему рівнянь. Знаходимо визначник системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ

1. Утворимо нулі у третьому стовпчику. За робочий візьмемо перший рядок.
2. Елементи першого рядка послідовно додамо до відповідних елементів другого, третього та четвертого рядків.
3. Отриманий визначник зручно розкласти за елементами другого рядка.
4. Визначник третього порядку, який маємо внаслідок попереднього перетворення, дорівнює нулю, оскільки другий рядок складається винятково з нулів.

Отже, задана система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків. Знайдемо їх методом Гаусса.

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	④	-1	1	-1	0	3
	8	1	-1	1	0	9
	2	1	-1	1	0	3
	1	2	-1	2	0	4
2	4	-1	1	-1	0	3
	0	12	-12	12	0	12
	0	6	-6	6	0	6
	0	9	-5	9	0	13
3	4	-1	1	-1	0	3
	0	1	-1	1	0	1
	0	1	-1	1	0	1
	0	9	-5	9	0	13
4	4	-1	1	-1	0	3
	0	①	-1	1	0	1
	0	9	-5	9	0	13

5	4	-1	1	-1	0	3
	0	1	-1	1	0	1
	0	0	4	0	0	4
6	4	-1	1	-1	0	3
	0	1	-1	1	0	1
	0	0	1	0	0	1

Пояснення до таблиць

1. Таблицю 1 складаємо відповідно до умови і за провідні беремо елемент $a_{11} = 4$ та перший рядок.

2. Елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих.

3. Перший рядок таблиці 1 переносимо до таблиці 2 без змін.

4. Усі елементи першого стовпчика таблиці 2, розміщені нижче першого рядка, замінимо на нулі.

5. Знаходимо решту елементів таблиці:

$$a'_{22} = 1 \cdot 4 - (-1)8 = 12; \quad a'_{23} = -1 \cdot 4 - 1 \cdot 8 = -12; \quad a'_{24} = 1 \cdot 4 - (-1)8 = 12;$$

$$a'_{32} = 1 \cdot 4 - (-1)2 = 6; \quad a'_{33} = -1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = -6; \quad a'_{22} = 1 \cdot 4 - (-1)2 = 6;$$

$$a'_{42} = 2 \cdot 4 - (-1)1 = 9; \quad a'_{43} = -1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -5; \quad a'_{44} = 2 \cdot 4 - (-1)1 = 9;$$

$$k'_2 = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 12; \quad k'_2 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6; \quad k'_4 = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 13.$$

6. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 12 - 12 + 12 = 12 = k'_2; \quad 0 + 6 - 6 + 6 = 6 = k'_3; \quad 0 + 9 - 5 + 9 = 13 = k'_4.$$

7. Особливість таблиці 2 полягає в тому, що елементи другого та третього рядків можна поділити на їхні спільні множники, внаслідок чого дістанемо таблицю 3.

8. Особливість таблиці 3 полягає в тому, що вона має однакові другий та третій рядки. Отже, одного з них можна позбутись, що приводить до таблиці 4.

9. За провідні беремо елемент $a'''_{22} = 1$ та другий рядок таблиці 4.

10. Перший та другий рядки таблиці 4 переносимо до таблиці 5 без змін.

11. Перший стовпчик таблиці 4 переносимо до таблиці 5 без змін.

12. Елементи другого стовпчика таблиці 5, розміщені нижче другого рядка, замінимо на нулі.

13. Знаходимо решту елементів таблиці 5:

$$a'''_{33} = 4 \cdot 1 - (-1)0 = 4; \quad a'''_{33} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0; \quad a'''_{33} = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 4.$$

14. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 5 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 4 + 0 = 4 = k'''_3.$$

15. Особливість таблиці 5 полягає в тому, що усі елементи третього рядка можна поділити на їхній спільний множник, внаслідок чого приходимо до таблиці 6.

Таблиця 6 має трапецоїдну форму.

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

яка відповідає таблиці 6.

Знайдемо ранг цієї матриці методом еквівалентних перетворень

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Пояснення до обчислення рангу матриці

1. Знаходимо ранг матриці A , користуючись елементарними перетвореннями, які не змінюють її рангу.

2. Елементи першого стовпчика поділимо на 4.

3. В дістаній матриці другий та четвертий стовпчики однакові. Отже, одного з них можна позбутися.

4. В дістаній після попереднього перетворення матриці робимо такі перетворення:

а) елементи першого стовпчика додамо до відповідних елементів другого стовпчика;

б) елементи першого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до третього стовпчика.

5. В дістаній матриці елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

6. Ми дістали одиничну матрицю вимірності 3×3 . Отже, $r(A) = 3$.

У перебігу елементарних перетворювань ми позбавились четвертого стовпчика. Отже, міnor

$$M = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

На цій підставі вважатимемо, що базисними невідомими є x_1, x_2, x_3 , а x_4 — вільна невідома.

Запишемо систему рівнянь на підставі таблиці 6 у вигляді

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Залишивши ліворуч лише базисні невідомі, матимемо:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = x_4; \\ x_2 - x_3 = -x_4; \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Тепер слід базисні невідомі подати через вільну невідому або знайти конкретні значення базисних невідомих:

$$\begin{cases} x_3 = 0; \\ x_2 = -x_4; \\ x_1 = \frac{1}{4}(x_4 + x_2) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_3 = 0; \\ x_4 = c; \\ x_1 = 0; \\ x_2 = -c, \end{cases} \quad \text{де } c \in R. \quad (*)$$

Ми дістали загальний розв'язок (*) однорідної системи рівнянь. Якщо вільному невідомому x_4 надавати конкретні значення, то конкретних значень набуватиме й x_2 , а x_1 та x_3 дорівнюють нулю незалежно від x_4 . Для кожного значення x_4 буде знайдено відповідний частинний розв'язок.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	2	0	-2
0	-7	0	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

В і д п о в і д ь: $(0; -c; 0; c)$, де $c \in R$.

Приклад 3.34 Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

та будь-які три частинних розв'язки.

Р о з в ' я з а н н я

Маємо однорідну систему рівнянь. Знаходимо визначник системи рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 1 & -9 \\ 8 & -15 & -1 & -15 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пояснення стосовно обчислення визначника

1. Утворимо нулі у четвертому рядку за допомогою першого стовпчика.
2. Помножимо елементи першого стовпчика на (-2) і додамо до відповідних елементів:

- а) другого стовпчика;
- б) четвертого стовпчика.

3. Утворений визначник має два однакових стовпчики, отже, такий визначник дорівнює нулю, у зв'язку з чим процес утворення нулів припиняємо.

Звідси виходить, що система рівнянь є невизначеною і має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо їх методом Гаусса.

№ таблиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	4	-1	1	-1	0	3
	8	1	-1	1	0	9
	2	1	-1	1	0	3
	1	2	-2	2	0	3
2	4	-1	1	-1	0	3
	0	12	-12	12	0	12
	0	6	-6	6	0	6
	0	9	-9	9	0	9
3	4	-1	1	-1	0	3
	0	1	-1	1	0	1
	0	1	-1	1	0	1
	0	1	-1	1	0	-1
4	4	-1	1	-1	0	3
	0	1	-1	1	0	1

Пояснення до таблиць

1. Таблицю 1 складаємо відповідно до умови.
2. Елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих.
3. За провідні беремо елемент $a_{11} = 4$ та перший рядок таблиці 1.
4. Перший рядок таблиці 1 без змін переносимо до таблиці 2.

5. У першому стовпчику таблиці 1 усі елементи, розміщені нижче $a_{11} = 4$, замінимо на нулі і перенесемо до таблиці 2.

6. Знаходимо решту елементів таблиці:

$$a'_{22} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 8 = 12; \quad a'_{34} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6;$$

$$a'_{23} = -1 \cdot 4 - 1 \cdot 8 = -12; \quad k'_3 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6;$$

$$a'_{24} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 8 = 12; \quad a'_{42} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 9;$$

$$k'_2 = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 12; \quad a'_{43} = -2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -9;$$

$$a'_{32} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6; \quad a'_{44} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 9;$$

$$a'_{33} = -1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = -6; \quad k'_4 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 9.$$

7. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 12 - 12 + 12 = 12 = k'_2; \quad 0 + 6 - 6 + 6 = 6 = k'_3; \quad 0 + 9 - 5 + 9 = 13 = k'_4.$$

8. Особливість таблиці 2 полягає в тому, що елементи другого, третього та четвертого рядків можна поділити на їхні спільні множники, внаслідок чого дістанемо таблицю 3.

9. Особливістю таблиці 3 є те, що другий, третій та четвертий рядки таблиці є однакові. Отже, третього та четвертого рядків можна позбутись. Виходить, що третє та четверте рівняння таблиці є лінійною комбінацією перших двох рівнянь, їх можна не враховувати.

Таким чином, приходимо до таблиці 4.

Розглянемо тепер систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Матриця системи рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Міnor другого порядку цієї матриці:

$$M = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці A дорівнює 2.

Якщо зважити на згаданий міnor, то за базисні невідомі можна вважати x_1 та x_2 , а x_3 та x_4 — вільними невідомими.

Виходячи з цих припущень, систему рівнянь запишемо у вигляді

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -x_3 + x_4; \\ 8x_1 + x_2 = x_3 - x_4. \end{cases}$$

Далі маємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = c_1 - c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R.$$

Дістали загальний розв'язок однорідної системи рівнянь.

Надаючи сталим тих чи інших значень, можемо знайти частинні розв'язки:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	8	1	-7
0	-7	-5	2
0	2,9	3	0,1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = c_1 - c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R;$$

$$(0; 8; 1; -7); (0; -7; -5; 2); (0; 2,9; 3; 0,1).$$

Приклад 3.35 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Розглянемо матрицю A заданої системи рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пояснення стосовно еквівалентних перетворень матриці A

1. Будемо створювати нулі у третьому стовпчику за допомогою першого рядка.

2. Елементи першого рядка помножимо на:

- а) (-1) і додамо до відповідних елементів другого рядка;
- б) 2 і додамо до відповідних елементів третього рядка;
- в) 8 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка;
- г) 4 і додамо до відповідних елементів п'ятого рядка.

3. Елементи другого, третього, четвертого та п'ятого рядків можна поділити на їхні спільні множники, внаслідок чого приходимо до нової матриці, в якій другий рядок збігається з третім, а четвертий – з п'ятим. Позбудемось третього та п'ятого рядків, що приводить до матриці 3 порядку.

4. У дістаній матриці:

- а) елементи третього стовпчика додамо до відповідних елементів першого стовпчика;
- б) елементи третього стовпчика помножимо на 2 і додамо до елементів другого стовпчика.

5. Елементи першого рядка дістаной матриці поділимо на (-1) .

6. Елементи другого стовпчика нової матриці помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів першого стовпчика.

7. У дістаній матриці елементи першого стовпчика поділимо на (-1) .

8. Елементи другого рядка останньої матриці помножимо на (-2) та додамо до відповідних елементів третього рядка.

9. Визначник дістаной матриці відрізняється від нуля. Отже, $r(A) = 3$.

Виходить, що в заданій системі рівнянь достатньо залишити перше, друге та четверте рівняння.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки ми вже знаємо, що визначник Δ цієї системи рівнянь відрізняється від нуля, то можна стверджувати, що така система рівнянь має лише один тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

В і д п о в і д ь: $(0, 0, 0)$.

Приклад 3.36 Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

та будь-які три частинних розв'язки.

Р о з в ' я з а н н я

Задана система рівнянь є однорідною системою рівнянь.

Оскільки кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, то треба перевірити, чи має ця система рівнянь нетривіальні розв'язки. Знайдемо визначник системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & -9 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ -3 & -18 & -9 \\ 2 & 12 & -10 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Пояснення стосовно обчислення визначника Δ

1. Утворимо нулі у першому стовпчику, за робочий візьмемо перший рядок.

2. Елементи першого рядка помножимо на (-3) і додамо до відповідних елементів другого рядка.

3. Елементи першого рядка помножимо на (-4) і додамо до відповідних елементів третього рядка.

4. Елементи першого рядка помножимо на (-3) і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

5. Дістаний визначник зручно розкласти за елементами першого стовпчика.

6. Визначник третього порядку можна спростити, якщо з другого та третього рядків винести спільні множники.

7. В дістаному після цього визначнику елементи першого рядка додамо до відповідних елементів:

а) другого рядка;

б) третього рядка.

8. Останній з визначників має нульовий рядок. Такий визначник дорівнює нулю.

Отже, є підстави стверджувати, що однорідна система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків.

Розв'яжемо цю систему методом Гаусса.

№ таблиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	k_i – контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	2	4	-3	0	4
	3	5	6	-4	0	10
	4	5	-2	3	0	10
	3	8	24	-19	0	16
2	1	2	4	-3	0	4
	0	-1	-6	5	0	-2
	0	-3	-18	15	0	-6
	0	2	12	-10	0	4
3	1	2	4	-3	0	4
	0	-1	-6	5	0	-2
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

Пояснення до таблиць

1. Відповідно до умови складаємо таблицю 1.

2. Елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих.

3. Для переходу до таблиці 2 за провідні беремо елемент $a_{11} = 1$ та перший рядок.

4. Перший рядок переносимо без змін до таблиці 2.

5. У першому стовпчику усі елементи, розміщені нижче провідного елемента, замінимо на нулі і перенесемо до таблиці 2.

6. Знаходимо решту елементів таблиці 2:

$$a'_{22} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1; \quad a'_{23} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6; \quad a'_{24} = -4 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 5;$$

$$a'_{32} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -3; \quad a'_{33} = -2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -18; \quad a'_{34} = 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 15;$$

$$a'_{42} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2; \quad a'_{43} = 24 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = 12; \quad a'_{44} = -19 \cdot 1 - (-3)3 = -10;$$

$$k'_2 = 10 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -2; \quad k'_3 = 10 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -6; \quad k'_4 = 16 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = 4.$$

7. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 2 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 1 - 6 + 5 = -2 = k'_2; \quad 0 - 3 - 18 + 15 = -6 = k'_3; \quad 0 + 2 + 12 - 10 = 4 = k'_4.$$

8. За провідні беремо елемент $a'_{22} = -1$ та другий рядок таблиці 2.

9. Перший та другий рядки таблиці 2 без змін переносимо до таблиці 3.

10. Перший стовпчик таблиці 2 без змін переносимо до таблиці 3.

11. Елементи другого стовпчика таблиці 2, розміщені нижче другого рядка, замінимо на нулі і перенесемо до таблиці 3.

12. Знаходимо решту елементів таблиці 3:

$$a''_{33} = -18(-1) - (-6)(-3) = 0; \quad a''_{43} = 12(-1) - (-6)2 = 0;$$

$$a''_{34} = 15(-1) - 5(-3) = 0; \quad a''_{44} = -10(-1) - 5 \cdot 2 = 0;$$

$$k''_3 = -6(-1) - (-2)(-3) = 0; \quad k''_4 = 4(-1) - (-2)2 = 0.$$

13. Перевіримо правильність знаходження коефіцієнтів у таблиці 3 за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0 = k''_3; \quad 0 + 0 + 0 + 0 = 0 = k''_4.$$

Коефіцієнти знайдено правильно. Таблицю 3 складено.

З останньої таблиці бачимо, що третє та четверте рівняння в системі можна відкинути, оскільки вони являють собою лінійну комбінацію першого та другого рівнянь.

Система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо матрицю системи рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Її мінор $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Отже, $r(A) = 2$.

Невідомі x_1 та x_2 вважаємо за базисні, а x_3 та x_4 – за вільні невідомі.

Запишемо тепер систему рівнянь у такий спосіб:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4; \\ -x_2 = 6x_3 - 5x_4. \end{cases}$$

Внаслідок проведених раніш перетворень, маємо можливість перейти до знаходження невідомих. З другого рівняння маємо: $x_2 = -6x_3 - 5x_4$.

З першого рівняння маємо: $x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4$

або

$$x_1 = -2(-6x_3 - 5x_4) - 4x_3 + 3x_4, \quad x_1 = 8x_3 - 7x_4.$$

Загальний розв'язок системи рівнянь може бути поданий у вигляді

$$\begin{cases} x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_1 = 8c_1 - 7c_2; \\ x_2 = -6c_1 + 5c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R.$$

Із загального розв'язку можемо дістати частинні розв'язки, надаючи вільним невідомим ті чи інші значення.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	1	1
-5	3	2	3
-16	12	-2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_1 = 8c_1 - 7c_2; \\ x_2 = -6c_1 + 5c_2, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2 \in R;$

$$(1; -1; 1; 1); (-5; 3; 2; 3); (-16; 12; -2; 0).$$

Приклад 3.37 Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$$

знайти її фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок.

Р о з в ' я з а н н я

До системи рівнянь входить п'ять невідомих та лише три рівняння. Матриця A цієї системи рівнянь є такою:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці знаходимо методом обвідних мінорів. Будемо шукати мінор другого порядку, який відрізняється від нуля.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тепер обчислимо обвідні мінори.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad M_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Виходить, $r(A) = 2$.

Оскільки базисними рядками є перший та другий, то виходить, що третє рівняння є наслідком перших двох рівнянь, а оскільки базисними стовпчиками є другий та третій, то невідомі x_2 та x_3 вважатимемо за базисні невідомі.

Систему рівнянь доцільно записати у такий спосіб:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5; \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases}$$

Шукатимемо фундаментальні розв'язки. Відомо, що $n = 5$; $r = 2$, отже, $k = 5 - 2 = 3$. Звідси виходить, що фундаментальних розв'язків має бути три. З цією метою вільним невідомим x_1, x_3, x_5 надамо конкретні значення, приміром, $x_1 = 1$; $x_3 = 0$; $x_5 = 0$. Тоді приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2; \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases} \quad (*)$$

Визначник цієї системи збігається з базисним мінором. Отже, він відрізняється від нуля, а система рівнянь (*) має єдиний розв'язок.

Знайдемо його за правилом Крамера.

$$\Delta = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2; \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Звідки } x_2 = 2; \quad x_3 = 0.$$

Отже, знайдено один з фундаментальних розв'язків заданої системи рівнянь:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 0.$$

Запишемо цей розв'язок у вигляді

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знову відшукаємо розв'язок системи рівнянь, надаючи вільним невідомим інших значень, а саме: $x_1 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$. Це приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 2; \\ -2x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases} \quad (**)$$

Розв'язавши систему (**) за правилом Крамера, матимемо

$$\Delta = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 10. \quad \text{Звідки } x_2 = 13; \quad x_3 = 10.$$

Так само дістанемо другий фундаментальний розв'язок: $x_1 = 0$; $x_2 = 13$; $x_3 = 5$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$. Його можна подати у вигляді

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Врешті, знайдемо третій фундаментальний розв'язок. Нехай $x_1 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 1$. Це дає таку систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -4; \\ -2x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

Третій фундаментальний розв'язок: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = 0$; $x_5 = 1$. Запишемо цей розв'язок у вигляді

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дістані базисні розв'язки є лінійно незалежними між собою.

Дійсно, утворимо матрицю із стовпчиків, які являють собою фундаментальні розв'язки.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нескладно помітити, що $r(B) = 3$, оскільки до складу матриці B входить ненульовий мінор третього порядку

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

З таких розв'язків можна скласти фундаментальну систему розв'язків.

ЗАУВАЖЕННЯ. Фундаментальна система розв'язків, побудована у такий спосіб, називається **нормальною фундаментальною системою розв'язків**.

Загальний розв'язок системи може бути знайдений, як лінійна комбінація фундаментальних розв'язків, тобто

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

а саме

$$\begin{cases} x_1 = c_1; \\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3; \\ x_3 = 5c_2 - c_3; \\ x_4 = c_2; \\ x_5 = c_3, \end{cases} \quad \text{де } c_1, c_2, c_3 \in R.$$

В і д п о в і д ь: $(c_1, 2c_1 + 13c_2 + c_3, 5c_2 - c_3, c_2, c_3)$, $c_1, c_2, c_3 \in R$.

4 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ТЕОРІЇ АЛГЕБРАЇЧНИХ КІЛ

Основні поняття лінійної алгебри, як-то матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь – відіграють значну роль у процесі досліджування електричних кіл. За допомогою понять лінійної алгебри можна значно спростити описування законів, чинних в електричних колах.

Доволі часто процеси, які відбуваються в електричних колах, описуються системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи розв'язування та досліджування систем лінійних алгебраїчних рівнянь стають у нагоді при досліджуванні електричних кіл. Приміром, в теорії електричних кіл широко використовують такі методи обчислення електричних кіл, як *метод контурних струмів* та *метод вузлових напруг*.

Суть методу вузлових напруг полягає у тому, що один з вузлів електричного кола вважають за базисний і на підставі першого закону Кірхгофа визначають потенціали всієї решти вузлів відносно базисного вузла. Різниці потенціалів називають *вузловими напругами*. Зрозуміло, що напруга на кожній вітці дорівнює різниці вузлових напруг кінців цієї вітки. Добуток такої напруги на комплексну провідність вітки дорівнює струмові в цій вітці. Отже, знаючи вузлові напруги в електричному колі, можна знайти струми в його вузлах.

Якщо припустити, що потенціал базисного вузла дорівнює нулю, то напруги між іншими вузлами та базисним вузлом збігатимуться з потенціалами самих вузлів. У зв'язку з цим і з'явилась назва: *метод вузлових потенціалів*.

Розглянемо у спрощеному варіанті суть цих методів.

У методі контурних струмів замість дослідження струму в усьому електричному колі досліджують струми на кожному з контурів, що входять до електричного кола. Приміром, на рис.4.1 зображене електричне коло, що є двоконтурним електричним колом. Дослідження струмів у такому електричному колі можна провадити окремо для кожного з контурів. Струми у таких контурах називають *контурними* струмами. У підґрунтя дослідження струмів покладено другий закон Кірхгофа.

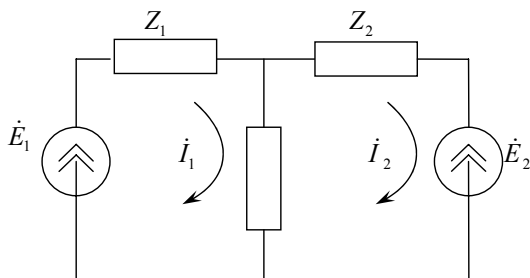


Рисунок 4.1 – Двоконтурне електричне коло

У загальному випадку кількість рівнянь, складених згідно з другим законом Кірхгофа, дорівнює кількості незалежних контурів в електричному колі, тобто якщо електрична схема складається з q вузлів та p віток, то система рівнянь складатиметься з $p - q + 1$ рівнянь.

Приміром, розглянемо електричну схему, у якій є два джерела струму, три вузли (рис. 4.2).

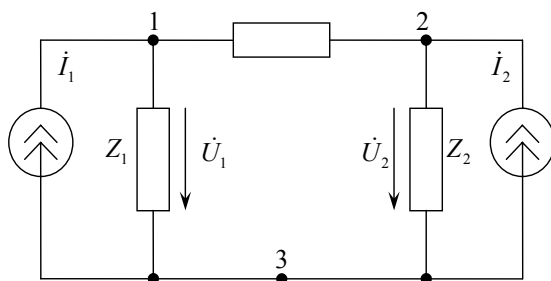


Рисунок 4.2 – Електрична схема на два джерела і три вузла

Візьмемо за базисний третій вузол. Через $\dot{U}_1$ та $\dot{U}_2$ позначимо вузлові напруги відповідно першого та другого вузла. Через Y_1 , Y_2 , Y_3 позначимо комплексні провідності віток 1, 2, 3 відповідно. Відомо, що

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2}, \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}.$$

Для електричного кола, яке відповідає схемі на рис.4.2, згідно з першим законом Кірхгофа, може бути записано таку систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими $\dot{U}_1$ та $\dot{U}_2$:

$$\begin{cases} Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \dot{I}_1; \\ Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) = \dot{I}_2. \end{cases}$$

У загальному випадку, коли електрична схема має q вузлів, їй відповідає система з $q - 1$ рівнянь, оскільки один з вузлів вважається за базисний:

де $\dot{I}_k$ – струм у k -му контурі, $k = 1, 2, \dots, n$; $\dot{E}_k$ – електрорушійна сила у k -му контурі, $k = 1, 2, \dots, n$; Z_{ik} – сумарний опір i -го та k -го контурів, $i, k = 1, 2, \dots, n$; Z_{kk} – опір контура k , $k = 1, 2, \dots, n$;

Насамкінець, слід зауважити, що і в теорії електричних кіл, і в багатьох економічних завданнях доводиться розв'язувати проблему пошуку найбільш оптимального розв'язку. Одним з методів оптимізування є так званий симплекс-метод. Суть симплекс-методу полягає у тому, що за його допомогою можна знайти оптимальне значення лінійної функції багатьох невідомих.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Які перетворення не змінюють визначника?
3. За яких перетворень змінюється знак визначника?
4. За якими ознаками можна дійти висновку, що визначник дорівнює нулю?
5. За якої умови збігаються мінор та алгебраїчне доповнення елемента матриці?
6. В який спосіб можна побудувати мінор третього порядку матриці вимірності 4×4 ?
7. Яким має бути визначник неоднорідної системи рівнянь, щоб ця система рівнянь мала єдиний розв'язок?
8. Які існують правила обчислювання визначників третього порядку?
9. Яким має бути визначник невиродженої матриці?
10. Чи може число 6 бути елементом одиничної матриці?
11. Чи може число 0 бути елементом діагональної матриці?
12. Елемент $a_{32} = -3$ є елементом симетричеської матриці. Назвіть ще один елемент цієї матриці.
13. Сума ненульових елементів одиничної матриці дорівнює 9. Запишіть цю матрицю.
14. Чи існує зв'язок між детермінантами одиничної та діагональної матриць IV порядку?
15. Що називається базисним мінором матриці?
16. Матриця A має 7 базисних рядків. Скільки у неї базисних стовпчиків?
17. Які рядки матриці називаються лінійно залежними?
18. Якщо один з рядків матриці дорівнює сумі двох інших рядків, то що можна сказати про ці три рядки?
19. Які системи рівнянь можна розв'язувати за правилом Крамера?
20. Які системи рівнянь можна розв'язувати матричним методом?
21. Які системи рівнянь можна розв'язувати методом Гаусса?
22. Обернена матриця утворюється методом повного вилучення невідомих. На певному етапі елемент a_{ii} , який мав стати провідним, виявився нулем. Яких заходів можна вжити, щоб продовжити пошук оберненої матриці?
23. Скільки фундаментальних систем розв'язків має однорідна система рівнянь?
24. Чи може система лінійних алгебраїчних рівнянь мати три розв'язки?
25. Які перетворення не змінюють рангу матриці?
26. Чи існує $\det A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}?$$

27. Чи існує A^T , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}?$$

28. У якому розумінні рядки та стовпчики матриці є рівноправними?

29. В який спосіб зміниться визначник n -го порядку, якщо всі його стовпчики записати в оберненому порядку?

30. Матриця називається трикутною, якщо усі її елементи, розміщені з одного боку діагоналі, дорівнюють нулю. Чому дорівнює детермінант цієї матриці?

31. Символ Кронекера задається в такий спосіб

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p = k; \\ 0, & \text{якщо } p \neq k. \end{cases}$$

Як за його допомогою записати одиничну матрицю?

32. Чи існує сума матриць вимірності 2×3 та 3×1 ?

33. Чи можна від однієї матриці відняти іншу? В який спосіб це можна зробити? Які умови повинні задовольняти матриці? Якою буде вимірність відмінної матриці?

34. Чи можна перемножити дві матриці вимірності 2×3 кожна?

35. Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Добуток $AB = C$, де $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Яку вимірність має матриця B ?

36. Нехай A – матриця-рядок, B – матриця-стовпчик. Якими мають бути A та B , якщо $AB = BA$ та для них існує добуток:

а) AB ;

б) BA ;

в) AB та BA ?

37. Що називається фундаментальною системою розв'язків однорідної системи рівнянь?

38. Як побудувати фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь?

39. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 17 & 9 & 18 \\ 7^{10} & 8 & -1 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7^{10} & 8 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 17 & 9 & 18 \end{vmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

1) $\Delta_1 = \Delta_2$; 2) $\Delta_1 = -\Delta_2$; 3) $\Delta_1 \neq \pm\Delta_2$; 4) інша відповідь?

$$2. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

1) $\Delta_1 = \Delta_2$; 2) $\Delta_1 = -\Delta_2$; 3) $\Delta_1 \neq \pm\Delta_2$; 4) інша відповідь?

$$3. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2i & i \\ 4 & i^5 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & i^2 \\ 5 & i \end{vmatrix}, \text{ де } i - \text{уявна одиниця. Яке з тверджень є}$$

справедливим:

1) $\Delta_1 < \Delta_2$; 2) $\Delta_1 = \Delta_2$; 3) Δ_1 та Δ_2 – непорівнянні; 4) інша відповідь?

$$4. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

1) $\Delta < 0$; 2) $\Delta = 0$; 3) $2\Delta - 3 = 125$; 4) інша відповідь?

$$5. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедли-}$$

вим:

1) $\Delta_1 < \Delta_2$; 2) $\Delta_1 = \Delta_2$; 3) Δ_1 та Δ_2 – непорівнянні; 4) інша відповідь?

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

1) $A = \det A$; 2) $A > \det A$; 3) A та $\det A$ – непорівнянні; 4) інша відповідь?

$$7. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}. C = A - B. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

1) $C = 1$; 2) C – не існує; 3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) інша відповідь?

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A^{-1} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$ 2) A^{-1} – не існує; 3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-2}{13} \end{pmatrix}$; 4) інша відповідь?

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 25 \end{pmatrix}$; 2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 25 \end{pmatrix}$; 3) $A \cdot B = -130$; 4) інша відповідь?

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $r(A) = r(B)$; 2) $r(A) < r(B)$; 3) $r(A)$ та $r(B)$ непорівнянні;
4) інша відповідь?

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $r(A) = r(B)$; 2) $r(A) = \frac{1}{10}r(B)$; 3) $r(A) > r(B)$; 4) інша відповідь?

12. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $M_{11} = M_{22}$; 2) $M_{11} < 2M_{22}$; 3) $M_{11} = 2M_{22}$; 4) інша відповідь?

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A_{11} = A_{22}$; 2) $A_{11} < A_{22}$; 3) $A_{11} = -4A_{22}$; 4) інша відповідь?

14. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A_{11} + A_{22} = 0$; 2) $A_{11} + A_{22} < 0$; 3) $A_{11} - A_{22} = 0$; 4) інша відповідь?

15. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\Delta = 0$; 2) $\Delta = 6$; 3) $\Delta = 54$; 4) інша відповідь?

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; $C = A \cdot B$, c_{23} – елемент цієї матриці.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $c_{23} = 21$; 2) $c_{23} = 22$; 3) $c_{23} = -6$; 4) інша відповідь?

$$17. A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}. C = AB, \text{ а } c_{33} - \text{ елемент цієї матриці.}$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) $c_{33} = -3$; 2) $c_{33} = 3$; 3) c_{33} – не існує; 4) інша відповідь?

$$18. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}; 2) A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}; 3) A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; 4) \text{ інша відповідь?}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

$$1) A^n = \begin{pmatrix} 1 & a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 2) A^n = \begin{pmatrix} n & na \\ 0 & n \end{pmatrix}; 3) A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 4) \text{ інша відповідь?}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

$$1) A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}; 2) A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 1 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}; 3) A^n = \begin{pmatrix} n\lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; 4) \text{ інша відповідь?}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

$$1) AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}; 2) AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}; 3) AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; 4) \text{ інша відповідь?}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

$$1) A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}; 2) A^n = \begin{pmatrix} n \cos \alpha & -n \sin \alpha \\ n \sin \alpha & n \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$3) A^n = \begin{pmatrix} \cos^n \alpha & -\sin^n \alpha \\ \sin^n \alpha & \cos^n \alpha \end{pmatrix}; 4) \text{ інша відповідь?}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6. \end{cases} \text{ Яке з тверджень є справедливим:}$$

при розв'язуванні системи методом Гаусса на першому етапі коефіцієнт a'_{22} дорівнює

1) -2; 2) -1; 3) 1; 4) інша відповідь?

24. Дано рівняння $\begin{vmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. $A = x_1 + x_2$, де $x_1; x_2$ корені цього

рівняння. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $A = 9$; 2) $A = -8$; 3) $A = -9$; 4) інша відповідь?

25. Дано рівняння $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$. $A = x_1 - 4x_2$, де $x_1; x_2$ корені цього рів-

няння, $(x_1 < x_2)$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $A = 0$; 2) $A = -5$; 3) $A = 5$; 4) інша відповідь?

26. Дано нерівність $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0$. Множина розв'язків належить

проміжку $[a; b]$. $A = b - a$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $A = 10$; 2) $A = 2$; 3) $A = -2$; 4) інша відповідь?

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Обчислити визначники:

$$\text{Задача № 1} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 2} \quad \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -25 & -60 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 3} \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 4} \quad \begin{vmatrix} \sin 12^\circ 4' & \cos 12^\circ 4' \\ -\cos 12^\circ 4' & \sin 12^\circ 4' \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 5} \quad \begin{vmatrix} \sin 17^\circ & -\cos 17^\circ \\ \sin 73^\circ & \cos 73^\circ \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 6} \quad \begin{vmatrix} \cos 22^\circ 30' & \sin 22^\circ 30' \\ \sin 22^\circ 30' & \cos 22^\circ 30' \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 7} \quad \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^3-b^3 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 8} \quad \begin{vmatrix} x^2-5x+6 & x-2 \\ x-3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Довести тотожність:

$$\text{Задача № 9} \quad \begin{vmatrix} \cos 2\alpha + \cos 5\alpha & 1 \\ \cos 3\alpha + \cos 4\alpha & 1 \end{vmatrix} = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos \frac{7\alpha}{2}.$$

$$\text{Задача № 10} \quad \begin{vmatrix} \sin(4\pi + \alpha) & \cos(\pi + \alpha) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \end{vmatrix}.$$

$$\text{Задача № 11} \quad \begin{vmatrix} \sin(\alpha + 4\pi) & \cos(\pi - \alpha) \\ -\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = -\cos 2\alpha.$$

$$\text{Задача № 12} \quad \begin{vmatrix} \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta & \operatorname{tg} 2\alpha \\ \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta & \operatorname{ctg} 3\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислити визначники, використовуючи

- 1) безпосередньо формулу (1.2);
- 2) правило трикутника;
- 3) дописування стовпчиків;
- 4) дописування рядків;
- 5) розкладання за елементами будь-якого рядка чи стовпчика;
- 6) утворювання нулів;
- 7) правило прямокутника.

Порівняти здобуті результати.

$$\text{Задача № 13} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \\ 9 & 30 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Задача № 14} \quad \begin{vmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 14 & -4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Задача № 15
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Перевірити справедливість властивостей визначників на заданих визначниках:

Задача № 16 $\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$. Задача № 17 $\begin{vmatrix} 12 & 4 & -5 \\ 1 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. Задача № 18 $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$

Обчислити визначник, використовуючи

- 1) розкладання за елементами будь-якого рядка або стовпчика;
- 2) утворення нулів;
- 3) правило прямокутника.

Порівняти здобуті результати.

Задача № 19
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Довести тотожність:

Задача № 20

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Задача № 21
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Задача № 22
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

Знайти суму матриць A та B у задачах № 23...№ 25

Задача № 23 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 24 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Задача № 25 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 26 Перевірити справедливості комутативного закону $A + B = B + A$ для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача № 27 Перевірити справедливості сполучного закону $(A + B) + C = A + (B + C)$ для матриць

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти лінійні комбінації матриць у задачах № 28... № 30

Задача № 28 $2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Задача № 29 $3A + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 30 $2A + 3B - C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$

Знайти добутки матриць AB та BA а також A^2 та B^2 у задачах № 31... № 33:

Задача № 31 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 32 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 33 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Знайти матрицю AB у задачах № 34...№ 36

Задача № 34 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 35 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 36 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Задача № 37 Знайти матрицю $C = A^2 + 2B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$

Задача № 38 Знайти матрицю $C = AB - BA$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 39 Знайти матрицю $C = (2A)(3B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 40 Знайти матрицю AE , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача № 41 Знайти матрицю EA , якщо $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$

Задача № 42 Довести, що добуток AB ненульових матриць $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ та

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ є нульова матриця $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 43 Знайти добуток матриць A та B , якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 44 Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти A^2, A^3, A^4, A^6 .

Задача № 45 Дано матрицю $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Довести, що $E^n = E$, де n – будь-яке натуральне число.

Знайти матрицю, обернену до заданої матриці, у задачах № 46...№ 63

Задача № 46 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **Задача № 47** $A = \begin{pmatrix} 7 & i^4 \\ i^{24} & 8 \end{pmatrix}$, де i уявна одиниця.

Задача № 48 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Задача № 49** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

Задача № 50 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. **Задача № 51** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача № 52 $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **Задача № 53** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача № 54 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Задача № 55** $A = 6 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача № 56 $A = B^2$, де $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **Задача № 57** $A = B^3$, де $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача № 58 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Задача № 59** $A = B^T$, де $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача № 60 $A = \begin{vmatrix} 5 & i^{280} & \ln e^5 \\ \operatorname{tg} 420\pi & \sin \frac{121\pi}{2} & \lg 0,01 \\ \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Задача № 61 $A = B + B^T$, де $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача № 62 $A = B + B^2$, де $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача № 63 $A = B + E + B^T$, де $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння у задачах № 64...№ 67

$$\text{Задача № 64} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \text{Задача № 65} \quad \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Задача № 66} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}. \quad \text{Задача № 67} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь у задачах № 68...№ 71

а) за правилом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\text{Задача № 68} \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases} \quad \text{Задача № 69} \quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -5; \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 13. \end{cases}$$

$$\text{Задача № 70} \quad \begin{cases} -7x_1 + 2x_3 = -7; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14; \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases} \quad \text{Задача № 71} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2; \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -4; \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = -5. \end{cases}$$

$$\text{Задача № 72} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Знайти ранг матриці у задачах № 73...№ 76

$$\text{Задача № 73} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Задача № 74} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Задача № 75} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}. \quad \text{Задача № 76} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дослідити на сумісність системи рівнянь і знайти їхні розв'язки в разі сумісності у задачах № 77...№ 79

$$\text{Задача № 77} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases} \quad \text{Задача № 78} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$$

$$\text{Задача № 79} \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 9; \\ 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 11. \end{cases}$$

Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь у задачах № 80...№ 83

$$\text{Задача № 80} \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Задача № 81} \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 - x_5 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задача № 82} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Задача № 83} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 0; \\ 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайти фундаментальні системи розв'язків та загальний розв'язок для однорідних систем рівнянь у задачах № 84...№ 87

$$\text{Задача № 84} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Задача № 85} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

$$\text{Задача № 86} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Задача № 87} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача № 88 Знайти таке значення λ , щоби система рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок.

Знайти загальні розв'язки неоднорідної системи рівнянь, користуючись відповідною однорідною системою рівнянь, у задачах № 89 та № 90

$$\text{Задача № 89} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Задача № 90} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

№ 1. 14. № 2. 0. № 3. 0. № 4. 1. № 5. 1. № 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. № 7. 0. № 8. 0. № 13. 0.

№ 14. 24. № 15. -400. № 19. 0. № 23. $A+B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. № 24. $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

№ 25. $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. № 28. $2A-3B = \begin{pmatrix} 19 & -18 & -7 \\ 6 & 3 & 14 \end{pmatrix}$. № 29. $3A+2B = \begin{pmatrix} 18 & -14 \\ 5 & 4 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$.

№ 30. $2A+3B-C = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -23 & 13 \end{pmatrix}$. № 31. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. № 32. $AB = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

$A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. № 33. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 \\ 1 & 9 & 13 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 24 \\ -4 & 12 & 35 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 16 \\ -1 & 4 & 6 \\ -5 & -1 & 13 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 10 \\ 16 & 17 & 44 \\ -2 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. № 34. $AB = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 35. $AB = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 12 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. № 36. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. № 37. $C = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 38. $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -7 \\ 6 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. № 39. $C = \begin{pmatrix} -24 & 24 \\ -12 & 42 \end{pmatrix}$. № 40. $AE = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

№ 41. $EA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. № 43. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. № 44. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 32 & 31 \\ 93 & 96 \end{pmatrix}$;

$A^4 = \begin{pmatrix} 157 & 156 \\ 468 & 469 \end{pmatrix}$; $A^6 = \begin{pmatrix} 3907 & 3906 \\ 11718 & 11719 \end{pmatrix}$. № 46. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$.

$$\text{№ 47. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{55} & \frac{-1}{55} \\ \frac{-1}{55} & \frac{7}{55} \end{pmatrix}. \text{ № 48. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ № 49. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & \frac{-11}{2} \\ \frac{43}{4} & \frac{-19}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 50. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & \frac{1}{50} \\ \frac{27}{100} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}. \text{ № 51. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{10}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}. \text{ № 52. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4376} & \frac{-2}{547} & \frac{145}{4376} \\ \frac{141}{8752} & \frac{53}{1094} & \frac{-287}{8752} \\ \frac{743}{17504} & \frac{31}{2188} & \frac{-333}{17504} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 53. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{39} \\ \frac{-5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{10}{39} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}. \text{ № 54. Не існує. № 55. Не існує. № 56. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{-8}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 57. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{500} & \frac{57}{1000} \\ \frac{19}{500} & \frac{-11}{1000} \end{pmatrix}. \text{ № 58. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{47}{44} & \frac{-37}{66} & \frac{-43}{132} \\ \frac{-45}{88} & \frac{19}{66} & \frac{29}{264} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}. \text{ № 59. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{22} & \frac{2}{11} & \frac{-3}{22} \\ \frac{17}{66} & \frac{-1}{33} & \frac{7}{66} \\ \frac{-2}{33} & \frac{8}{33} & \frac{5}{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 60. } A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}. \text{ № 61. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{-3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{-3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}. \text{ № 62. Не існує.}$$

$$\text{№ 63. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & \frac{-1}{3} & \frac{17}{150} \\ \frac{-1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{75} \end{pmatrix}. \text{ № 64. } X = \begin{pmatrix} \frac{13}{11} \\ \frac{8}{11} \\ \frac{-3}{11} \end{pmatrix}. \text{ № 65. } X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ № 66. } X = \begin{pmatrix} \frac{27}{7} \\ \frac{36}{7} \\ \frac{-16}{21} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 67. } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ № 68. } (16, 7). \text{ № 69. } (1, 0, 1). \text{ № 70. } (1, 2, 0). \text{ № 71. } (0, 1, 0, 1).$$

№ 72. $\left(\frac{7}{10}, \frac{12}{5}, \frac{31}{10}, \frac{-1}{5}\right)$. № 73. $r(A) = 2$. № 74. $r(A) = 4$. № 75. $r(A) = 2$.

№ 76. $r(A) = 2$. № 77. $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, система рівнянь несутісна.

№ 78. $r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) = 2$, сумісна $\begin{cases} x_1 = 11c_1 + 7c_2 - 4; \\ x_2 = 7c_1 + 4c_2; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2, \end{cases}$ де $c_1, c_2 \in R$.

№ 79. $r(A) = 3$, $r(\tilde{A}) = 3$, $x_1 = -\frac{38}{83}x_4 - \frac{99}{83}x_5 + \frac{335}{83}$, $x_2 = -\frac{175}{83}x_4 - \frac{30}{83}x_5 + \frac{182}{83}$,

$x_3 = -\frac{109}{83}x_4 + \frac{107}{83}x_5 + \frac{37}{83}$. № 80. $\Delta = 6 \neq 0$, $(0, 0, 0)$. № 81. $r(A) = 4$,

$\left(\frac{1}{2}c, \frac{5}{6}c, -\frac{4}{3}c, c, 0\right)$, де $c \in R$. № 82. $\Delta = -56 \neq 0$, $(0, 0, 0)$. № 83. $r = 3$, $(0, 0, 0)$.

№ 84. Загальний розв'язок: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3; \\ x_2 = -\frac{4}{3}x_3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}c; \\ x_2 = -\frac{4}{3}c; \\ x_3 = c, \end{cases}$ де $c \in R$.

№ 85. Загальний розв'язок: $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$ або $\begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 - c_3; \\ x_2 = c_1; \\ x_3 = c_2; \\ x_4 = c_3, \end{cases}$ де $c \in R$.

№ 86. Загальний розв'язок: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - x_4; \\ x_2 = -\frac{4}{3}x_3 - x_4 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}c_1 - c_2; \\ x_2 = -\frac{4}{3}c_1 - c_2; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2, \end{cases}$ де $c_1, c_2 \in R$.

№ 87. Загальний розв'язок: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4; \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}c_1 + \frac{2}{9}c_2; \\ x_2 = -\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2, \end{cases}$ де $c_1, c_2 \in R$.

№ 88. $r(A)=2$; $r(B)=2$, якщо $\lambda=5$. **№ 89.** Загальний розв'язок однорідної системи рівнянь: $(x_1, x_2, x_3, 5x_1+x_2-x_3, 3x_1)$. Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь: $(x_1, x_2, x_3, 5x_1+x_2-x_3-2, 3x_1-1)$. **№ 90.** Загальний розв'язок однорідної системи рівнянь: $(x_2-x_3, x_2, x_3, x_4, x_5, -x_4+x_5)$. Частинний розв'язок неоднорідної системи рівнянь: $\left(\frac{5}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3}, 0, 0\right)$. Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь: $\left(x_2-x_3+\frac{2}{3}, x_2, x_3, x_4, x_5, -\frac{1}{3}-x_4+x_5\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.,** Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. – Ч. І. – Одеса, 2010.
2. **Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.,** Вища математика в телекомунікаціях. – Ч. І. – Одеса, 2009.
3. **Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.** Вища математика. – К.: Техніка, 2000. Ч. І. – 600 с.; Ч. II. – 792 с.
4. **Костарчук В. М., Хацет Б. І.** Курс вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1969. – 540 с.
5. **Фільчаков П. Ф.** Довідник з вищої математики. – К.: Наукова думка, 1973. – 743 с.
6. **Богомолів М. В.** Практичні заняття з математики. – К.: Вища школа, 2007. – 495 с.
7. **Овчинников П. П.** Вища математика. – К.: Техніка, 2003. Ч. І. – 700 с.
8. **Вища математика:** Збірник задач у двох частинах. За заг. ред. П. П. Овчинникова. – 2-ге вид. Стереот. – К.: Техніка, 2004. Ч. І. – 280 с.

Віддруковано з готового
оригінал-макету у ФОП Бєлий А.Є
Наклад 100 примірників,
м. Одеса, пр-т Добровольського, 128/44,
тел.: (068)276-54-30