

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний гуманітарний університет

Кафедра інформаційних технологій

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

Векторна алгебра

для фахівців ІТ-галузі

*Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти,
які навчаються за спеціальностями
галузі 12 Інформаційні технології*

Одеса 2022

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Векторна алгебра для фахівців ІТ-галузі. Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти, які навчаються за спеціальностями галузі 12 Інформаційні технології. Кафедра інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету. Одеса: МГУ, 2022. 91 с.

У навчальному посібнику розглядаються основні поняття та методи векторної алгебри, зокрема операції над векторами, їх властивості та способи застосування при розв'язуванні геометричних і прикладних задач. Значну увагу приділено використанню векторного апарату в задачах аналітичної геометрії та технічних розрахунках.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1 ВЕКТОРИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

В и з н а ч е н н я. *Вектором* називається напрямлений відрізок прямої.

Вектори зображуються у вигляді відрізків зі стрілками, які показують напрямок вектора. Позначаються вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, ... або $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... (рис. 1.1).

В и з н а ч е н н я. Довжина напрямленого відрізка називається *модулем* вектора.

В и з н а ч е н н я. Вектор, початок та кінець якого збігаються, називається *нульовим* вектором і позначається $\vec{0}$.

В и з н а ч е н н я. Вектор, модуль якого дорівнює одиниці довжини, називається *одиничним* вектором або *ортом* і позначається $\vec{e}$, де $|\vec{e}| = 1$.

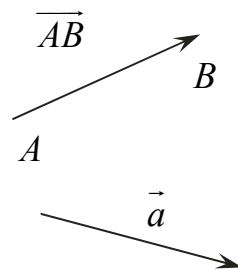


Рисунок 1.1

В и з н а ч е н н я. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *рівними* між собою, якщо вони мають рівні модулі та однакові напрямки ($\vec{a} = \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$).

З визначення рівності векторів виходить, що за паралельного перенесення вектора дістають вектор, дорівнюваний даному.

В и з н а ч е н н я. Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони мають рівні модулі та протилежні напрямки.

В и з н а ч е н н я. Два вектори називаються *колінеарними*, якщо їх розміщено на паралельних прямих або на одній прямій.

В и з н а ч е н н я. Три вектори називаються *компланарними*, якщо їх розміщено на прямих, паралельних до однієї площини.

Будемо вважати, що:

- 1) нульовий вектор є колінеарним до будь-якого вектора;
- 2) нульовий вектор та які завгодно два вектори є компланарними;
- 3) нульовий вектор водночас є однаково напрямленим та протилежно напрямленим до якого завгодно іншого вектора.

2 ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1 Додавання векторів

В и з н а ч е н н я. *Сумою векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається такий вектор $\vec{a}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}_1$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{a}_n$, якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ утворюють ламану, в якій кінець попереднього вектора збігається з початком наступного вектора (рис. 2.1).

Для додавання двох векторів використовуються правило трикутника та правило паралелограма.

П р а в и л о т р и к у т н и к а

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є такий вектор $\vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, якщо початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2 а).

П р а в и л о п а р а л е л о г р а м а

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які мають спільний початок, є вектор, розміщений на тій діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах, яка має з ними спільний початок (рис. 2.2 б).

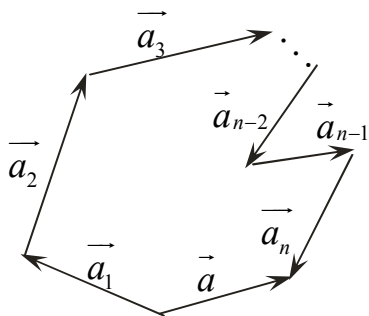


Рисунок 2.1
Додавання n векторів

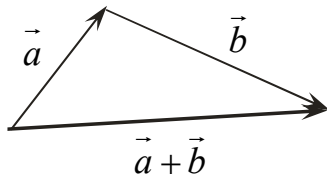


Рисунок 2.2 а
Додавання векторів за
правилом трикутника

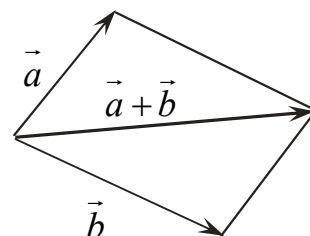


Рисунок 2.2 б
Додавання векторів за
правилом паралелограма

2.2 Віднімання векторів

В и з н а ч е н н я. **Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$** – називається такий вектор, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Віднімання векторів можна виконувати за так званими правилом трикутника або правилом паралелограма.

П р а в и л о т р и к у т н и к а

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є вектор, який сполучує кінець від'ємника з кінцем зменшуваного і напрямлений у бік зменшуваного, якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають спільний початок (рис. 2.3).

П р а в и л о п а р а л е л о г р а м а

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які мають спільний початок, є вектор, розміщений на тій діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах, яка з'єднує їхні кінці, і напрямлений у бік зменшуваного (рис. 2.4).

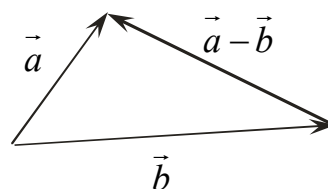


Рисунок 2.3 – Відніман-
ня векторів за правилом
трикутника

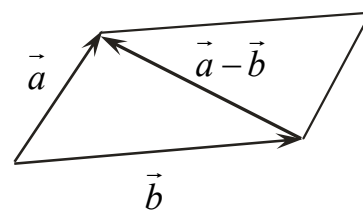


Рисунок 2.4 – Відніман-
ня векторів за правилом
паралелограма

2.3 Множення вектора на число

Визначення. Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається такий вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, який має той самий напрямок, що і вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, та протилежний напрямок, якщо $\lambda < 0$, до того ж

$$|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|.$$

Такі операції над векторами, як додавання, віднімання векторів та множення вектора на число, називаються **лінійними операціями над векторами**.

2.4 Властивості лінійних операцій над векторами

1. Додавання векторів є **комутативне**, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедлива рівність

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2.1)$$

2. Додавання векторів є **асоціативне**, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедлива рівність

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (2.2)$$

3. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \quad (2.3)$$

Це так звана **властивість поглинання нульового вектора**.

4. Для будь-якого числа λ справедлива рівність

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}. \quad (2.4)$$

5. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$0 \vec{a} = \vec{0}. \quad (2.5)$$

6. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad (2.6)$$

тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує **протилежний** вектор $(-\vec{a})$.

7. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \quad (2.7)$$

8. Додавання векторів є **дистрибутивним відносно множення на число**, тобто для будь-якого числа λ та будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедлива рівність

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}. \quad (2.8)$$

9. Додавання векторів є **дистрибутивним відносно множення на вектор**, тобто для будь-яких чисел λ та μ та будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}. \quad (2.9)$$

10. Множення вектора на число є **асоціативним** відносно числового множника, тобто для будь-яких чисел λ та μ та будь-якого вектора $\vec{a}$ справедлива рівність

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}. \quad (2.10)$$

11. **Необхідна та достатня умова колінеарності векторів.** Для того, щоб два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарні, необхідно й достатньо, щоб існувало таке дійсне число λ , що $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарні і $\vec{a} \neq 0$, то число λ , яке задовольняє умову $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, називається відношенням векторів $\vec{b}$ та $\vec{a}$. При цьому λ є числом додатним, якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є співнапрямлені, і від'ємним, якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є протилежно напрямлені.

Для неколінеарних векторів поняття відношення векторів не існує.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливості властивостей 1...11.

2.5 Приклади

Приклад 2.1 Задано паралелограм $A_1A_2A_3A_4$. Діагоналі паралелограма перетинаються у точці O . Точки M_1 та M_2 є відповідно серединами сторін A_2A_3 та A_1A_4 (рис. 2.5). Побудувати такі вектори:

1) $\vec{OA_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{OA_2}$; 2) $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2M_1} + \vec{OM_2} + \vec{A_3A_4}$.

Розв'язання

1) За правилом трикутника сумою векторів $\vec{OA_3}$ та $\vec{A_3A_4}$ є вектор $\vec{OA_4}$. Вектори $\vec{OA_4}$ та $\vec{OA_2}$ мають однакові модулі, тобто $|\vec{OA_4}| = |\vec{OA_2}|$ і протилежно напрямлені. Отже, $\vec{OA_4} = -\vec{OA_2}$. Тоді $\vec{OA_4} + \vec{OA_2} = -\vec{OA_2} + \vec{OA_2} = \vec{0}$.

Отже, $\vec{OA_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{OA_2} = (\vec{OA_3} + \vec{A_3A_4}) + \vec{OA_2} = \vec{OA_4} + \vec{OA_2} = \vec{0}$ (рис. 2.5).

2) За правилом трикутника, сумою векторів $\vec{A_1A_2}$ та $\vec{A_2M_1}$ є вектор $\vec{A_1M_1}$. Далі знайдемо суму векторів $\vec{A_1M_1}$ та $\vec{A_3A_4}$:

$$\vec{A_1M_1} + \vec{A_3A_4} = \vec{A_1M_1} + \vec{M_1M_2} = \vec{A_1M_2}.$$

Тепер відбудуємо вектор $\vec{OM_1}$ від точки A_1 . Отже, $\vec{OM_1} = \vec{A_1M_3}$, де

M_3 – середина відрізка A_1A_2 . Тоді $\vec{A_1M_2} + \vec{OM_2} = \vec{A_1M_2} - \vec{A_1M_3} = \vec{M_3M_2} = \vec{OA_4}$ (рис. 2.6).

В і д п о в і д ь: 1) $\vec{OA_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{OA_2} = \vec{0}$; 2) $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2M_1} + \vec{OM_2} + \vec{A_3A_4} = \vec{OA_4}$.

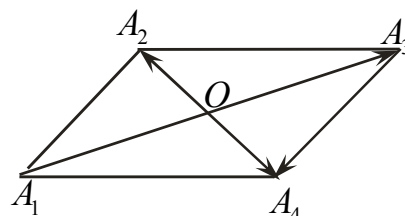


Рисунок 2.5

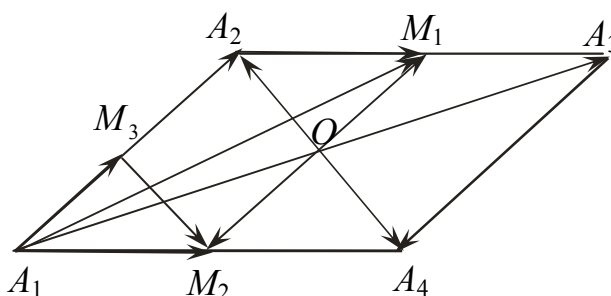


Рисунок 2.6

Приклад 2.2 На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ як на сторонах побудовано паралелепіпед. Виразити через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, діагоналі паралелепіпеда, бічних граней та основи, які мають спільний початок з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

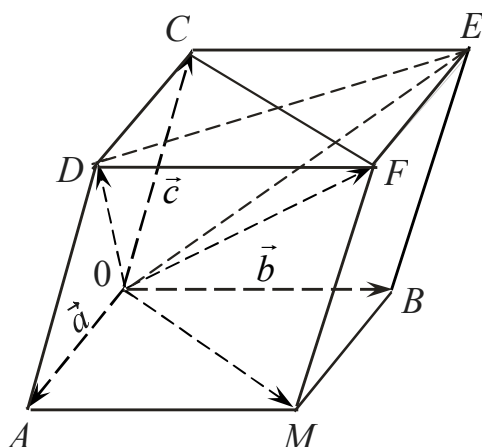


Рисунок 2.7

Розв'язання

Розглянемо паралелограм $OBMA$, який лежить в основі паралелепіпеда (рис. 2.7).

Нехай $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тоді

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Бічні грані подано паралелограмами, $OADC$ та $OBEC$. Отже, за правилом паралелограма маємо

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Розглянемо паралелограм $OMFC$. Вочевидь,

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

В і д п о в і д ь: $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OE} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Приклад 2.3 На векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах побудовано паралелограм. Перевірити геометрично, чи є правильною рівність

$$(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}.$$

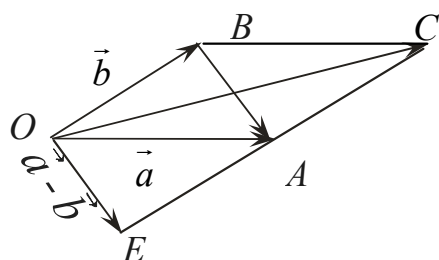


Рисунок 2.8

Розв'язання

На векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах побудуємо паралелограм $OACB$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}; \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

За правилом паралелограма маємо $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$; $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Від точки O побудуємо вектор $\overrightarrow{OE} = \vec{a} - \vec{b}$. Внаслідок такої побудови

дістали трикутник OEC .

За правилом трикутника, маємо $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EC}$, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = \overrightarrow{EC}.$$

Оскільки чотирикутник $OEAB$ – паралелограм за побудовою, то $|AE| = |BO| = |CA|$, отже, вектор $\overrightarrow{EC} = 2\vec{b}$. Тобто $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$.

Приклад 2.4 На прямій L розміщено точки $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{10}$ в такий спосіб, що $|M_1M_2| = |M_2M_3| = \dots = |M_9M_{10}|$. Знайти відношення векторів:

1) $\overrightarrow{M_8M_4} : \overrightarrow{M_{10}M_3}$; 2) $\overrightarrow{M_1M_5} : \overrightarrow{M_5M_3}$.

Розв'язання

Вважаємо за масштабну одиницю відрізок $|M_1M_2|$. Тоді

$$|M_8M_4| = 4|M_1M_2|; \quad |M_{10}M_3| = 7|M_1M_2|; \quad |M_1M_5| = 4|M_1M_2|; \quad |M_5M_3| = 2|M_1M_2|.$$

Вектори $\overrightarrow{M_8M_4}$ та $\overrightarrow{M_{10}M_3}$ співнаправлені. Отже, їхнє відношення буде таким:

$$\frac{\overrightarrow{M_8M_4}}{\overrightarrow{M_{10}M_3}} = \frac{4|M_1M_2|}{7|M_1M_2|} = \frac{4}{7}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_5}$ та $\overrightarrow{M_5M_3}$ є протилежно напрямлені. Отже, їхнє відношення матиме вигляд

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_5}}{\overrightarrow{M_5M_3}} = -\frac{4|M_1M_2|}{2|M_1M_2|} = -2.$$

В і д п о в і д ь: 1) $\frac{4}{7}$; 2) -2 .

Приклад 2.5 З'ясувати, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{m_1} = \vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}$ та $\overrightarrow{m_2} = \sqrt{2}\vec{p} - 4\vec{q} + 2\sqrt{3}\vec{r}$.

Р о з в ' я з а н н я

Перевіримо, чи існує відношення векторів $\overrightarrow{m_1}$ та $\overrightarrow{m_2}$:

$$\frac{\overrightarrow{m_1}}{\overrightarrow{m_2}} = \frac{\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}}{\sqrt{2}\vec{p} - 4\vec{q} + 2\sqrt{3}\vec{r}} = \frac{\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r}}{\sqrt{2}(\vec{p} - 2\sqrt{2}\vec{q} + \sqrt{6}\vec{r})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{m_1}$ та $\overrightarrow{m_2}$ колінеарні і, до того ж, співнаправлені.

3 ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

3.1 Проекція вектора на вісь

В и з н а ч е н н я. *Віссю* називається пряма, на якій задано одиничний вектор і точку, яка визначає початок відліку.

Одиничний вектор $\vec{e}$ та точка O однозначно визначають вісь ℓ .

В и з н а ч е н н я. *Алгебраїчною прямокутною проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь ℓ називається число, що дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на осі ℓ , який знаходиться між основами перпендикулярів, опущених з точок A та B на вісь ℓ . Це число береться зі знаком плюс, якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ збігається з напрямком осі ℓ , і зі знаком мінус – у протилежному разі (рис. 3.1).

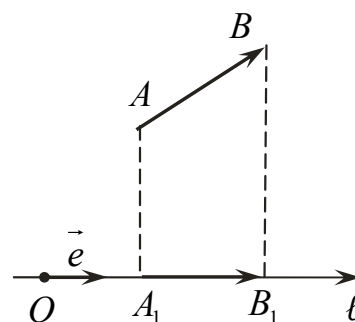


Рисунок 3.1

Позначення проекції: $\text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$.

В и з н а ч е н н я. *Кутом між віссю та вектором* називається кут між двома променями, які виходять з однієї точки, якщо напрямком одного променя збігається з напрямком осі, а напрямком другого променя – з напрямком вектора (рис. 3.2).

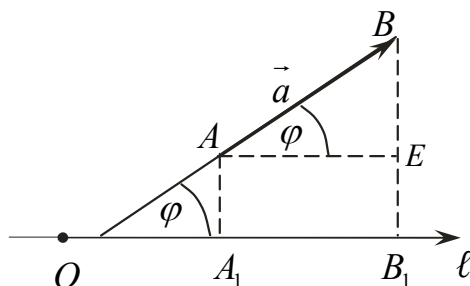


Рисунок 3.2 – Кут між віссю та вектором

3.2 Властивості проекції вектора на вісь

Теорема 1 Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь ℓ дорівнює добуткові модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута нахилу вектора $\vec{a}$ до осі ℓ .

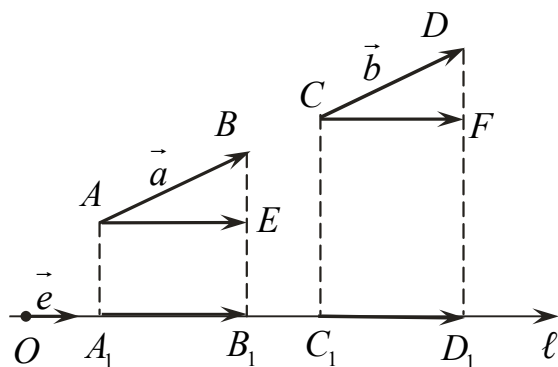
Д о в е д е н н я

За умовою, $\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 3.2). Побудуємо пряму AE , паралельну до осі ℓ . З прямокутного трикутника ABE маємо: $|AE| = |\vec{a}| \cos \varphi$. Фігура A_1AEB_1 є прямокутником, тому $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$. Виходить, що

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (3.1)$$

При цьому,

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\vec{a}| \cos \varphi, \text{ якщо } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{пр}_\ell \vec{a} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -|\vec{a}| \cos \varphi, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$



Рисунки 3.3

Теорема 2 Якщо вектори є рівними між собою, то рівні між собою й їхні проекції на одну вісь.

Д о в е д е н н я

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, які є рівними між собою (рис. 3.3). З рівності векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ виходить, що

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|.$$

Побудуємо допоміжні прямі AE та CF , паралельні до осі ℓ . Прямокутні трикутники $\triangle ABE$ та $\triangle CDF$ є рівними між собою за гіпотенузою та гострим кутом. Тоді $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{CF}|$.

Фігури A_1AEB_1 та C_1CFD_1 є прямокутниками. Отже, $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $|\overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{C_1D_1}|$. Оскільки $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{CF}|$, то $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{C_1D_1}|$ або $\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_\ell \vec{b}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є співнапрямлені і їхні проекції на вісь рівні за модулем та за знаком.

Теорема 3 Проекція суми векторів на вісь ℓ дорівнює сумі проекцій векторів на вісь ℓ .

Д о в е д е н н я

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

За умовою, $\text{пр}_\ell \vec{a} = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_\ell \vec{b} = \text{пр}_\ell \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{B_1C_1}|$ (рис. 3.4).

Побудуємо вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \text{пр}_\ell(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= \pm |\overrightarrow{A_1C_1}| \quad \text{та} \\ \text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{пр}_\ell \overrightarrow{BC} &= \pm |\overrightarrow{A_1B_1}| + (\pm |\overrightarrow{B_1C_1}|). \end{aligned}$$

Залежно від взаємного розміщення точок A_1, B_1, C_1 , можливі випадки, які зображено на рис. 3.4.

У першому випадку (рис. 3.4 а) маємо

$$\begin{aligned} \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b} &= \text{пр}_\ell \overrightarrow{AB} + \text{пр}_\ell \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{A_1B_1}| + |\overrightarrow{B_1C_1}| = \\ &= |\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}). \end{aligned}$$

У другому випадку (рис. 3.4 б) маємо

$$\begin{aligned} \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b} &= |\overrightarrow{A_1B_1}| - |\overrightarrow{B_1C_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AC} = \\ &= |\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}). \end{aligned}$$

У третьому випадку (рис. 3.4 в) маємо

$$\begin{aligned} \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b} &= -|\overrightarrow{A_1B_1}| + |\overrightarrow{B_1C_1}| = -|\overrightarrow{A_1C_1}| = \\ &= \text{пр}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}). \end{aligned}$$

У четвертому випадку (рис. 3.4 г) маємо

$$\text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| - |\overrightarrow{B_1C_1}| = -|\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_\ell \overrightarrow{AC} = \text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}).$$

Отже, доведено, що

$$\text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b}. \quad (3.2)$$

Теорема 4 При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція на вісь ℓ також множиться на число λ .

Д о в е д е н н я

Побудуємо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ та $\lambda \vec{a} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 3.5). Тоді $\text{пр}_\ell \vec{a} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$; $\text{пр}_\ell(\lambda \vec{a}) = \pm |\overrightarrow{A_1C_1}|$.

За умовою,

$$\frac{\pm |\overrightarrow{AC}|}{\pm |\overrightarrow{AB}|} = \lambda.$$

Тоді, за теоремою Фалеса, маємо

$$\frac{\pm |\overrightarrow{A_1C_1}|}{\pm |\overrightarrow{A_1B_1}|} = \lambda$$

або

$$\pm |\overrightarrow{A_1C_1}| = \pm \lambda |\overrightarrow{A_1B_1}|.$$

Остаточнo маємо

$$\text{пр}_\ell(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_\ell \vec{a}.$$

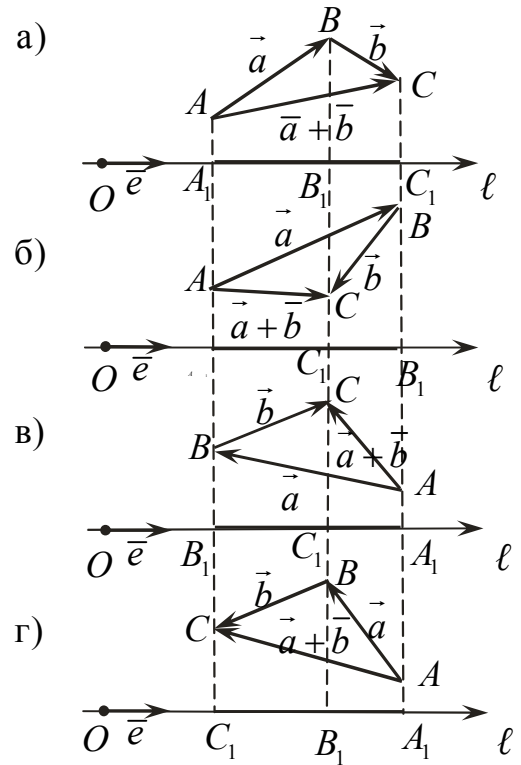


Рисунок 3.4 – Проекції суми векторів

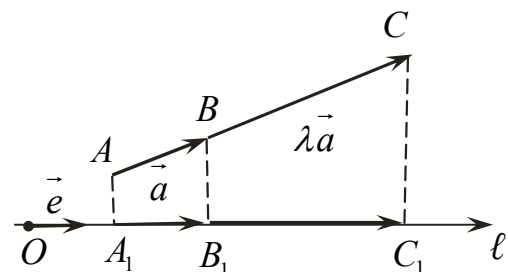


Рисунок 3.5

3.3 Приклади

Приклад 3.1 Вектор $\vec{a}$ з віссю Ox утворює кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 7$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на осі Ox та Oy .

Розв'язання

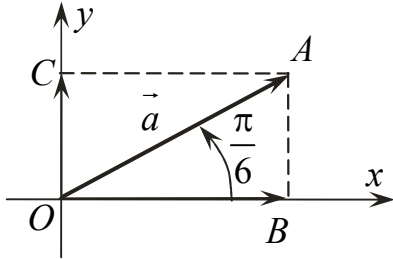


Рисунок 3.6

Нехай вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.6). З прямокутного трикутника OBA маємо

$$\text{пр}_{Ox} \overrightarrow{OA} = |OB| = |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} \sqrt{3};$$

$$\begin{aligned} \text{пр}_{Oy} \overrightarrow{OA} &= |OC| = |\overrightarrow{OA}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = |\overrightarrow{OA}| \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{7}{2} \sqrt{3}, \frac{7}{2}$.

Приклад 3.2 Задано проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox та Oy : $\text{пр}_{Ox} \vec{a} = 1$; $\text{пр}_{Oy} \vec{a} = -\sqrt{3}$. Вісь ℓ з віссю Ox утворює кут $\psi = \frac{2\pi}{3}$. Знайти $\text{пр}_{\ell} \vec{a}$.

Розв'язання

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.7). Згідно з умовою

$|\vec{a}| \cos \varphi = 1$, $|\vec{a}| \sin \varphi = -\sqrt{3}$, де φ – кут між віссю Ox та вектором $\vec{a}$. Звідси ма-

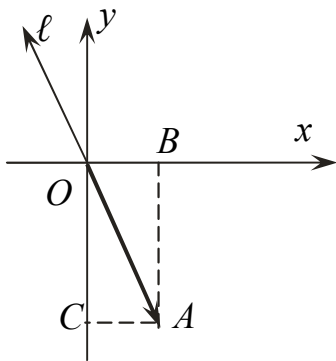


Рисунок 3.7

$$\text{ємо: } \frac{|\vec{a}| \sin \varphi}{|\vec{a}| \cos \varphi} = \frac{-\sqrt{3}}{1} \text{ або } \text{tg} \varphi = -\sqrt{3}. \text{ Тоді } \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Вісь ℓ з віссю Ox утворює кут $\psi = \frac{2\pi}{3}$. З вектором $\overrightarrow{OA}$ у такому разі вісь ℓ утворює кут $\theta = \pi$. Тоді

$$\text{пр}_{\ell} \vec{a} = -|\overrightarrow{OA}| = -|\vec{a}|.$$

$$\text{Знайдемо } |\vec{a}| \text{ з рівності } |\vec{a}| \cos \frac{\pi}{3} = 1. \quad |\vec{a}| = 2.$$

$$\text{Виходить, що } \text{пр}_{\ell} \vec{a} = -|\overrightarrow{OA}| = -2.$$

Відповідь: $\text{пр}_{\ell} \vec{a} = -2$.

Приклад 3.3 Задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та вісь ℓ . Відомо, що $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 5\sqrt{3}$; $(\ell, \vec{a}) = 30^\circ$; $(\ell, \vec{b}) = 60^\circ$; вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ розміщено по різні боки від осі ℓ . Знайти величину кута між вектором $\vec{a} + \vec{b}$ та віссю ℓ .

Розв'язання

Використовуючи правило паралелограма для додавання векторів, побудуємо вектор $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 3.8).

$$\begin{aligned} \text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b} = |\vec{a}| \cos(\ell, \vec{a}) + \\ &+ |\vec{b}| \cos(\ell, \vec{b}) = 5 \cos 30^\circ + 5\sqrt{3} \cos 60^\circ = \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Водночас

$$\text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}| \cos \angle EOC.$$

Знайдемо $|\vec{a} + \vec{b}|$ як довжину діагоналі паралелограма $OACB$:

$$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Отже, паралелограм $OACB$ є прямокутником. За теоремою Піфагора, з трикутника $\triangle OBC$ маємо

$$|\vec{OC}| = \sqrt{|\vec{OB}|^2 + |\vec{BC}|^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Тоді

$$\cos \angle EOC = \frac{\text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а сам кут між вектором $\vec{a} + \vec{b}$ та віссю ℓ дорівнює 30° .

В і д п о в і д ь: 30° .

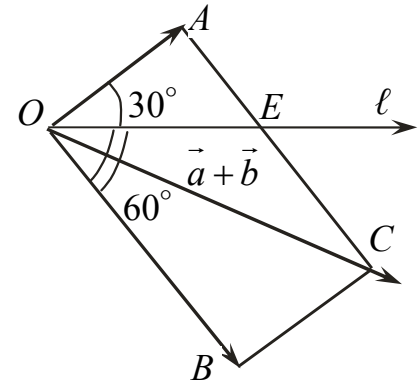


Рисунок 3.8

4 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ТА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ

4.1 Визначення лінійно залежних та лінійно незалежних векторів

Визначення. *Лінійною комбінацією векторів* $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ називається вектор $\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_n \vec{\ell}_n$, де λ_k , $k=1, 2, \dots, n$, – які завгодно числа, називані коефіцієнтами лінійної комбінації.

Визначення. Вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існує така сукупність коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, серед яких хоча б один відрізняється від нуля, що відповідна лінійна комбінація векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{\ell}_k = \vec{0}, \text{ де } \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \neq 0. \quad (4.1)$$

Визначення. Вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нулю їхньої лінійної комбінації є можливою лише за умови, що всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{\ell}_k = \vec{0}, \text{ де } \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 0. \quad (4.2)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Рівність $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 0$ є еквівалентна до рівності $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

4.2 Властивості лінійно залежних векторів

Теорема 1 Якщо хоча б один з векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ є нульовим, то такі вектори є лінійно залежними.

Д о в е д е н н я

Не зменшуючи спільності, припустимо, що $\vec{\ell}_1 = \vec{0}$. Складемо лінійну комбінацію заданих векторів з коефіцієнтами $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$: $\lambda_1 \vec{\ell}_1 + 0 \vec{\ell}_2 + \dots + 0 \vec{\ell}_n$. Тоді, вочевидь, що $\lambda_1 \vec{0} + 0 \vec{\ell}_2 + 0 \vec{\ell}_3 + \dots + 0 \vec{\ell}_n = \vec{0}$. Оскільки $\lambda_1 \neq 0$, вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ – лінійно залежні.

Теорема 2 Якщо серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ є p лінійно залежних векторів ($p \leq n$), то і вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ також є лінійно залежними.

Д о в е д е н н я

Не зменшуючи спільності, припустимо, що вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_p$ є лінійно залежними, тобто $\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_p \vec{\ell}_p = \vec{0}$, де $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \neq 0$. Складемо лінійну комбінацію векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$:

$$\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_p \vec{\ell}_p + 0 \vec{\ell}_{p+1} + 0 \vec{\ell}_{p+2} + \dots + 0 \vec{\ell}_n.$$

Матимемо $(\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_p \vec{\ell}_p) + 0 \vec{\ell}_{p+1} + 0 \vec{\ell}_{p+2} + \dots + 0 \vec{\ell}_n = \vec{0}$.

У цій лінійній комбінації векторів, згідно з умовою, є хоча б один коефіцієнт, який відрізняється від нуля, а це означає, що вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ є лінійно залежними.

Теорема 3 Якщо серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ один з векторів є лінійною комбінацією решти векторів, то вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ є лінійно залежні.

Д о в е д е н н я

Нехай $\vec{\ell}_n = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{\ell}_{n-1}$. Тоді маємо

$$\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{\ell}_{n-1} + (-1) \vec{\ell}_n = \vec{0}.$$

Оскільки у цій нульовій лінійній комбінації є коефіцієнт $\lambda_n = -1 \neq 0$, то це означає, що вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_n$ лінійно залежні.

Теорема 4 (необхідна та достатня умова лінійної залежності двох векторів). Для того, щоб два вектори були лінійно залежними, необхідно та достатньо, щоб вони були колінеарними.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ – лінійно залежні вектори. Доведемо, що вони колінеарні.

Згідно з умовою, $\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 = \vec{0}$, де хоча б один з коефіцієнтів відрізняється від нуля. Нехай $\lambda_1 \neq 0$. Тоді, $\vec{\ell}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{\ell}_2$. Позначимо $k = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Звідси $\vec{\ell}_1 = k \vec{\ell}_2$, що і доводить колінеарність векторів $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ – колінеарні вектори. Доведемо, що вони лінійно залежні.

Згідно з умовою, вектор $\vec{\ell}_1$ є колінеарний до вектора $\vec{\ell}_2$, отже, існує таке число $k \neq 0$, що $\vec{\ell}_1 = k \vec{\ell}_2$ або $1 \cdot \vec{\ell}_1 + (-k) \vec{\ell}_2 = \vec{0}$. Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ є лінійно залежними.

В и с н о в о к. Для того щоб два вектори були колінеарними, необхідно та достатньо, щоб вони були лінійно залежними.

Теорема 5 (необхідна та достатня умова лінійної залежності трьох векторів). Для того, щоб три вектори були лінійно залежними, необхідно та достатньо, щоб вони були компланарними.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ є лінійно залежними. Доведемо, що вони компланарні.

Згідно з умовою, $\lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3 = \vec{0}$, де $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \neq 0$.

Припустимо, що $\lambda_3 \neq 0$, тоді $\vec{\ell}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{\ell}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{\ell}_2$. Позначимо $k_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, $k_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Тоді $\vec{\ell}_3 = k_1 \vec{\ell}_1 + k_2 \vec{\ell}_2$. Остання рівність свідчить про те, що вектор $\vec{\ell}_3$

як сума векторів $k_1 \vec{\ell}_1$ та $k_2 \vec{\ell}_2$ збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $k_1 \vec{\ell}_1$ та $k_2 \vec{\ell}_2$ як на сторонах. Оскільки вектори $k_1 \vec{\ell}_1$ та $k_2 \vec{\ell}_2$ є колінеарними відповідно до векторів $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$, вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ належать до однієї площини, тобто є компланарними.

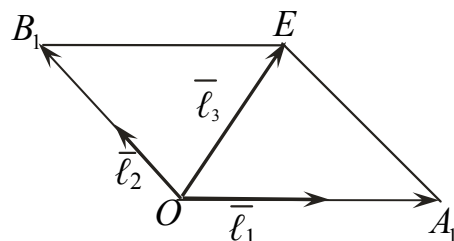


Рисунок 4.1

Д о с т а т н і с т ь. Нехай вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ є компланарними. Доведемо, що вони є лінійно залежними.

Якщо серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ є колінеарні, то за теоремою 2 вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ є лінійно залежними.

Тепер вважаємо, що серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ немає колінеарних. Відбудуємо ці вектори з однієї точки (рис. 4.1). З кінця вектора $\vec{\ell}_3$ проведемо прямі, паралельні відповідно до векторів $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$. Внаслідок такої побудови дістанемо паралелограм OA_1EB_1 . Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ є колінеарним до вектора $\vec{\ell}_1$, вектор $\overrightarrow{OB_1}$ є колінеарним до вектора $\vec{\ell}_2$. Тоді існують такі числа k_1, k_2 , за яких $\overrightarrow{OA_1} = k_1 \vec{\ell}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = k_2 \vec{\ell}_2$. Звідси $\vec{\ell}_3 = k_1 \vec{\ell}_1 + k_2 \vec{\ell}_2$ або $k_1 \vec{\ell}_1 + k_2 \vec{\ell}_2 + (-1) \vec{\ell}_3 = \vec{0}$, що й доводить лінійну залежність векторів.

В и с н о в о к 1. Для того щоб три вектори були лінійно незалежними, необхідно та достатньо, щоби вони були некомпланарними.

В и с н о в о к 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів.

В и с н о в о к 3. Для того щоб вектори були компланарними, необхідно та достатньо, щоби вони були лінійно залежними.

Теорема 6 Будь-які чотири вектори є лінійно залежними.

Д о в е д е н н я

Нехай серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ є три компланарні вектори. Тоді за теоремою 2 вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ є лінійно залежними. Тепер вважаємо, що серед векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ немає компланарних.

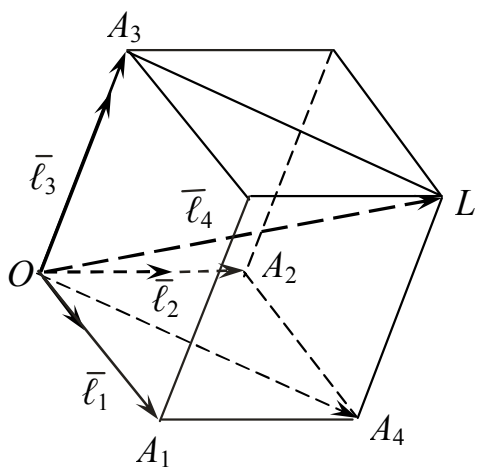


Рисунок 4.2

Нехай вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ виходять з однієї точки O (рис. 4.2).

Побудуємо такий паралелепіпед, для якого точка O є однією з вершин, а відрізок OL — однією з діагоналей, і при цьому $\overrightarrow{OL} = \vec{\ell}_4$. В основі паралелепіпеда лежить паралелограм $OA_1A_4A_2$ такий, що на відрізку OA_1 розміщено вектор $\vec{\ell}_1$, на відрізку OA_2 розміщено вектор $\vec{\ell}_2$, а на відрізку OA_3 розміщено вектор $\vec{\ell}_3$. Отже, вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ є паралельними відповідно до сторін OA_1, OA_2, OA_3 паралелепіпеда. З умови колінеарності векторів $\vec{\ell}_1$ та $\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{\ell}_2$ та

$\overrightarrow{OA_2}$, $\vec{\ell}_3$ та $\overrightarrow{OA_3}$ виходить, що існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, які задовольняють рівності $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1 \vec{\ell}_1$; $\overrightarrow{OA_2} = \lambda_2 \vec{\ell}_2$; $\overrightarrow{OA_3} = \lambda_3 \vec{\ell}_3$.

Розглянемо паралелограм $OA_1A_4A_2$. Вочевидь, що $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$.

Розглянемо тепер паралелограм OA_4LA_3 . Звідси маємо $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_3}$.
Зважаючи на попередню рівність, доходимо висновку, що

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

або

$$\vec{\ell}_4 = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3.$$

Отже, вектор $\vec{\ell}_4$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$, що, згідно з теоремою 3, свідчить про лінійну залежність векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$.

4.3 Приклади

Приклад 4.1 Задано будь-які вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Перевірити, чи існує лінійна залежність між векторами $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} + \vec{r}$ та $\vec{c} = \vec{r} - \vec{p}$.

Розв'язання

Розглянемо лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \lambda_1 (\vec{p} + \vec{q}) + \lambda_2 (\vec{q} + \vec{r}) + \lambda_3 (\vec{r} - \vec{p}).$$

Нескладно помітити, що, коли $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$, то лінійна комбінація векторів стане такою: $\vec{p} + \vec{q} - \vec{q} - \vec{r} + \vec{r} - \vec{p} = \vec{0}$. Оскільки лінійна комбінація векторів дорівнює нулю, а коефіцієнти лінійної комбінації векторів задовольняють умову $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \neq 0$, виходить, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно залежними.

В і д п о в і д ь: вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно залежними.

Приклад 4.2 З точки O виходять вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$, які відрізняються один від одного. Чи можна вважати ці вектори за лінійно незалежні?

Розв'язання

За умовою задано шість векторів. Хоч би якими вони не були, згідно з теоремою 6, які завгодно чотири вектори є лінійно залежні, а це означає, що система векторів, до складу якої входять лінійно залежні вектори, також є лінійно залежною системою векторів.

Приклад 4.3 На ребрах трикутної піраміди $ABCS$ (рис. 4.3) розміщено вектори $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$. Знайти лінійно залежні та лінійно незалежні вектори.

Розв'язання

Розглянемо усі можливі пари векторів: $\vec{AB}, \vec{BC}; \vec{AB}, \vec{CA}; \vec{BC}, \vec{CA}; \vec{AB}, \vec{SA}; \vec{AB}, \vec{SB}; \vec{AB},$

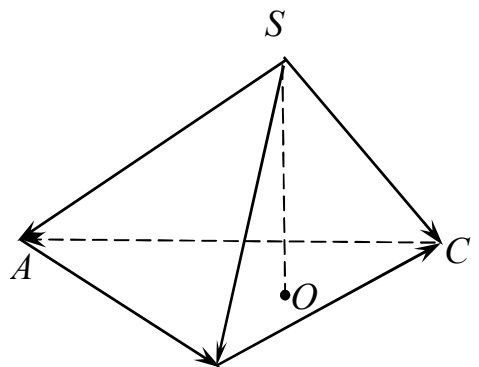


Рисунок 4.3

$\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SA}; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SC}; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SB}; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Означені пари векторів – це неколінеарні вектори. Отже, згідно з висновком теореми 4, маємо лінійно незалежні вектори.

Серед ребер піраміди маємо такі трійки компланарних векторів: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$. Згідно з теоремою 5, означені трійки векторів є лінійно залежними. Вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ не є компланарними. Згідно з висновком 1 теореми 5, вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ є лінійно незалежними.

Розглянемо усі можливі четвірки векторів:

$\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}$;	$\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BC}$;	$\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CA}$;
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SB}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SC}$;
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$;
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$;	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$;
$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$;	$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$;	$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Згідно з теоремою 6, усі зазначені четвірки векторів є лінійно залежні.

5 БАЗИС НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРИ

5.1 Визначення базиса

Визначення 1. *Базисом на площині* називаються будь-які два лінійно незалежних вектори цієї площини, обрані в певному порядку.

Визначення 2. *Базисом на площині* називаються будь-які два неколінеарних вектори, обрані в певному порядку.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Визначення 1 та 2 є еквівалентні.

Визначення 3. *Базисом у просторі* називаються будь-які три лінійно незалежні вектори, обрані в певному порядку.

Визначення 4. *Базисом у просторі* називаються будь-які три некомпланарних вектори, обрані у певному порядку.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Визначення 3 та 4 є еквівалентні.

На площині та у просторі існує безліч базисів.

5.2 Координати вектора у заданому базисі

Теорема 1 *Якщо на площині вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ утворюють базис, то будь-який компланарний з ними вектор $\vec{a}$ можна у єдиний спосіб подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.*

Доведення

Згідно з умовою, вектори $\vec{a}$, $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ є компланарними, а отже, лінійно залежними. Тоді один з векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації двох інших неколінеарних векторів

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2. \quad (5.1)$$

Доведемо тепер, що розкладання (5.1) є єдиним. Для цього припустимо, що можлива рівність

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{\ell}_1 + \mu_2 \vec{\ell}_2. \quad (5.2)$$

Почленно віднімаючи від рівності (5.1) рівність (5.2), дістанемо нульову лінійну комбінацію

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \vec{\ell}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{\ell}_2. \quad (5.3)$$

За умовою вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ є лінійно незалежними. Тому рівність (5.3) можлива лише в тому разі, коли

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \quad \text{та} \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0,$$

що рівносильно умовам $\lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 = \mu_2$, з чого й виходить єдиність розкладання.

Теорема 2 Якщо у просторі вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ утворюють базис, то будь-який вектор $\vec{a}$ простору можна в єдиний спосіб подати у вигляді їхньої лінійної комбінації.

Д о в е д е н н я

З теореми 6 (див. п. 4) виходить, якщо $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ – некомпланарні вектори, то будь-який вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3. \quad (5.4)$$

Доведемо тепер, що це розкладання єдине. Для цього припустимо, що має місце рівність

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{\ell}_1 + \mu_2 \vec{\ell}_2 + \mu_3 \vec{\ell}_3. \quad (5.5)$$

Віднімаючи почленно рівність (5.5) від рівності (5.4), дістанемо нульову лінійну комбінацію

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \vec{\ell}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{\ell}_2 + (\lambda_3 - \mu_3) \vec{\ell}_3. \quad (5.6)$$

За умовою, вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ лінійно незалежні, тому рівність (5.6) можлива лише в тому разі, коли $\lambda_1 - \mu_1 = 0$; $\lambda_2 - \mu_2 = 0$; $\lambda_3 - \mu_3 = 0$ або $\lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 = \mu_2$; $\lambda_3 = \mu_3$. Отже доведено, що розкладання (5.4) є єдине.

В и з н а ч е н н я. Якщо вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ утворюють базис на площині, а вектор $\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2$, то числа λ_1, λ_2 називаються **координатами вектора $\vec{a}$** у базисі $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$. При цьому використовуються позначення

$$\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я. Якщо вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ утворюють базис у просторі, а вектор $\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2 + \lambda_3 \vec{\ell}_3$, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються **координатами вектора $\vec{a}$** у базисі $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$, при цьому використовується позначення

$$\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}.$$

Базисів на площині й у просторі існує нескінченна кількість. Один і той самий вектор у різних базисах має різні координати.

В и з н а ч е н н я. Два вектори в одному базисі називаються *рівними* між собою, якщо їхні відповідні координати є рівними.

5.3 Ортонормований базис

Для зручності домовимося надалі використовувати так званий ортонормований базис.

В и з н а ч е н н я. Базис, утворений одиничними взаємно перпендикулярними векторами, називається *ортонормованим базисом*.

У математиці орти, які утворюють ортонормований базис, на площині позначають через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ (рис. 5.1 а), а у просторі – через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 5.1 б, в). У деяких електротехнічних дисциплінах орти ортонормованого базису на площині позначають через $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, а у просторі – через $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$.

Ортонормовані базиси у просторі бувають лівоорієнтованими та правоорієнтованими. Якщо при спостереженні з кінця вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ здійснюється у напрямку проти годинникової стрілки, то базис, утворений векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називається правоорієнтованим (рис. 5.1 б), а якщо за годинниковою стрілкою – то лівоорієнтованим (рис. 5.1 в).

Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють прямокутним проекціям вектора на напрямки відповідних базисних векторів.

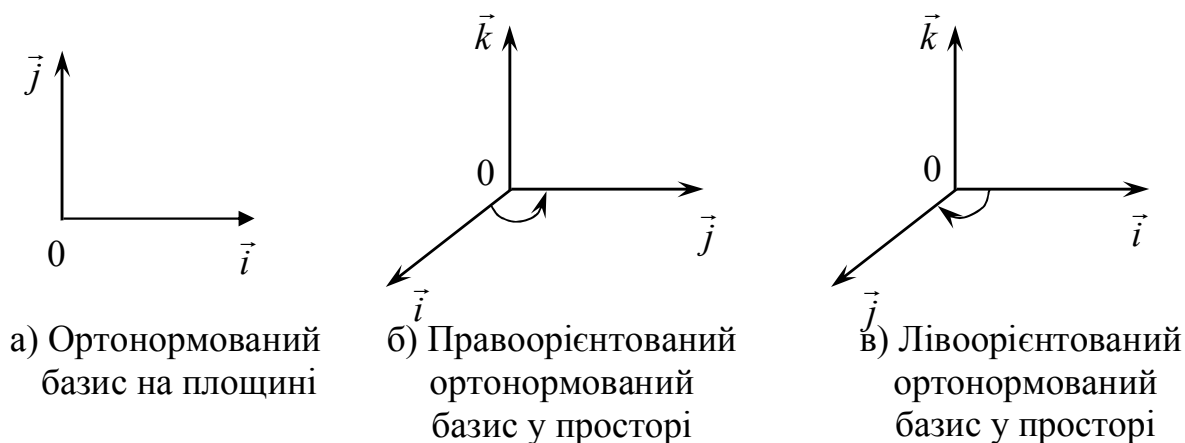


Рисунок 5.1

5.4 Приклади

Приклад 5.1 Задано рівнобічну трапецію $M_1M_2M_3M_4$. На більшій основі M_1M_2 розміщено вектор $\vec{\ell}_1$, а на бічній стороні M_1M_4 лежить вектор $\vec{\ell}_2$ так, що $|\vec{\ell}_1| = |\overline{M_1M_2}| = \mu$, $|\vec{\ell}_2| = |\overline{M_1M_4}| = \nu$. Кути при більшій основі дорівнюють $\frac{\pi}{3}$.

Вважаючи вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ за базисні, подати вектори, розміщені на решті сторін та діагоналях трапеції, через базисні вектори.

Розв'язання

Згідно з умовою $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\ell}_1$; $\overrightarrow{M_1M_4} = \vec{\ell}_2$; $|\vec{\ell}_1| = \mu$, $|\vec{\ell}_2| = \nu$.

Розглянемо трикутник $M_1M_2M_4$ (рис. 5.2). За правилом трикутника маємо:

$$\overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1 = -\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$

Розглянемо трикутник $M_1M_4M_5$. Це прямокутний трикутник, у якому

$$\angle M_5M_1M_4 = \frac{\pi}{3}. \text{ Тоді } |\overrightarrow{M_1M_5}| = |\overrightarrow{M_1M_4}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{або } |M_1M_5| = \frac{1}{2} \nu. \text{ Далі маємо } |M_3M_4| = \mu - \nu.$$

Розглянемо відношення векторів $\overrightarrow{M_4M_3}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$. Оскільки ці вектори є співнапрямленими, то

$$\frac{\overrightarrow{M_4M_3}}{\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{\mu - \nu}{\mu}.$$

$$\text{Звідси виходить, що } \overrightarrow{M_4M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu} \overrightarrow{M_1M_2} \text{ або } \overrightarrow{M_4M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu} \vec{\ell}_1.$$

Розглянемо трикутник $M_1M_3M_4$. За правилом трикутника маємо

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1M_4} + \overrightarrow{M_4M_3}$$

або

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{\ell}_2 + \frac{\mu - \nu}{\mu} \vec{\ell}_1 = \frac{\mu - \nu}{\mu} \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$

Розглянемо трикутник $M_1M_2M_3$. За правилом трикутника виходить, що $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_3} - \overrightarrow{M_1M_2}$ або $\overrightarrow{M_2M_3} = \frac{\mu - \nu}{\mu} \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1$.

Остаточно маємо $\overrightarrow{M_2M_3} = -\frac{\nu}{\mu} \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ або $\overrightarrow{M_1M_2} = \left\{ -\frac{\nu}{\mu}; 1 \right\}$ у базисі векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$.

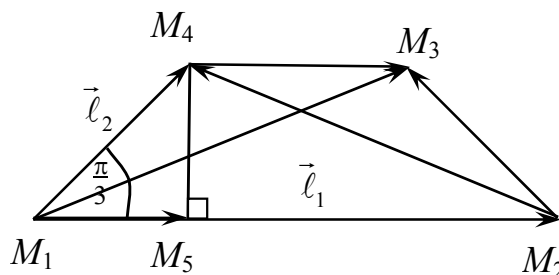


Рисунок 5.2

Приклад 5.2 На площині P розміщено трикутник ABC . Поза площиною P обрано точку S . У базисі, утвореному векторами $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, знайти координати вектора $\overrightarrow{AO}$, якщо точка O є центром ваги трикутника ABC .

Розв'язання

Нехай AE та BF – медіани трикутника ABC (рис. 5.3). Тоді точка O – точка перетину медіан, а отже, і центр ваги трикутника ABC . Впровадимо до розглядання вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AO}$. Якщо на сторонах AB та AC трикут-

ника ABC побудувати паралелограм, то медіана AE збігатиметься з половиною діагоналлю AD паралелограма $ABDC$. Тоді

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Відомо, що точка O поділяє медіану AE у відношенні 2:1, відлічуючи початок від вершини A , тобто $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$.

Звідси

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

З трикутника ASB виходить, що

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$, а з трикутника ASC виходить, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$. Тоді

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA})$$

або

$$\overrightarrow{AO} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{SA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{SB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{SC}.$$

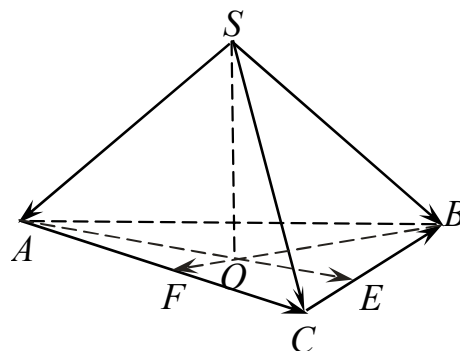


Рисунок 5.3

Дістано розкладання вектора $\overrightarrow{AO}$ по базисних векторах $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$. Отже, у базисі $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC})$ вектор $\overrightarrow{AO}$ можна подати як

$$\overrightarrow{AO} = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \overrightarrow{AO} = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

Приклад 5.3. Задано пряму шестигранну призму. В основі призми лежить правильний шестикутник, сторони якого дорівнюють 2 (рис. 5.4). Точка O – центр шестикутника в основі призми, а точка K є серединою сторони EF . OO_1 – висота призми. На відрізках OK , OA , OO_1 розміщено відповідно вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, які виходять з точки O і утворюють ортонормований базис. Точка N є точкою перетину діагоналей бічної грані AFF_1A_1 . Знайти координати вектора $\overrightarrow{ON}$ у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Нехай точка P є проекцією точки N на основу призми. Оскільки призма є прямою, то точка P падає на сторону AF і поділяє її навпіл. OP – це медіана, бісектриса та висота рівностороннього трикутника AOP .

З прямокутного трикутника AOP маємо:

$$|OP|^2 = |OA|^2 - |AP|^2,$$

тобто

$$|OP|^2 = 3; \quad |OP| = \sqrt{3}.$$

Виходячи з властивостей правильного шестикутника, знайдемо проекції вектора $\overrightarrow{OP}$ на напрямки, що задані векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$:

$$\text{пр}_{\vec{i}} \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}| \cos 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{пр}_{\vec{j}} \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}| \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тоді $\overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{j}$.

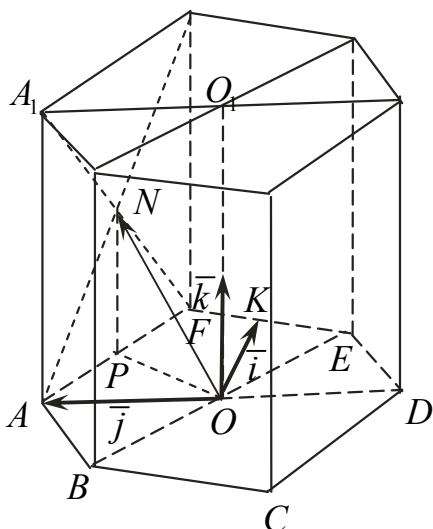


Рисунок 5.4

Розглянемо вектор $\overrightarrow{PN}$:

$$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OO_1},$$

тоді

$$|\overrightarrow{PN}| = 1, \quad \overrightarrow{PN} = \vec{k}.$$

Врешті розглянемо вектор $\overrightarrow{ON}$:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, знайдено координати вектора $\overrightarrow{ON}$ в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\overrightarrow{ON} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right\}.$$

В і д п о в і д ь: $\overrightarrow{ON} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right\}.$

6 ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

6.1 Теорема про лінійні операції над векторами, заданими в координатній формі

Теорема 1 При множенні вектора на число всі його координати множаться на це число.

Д о в е д е н н я

Нехай у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задано вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Це означає, що

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на λ . Тоді

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_1 \vec{i} + \lambda a_2 \vec{j} + \lambda a_3 \vec{k} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}.$$

Отже, дійшли висновку, що

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}. \quad (6.1)$$

Теорема 2 (необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів). Для того щоб два вектори були колінеарними, необхідно та достатньо, щоб їхні координати були пропорційними.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задано вектори $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ та $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, які поміж собою є колінеарними.

Доведемо, що їхні координати є пропорційними, тобто

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними, тому існує таке число λ , що $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Отже, відповідні координати векторів $\vec{a}$ та $\lambda \vec{b}$ є рівними поміж собою, тобто

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3$$

або

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda.$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай у базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задано вектори $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ та $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, причому

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda.$$

Доведемо, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними.

За умовою, $a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3$. Отже,

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3\} = \lambda \vec{b},$$

що і доводить колінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Отже, дійшли висновку, що для того щоб два вектори були колінеарними, необхідно та достатньо, щоб їхні координати задовольняли умову

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \quad (6.2)$$

Теорема 3 При додаванні векторів додаються їхні відповідні координати.

Д о в е д е н н я

Нехай у базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задано вектори $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ та $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$

або

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad (6.3)$$

та

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}. \quad (6.4)$$

Додамо почленно рівності (6.3) та (6.4):

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1) \vec{i} + (a_2 + b_2) \vec{j} + (a_3 + b_3) \vec{k},$$

звідки

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}. \quad (6.5)$$

Теорема 4 При відніманні векторів віднімаються їхні відповідні координати.

Д о в е д е н н я

Нехай у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задано вектори $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ та $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$. Розглянемо вектор $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Згідно з формулою (6.5), маємо

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \{a_1 + (-b_1); a_2 + (-b_2); a_3 + (-b_3)\}$$

або

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Усі теореми було розглянуто за припущення, що вектори задано в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Усі твердження є справедливими й для будь-якого іншого базису.

6.2 Приклади до розділу 6

Приклад 6.1 На точку діють три сили: $\vec{f}_1 = \{1; -5; 0\}$, $\vec{f}_2 = \{-4; 0; 5\}$; $\vec{f}_3 = \{2; 1; 7\}$. Знайти рівнодійну цих сил.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $\vec{r}$ – рівнодійна, тоді

$$\vec{r} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \{\vec{r}_x; \vec{r}_y; \vec{r}_z\},$$

$$\text{де } \vec{r}_x = 1 - 4 + 2 = -1; \quad \vec{r}_y = -5 + 0 + 1 = -4; \quad \vec{r}_z = 0 + 5 + 7 = 12.$$

Отже, $\vec{r} = \{-1; -4; 12\}$.

В і д п о в і д ь: $\vec{r} = \{-1; -4; 12\}$.

Приклад 6.2 Задано вектори $\vec{a} = \{5; 1; 4\}$ та $\vec{b} = \{2; -1; 5\}$. Знайти вектор $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$.

Р о з в ' я з а н н я

Відомо, що лінійні операції над векторами переносяться на їхні координати:

$$\vec{c} = 4\vec{a} + 2\vec{b}; \quad 4\vec{a} = \{20; 4; 16\}; \quad 2\vec{b} = \{4; -2; 10\};$$

$$\vec{c} = \{20 - 4; 4 - (-2); 16 - 10\} = \{16; 6; 6\}.$$

В і д п о в і д ь: $\vec{c} = \{16; 6; 6\}$.

Приклад 6.3 Задано вектори $\vec{a} = \{4; -3; 2\}$ та $\vec{b} = \{5; 1; -6\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ та координати вектора $\vec{d}$, який має протилежний напрямок по відношенню до вектора $\vec{c}$ і є у 4 рази довшим за вектор $\vec{c}$.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо координати векторів $3\vec{a}$ та $4\vec{b}$.

$$3\vec{a} = \{3 \cdot 4; 3(-3); 3 \cdot 2\} = \{12; -9; 6\}, \quad 4\vec{b} = \{4 \cdot 5; 4 \cdot 1; 4 \cdot (-6)\} = \{20; 4; -24\}.$$

Тоді

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b} = \{12 - 20; -9 - 4; 6 - (-24)\} = \{-8; -13; 30\},$$

$$\vec{d} = -5\vec{c} = \{(-5)(-8); (-5)(-13); (-5)30\} = \{40; 65; -150\}.$$

В і д п о в і д ь: $\vec{c} = \{-8; -13; 30\}$, $\vec{d} = \{40; 65; -150\}$.

Приклад 6.4 Задано вектори $\vec{a} = \{-1; 2; 5\}$, $\vec{b} = \{4; 3; -7\}$, $\vec{c} = \{-5; 2; 8\}$.
Знайти вектор $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо вектори $2\vec{a}$; $3\vec{b}$ та $4\vec{c}$:

$$2\vec{a} = \{-2; 4; 10\}; \quad 3\vec{b} = \{12; 9; -21\}; \quad 4\vec{c} = \{-20; 8; 32\}.$$

Тепер знаходимо вектор $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \{-2 - 12 - 20; 4 - 9 + 8; 10 + 21 + 32\}$$

або

$$\vec{d} = \{-34; 3; 63\}.$$

В і д п о в і д ь: $\vec{d} = \{-34; 3; 63\}$.

Приклад 6.5 Серед векторів $\vec{a} = \{5; 1; -4\}$, $\vec{b} = \{5; 1; -3\}$ та $\vec{c} = \{-20; -4; 16\}$ знайти колінеарні вектори.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо вектори є колінеарними, то їхні координати є пропорційними. Перевіримо колінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\frac{5}{5} = \frac{4}{1} \neq \frac{-4}{-3}.$$

Отже, вектори не є колінеарними.

Далі перевіримо колінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$:

$$\frac{5}{-20} = \frac{1}{-4} = \frac{-4}{16} \quad \text{або} \quad -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{c}$ – колінеарні.

В і д п о в і д ь: $\vec{a}$ та $\vec{c}$ – колінеарні вектори.

Приклад 6.6 Знайти такі значення α та β , за яких є колінеарні вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = 7\vec{i} - 42\vec{j} + \beta\vec{k}$.

Р о з в ' я з а н н я

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ запишемо у вигляді $\vec{a} = \{\alpha; -3; 5\}$ та $\vec{b} = \{7; -42; \beta\}$. Для того, щоб вектори були колінеарними, має виконуватись рівність

$$\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}.$$

З відношення $\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42}$ знаходимо α :

$$\alpha = \frac{7(-3)}{-42} = \frac{1}{2}.$$

Тепер з відношення $\frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}$ знаходимо β :

$$\beta = \frac{-42 \cdot 5}{-3} = 70.$$

В і д п о в і д ь: $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = 70$.

Приклад 6.7 Вектор $\vec{a} = \{2; -7; -4\}$ лежить на прямій L_1 та утримує основу AC трикутника ABC . Якими мають бути числа α та β , щоби вектор $\vec{b} = \{\alpha; \beta; 6\}$ міг лежати на прямій L_2 , яка утримує середню лінію EF трикутника ABC ($EF \parallel AC$)?

Р о з в ' я з а н н я

Нехай ABC – заданий трикутник (рис. 6.1). Оскільки, згідно з умовою, L_1 та L_2 є паралельні, то і вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають бути колінеарними. Отже, координати векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають задовольняти умову (6.2):

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{-7}{\beta} = \frac{4}{6}.$$

Звідси $\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{3}$, а $\alpha = 3$; $\frac{-7}{\beta} = \frac{2}{3}$, а $\beta = \frac{-7 \cdot 3}{2} = -\frac{21}{2}$.

Отже, шуканий вектор $\vec{b}$ буде таким:

$$\vec{b} = \left\{ 3; -\frac{21}{2}; 6 \right\}.$$

В і д п о в і д ь: $\vec{b} = \left\{ 3; -\frac{21}{2}; 6 \right\}$.

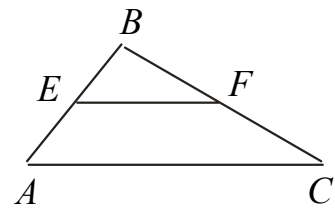


Рисунок 6.1

Приклад 6.8 Задано вектори $\vec{\ell}_1 = \{2, 4\}$ та $\vec{\ell}_2 = \{3, -2\}$. Перевірити, чи можуть вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ утворювати базис. Знайти координати вектора $\vec{a} = \{13; 18\}$ у базисі $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$, якщо такий базис існує.

Р о з в ' я з а н н я

Вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ задано на площині. Для того, щоб вектори $\vec{\ell}_1$ та $\vec{\ell}_2$ утворювали базис на площині, вони мають бути неколінеарними. Оскільки координати цих векторів не є пропорційними, з них можна утворити базис. Вектор $\vec{a}$ також задано на площині. Отже, вектори $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ та $\vec{a}$ є компланарними. Як відомо, кожен вектор на площині можна розкласти по базисних векторах, тобто

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{\ell}_2. \quad (*)$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти λ_1 та λ_2 , запишемо векторну рівність (*) у координатній формі:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 13; \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 18 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 13; \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 9. \end{cases}$$

Розв'яжемо дістану систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -40; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\text{Звідси } \lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-40}{-8} = 5; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

$$\text{Отже, } \vec{a} = 5\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \vec{a} = 5\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2.$$

Приклад 6.9 Задано вектори $\vec{a} = \{1; 5; 7\}$; $\vec{b} = \{-1; 0; 1\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -2\}$, які утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d} = \{-3; 4; 11\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – базисні вектори, то існують такі числа λ_1 , λ_2 , λ_3 , що є справедлива рівність

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}.$$

Залежність між векторами поширюється на їхні координати

$$\begin{cases} -3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(-1) + \lambda_3 \cdot 2; \\ 4 = \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1; \\ 11 = \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3(-2). \end{cases}$$

Розв'яжемо дістану систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

Отже, у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\vec{d}$ подано у вигляді $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ або $\vec{d} = \{1; 2; -1\}$.

$$\text{В і д п о в і д ь: } \vec{d} = \{1; 2; -1\}.$$

7 ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

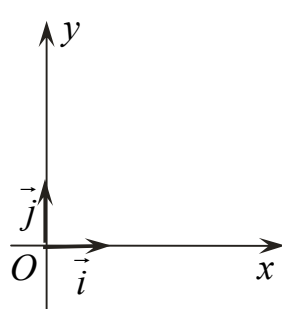
7.1 Декартова прямокутна система координат на площині та у просторі

Ортонормований базис на площині, утворений векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, що виходять з точки O , визначає **прямокутну декартову систему координат на площині**. Осі Ox , Oy називаються відповідно осями абсцис та ординат, а точка O називається початком системи координат (рис. 7.1 а).

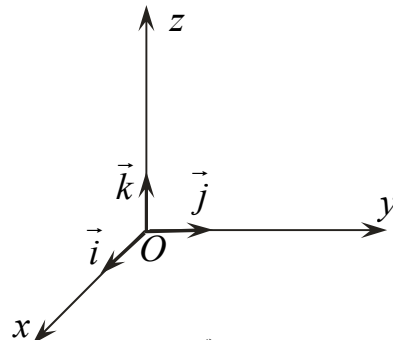
Ортонормований базис у просторі, утворений векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, що виходять з точки O , визначає **прямокутну декартову систему координат у просторі**. Осі Ox , Oy та Oz називаються відповідно осями абсцис, ординат та аплікат, а точка O називається початком системи координат (рис. 7.1 б).

Розглянемо довільну точку M у просторі. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається радіус-вектором точки M відносно точки O (рис. 7.1 в).

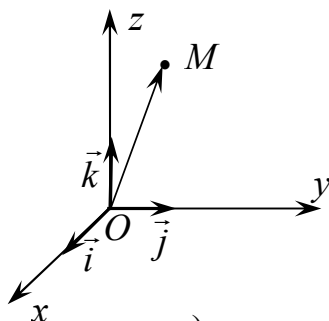
Визначення. Координати радіус-вектора точки M відносно точки O називаються **декартовими прямокутними координатами** точки M у декартовій системі координат. При цьому використовується позначення $M(x, y)$, якщо точка M лежить на площині xOy , та $M(x, y, z)$ – якщо точка M перебуває у просторі.



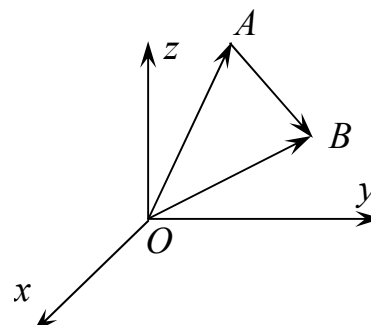
а)



б)



в)



г)

в)

Рисунок 7.1

Розглянемо тепер вектор $\overrightarrow{AB}$, заданий точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо його координати. Для цього побудуємо вектори $\overrightarrow{OA} = \{x_1; y_1; z_1\}$ та $\overrightarrow{OB} = \{x_2; y_2; z_2\}$ (рис. 7.1 г).

Вектор $\overrightarrow{AB}$ є різницею векторів $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OA}$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

За теоремою 3 (розділу 6), маємо

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Отже, для того щоб знайти координати вектора, знаючи координати його початку та кінця, слід від координат кінця відняти відповідні координати початку вектора.

7.2 Формули ділення відрізка у заданому відношенні

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 7.2). Знайдемо на відрізку AB таку точку $M(x; y, z)$, яка поділяє відрізок AB у відношенні λ так, щоб поміж векторами $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{MB}$ існувала залежність $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

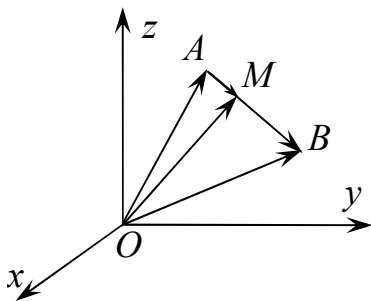


Рисунок 7.2

Розглянемо вектори
 $\overrightarrow{OA} = \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \overrightarrow{OB} = \{x_2; y_2; z_2\}, \quad \overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$
та вектори $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$.

Вочевидь, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}; \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}.$

За умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$. Тоді

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}); \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OM};$$

$$\overrightarrow{OM}(1 + \lambda) = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

Оскільки лінійні операції над векторами переносяться й на їхні координати, дістанемо формули

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad (7.1)$$

які називаються формулами ділення відрізка у заданому відношенні. Зокрема, коли відрізок точкою M поділяється навпіл, то $\lambda = 1$, а формули (7.1) набувають вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad (7.2)$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Число λ може бути будь-яким, окрім $\lambda = -1$. Якщо λ – число від'ємне, то це означає, що точка M міститься на прямій AB , але поза відрізком AB .

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо відрізок AB лежить на площині xOy , то формули (7.1) та (7.2) набувають відповідно вигляду

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (7.1')$$

та

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7.2')$$

7.3 Приклади

Приклад 7.1 Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо задано точки $A(1; 4; 5)$ та $B(-2; 3; 7)$.

Розв'язання

Для того щоб знайти координати вектора, треба від координат кінця відняти відповідні координати початку вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2 - 1; 3 - 4; 7 - 5\} = \{-3; -1; 2\}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{AB} = \{-3; -1; 2\}$.

Приклад 7.2 Задано координати вектора $\overrightarrow{EF} = \{4; 5; -3\}$ та координати точки $E(2; 1; 5)$. Визначити координати точки F .

Розв'язання

Аналізуючи умову, бачимо, що є справедливі рівності

$$x_F - x_E = 4; \quad y_F - y_E = 5; \quad z_F - z_E = -3;$$

$$x_F - 2 = 4; \quad y_F - 1 = 5; \quad z_F - 5 = -3.$$

Отже, знайдено точку $F(6; 6; 2)$.

Відповідь: $F(6; 6; 2)$.

Приклад 7.3 Перевірити, чи можуть точки $M_1(19; 5; -1)$, $M_2(1; 2; 3)$, $M_3(6; 4; 1)$, $M_4(4; -1; 5)$ бути вершинами трапеції.

Розв'язання

Якщо означені точки є вершинами трапеції, то серед сторін трапеції дві мають бути паралельними. Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_4M_1}$:
 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-18; -3; 4\}$; $\overrightarrow{M_2M_3} = \{5; 2; -2\}$; $\overrightarrow{M_3M_4} = \{-2; -5; 4\}$; $\overrightarrow{M_4M_1} = \{15; 6; -6\}$.

Тепер перевіримо, чи є серед цих векторів колінеарні.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_3M_4}$. З'ясуємо, чи є пропорційними координати цих векторів. Оскільки $\frac{-18}{-2} \neq \frac{-3}{-5} \neq \frac{4}{4}$, то, вочевидь, вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_3M_4}$ не є колінеарними.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_2M_3}$ та $\overrightarrow{M_4M_1}$. Перевіримо пропорційність координат цих векторів. Оскільки $\frac{5}{15} = \frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$, то звідси виходить, що вектори $\overrightarrow{M_2M_3}$ та $\overrightarrow{M_4M_1}$ є колінеарними. Отже, задані точки насправді є вершинами трапеції.

Приклад 7.4 Задано точки $A(3; -1; 5)$; $B(7; 3; -1)$; $C(5; -3; -5)$, які є вершинами трикутника. Знайти вектор $\vec{r} = 3\vec{r}_1 - 5\vec{r}_2 + 4\vec{r}_3$, де $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ – вектори, які з'єднують центр ваги трикутника з його вершинами.

Розв'язання

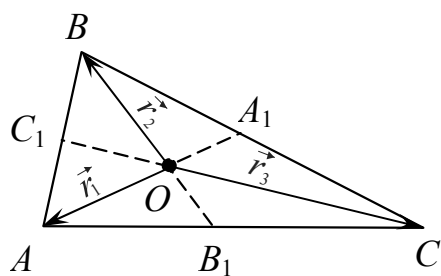


Рисунок 7.3

який ділиться навпіл точкою A_1 .

Тоді

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7+5}{2} = 6; \quad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0; \quad z_{A_1} = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Знайдено точку $A_1(6; 0; -3)$.

Тепер можна знайти координати точки O , виходячи з того, що

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OA_1}|} = 2.$$

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_{A_1}}{1 + \lambda} = \frac{3 + 2 \cdot 6}{3} = 5; \quad y_0 = \frac{y_A + \lambda y_{A_1}}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$z_0 = \frac{z_A + \lambda z_{A_1}}{1 + \lambda} = \frac{5 - 2 \cdot 3}{1 + 2} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, центр ваги трикутника розміщено у точці $O\left(5; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Знайдемо вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA} = \left\{3 - 5; -1 + \frac{1}{3}; 5 + \frac{1}{3}\right\} = \left\{-2; -\frac{2}{3}; \frac{16}{3}\right\};$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = \left\{7 - 5; 3 + \frac{1}{3}; -1 + \frac{1}{3}\right\} = \left\{2; \frac{10}{3}; -\frac{2}{3}\right\};$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OC} = \left\{5 - 5; -3 + \frac{1}{3}; -5 + \frac{1}{3}\right\} = \left\{0; -\frac{8}{3}; -\frac{14}{3}\right\}.$$

Далі знаходимо вектор $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 3\vec{r}_1 - 5\vec{r}_2 + 4\vec{r}_3 = \\ &= \left\{3(-2) - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0; -3 \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{10}{3} - 4 \cdot \frac{8}{3}; 3 \cdot \frac{16}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{14}{3}\right\} = \left\{-16; -\frac{88}{3}; \frac{2}{3}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{В і д п о в і д ь: } \vec{r} = \left\{-16; -\frac{88}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

Приклад 7.5 Точки $A(-1; 11; 9)$, $B(3; -5; 7)$, $C(-7; 7; 9)$ є вершинами $\triangle ABC$. Вершини $\triangle M_1M_2M_3$ лежать на сторонах $\triangle ABC$. При цьому точка M_1 ділить сторону AB у відношенні $\lambda_1 = 3$, точка M_2 ділить сторону BC у відношенні $\lambda_2 = 5$, а точка M_3 ділить сторону CA у відношенні $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Знайти вершини $\triangle M_1M_2M_3$.

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємося формулами ділення відрізка у заданому відношенні (7.1).

Знаходимо координати точки M_1 :

$$x_{M_1} = \frac{-1+3 \cdot 3}{1+3} = 2; \quad y_{M_1} = \frac{11-3 \cdot 5}{1+3} = -1; \quad z_{M_1} = \frac{9+3 \cdot 7}{1+3} = \frac{15}{2}.$$

Отже, знайдено точку $M_1\left(2; -1; \frac{15}{2}\right)$.

Знаходимо координати точки M_2 :

$$x_{M_2} = \frac{3-5 \cdot 7}{1+5} = -\frac{16}{3}; \quad y_{M_2} = \frac{-5+5 \cdot 7}{1+5} = 5; \quad z_{M_2} = \frac{7+5 \cdot 9}{1+3} = 13.$$

Знайдено точку $M_2\left(-\frac{16}{3}; 5; 13\right)$.

Далі знаходимо координати точки M_3 :

$$x_{M_3} = \frac{-7-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{11}{2}; \quad y_{M_3} = \frac{7+\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}} = 8; \quad z_{M_3} = \frac{9+\frac{9}{3}}{\frac{4}{3}} = 9.$$

Отже, маємо $M_3\left(-\frac{11}{2}; 8; 9\right)$.

В і д п о в і д ь: $M_1\left(2; -1; \frac{15}{2}\right); M_2\left(-\frac{16}{3}; 5; 13\right); M_3\left(-\frac{11}{2}; 8; 9\right)$.

8 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

8.1 Визначення скалярного добутку двох векторів

В и з н а ч е н н я. *Кутом між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$* називається найменший з кутів φ , на який треба повернути промінь, що проходить через вектор $\vec{a}$, до збігу з променем, який проходить через вектор $\vec{b}$, якщо обидва вектори мають спільний початок ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

В и з н а ч е н н я. *Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$* двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добуткові модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (8.1)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Для позначання скалярного добутку векторів, окрім символу $\vec{a} \cdot \vec{b}$, використовують також символ $(\vec{a}; \vec{b})$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо один з векторів є нульовим, то кут не визначено, тоді скалярний добуток, за визначенням, дорівнює нулю.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Згідно з формулою (8.1)

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \quad \vec{j} \cdot \vec{i} = 0; \quad (8.2)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; \quad (8.3)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = 0. \quad (8.4)$$

8.2 Геометричні властивості скалярного добутку векторів

1. Модуль вектора

Модуль вектора дорівнює значенню квадратного кореня зі скалярного добутку цього вектора самого на себе:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Д о в е д е н н я

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

Звідси маємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

2. Косинус кута між двома векторами

Косинус кута між двома ненульовими векторами дорівнює скалярному добуткові цих векторів, поділеному на добуток їхніх модулів

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad (8.5)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Справедливість рівності (8.5) виходить з формули (8.1).

3. Проекція вектора на вісь

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число, яке дорівнює добуткові модуля одного з векторів на проекцію іншого вектора на вісь, що визначається першим з означених векторів, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b} \quad \text{або} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a}.$$

Звідси проекція одного з векторів на вісь, що визначається другим вектором, дорівнює скалярному добуткові цих векторів, поділеному на модуль того вектора, який визначає напрямок осі проектування:

$$\text{пр}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \text{або} \quad \text{пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \quad (8.6)$$

Справедливість формули (8.6) виходить з визначення 2 скалярного добутку векторів.

4. Необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів

Для того, щоб два ненульових вектори були перпендикулярними, необхідно та достатньо, щоб їхній скалярний добуток дорівнював нулю.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є перпендикулярними. Доведемо, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Згідно з умовою маємо

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0,$$

звідки

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює нулю. Доведемо, що ці вектори є перпендикулярними. Розглянемо $\cos \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0,$$

а отже, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є перпендикулярними.

В и с н о в о к. Для того, щоб скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнював нулю, необхідно та достатньо, щоб ці вектори були перпендикулярними.

8.3 Алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів

1. Скалярний добуток векторів є комутативним, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедлива рівність

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (8.7)$$

2. Скалярний добуток векторів є асоціативним відносно числового множника, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ й будь-якого дійсного числа λ справедлива рівність

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (8.8)$$

3. Скалярний добуток векторів є асоціативним відносно суми векторів, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедлива рівність

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (8.9)$$

4. Скалярний добуток ненульового вектора самого на себе є числом додатним, тобто для будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ справедливою є рівність

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0. \quad (8.10)$$

Завдання для самостійної роботи. Доведіть справедливості властивостей 1...4.

8.4 Скалярний добуток векторів у координатній формі

Теорема 1 Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то їхній скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (8.11)$$

Д о в е д е н н я

Нехай маємо вектори

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{та} \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + \\ &+ a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги формули (8.2) – (8.4), дістанемо формулу (8.11):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

8.5 Деякі властивості скалярного добутку векторів, заданих у координатній формі

1. Модуль вектора, заданого у координатній формі

Модуль вектора, заданого своїми координатами, дорівнює значенню квадратного кореня з суми квадратів координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (8.12)$$

Д о в е д е н н я

З формул (8.1) – (8.4) маємо (8.12):

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad \text{або} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

2. Косинус кута між двома векторами, заданими у координатній формі

Косинус кута між двома ненульовими векторами, заданими своїми координатами, дорівнює їхньому скалярному добуткові у координатній формі, поділеному на добуток їхніх модулів, поданих у координатній формі:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \quad (8.13)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Д о в е д е н н я

Спираючись на формули (8.5), (8.11) та (8.12), маємо

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \text{або} \quad \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. Проекція вектора, заданого у координатній формі, на вісь

Якщо два вектори задано у координатній формі, то проекція одного з векторів на вісь, що визначається другим вектором, дорівнює їхньому скалярному добуткові у координатній формі, поділеному на поданий у координатній формі модуль того вектора, який визначає напрямок осі проектування:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (8.14)$$

Д о в е д е н н я

Спираючись на формули (8.6), (8.11), (8.12), дістанемо (8.14):

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

4. Необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів

Для того, щоб два ненульових вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ були перпендикулярними, необхідно та достатньо, щоби їхні координати задовольняли умову

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (8.15)$$

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, задані своїми координатами, є перпендикулярними. Доведемо, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\cos 90^\circ = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = 0,$$

звідки маємо формулу (8.15):

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується умова (8.15). Доведемо, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні.

$$\text{З (8.15) виходить, що } \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = 0, \text{ а це означає,}$$

що $\varphi = \frac{\pi}{2}$ згідно з визначенням кута між векторами, тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є перпендикулярними.

8.6 Напрямні косинуси вектора та їхня основна властивість

Нехай задано вектор $\vec{a}$, який утворює з додатним напрямком осі Ox кут α , з додатним напрямком осі Oy – кут β , з додатним напрямком осі Oz – кут γ .

В и з н а ч е н н я. Кути α, β, γ називаються **напрямними кутами** вектора $\vec{a}$.

Надалі частіш використовуватимемо не напрямні кути, а косинуси напрямних кутів, які будемо називати напрямними косинусами.

В и з н а ч е н н я. Якщо вектор $\vec{a}$ утворює з осями Ox , Oy , Oz кути, які відповідно дорівнюють α , β , γ , то числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$.

Вочевидь, що кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат Ox , Oy , Oz , це відповідно кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можна задати за допомогою координат

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\}, \quad \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \quad \vec{k} = \{0; 0; 1\}.$$

Тоді, за формулою (8.13) маємо

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{\text{пр}_{Ox} \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \\ \cos \beta &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{\text{пр}_{Oy} \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \\ \cos \gamma &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{\text{пр}_{Oz} \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.\end{aligned}$$

Знайдемо суму квадратів напрямних косинусів:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{a_x^2}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} + \frac{a_y^2}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} + \frac{a_z^2}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} = \\ &= \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} = 1.\end{aligned}$$

Отже, дістали формулу

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (8.16)$$

Це і є основною властивістю напрямних косинусів.

Завдання для самостійної роботи. За допомогою формули (8.16) довести основну тригонометричну тотожність.

8.7 Механічний зміст скалярного добутку векторів

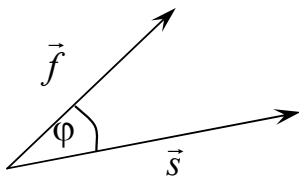


Рисунок 8.1

Нехай матеріальна точка переміщується уздовж вектора $\vec{s}$ під впливом сили $\vec{f}$ (рис. 8.1). Тоді, якщо кут між векторами $\vec{f}$ та $\vec{s}$ дорівнює φ , то, як відомо, робота, яку виконує сила $\vec{f}$, визначається за формулою $A = |\vec{f}| |\vec{s}| \cos \varphi$, яку можна подати у вигляді

$$\vec{A} = \vec{f} \cdot \vec{s}. \quad (8.17)$$

8.8 Приклади до розділу 8

Приклад 8.1 Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 24. При цьому $a_x = 3$, $a_y = 8$. Знайти a_z .

Розв'язання

Виходитимемо з того, що $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 24$.

Оскільки $a_x = 3$, $a_y = 8$, то $\sqrt{3^2 + 8^2 + a_z^2} = 24$, звідки

$$9 + 64 + a_z^2 = 576; \quad a_z^2 = 503; \quad a_z = -\sqrt{503} \quad \text{або} \quad a_z = \sqrt{503}.$$

Відповідь: $a_z = -\sqrt{503}$ або $a_z = \sqrt{503}$.

Приклад 8.2 Задано вершини трикутника ABC : $A(8; 5; 6)$; $B(2; 3; 3)$; $C(4; 2; 6)$. Знайти довжину ламаної BAC .

Розв'язання

Довжина ламаної BAC складається із суми довжин відрізків BA та AC . Скористаємося формулою відстані між двома точками:

$$|BA| = \sqrt{(2-8)^2 + (3-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

$$|AC| = \sqrt{(4-8)^2 + (2-5)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{16 + 9 + 0} = \sqrt{25} = 5;$$

$$|BA| + |AC| = 7 + 5 = 12 \text{ (од. довж.)}.$$

Відповідь: 12 (од. довж.).

Приклад 8.3 Знайти орт вектора $\vec{a} = \{4; -4; 2\}$.

Розв'язання

Орт $\vec{e}$ вектора $\vec{a}$ можна знайти за формулою $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Отже, оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$, маємо

$$\vec{e} = \left\{ \frac{4}{6}; -\frac{4}{6}; \frac{2}{6} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

Відповідь: $\vec{e} = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}$.

Приклад 8.4 Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, знаючи, що

$$1) \quad |\vec{a}| = 2; \quad |\vec{b}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right) = \frac{\pi}{3};$$

$$2) \quad |\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 1; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{3}; \quad \vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}; \quad \vec{b} = 4\vec{p} + 2\vec{q}.$$

Розв'язання

$$1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

$$2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (4\vec{p} + 2\vec{q}) = 8\vec{p} \cdot \vec{p} - 12\vec{q} \cdot \vec{p} + 4\vec{p} \cdot \vec{q} - 6\vec{q} \cdot \vec{q} =$$

$$= 8|\vec{p}|^2 - 12|\vec{q}||\vec{p}|\cos\frac{\pi}{3} + 4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} - 6|\vec{q}|^2 = 8 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 = -2.$$

В і д п о в і д ь: 1) 3; 2) -2.

Приклад 8.5 Перевірити, чи є справедливою рівність

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2).$$

З'ясувати геометричний зміст цієї рівності.

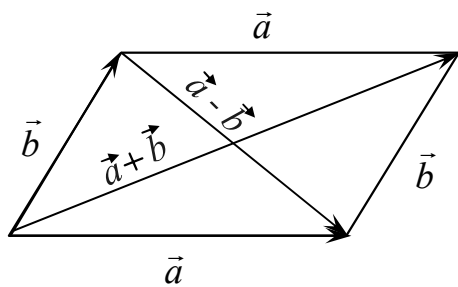


Рисунок 8.2

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо задану рівність у такій формі:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}).$$

Тоді

$$|\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

$$2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Отже, задана рівність є справедливою.

Геометричний зміст цієї рівності полягає у нижчевикладеному.

Якщо на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах побудувати паралелограм, тоді на діагоналях паралелограма лежатимуть вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$. При цьому сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів сторін паралелограма (рис. 8.2).

В і д п о в і д ь: рівність справедлива.

Приклад 8.6 Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, знаючи, що

$$1) \quad \vec{a} = \{4; 3; 2\}; \quad \vec{b} = \{0; -1; 3\};$$

$$2) \quad \vec{p} = \{5; -1; 1\}; \quad \vec{q} = \{0; -5; 2\}; \quad \vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}; \quad \vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}.$$

Р о з в ' я з а н н я

$$1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 0 + 3(-1) + 2 \cdot 3 = 3.$$

$$2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (4\vec{p} + 5\vec{q}) = 8\vec{p} \cdot \vec{p} - 12\vec{q} \cdot \vec{p} + 10\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{q} \cdot \vec{q} =$$

$$= 8|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} - 15|\vec{q}|^2 = 8(5^2 + (-1)^2 + 1^2) - 2(5 \cdot 0 + (-1)(-5) + 1 \cdot 2) -$$

$$- 15(0^2 + (-5)^2 + 2^2) = 8 \cdot 27 - 2 \cdot 7 - 15 \cdot 29 = -233.$$

В і д п о в і д ь: 1) 3; 2) -233.

Приклад 8.7 Точки $A(1; 3; -2)$, $B(4; 3; 2)$, $C(-1; 2; 5)$ є вершинами трикутника. Знайти периметр трикутника та перевірити, чи є цей трикутник прямокутним.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{3; 0; 4\}; \overrightarrow{AC} = \{-2; -1; 7\}; \overrightarrow{BC} = \{-5; -1; 3\}.$$

Модулі векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ дорівнюють відповідно довжинам сторін AB , AC , BC трикутника (рис. 8.3). Отже, периметр $p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$.

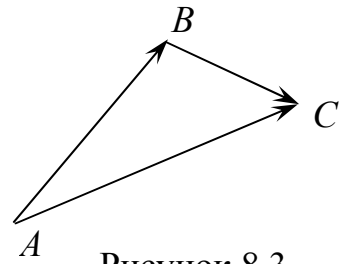


Рисунок 8.3

$$p = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} + \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 7^2} + \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \\ = \sqrt{25} + \sqrt{54} + \sqrt{35} \approx 18,26.$$

Найбільша сторона у цьому трикутнику – AC . Оскільки $|\overrightarrow{AC}|^2 \neq |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$, то трикутник не є прямокутним.

В і д п о в і д ь: $p \approx 18,26$.

Завдання для самостійної роботи. Знайдіть інші способи переконатись у тому, що трикутник не є прямокутний.

Приклад 8.8 Задано вектори $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{b} = \{4; 2; 5\}$. Знайти кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Розв'язання

Знайдемо косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, спираючись на формулу (8.13).

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{21}{\sqrt{14} \sqrt{45}}.$$

$$\text{Звідси } \varphi = \arccos \frac{21}{\sqrt{630}} \approx 33^\circ 21'.$$

В і д п о в і д ь: $\varphi \approx 33^\circ 21'$.

Приклад 8.9 Задано вектори $\vec{a} = \{4; 3; -1\}$ та $\vec{b} = \{2; -2; 5\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$.

Розв'язання

Спираючись на формулу (8.14), знайдемо $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{-3}{\sqrt{33}} \approx 0,52.$$

В і д п о в і д ь: $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \approx 0,52$.

Приклад 8.10 Задано вектори $\vec{a} = \{1; -3; 2\}$, $\vec{b} = \{3; 4; -2\}$, $\vec{c} = \{5; 0; 1\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ на напрямок вектора $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{c}$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$:

$$\vec{p} = \{-13; -26; 14\}, \quad \vec{q} = \{-7; -9; 4\}.$$

Далі за формулою (8.14) знаходимо $\text{пр}_{\vec{q}} \vec{p}$:

$$\text{пр}_{\vec{q}} \vec{p} = \frac{13 \cdot 7 + 26 \cdot 9 + 14 \cdot 4}{\sqrt{(-7)^2 + (-9)^2 + 4^2}} = \frac{381}{\sqrt{146}} \approx 31,53.$$

Відповідь: $\text{пр}_{\vec{q}} \vec{p} \approx 31,53$.

Приклад 8.11 Задано вершини трикутника ABC : $A(-2; 4)$; $B(-7; 2)$; $C(4; 1)$. Побудувати трикутник у системі координат. Знайти методами векторної алгебри довжину висоти трикутника, проведеної з точки A , та площу трикутника.

Розв'язання

Розглянемо вектори $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ (рис. 8.4):

$$\vec{BA} = \{5; 2\}; \quad \vec{BC} = \{11; -1\}.$$

Знайдемо їхні модулі:

$$|\vec{BA}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39;$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{11^2 + (-1)^2} = \sqrt{122} \approx 11,05.$$

Розглянемо також проекцію вектора $\vec{BA}$ на напрямок вектора $\vec{BC}$:

$$\text{пр}_{\vec{BC}} \vec{BA} = |\vec{BE}|.$$

За формулою (8.14) маємо

$$|\vec{BE}| = \text{пр}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \frac{5 \cdot 11 - 2 \cdot 1}{\sqrt{122}} = \frac{53}{\sqrt{122}} \approx 4,8$$

З прямокутного трикутника ABE можна визначити катет AE , який збігається з висотою трикутника. Отже,

$$|AE| = \sqrt{|\vec{AB}|^2 - |\vec{BE}|^2}; \quad |AE| = \sqrt{29 - \frac{53^2}{122}} = \sqrt{\frac{729}{122}} = \frac{27}{\sqrt{122}} \approx 2,4 \text{ (од. довж.)}.$$

Знайдемо площу трикутника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{BC}| |AE|. \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{122} \cdot \frac{27}{\sqrt{122}} = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $|AE| \approx 2,4$ (од. довж.); $S_{\Delta} = 13,5$ (кв. од.).

ЗАУВАЖЕННЯ. Задачу можна розв'язати, не відшукуючи проекцію вектора $\vec{BA}$ на напрямок вектора $\vec{BC}$. Для цього достатньо знайти $\cos \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{BA}$ та $\vec{BC}$, а після цього знайти катет AE з прямокутного трикутника ABE . Пропонуємо зробити це самостійно. Результати порівняти.

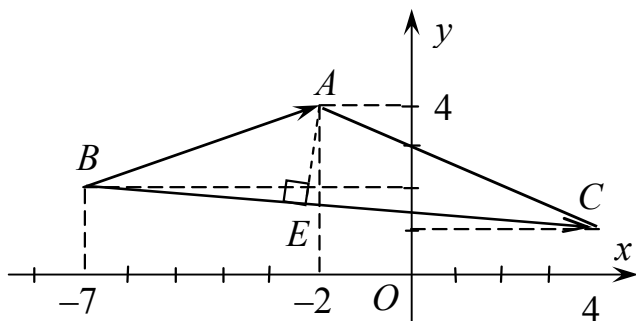


Рисунок 8.4

Приклад 8.12 Визначити, за якого значення α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 4\vec{j} + 19\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{i} - 22\vec{j} + \alpha\vec{k}$ будуть перпендикулярні.

Розв'язання

З умови перпендикулярності векторів маємо:

$$\alpha \cdot 3 + (-4)(-22) + 19\alpha = 0; \quad 22\alpha = -88; \quad \alpha = -4.$$

Відповідь: $\alpha = -4$.

Приклад 8.13 Методами векторної алгебри довести, що діагоналі ромба є взаємно перпендикулярними.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ – ромб (рис. 8.5). Сторона ромба дорівнює m . На сторонах AB , AD та діагоналях AC , DB ромба побудуємо відповідно вектори $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{DB}$. Вочевидь, що є справедливими рівності

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{та} \quad \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{AC}$ та $\vec{DB}$:
 $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}|^2 - |\vec{AD}|^2.$

Оскільки $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = m$, то $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = m^2 - m^2 = 0$, що й означає перпендикулярність діагоналей ромба.

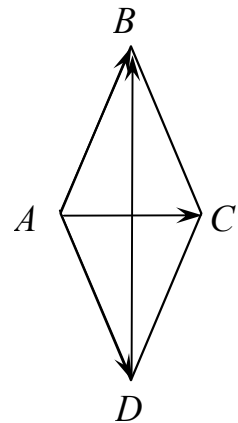


Рисунок 8.5

Приклад 8.14 Методами векторної алгебри довести, що в паралелограмі сума квадратів його сторін дорівнює сумі квадратів діагоналей.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ – паралелограм (рис. 8.6). На сторонах AB , AD , DC , BC паралелограма та на його діагоналях AC , DB побудуємо відповідно вектори $\vec{AB}$, $\vec{DC}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{DB}$.

Зрозуміло, що є справедливі рівності:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}; \quad \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\vec{AC}|^2 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AD}, \\ |\vec{DB}|^2 &= \vec{DB} \cdot \vec{DB} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

Звідси

$$|\vec{AC}|^2 + |\vec{DB}|^2 = 2(\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AD}) \quad \text{або} \quad |\vec{AC}|^2 + |\vec{DB}|^2 = 2(|\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2).$$

Зважаючи на те, що в паралелограмі $\vec{AB} = \vec{DC}$ та $\vec{AD} = \vec{BC}$, маємо остаточно:

$$|\vec{AC}|^2 + |\vec{DB}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{DC}|^2 + |\vec{AD}|^2.$$

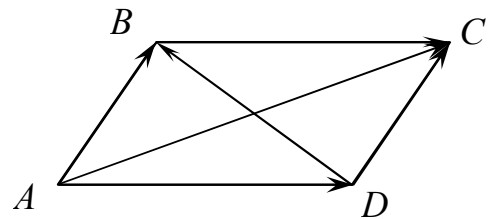


Рисунок 8.6

Приклад 8.15 Чи може вектор утворювати з осями Ox , Oy , Oz кути, які дорівнюють відповідно 30° ; 45° ; 90° ?

Розв'язання

Знаходимо напрямні косинуси:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 90^\circ = 0.$$

Перевіряємо, чи виконується головна властивість (8.16) напрямних косинусів:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + 0 = \frac{5}{4} \neq 1.$$

Отже, вектора, який утворює задані кути з осями координат, не існує.

Відповідь: не може.

Приклад 8.16 Задано чотири сили: $\vec{f}_1 = \{4; 3; 2\}$; $\vec{f}_2 = \{3; 5; -1\}$; $\vec{f}_3 = \{-1; -4; 3\}$; $\vec{f}_4 = \{-2; 1; 2\}$, які прикладено в одній точці. Обчислити роботу рівнодійної цих сил, якщо точка прикладання її, рухаючись прямолінійно, пересувається з початку координат у точку $M(3; -2; 1)$.

Розв'язання

Визначимо рівнодійну сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$:

$$\vec{r} = \{4 + 3 - 1 - 2; 3 + 5 - 4 + 1; 2 - 1 + 3 + 2\} = \{4; 5; 6\}.$$

Роботу A , яку виконує сила $\vec{r}$ по переміщенню точки уздовж вектора $\overrightarrow{OM} = \{3; -2; 1\}$, знайдемо за формулою (8.17)

$$A = \vec{r} \cdot \overrightarrow{OM} = 4 \cdot 3 + 5(-2) + 6 \cdot 1 = 8.$$

Відповідь: $A = 8$.

9 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

9.1 Орієнтування векторів у просторі.

Правоорієнтовані та лівоорієнтовані трійки векторів

Визначення. Трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **упорядкованою трійкою векторів**, якщо вектори беруться у певному порядку.

Визначення. Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **правоорієнтованою** трійкою векторів, якщо при спостереганні найкоротшого повороту від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ з кінця третього вектора $\vec{c}$ цей поворот здійснюється проти годинникової стрілки (рис. 9.1,а), та **лівоорієнтованою** трійкою векторів, якщо означений поворот здійснюється за годинниковою стрілкою (рис. 9.1,б).

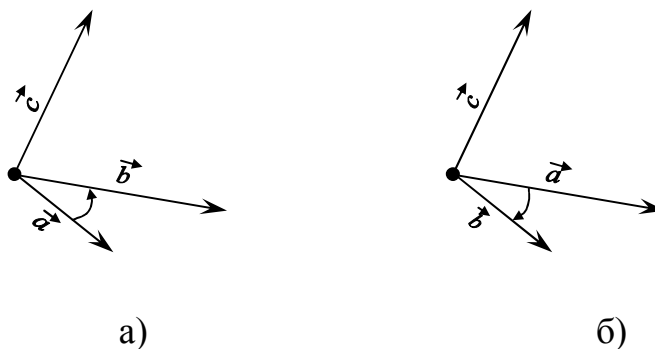


Рисунок 9.1

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – трійка векторів заданої орієнтації. Тоді наступні трійки векторів $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ та $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$, утворені внаслідок циклічного переставлення заданих векторів, є трійками такої самої орієнтації, що й задана трійка векторів.

Якщо в заданій трійці векторів певної орієнтації замінити місцями лише два сусідніх вектори, то трійки векторів $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ та $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ матимуть орієнтацію, протилежну відносно до заданої.

9.2 Визначення векторного добутку двох векторів

Визначення. *Векторним добутком* $\vec{a} \times \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{r}$, який задовольняє такі умови:

- 1) вектор $\vec{r}$ є перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{r}$ має такий напрямок, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}$ утворюють правоорієнтовану трійку векторів;
- 3) модуль вектора $\vec{r}$ визначається за формулою

$$|\vec{r}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi,$$

тобто

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad (9.1)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Для позначення векторного добутку векторів: окрім символу $\vec{a} \times \vec{b}$, використовують також символ $[\vec{a}; \vec{b}]$.

9.3 Геометричні властивості векторного добутку векторів

1. Синус кута між двома векторами

Синус кута між двома ненульовими векторами дорівнює модулю векторного добутку цих векторів, поділеному на добуток їхніх модулів.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad (9.2)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Справедливість рівності (9.2) випливає з формули (9.1).

2. Необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів

Для того щоб два ненульових вектори були колінеарними, необхідно та достатньо, щоби модуль їхнього векторного добутку дорівнював нулю:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad (9.3)$$

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними. Доведемо, що їхній векторний добуток дорівнює нулю.

Кут між векторами $\varphi = 0^\circ$ або $\varphi = 180^\circ$. Тоді $\sin \varphi = 0$.

Скориставшись формулою (9.1), дістанемо

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| 0 = 0,$$

звідки $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай модуль векторного добутку векторів дорівнює нулю. Доведемо, що вектори є колінеарними.

Якщо $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, то $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \sin \varphi = 0$, а це означає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

3. Площа паралелограма

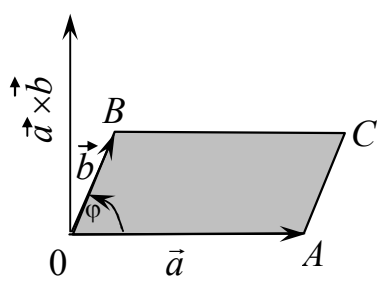


Рисунок 9.2

Площа паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах як на сторонах дорівнює модулю векторного добутку цих векторів (рис. 9.2).

Д о в е д е н н я

З визначення векторного добутку векторів виходить

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

З іншого боку, площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах визначається за формулою

$$S_{\Delta} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \text{ (кв. од.)}.$$

Отже, площу S паралелограма може бути знайдено за формулою

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ (кв. од.)} \quad (9.4)$$

4. Площа трикутника

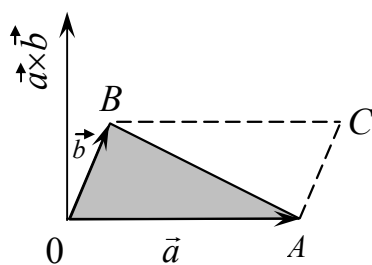


Рисунок 9.3

Площа трикутника, побудованого на зведених до спільного початку векторах, як на сторонах (рис. 9.3), дорівнює половині модуля векторного добутку цих векторів.

Д о в е д е н н я

Оскільки площа трикутника OAB дорівнює половині площі паралелограма $OACB$, то з формули (9.4) виходить, що площа трикутника визначається формулою

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ (кв. од.)} \quad (9.5)$$

9.4 Алгебраїчні властивості векторного добутку векторів

1. Векторний добуток векторів є антикомутативним, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедливою є рівність

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \quad (9.6)$$

2. Векторний добуток векторів є асоціативним відносно чисельного множника, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і дійсного числа λ справедливою є рівність

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (9.7)$$

3. Векторний добуток векторів є дистрибутивним відносно суми векторів, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливою є рівність

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \quad (9.8)$$

4. Векторний добуток будь-якого вектора на самого себе дорівнює нульовому векторові, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедливою є рівність

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}. \quad (9.9)$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливості властивостей 1...4.

9.5 Векторний добуток векторів у координатній формі

Теорема. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то їхній векторний добуток визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (9.10)$$

Д о в е д е н н я

Скориставшись визначенням векторного добутку векторів, визначимо векторні добутки базисних векторів:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}; & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}. \end{array}$$

Подамо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ розкладеними за базисом:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + \\ &+ (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Використовуючи символ визначника, останній результат можна записати в формі

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Розглядаючи праву частину цієї рівності як розкладання визначника третього порядку за елементами першого рядка, дістанемо формулу (9.10):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

9.6 Деякі властивості векторного добутку векторів у координатній формі

1. Синус кута між двома векторами

Синус кута між двома ненульовими векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ визначається за формулою

$$\sin \varphi = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \quad (9.11)$$

де $\text{mod } p$ – модуль числа p .

Д о в е д е н н я

Спираючись на формули (9.10), (8.12) та (9.2), маємо (9.11):

$$\sin \varphi = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

2. Необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів у координатній формі

Для того щоб два ненульових вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ були колінеарними, необхідно та достатньо, щоб їхні координати задовольняли умову

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0}, \quad (9.12)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – вектори ортонормованого базису.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними. Доведемо, що їхній векторний добуток дорівнює нулю.

Оскільки $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ((9.3) п. 2) і є справедливою рівність (9.12):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується рівність (9.12). Доведемо, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \text{ отже } |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.$$

Як виходить з властивості (9.3) п. 2, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними.

3. Площа паралелограма

Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ задано декартовими прямокутними координатами, то площа S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які мають спільний початок, як на сторонах визначається за формулою

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} \quad (\text{кв. од.}). \quad (9.13)$$

Д о в е д е н н я

Відомо, що $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ і що

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\},$$

тоді маємо формулу (9.13):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} \quad (\text{кв. од.}).$$

4. Площа трикутника

Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ задано декартовими прямокутними координатами, то площа S_{Δ} трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які мають спільний початок, як на сторонах визначається за формулою:

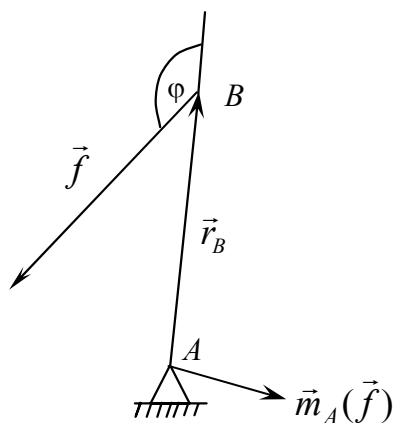
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} \quad (\text{кв. од.}). \quad (9.14)$$

Справедливість формули (9.14) випливає з формул (9.5) та (9.13).

9.7 Деякі застосування векторного добутку векторів у фізиці

1. Момент сили відносно точки

Нехай у деякій точці B прикладено силу $\vec{f}$. Моментом сили $\vec{f}$, прикладеної у точці B , відносно довільної точки A (рис. 9.4) називається вектор $\vec{m}_A(\vec{f})$, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}_B = \overrightarrow{AB}$ на вектор сили $\vec{f}$:



$$\vec{m}_A(\vec{f}) = \vec{r}_B \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}, \quad (9.15)$$

якщо

$$\vec{r}_B = \{r_x; r_y; r_z\}; \quad \vec{f} = \{f_x; f_y; f_z\}.$$

Рисунок 9.4

2. Момент сил, які діють на диполь

Момент $\vec{m}_D$ сил, які діють на диполь в однорідному зовнішньому електричному полі, визначається в фізиці за допомогою векторного добутку в такий спосіб:

$$\vec{m}_D = \vec{p} \times \vec{e}; \quad (9.16)$$

$$|\vec{m}_D| = |\vec{p}| |\vec{e}| \sin \varphi, \quad (9.17)$$

де $\vec{p} = q\vec{l}$ – вектор електричного моменту диполя; вектор $\vec{l} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ прямує від від'ємного до додатного заряду диполя; $\vec{e}$ – вектор напруженості електричного поля (рис. 9.5). Цей момент можна записати і в інший спосіб, відповідно до його механічного змісту, як момент пари сил $\vec{f}_1$ та $\vec{f}_2$ взаємодії точкових зарядів q_1 та q_2 із зовнішнім електричним полем

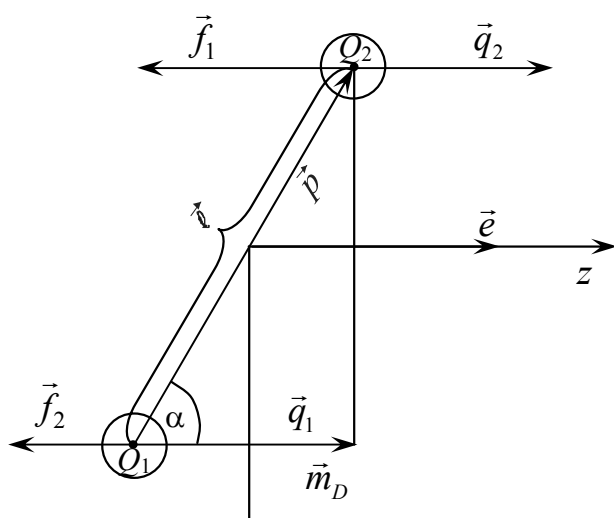


Рисунок 9.5

мує від від'ємного до додатного заряду диполя; $\vec{e}$ – вектор напруженості електричного поля (рис. 9.5). Цей момент можна записати і в інший спосіб, відповідно до його механічного змісту, як момент пари сил $\vec{f}_1$ та $\vec{f}_2$ взаємодії точкових зарядів q_1 та q_2 із зовнішнім електричним полем

$$\vec{m}_D = \vec{l} \times \vec{f}_k, \quad k = 1, 2. \quad (9.18)$$

Вектор $\vec{l}$ прямує до точки прикладання сили $\vec{f}_k = q_k \vec{e}$, де q_k – заряд зі своїм знаком.

3. Сила, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі

Сила $\vec{f}_l$, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі, визначається за формулою

$$\vec{f}_l = i(\vec{l} \times \vec{h}) \frac{1}{c^2} \quad (9.19)$$

або

$$\vec{f}_l = \frac{\vec{i} \times \vec{h}}{c^2}, \quad (9.20)$$

де c – електродинамічна стала; $\vec{i}$ – вектор сили струму, що проходить у провіднику; $\vec{h}$ – вектор напруженості магнітного поля, в якому рухається провідник довжиною l (напрямок вектора $\vec{l}$ збігається з напрямком струму); $\vec{i}_l$ – сила, що діє на провідник одиничної довжини (рис. 9.6)

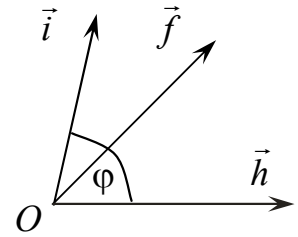


Рисунок 9.6

4. Деякі характеристики електромагнітних полів

У перебігу вивчення закономірностей поширювання електромагнітних хвиль в однорідному ізотропному середовищі можна за допомогою векторного добутку визначити такі векторні величини, як швидкість $\vec{V}$ поширювання хвилі

$$\vec{V} = \vec{e} \times \vec{h}, \quad (9.21)$$

де $\vec{e}$ та $\vec{h}$ – вектори напруженості відповідно електричного та магнітного полів (рис. 9.7); вектор $\vec{p}$ – густини потоку енергії, яка переноситься полем (вектор Пойтинга) (рис. 9.8).

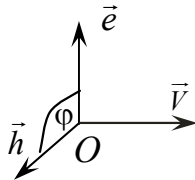


Рисунок 9.7

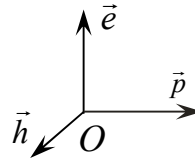


Рисунок 9.8

Визначається вектор $\vec{p}$ за формулою

$$\vec{p} = \frac{c}{2\pi} (\vec{e} \times \vec{h}) \quad (9.22)$$

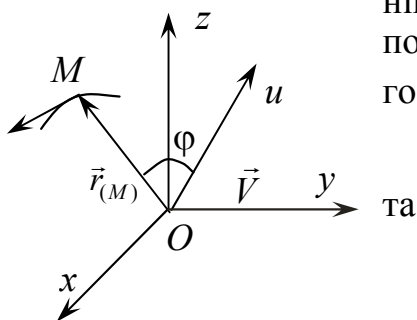
або

$$\vec{p} = \frac{c}{2\pi} \vec{V}, \quad (9.23)$$

де c – швидкість поширювання електромагнітних хвиль у порожнині. Формула є справедливою у змішаній або гауссовій системах одиниць.

5. Швидкість довільної точки тіла обертання

Якщо тіло обертається відносно нерухомої точки O , то у будь-який час вектор $\vec{\omega}$ кутової швидкості обертання збігається за напрямком з миттєвою віссю обертання u , яка проходить через нерухому точку O (рис. 9.9). В такому разі лі-



нійну швидкість довільної точки M тіла, розміщеної поза віссю u , можна визначити за допомогою векторного добутку векторів $\vec{\omega}$ та $\vec{r}(M)$:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.24)$$

$$|\vec{V}_M| = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin \varphi. \quad (9.25)$$

Рисунок 9.9

9.8 Приклади

Приклад 9.1 Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, знаючи, що:

$$1) |\vec{a}| = 5; |\vec{b}| = 4; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6};$$

$$2) |\vec{p}| = 2; |\vec{q}| = 7; (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}; \vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}; \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}.$$

Розв'язання

$$1) |\vec{a} \times \vec{b}| = 5 \cdot 4 \sin \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

$$\begin{aligned} 2) |\vec{a} \times \vec{b}| &= |(2\vec{p} - \vec{q}) \times (3\vec{p} + 2\vec{q})| = |6\vec{p} \times \vec{p} - 3\vec{q} \times \vec{p} + 4\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{q}| = \\ &= |6 \cdot \vec{0} + 7\vec{p} \times \vec{q} - 2 \cdot \vec{0}| = 7 |\vec{p} \times \vec{q}| = 7 \cdot 2 \cdot 7 \sin \frac{\pi}{4} = 49\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) 10; 2) $49\sqrt{2}$.

Приклад 9.2 На векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зведених до спільного початку, як на сторонах побудовано паралелограм. Знайти площу паралелограма, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$; $\vec{b} = 2\vec{p} + 7\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 5$, а кут φ між векторами $\vec{p}$ та $\vec{q}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання

Площу паралелограма знайдемо за формулою (9.4)

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ (кв. од.)}.$$

Спочатку відшукаємо векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (2\vec{p} + 7\vec{q}) = 6\vec{p} \times \vec{p} + 21\vec{p} \times \vec{q} - 8\vec{q} \times \vec{p} - 28\vec{q} \times \vec{q} = \\ &= 21\vec{p} \times \vec{q} + 8\vec{p} \times \vec{q} = 29(\vec{p} \times \vec{q}); \end{aligned}$$

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \varphi; \quad |\vec{p} \times \vec{q}| = 4 \cdot 5 \sin \frac{\pi}{6} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Далі знаходимо площу паралелограма.

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 29 |\vec{p} \times \vec{q}| = 29 \cdot 10 = 290 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $S = 290$ (кв. од.).

Приклад 9.3 Знайти векторні добутки векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{b} \times \vec{a}$, а також їхні модулі, якщо

1) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{b} = \{4; 0; -5\}$;

2) $\vec{p} = \{2; 1; 7\}$; $\vec{q} = \{0; -1; 4\}$; $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$.

Розв'язання

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 19\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Отже, $\vec{b} \times \vec{a} = -10\vec{i} - 19\vec{j} - 8\vec{k}$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{10^2 + 19^2 + 8^2} = \sqrt{525} \approx 22,9.$$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{p} - 2\vec{q}) \times (5\vec{p} + \vec{q}) = 15\vec{p} \times \vec{p} - 10\vec{q} \times \vec{p} + 3\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{q} =$

$$= 15 \cdot 0 + 13\vec{p} \times \vec{q} - 20 \cdot 0 = 13\vec{p} \times \vec{q} = 13 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 13(11\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}) =$$

$$= 143\vec{i} - 104\vec{j} - 26\vec{k}.$$

Звідси $\vec{b} \times \vec{a} = -143\vec{i} + 104\vec{j} + 26\vec{k}$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{143^2 + (-104)^2 + (-26)^2} = 13\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-2)^2} =$$

$$= 13\sqrt{121 + 64 + 4} = 13\sqrt{189} \approx 13 \cdot 13,7 = 178,1.$$

Відповідь:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = 10\vec{i} + 19\vec{j} + 8\vec{k}$; $\vec{b} \times \vec{a} = -10\vec{i} - 19\vec{j} - 8\vec{k}$; $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| \approx 22,9$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 143\vec{i} - 104\vec{j} - 26\vec{k}$; $\vec{b} \times \vec{a} = -143\vec{i} + 104\vec{j} + 26\vec{k}$; $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| \approx 178,1$.

Приклад 9.4 Обчислити синус і косинус кута φ між векторами $\vec{a} = \{2; -2; 1\}$ та $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$.

Розв'язання

З формул (9.2) та (8.5) маємо

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}; \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k};$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{225 + 100 + 100} = \sqrt{425}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3; \quad |\vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 4; \quad |\vec{a}| |\vec{b}| = 3 \cdot 7 = 21.$$

Тоді $\sin \varphi = \frac{\sqrt{425}}{21}$; $\cos \varphi = \frac{4}{21}$.

Перевіримо правильність обчислень, використовуючи основну тригонометричну тотожність.

$$\left(\frac{\sqrt{425}}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2 = \frac{425+16}{21^2} = \frac{441}{441} = 1.$$

В і д п о в і д ь: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{425}}{21}$; $\cos \varphi = \frac{4}{21}$.

Приклад 9.5 Задано вершини трикутника ABC (рис. 9.10): $A(-2; 4)$, $B(-7; 2)$, $C(4; 1)$. Знайти площу трикутника ABC та довжину висоти, яку проведено з точки A .

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо вектори $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BA} = \{5; 2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{11; -1\}$.

Якщо вектори $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$ розглядати у просторі, то їхні координати будуть такими: $\overrightarrow{BA} = \{5; 2; 0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{11; -1; 0\}$. Тоді

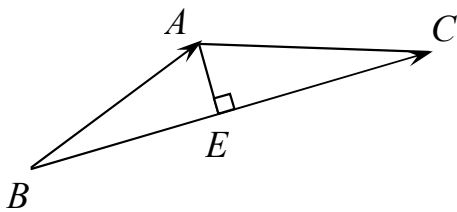


Рисунок 9.10

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -27\vec{k}.$$

Тоді

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 27.$$

Отже, за формулою (9.14) маємо:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13,5 \text{ (од. кв.)}.$$

Знайдемо $|\overrightarrow{BC}|$:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}.$$

Оскільки площу трикутника ABC можна знайти і за формулою

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| |AE|,$$

то матимемо

$$h = |AE| = \frac{2S_{\Delta}}{|\overrightarrow{BC}|}; \quad h = \frac{2 \cdot 13,5}{\sqrt{122}} = \frac{27}{\sqrt{122}} \text{ (од. довж.)}.$$

Заданий трикутник було розглянуто у прикладі 8.11. Порівняйте методи знаходження висоти та площі трикутника.

В і д п о в і д ь: $h = \frac{27}{\sqrt{122}}$; $S_{\Delta} = 13,5$ (од. кв.).

Приклад 9.6 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах, якщо задано точки $A(6; 5; -1)$; $B(12; 1; 0)$; $C(1; 4; -5)$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB} = \{6; -4; 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-5; -1; -4\}$, а також векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 1 \\ -5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 17\vec{i} + 19\vec{j} - 26\vec{k}.$$

Площа S паралелограма визначається за формулою $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ (од. кв.).
Отже,

$$S = \sqrt{17^2 + 19^2 + (-26)^2} = \sqrt{1326} \approx 36,4 \text{ (кв. од.)}.$$

В і д п о в і д ь: $S \approx 36,4$ (кв. од.).

Приклад 9.7 Знайти відстань від точки $C(3; 2; -2)$ до прямої, яка проходить через точки $A(1; 2; -3)$ та $B(5; 2; 0)$.

Розв'язання

З точки C на пряму AB опускаємо перпендикуляр CE (рис. 9.11). Відстань d від точки C до прямої AB дорівнює $|CE|$. Побудуємо $\triangle ABC$. Тоді

$$|CE| = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|\overrightarrow{AB}|};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{2; 0; 1\}, \quad \overrightarrow{AB} = \{4; 0; 3\};$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\vec{j}, \quad |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = 2.$$

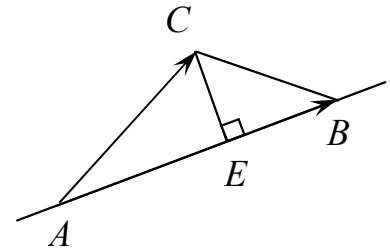


Рисунок 9.11

Отже, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (кв. од.).

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5. \quad |CE| = \frac{2}{5} \text{ (од. довж.)}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{2}{5}$ (од. довж.).

Приклад 9.8 Силу $\vec{f} = \{1; 3; 2\}$ прикладено у точці $B(3; 4; 5)$ (рис. 9.6).
Знайти момент сили $\vec{f}$ відносно точки $A(1; 2; 3)$

Розв'язання

$\vec{r}_B = \overrightarrow{AB} = \{2; 2; 2\}$. Тоді

$$\vec{m}_A(\vec{f}) = \vec{r}_B \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

В і д п о в і д ь: $\vec{m}_A(\vec{f}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Приклад 9.9 Задано точку $A(1; 4; -1)$, точку $B(3; 2; 4)$, а також сили $\vec{f}_1 = \{2; 5; -1\}$, $\vec{f}_2 = \{3; 4; 2\}$, $\vec{f}_3 = \{-1; 3; 5\}$. Знайти моменти цих сил, прикладених у точці A , відносно точки B . Переконайтесь у тому, що момент рівнодійної цих сил, прикладених у точці A , дорівнює сумі моментів складових сил, прикладених у тій самій точці A відносно точки B .

Розв'язання

Знайдемо вектор $\vec{r}_B = \overline{AB}$:

$$\vec{r}_B = \overline{AB} = \{2; -2; 5\}.$$

Далі визначимо моменти кожної із заданих сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$:

$$\vec{m}_A(\vec{f}_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -23\vec{i} + 12\vec{j} + 14\vec{k}; \quad \vec{m}_A(\vec{f}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 11\vec{j} + 14\vec{k};$$

$$\vec{m}_A(\vec{f}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 15\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Визначимо рівнодійну $\vec{f}$ сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ та її момент:

$$\vec{f} = \{4; 12; 6\};$$

$$\vec{m}_A(\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 12 & 6 \end{vmatrix} = -72\vec{i} + 8\vec{j} + 32\vec{k};$$

$$\vec{m}_A(\vec{f}_1) + \vec{m}_A(\vec{f}_2) + \vec{m}_A(\vec{f}_3) = (-23\vec{i} + 12\vec{j} + 14\vec{k}) + (-24\vec{i} + 11\vec{j} + 14\vec{k}) + (-25\vec{i} - 15\vec{j} + 4\vec{k}) = -72\vec{i} + 8\vec{j} + 32\vec{k} = \vec{m}_A(\vec{f}).$$

Отже, момент рівнодійної сил дорівнює сумі моментів цих сил, якщо вони прикладені в одній і тій самій точці.

10 МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

10.1 Визначення мішаного добутку трьох векторів

Визначення. *Мішаним добутком* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $(\vec{a} \times \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$.

Із визначення випливає, що мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ можна подати у такий спосіб:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi, \text{ де } \varphi - \text{кут між вектором } \vec{a} \times \vec{b} \text{ та вектором } \vec{c}.$$

Тому

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi \sin \psi, \quad (10.1)$$

де ψ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Для позначення мішаного добутку векторів, окрім символу $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, використовують також символ $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ або $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

10.2 Геометричні властивості мішаного добутку векторів

1. Об'єм паралелепіпеда, поданий через мішаний добуток векторів

Мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ зі спільним початком, з точністю до знака $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Д о в е д е н н я

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють правоорієнтовану трійку векторів. Побудуємо на цих векторах як на сторонах паралелепіпед (рис. 10.1).

Як відомо, об'єм паралелепіпеда може бути знайдений за формулою $V = SH$.

В основі паралелепіпеда лежить паралелограм, площа S якого знаходиться за формулою

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ (кв. од.)}.$$

Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ є перпендикулярний до основи паралелепіпеда, і при цьому нескладно помітити, що висота H паралелепіпеда може бути визначена в такий спосіб

$$H = \text{пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = |\vec{c}| \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$.

Отже, об'єм паралелепіпеда можна визначити за формулою

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \text{ (куб. од.)}.$$

Припустимо тепер, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють лівоорієнтовану трійку векторів (рис. 10.2).

На відміну від попереднього випадку, кут φ між векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$ є тупим кутом, у зв'язку з чим $\text{пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = |\vec{c}| \cos \varphi$ є числом від'ємним. Отже,

$H = -|\vec{c}| \cos \varphi$. Тоді об'єм паралелепіпеда як невід'ємна величина визначається за формулою

$$V = -|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi \text{ (од. куб.)}.$$

Дійшли висновку, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторах як на сторонах дорівнює мішаному добутку векторів з точністю до знака, тобто

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|. \quad (10.2)$$

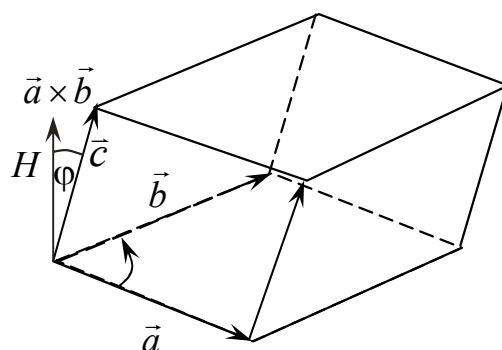


Рисунок 10.1

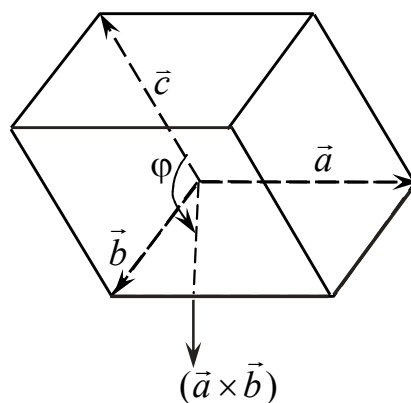


Рисунок 10.2

2. Об'єм тетраедра, виражений через мішаний добуток векторів

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які мають спільний початок, як на сторонах визначається за формулою

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (\text{куб. од.}). \quad (10.3)$$

Справедливість формули випливає з того, що паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на сторонах, є рівновеликим з шістьма тетраедрами, побудованими на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на сторонах, якщо ці вектори мають спільний початок.

3. Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів.

Для того, щоб три ненульових вектори були компланарними, необхідно та достатньо, щоб їхній мішаний добуток дорівнював нулю.

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є компланарними. Доведемо, що $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Розглянемо випадок, коли серед компланарних векторів є колінеарні. Наприклад, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ і тоді $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Якщо ж $\vec{a} \parallel \vec{c}$, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$ і тому $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

У загальному випадку, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є компланарними, то вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ є перпендикулярним до площини, яка містить вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Оскільки вектор $\vec{c}$ через компланарність з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є паралельним тій самій площині, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Отже, якщо вектори є компланарними, то мішаний добуток векторів дорівнює нулю.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай мішаний добуток векторів дорівнює нулю. Покажемо, що вектори є компланарними.

Згідно з умовою, маємо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \psi \cdot |\vec{c}| \cos \varphi = 0, \quad (10.4)$$

де ψ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; φ – кут між векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$.

Рівність (10.4) можлива у таких випадках:

- 1) хоча б один з векторів є нульовим, але тоді усі вектори є компланарними;
- 2) $\sin \psi = 0$, тоді $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і, виходить, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні;
- 3) $\cos \varphi = 0$, тоді $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, але ж $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ та $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ за визначенням векторного добутку. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

10.3 Алгебраїчні властивості мішаного добутку векторів

1. Мішаний добуток векторів є комутативним відносно операції скалярного множення, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедлива рівність

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (10.5)$$

2. У мішаному добутку векторів операції векторного та скалярного множення можна міняти місцями, тобто для будь-яких трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедливою є рівність

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (10.6)$$

3. Мішаний добуток векторів не змінюється від циклічного переставлення його множників, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедливі рівності

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}; \quad (10.7)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}. \quad (10.7')$$

4. Переставлення двох сусідніх множників у мішаному добутку векторів змінює знак векторного добутку векторів на протилежний, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедливі рівності

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}; \quad (10.8)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}; \quad (10.8')$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}. \quad (10.8'')$$

5. Мішаний добуток векторів є дистрибутивним відносно суми векторів, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ справедливі рівності

$$((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \cdot \vec{d} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{d} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{d}; \quad (10.9)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}. \quad (10.9')$$

6. Мішаний добуток векторів є асоціативним відносно числового множника, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ та дійсного числа λ справедливі рівності

$$((\lambda \vec{a}) \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}); \quad (10.10)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{c}) = \lambda((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}). \quad (10.10')$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливості властивостей 1...6.

10.4 Мішаний добуток векторів у координатній формі

Теорема. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задано декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$; $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то мішаний добуток векторів визначається за формулою

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (10.11)$$

Д о в е д е н н я

Запишемо векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у координатній формі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.$$

Скориставшись формулою (8.11), знаходимо у координатній формі скалярний добуток векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

За властивостями визначника

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Отже, ми впевнились у справедливості формули (10.11).

10.5 Деякі властивості мішаного добутку векторів у координатній формі

1. Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів у координатній формі

Для того, щоб три вектори були компланарними, необхідно та достатньо, щоб визначник, складений з їхніх координат, дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (10.12)$$

Д о в е д е н н я

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ – компланарні. Доведемо справедливість рівності (10.12).

За умовою, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні вектори, отже, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Тоді в координатній формі маємо (10.12):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Достатність. Нехай справедлива рівність (10.12):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Доведемо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

З рівності (10.12) виходить, що $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

Висновок. Для того, щоб три вектори були лінійно залежними, необхідно та достатньо, щоб визначник, складений з їхніх координат, дорівнював нулю.

2. Об'єм паралелепіпеда, виражений через мішаний добуток векторів

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ та $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, що виходять з однієї точки, як на сторонах, визначається за формулою

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ (куб. од.)}. \quad (10.13)$$

Справедливість рівності (10.13) виходить з формул (10.2) та (10.3).

3. Об'єм тетраедра, виражений через мішаний добуток векторів

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, які мають спільний початок, як на сторонах, визначається за формулою

$$V = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ (куб. од.)}. \quad (10.14)$$

Справедливість рівності (10.14) виходить з формул (10.3) та (10.11).

ЗАУВАЖЕННЯ. Систематизувати інформацію щодо дій, які можна виконувати над векторами, допоможе додаток А.

10.6 Приклади

Приклад 10.1 Задано вектори $\vec{a} = \{1; -4; 2\}$; $\vec{b} = \{3; 5; -3\}$; $\vec{c} = \{2; 7; -1\}$.

Знайти:

$$1) (2\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}); \quad 2) (3\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}); \quad 3) ((3\vec{a}) \times (2\vec{b})) \cdot (\vec{b} + 4\vec{c}).$$

Розв'язання

1) Знайдемо вектори $2\vec{a}$ та $\vec{b} - \vec{a}$:

$$2\vec{a} = \{2; -8; 4\}; \quad \vec{b} - \vec{a} = \{2; 9; -5\}.$$

Тоді

$$(2\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2 \cdot 2 + (-8) \cdot 9 + 4 \cdot (-5) = -88.$$

2) Знайдемо вектори $3\vec{b}$ та $\vec{a} + \vec{b}$:

$$3\vec{b} = \{9; 15; -9\}; \quad \vec{a} + \vec{b} = \{4; 1; -1\}.$$

Тоді

$$(3\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 15 & -9 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-6; -27; -51\}.$$

3) Знайдемо вектори $3\vec{a}$, $2\vec{b}$, $\vec{b} + 4\vec{c}$:

$$3\vec{a} = \{3; -12; 6\}, \quad 2\vec{b} = \{6; 10; -6\}, \quad \vec{b} + 4\vec{c} = \{11; 33; -7\}.$$

Тоді

$$((3\vec{a}) \times (2\vec{b})) \cdot (\vec{b} + 4\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 6 & 10 & -6 \\ 11 & 33 & -7 \end{vmatrix} = -3336.$$

Відповідь: 1) -88 ; 2) $\{-6; -27; -51\}$; 3) -3336 .

Приклад 10.2 Задано трикутник ABC ; AE – його медіана (рис. 10.3).

Знайти мішаний добуток векторів $\vec{AF} = \frac{1}{8}\vec{AB}$, $\vec{AR} = \frac{3}{5}\vec{AE}$ та $\vec{AK} = \frac{1}{10}\vec{AC}$.

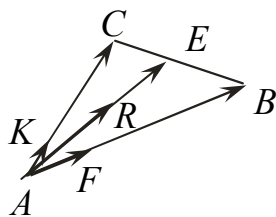


Рисунок 10.3

Розв'язання

Вектори $\vec{AB}$, $\vec{AE}$, $\vec{AC}$ лежать у площині трикутника ABC . Отже, ці вектори є компланарними. Зрозуміло, що вектори $\vec{AF}$, $\vec{AR}$ та $\vec{AK}$ є також компланарними. У такому разі їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Відповідь: $(\vec{AF} \times \vec{AR}) \cdot \vec{AK} = 0$.

Приклад 10.3 Задано вектори $\vec{a} = \{5; -1; 3\}$; $\vec{b} = \{4; -2; 1\}$; $\vec{c} = \{3; 1; 7\}$.

Чи існує поміж цими векторами лінійна залежність?

Розв'язання

Знайдемо мішаний добуток заданих векторів

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -20.$$

Мішаний добуток векторів відрізняється від нуля. Це означає, що вектори є некомпланарними, а отже, і лінійно незалежними.

В і д п о в і д ь: лінійно незалежні.

Приклад 10.4 Дано чотири точки $M_1(2; -1; 1)$, $M_2(5; 5; 4)$, $M_3(3; 2; -1)$ та $M_4(4; 1; 3)$. Перевірити, чи належать ці точки до однієї площини і в разі заперечної відповіді знайти:

- 1) площу трикутника $M_1M_2M_3$;
- 2) довжину висоти трикутника $M_1M_2M_3$, опущеної з вершини M_1 на сторону M_2M_3 ;
- 3) об'єм тетраедра, який побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ як на сторонах;
- 4) довжину висоти тетраедра, опущеної з вершини M_4 на основу тетраедра $M_1M_2M_3$.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 належать до однієї площини, то вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ є компланарними, а визначник, складений з їхніх координат, дорівнює нулю.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3; 6; 3\}; \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \{1; 3; -2\}; \quad \overrightarrow{M_1M_4} = \{2; 2; 2\}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ некомпланарні.

- 1) Трикутник $M_1M_2M_3$ побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$ як на сторонах (рис. 10.4).

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}| \text{ (кв. од.)}.$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3; 6; 3\}; \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \{1; 3; -2\};$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k};$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}| = \sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{531} \approx 23;$$

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} \approx 11,5 \text{ (кв. од.)}.$$

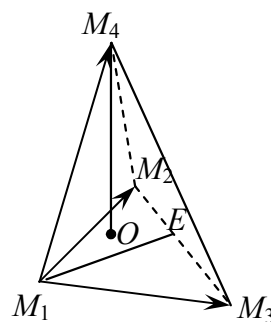


Рисунок 10.4

2) Нехай M_1E – висота трикутника, яку опущено на сторону M_2M_3 .

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} |M_1E| |M_2M_3|.$$

Тоді

$$|M_1E| = \frac{2S_{\Delta M_1M_2M_3}}{|M_2M_3|}; \quad |M_2M_3| = |\overrightarrow{M_2M_3}|; \quad \overrightarrow{M_2M_3} = \{-2; -3; -5\};$$

$$|\overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38} \approx 6,2; \quad |M_2M_3| = \frac{23}{6,2} = 7,4.$$

$$|M_1E| = \frac{2 \cdot 11,5}{7,4} \approx 3,1 \text{ (од. довж.)}.$$

3) Об'єм тетраедра визначаємо за допомогою мішаного добутку векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$. Знайдемо $\overrightarrow{M_1M_4} = \{2; 2; 2\}$, тоді

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18;$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4}| = 3 \text{ (куб. од.)}.$$

4) Нехай M_4O – висота піраміди.

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\Delta M_1M_2M_3} |M_4O|; \quad |M_4O| = \frac{3V_{\text{тетр}}}{S_{\Delta M_1M_2M_3}}; \quad |M_4O| = \frac{3 \cdot 3}{11,5} \approx 0,8.$$

В і д п о в і д ь: 1) $S_{\Delta M_1M_2M_3} \approx 11,5$ (кв. од.); 2) $|M_1E| \approx 3,1$ (од. довж.);

3) $V_{\text{тетр}} = 3$ (куб. од.); 4) $|M_4O| \approx 0,8$ (од. довж.).

Приклад 10.5 На векторах

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{4; 3; 0\}, \quad \overrightarrow{M_1M_4} = \{2; 1; 2\}, \quad \overrightarrow{M_1M_5} = \{-2; -2; 5\}$$

як на сторонах побудовано паралелепіпед $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$.

Знайти:

1) об'єм паралелепіпеда; 2) площі граней паралелепіпеда; 3) висоту паралелепіпеда, проведену з точки M_7 ; 4) косинус кута φ_1 між ребром M_1M_2 та діагоналлю M_5M_3 ; 5) кут φ_2 між гранями $M_1M_2M_3M_4$ та $M_1M_4M_8M_5$.

Р о з в ' я з а н н я

1) Об'єм паралелепіпеда знайдемо за формулою (10.13):

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = |20 - 18 + 16 - 30| = 12 \text{ (куб. од.)}.$$

2) Площі граней паралелепіпеда знайдемо, спираючись на формулу (9.13).

Паралелограм $M_1M_2M_3M_4$ побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_4}$ як на сторонах:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k};$$

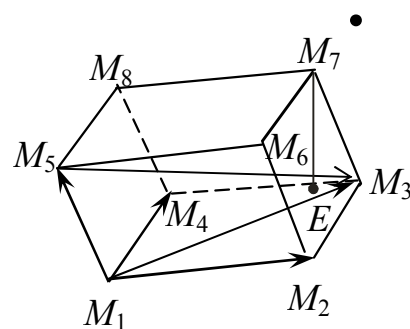


Рисунок 10.5

$$S_{M_1M_2M_3M_4} = S_{M_5M_6M_7M_8} = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{104} \approx 10,2 \text{ (кв. од.)}.$$

Паралелограм $M_1M_4M_8M_5$ побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_4}$ та $\overrightarrow{M_1M_5}$ як на сторонах.

$$\overrightarrow{M_1M_4} \times \overrightarrow{M_1M_5} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 16\vec{j} - \vec{k}.$$

$$S_{M_1M_4M_8M_5} = S_{M_2M_3M_7M_6} = \sqrt{9^2 + (-16)^2 + (-1)^2} = \sqrt{338} \approx 18,4 \text{ (кв. од.)}.$$

Паралелограм $M_1M_2M_6M_5$ побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_5}$ як на сторонах.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_5} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 20\vec{j} + \vec{k};$$

$$S_{M_1M_2M_6M_5} = S_{M_4M_3M_7M_8} = \sqrt{15^2 + (-20)^2 + 1^2} = \sqrt{626} \approx 25 \text{ (кв. од.)}.$$

3) Знайдемо висоту H паралелепіпеда. Відомо, що об'єм паралелепіпеда може бути знайдено за формулою $V = SH$, де $H = |M_7E|$. Об'єм паралелепіпеда

$V = 12$ (куб. од.). Площа основи $S_{M_1M_2M_3M_4} = \sqrt{104}$ (кв. од.). Тоді $H = \frac{V}{S}$, тобто

$$H = \frac{12}{\sqrt{104}} \approx 1,2 \text{ (од. довж.)}.$$

4) Для того щоб знайти кут φ_1 між ребром M_1M_2 та діагоналлю M_5M_3 , треба знайти вектор $\overrightarrow{M_5M_3}$. Зробимо це послідовно:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_1M_4} = \{4 + 2; 3 + 1; 0 + 2\} = \{6; 4; 2\};$$

$$\overrightarrow{M_5M_3} = \overrightarrow{M_1M_3} - \overrightarrow{M_1M_5} = \{6 + 3; 4 + 2; 2 - 5\} = \{9; 6; -3\}.$$

Далі за формулою (8.12) можна знайти кут φ_1 .

$$\cos \varphi_1 = \frac{4 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \sqrt{9^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{54}{\sqrt{25} \sqrt{126}} = \frac{54}{15\sqrt{14}} \approx 0,96.$$

Тому $\varphi_1 = \arccos \frac{54}{15\sqrt{14}} \approx 15,8^\circ$.

5) Для того, щоб знайти кут φ_2 між гранями $M_1M_2M_3M_4$ та $M_1M_4M_8M_5$, достатньо знайти кут між векторами, перпендикулярними до цих площин.

За вектор, перпендикулярний до площини $M_1M_2M_3M_4$, може слугувати вектор $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}$, а для площини $M_1M_4M_8M_5$ – вектор $\overrightarrow{M_1M_4} \times \overrightarrow{M_1M_5}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} = \{6; -8; -2\}; \quad \overrightarrow{M_1M_4} \times \overrightarrow{M_1M_5} = \{9; -16; -1\}.$$

Тоді

$$\cos \varphi_2 = \frac{6 \cdot 9 + (-8)(-16) + (-2)(-1)}{\sqrt{64 + (-8)^2 + (-2)^2} \sqrt{9^2 + (-16)^2 + (-1)^2}} = \frac{184}{104\sqrt{338}} = \frac{46}{13\sqrt{13}} \approx 0,98.$$

Звідси $\varphi_2 = \arccos \frac{46}{13\sqrt{13}} \approx 11^\circ$.

В і д п о в і д ь: 1) $V = 12$ (куб. од.); 2) $S_{M_1M_4M_8M_5} \approx 18,4$ (кв. од.); $S_{M_1M_2M_3M_4} \approx 10,2$ (кв. од.); 3) $H \approx 1,2$ (од. довж.); 4) $\varphi_1 \approx 15^\circ 8'$; 5) $\varphi_2 \approx 11^\circ$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається вектором?
2. Що називається модулем вектора?
3. Який вектор називається нульовим вектором?
4. Що називається ортом?
5. Які вектори називаються колінеарними?
6. Чи існують вектори, колінеарні до нульового вектора?
7. Які вектори називаються рівними між собою?
8. Які вектори називаються компланарними?
9. Що називається сумою векторів?
10. Що називається різницею векторів?
11. Що називається добутком вектора на число?
12. У чому полягають властивості лінійних операцій над векторами?
13. Які вектори називаються лінійно залежними?
14. Які вектори називаються лінійно незалежними?
15. Сформулюйте теореми про лінійно залежні вектори.
16. У чому полягає необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів?
17. У чому полягає необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів?
18. Що називається базисом на площині?
19. Що називається базисом у просторі?
20. Який базис називається ортонормованим?
21. Якими бувають ортонормовані базиси?
22. Що називається координатами вектора у заданому базисі?
23. Скільки базисів існує на площині?
24. Скільки базисів існує у просторі?
25. Чи збігаються координати одного й того ж вектора у різних базисах?
26. Що називається проекцією вектора на вісь?
27. Сформулюйте основні властивості проекцій вектора на вісь.
28. Який геометричний зміст мають координати вектора у ортонормованому базисі?
29. Лінійні операції над векторами, заданими у координатній формі.
30. Необхідна та достатня умови колінеарності двох векторів у координатній формі.
31. Декартова прямокутна система координат.
32. Формули ділення відрізка у заданому відношенні.
33. Як знайти координати центра ваги трикутника?
34. Що називається скалярним добутком векторів?
35. Як визначається скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами?
36. Як визначається модуль вектора, заданого своїми координатами?
37. Як визначається косинус кута між двома векторами?

38. У чому полягає необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів?
39. Як можна знайти проекцію вектора, заданого своїми координатами, на вісь?
40. Сформулюйте алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів.
41. Що таке напрямні косинуси вектора і в чому полягає їхня основна властивість?
42. У чому полягає механічний зміст скалярного добутку векторів?
43. Що називається векторним добутком векторів?
44. Як визначається векторний добуток векторів, заданих своїми координатами?
45. Сформулюйте алгебраїчні властивості векторного добутку векторів.
46. У чому полягають геометричні властивості векторного добутку векторів?
47. Що називається мішаним добутком векторів?
48. Як визначається мішаний добуток векторів, заданих своїми координатами?
49. У чому полягають геометричні властивості мішаного добутку векторів?
50. У чому полягає необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів, заданих своїми координатами?
51. Сформулюйте алгебраїчні властивості мішаного добутку векторів.
52. Якщо хоча б один з векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$ є нульовим, то $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ та $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$. Чи є справедливим протилежне твердження: якщо $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ чи $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$, то хоча б один з векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$ є нульовим вектором?
53. Нехай $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – певні вектори, що задовольняють умову: $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{r} \cdot \vec{q}$ і при цьому вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$. Чи виходить з цього, що $\vec{p} = \vec{r}$?
54. Нехай $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – певні вектори, що задовольняють умову: $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r} \times \vec{q}$. Чи виходить з цього, що $\vec{p} = \vec{r}$?
55. Наведіть приклади, коли за допомогою векторної алгебри може бути доведено теореми з курсу елементарної геометрії.

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Задано вектори $\vec{a} = \{3; 2; -1\}$ та $\vec{b} = \{1; -3; 2\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $|\vec{a}| = 4|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}| = 5|\vec{b}|$; 4) інша відповідь?

2. Задано вектори $\vec{a} = \{2; -1; 4\}$ та $\vec{b} = \{5; 3; 1\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\text{пр}_{\vec{b}}|\vec{a}| = 3 \text{пр}_{\vec{a}}|\vec{b}|$; 2) $\text{пр}_{\vec{b}}|\vec{a}| = \text{пр}_{\vec{a}}|\vec{b}|$; 3) $\text{пр}_{\vec{b}}|\vec{a}| = 2 \text{пр}_{\vec{a}}|\vec{b}|$ непорівнянні;
4) інша відповідь?

3. Задано вектори $\vec{a} = \{4; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{3; 4; -1\}$; $\vec{c} = \{-8; -6; 2\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 2) $\vec{a} \parallel \vec{c}$; 3) $\vec{b} \parallel \vec{c}$; 4) інша відповідь?

4. Вектори $\vec{a} = \{5; \alpha; 4\}$ та $\vec{b} = \{\beta; 6; 3\}$ є колінеарними. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\alpha = 8; \beta = \frac{15}{4}$; 2) $\alpha = \frac{15}{8}; \beta = 4$; 3) $\beta = \frac{4}{15}; \alpha = \frac{1}{8}$; 4) інша відповідь?

5. Задано вектори $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{b} = \{3; -2; -1\}$; $\vec{c} = \{5; -7; 29\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 2) $\vec{a} \perp \vec{c}$; 3) $\vec{b} \perp \vec{c}$; 4) інша відповідь?

6. Задано вектори $\vec{a} = \{-2; -1; 3\}$; $\vec{b} = \{-8; 1; 2\}$; $\vec{c} = \{1; -3; -4\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}; \vec{c}})$; 2) $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}; \vec{c}})$; 3) $(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}; \vec{c}})$; 4) інша відповідь?

7. Задано вектори $\vec{a} = \{3; 5; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 2\}$; $\vec{c} = \{-7; -8; -1\}$; $\vec{d} = \{2; 3; 4\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) вектори $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ – компланарні;

2) вектори $\vec{a}; \vec{b}; \vec{d}$ – компланарні;

3) вектори $\vec{b}; \vec{c}; \vec{d}$ – компланарні;

4) інша відповідь?

8. Задано вектори $\vec{a} = \{-1; 3; -2\}$; $\vec{b} = \{6; -8; 4\}$. На векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зведених до спільного початку, як на сторонах побудовано трикутник ABC . На векторах $\vec{p} = \{1; -3; 2\}$ та $\vec{q} = \{3; -4; 2\}$, зведених до спільного початку, як на сторонах побудовано трикутник $A_1B_1C_1$; на векторах $\vec{r} = \{2; -6; 4\}$ та $\vec{m} = \{-18; 24; -12\}$, зведених до спільного початку, як на сторонах побудовано трикутник $A_2B_2C_2$. Знайдено площі цих трикутників. Яке з тверджень є справедливим:

1) $2S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1B_1C_1}$; 2) $6S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_2B_2C_2}$; 3) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_2B_2C_2} - S_{\Delta A_1B_1C_1}$;

4) інша відповідь?

9. Задано вектори $\vec{a} = \{5; -1; 4\}$ та $\vec{b} = \{3; 2; -7\}$. На векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зведених до спільного початку, як на сторонах побудовано паралелограм, площа якого дорівнює S (кв. од.). Яке з тверджень є справедливим:

1) $S = |\vec{a} \cdot \vec{b}|$; 2) $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$; 3) $S = \vec{a} \times \vec{b}$; 4) інша відповідь?

10. Задано ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$; 4) інша відповідь?

11. Задано вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, такі що $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{m} \times \vec{n}$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) вектори $\vec{p} - \vec{n}$ та $\vec{q} - \vec{m}$ – перпендикулярні;
2) вектори $\vec{p} - \vec{n}$ та $\vec{q} - \vec{m}$ – колінеарні;
3) вектори $\vec{p} - \vec{n}$ та $\vec{q} - \vec{m}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
4) інша відповідь?

12. Задано вектори $\vec{a} = \{3; -7; 1\}$ та $\vec{b} = \{3; 5; 1\}$. Сила $\vec{f} = \{14; 5; -32\}$ виконує роботу A_1 з переміщення матеріальної точки уздовж вектора $\vec{a}$ та роботу A_2 , переміщуючи матеріальну точку уздовж вектора $\vec{b}$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $A_1 = A_2$; 2) $A_1 < A_2$; 3) $A_1 > A_2$; 4) інша відповідь?

13. Задані вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, що утворюють ортонормований базис. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$; 2) $\vec{k} = \vec{j} \times \vec{i}$; 3) $\vec{k} = 1$; 4) інша відповідь?

14. Задані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють правоорієнтовану трійку векторів. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах побудовано тетраедр, об'єм якого дорівнює V . Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $V = \frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; 2) $V = -\frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; 3) $V = -\frac{1}{6}(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$; 4) інша відповідь?

15. Задано вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. На їхній основі побудовано мішаний добуток векторів $((\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{q} + \vec{r})) \cdot (\vec{r} + \vec{p})$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $((\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{q} + \vec{r})) \cdot (\vec{r} + \vec{p}) = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
2) $((\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{q} + \vec{r})) \cdot (\vec{r} + \vec{p}) = -(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
3) $((\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{q} + \vec{r})) \cdot (\vec{r} + \vec{p}) = (2 \vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
4) інша відповідь?

16. Задано вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. На їхній основі побудовано мішаний добуток векторів $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} + 4 \vec{p} + 7 \vec{q})$. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} + 4 \vec{p} + 7 \vec{q}) = 4(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
2) $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} + 4 \vec{p} + 7 \vec{q}) = 11(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
3) $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} + 4 \vec{p} + 7 \vec{q}) = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$;
4) інша відповідь?

17. Точки $M_1(2; -1; 6)$, $M_2(3; 1; 4)$, $M_3(5; 2; 6)$, $M_4(4; 0; 8)$ є вершинами чотирикутника. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ є прямокутником; 2) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ є квадратом; 3) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ є трапецією;
4) інша відповідь?

18. Задано ненульові вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Вектор $\vec{r} = \vec{p} + 3\vec{q}$ є перпендикулярним до вектора $\vec{m} = 7\vec{p} - 5\vec{q}$, а вектор $\vec{n} = \vec{p} - 4\vec{q}$ є перпендикулярний до вектора $\vec{k} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$. Кут між векторами $\vec{p}$ та $\vec{q}$ позначено через φ . Яке з тверджень є справедливим:

1) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ або $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ або $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{6}$ або $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

4) інша відповідь?

19. Між векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ існує зв'язок $\vec{p} \times \vec{r} = \vec{q} \times \vec{r}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\vec{p} = \vec{q}$ лише тоді, коли $\vec{r} = \vec{0}$; 2) $\vec{p} = \vec{q}$ лише тоді, коли $\vec{r} \neq \vec{0}$; 3) $\vec{p} = \vec{q}$ за будь-якого $\vec{r}$; 4) інша відповідь?

20. Задано вектори $\vec{a} = \{3; 4\}$ та $\vec{b} = \{1; 1\}$, а також вектор $\vec{r} = \{6; 5\}$. Розв'язання вектора $\vec{r}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ має вигляд $\vec{r} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\vec{r} = 9\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{r} = 9\vec{b} - \vec{a}$; 3) $\vec{r} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$; 4) інша відповідь?

21. Задано вектори $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$; $\vec{b} = \{-1; 2; 3\}$; $\vec{c} = \{0; 1; 4\}$, а також вектор $\vec{d} = \{10; -6; 8\}$. Розв'язання вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має вигляд $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\vec{d} = \{-6; 8; 10\}$; 2) $\vec{d} = \{8; 10; -6\}$; 3) $\vec{d} = \{10; -6; 8\}$; 4) інша відповідь?

22. Точки $M_1(1; 1; 3)$; $M_2(3; 5; 7)$; $M_3(9; -1; 3)$ є вершинами трикутника. Центр ваги трикутника міститься в точці $O(x_0; y_0; z_0)$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $O\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{13}{3}\right)$; 2) $O\left(\frac{13}{3}; \frac{4}{3}; \frac{13}{3}\right)$; 3) $O\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$; 4) інша відповідь?

23. Вектор $\vec{p}$ з осями Ox та Oy утворює кути, що вони відповідно дорівнюють $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. Знайти кут γ , який вектор $\vec{p}$ утворює з віссю Oz . Яке з тверджень є справедливим:

1) $\gamma = \frac{\pi}{3}$; 2) $\gamma = \frac{\pi}{4}$; 3) $\gamma = \frac{7\pi}{12}$; 4) інша відповідь?

24. Задано ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ такі, що $\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \times \vec{b}} \right| = \sqrt{3}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут φ . Яке з тверджень є справедливим:

1) $\varphi = \frac{\pi}{6}$ або $\varphi = \frac{5\pi}{6}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ або $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ або $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;

4) інша відповідь?

25. Точки $M_1(3; -5; 3)$; $M_2(-1; 1; -3)$; $M_3(1; 2; -1)$; $M_4(3; -1; 2)$ є вершинами чотирикутника. Яке з тверджень є справедливим:

- 1) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ – ромб;
- 2) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ – прямокутник;
- 3) чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ – трапеція;
- 4) інша відповідь?

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача № 1 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб вектори $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ та $\vec{m} = \vec{p} - \vec{q}$ були колінеарними?

Задача № 2 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб вектори $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ та $\vec{m} = \vec{p} - \vec{q}$ задовольняли умову $|\vec{r}| = |\vec{m}|$?

Задача № 3 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб вектори $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ та $\vec{m} = \vec{p} - \vec{q}$ задовольняли умову $\vec{r} = \lambda \vec{m}$?

Задача № 4 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб була справедливою рівність $|\vec{p} + \vec{q}| = |\vec{p}| - |\vec{q}|$?

Задача № 5 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб була справедливою рівність $|\vec{p} - \vec{q}| = |\vec{p}| + |\vec{q}|$?

Задача № 6 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$. Якими мають бути вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, щоб вектор $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ ділив навпіл кут між векторами $\vec{p}$ та $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ мають спільний початок?

Задача № 7 Точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами паралелограма $M_1M_2M_3M_4$. Вектори $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3$ задано. Знайти вектор $\vec{OM}_4$, якщо точка $O(0; 0; 0)$ є початком системи координат.

Задача № 8 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, які задовольняють співвідношення $(2x - 5y + 1)\vec{p} + (3x + 2y - 8)\vec{q} = \vec{0}$. За яких значень x та y вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$ не є колінеарними?

Задача № 9 Задано вектори $\vec{p} = \{3; -2; 1\}$ та $\vec{q} = \{-4; -1; 3\}$. Знайти вектори $\vec{r} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $\vec{m} = \frac{\vec{p} - \vec{q}}{4}$; $\vec{n} = 5(\vec{p} + \vec{q})$.

Задача № 10 Задано вектори $\vec{p} = \{2; 1\}$; $\vec{q} = \{3; 4\}$ та $\vec{a} = \{-1; 2\}$. Розкласти вектор $\vec{a}$ за базисом $\vec{p}$ та $\vec{q}$.

Задача № 11 Задано вектори $\vec{p} = \{2; 1; -3\}$; $\vec{q} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{r} = \{-1; 0; -2\}$, $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$. Знайти розвинення вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Задача № 12 Точки M_1, M_2, M_3 є вершинами трикутника. M_1D, M_2E, M_3F – медіани цього трикутника. Знайти вектор $\vec{r} = \vec{M_1D} + \vec{M_2E} + \vec{M_3F}$.

Задача № 13 Чи існує у трикутнику $M_1M_2M_3$ така точка O , що сума векторів $\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{OM}_3 = \vec{0}$? Якщо існує, то де саме вона знаходиться?

Задача № 14 Задано вектор $\vec{p} = \{4; -8; -1\}$. Знайти орт вектора $\vec{p}$.

Задача № 15 Чи колінеарними є вектори $\vec{p} = \{7; -1; 3\}$ та $\vec{q} = \{-28; 4; 12\}$?

Задача № 16 За якого значення α та β вектори $\vec{p} = \{\alpha; 4; 7\}$ та $\vec{q} = \{5; 2; \beta\}$ є колінеарні?

Задача № 17 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, кут φ між якими дорівнює $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{p}| = 6$; $|\vec{q}| = 7$. Знайти скалярний добуток цих векторів.

Задача № 18 Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p} = \{4; -5\}$; $\vec{q} = \{-3; 7\}$.

Задача № 19 Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p} = \{3; -1; 2\}$; $\vec{q} = \{1; 4; 5\}$.

Задача № 20 Задано вектори $\vec{p} = \{5; -8; 10\}$; $\vec{q} = \{-4; 3; 0\}$; $\vec{r} = \{5; -6; 1\}$. Знайти величину $3\vec{p} \cdot \vec{q} - 4\vec{p} \cdot \vec{r} - 5\vec{q} \cdot \vec{r}$.

Задача № 21 Задано вектори $\vec{p} = \{4; 0; 3\}$ та $\vec{q} = \{11; 10; 2\}$. Знайти величину проекції вектора $\vec{p}$ на напрямок вектора $\vec{q}$.

Задача № 22 Задано одиничні вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, а також вектори $\vec{p} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ та $\vec{q} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$ є взаємно перпендикулярними. Знайти кут φ між векторами $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$.

Задача № 23 Знайти кут φ між векторами $\vec{p} = \{2; -6\}$ та $\vec{q} = \{-3; 9\}$.

Задача № 24 Точки $M_1(-1; 2; 3)$; $M_2(1; 1; 1)$ та $M_3(0; 0; 5)$ є вершинами трикутника $M_1M_2M_3$. Знайти внутрішні кути трикутника.

Задача № 25 Чи перпендикулярні вектори $\vec{p} = \{6; 0; -3\}$ та $\vec{q} = \{2; 5; 4\}$?

Задача № 26 Яким має бути число α , щоб вектори $\vec{p} = \{-5; 4; 3\}$ та $\vec{q} = \{2; \alpha; 7\}$ були перпендикулярними?

Задача № 27 Чи існує такий вектор, який з осями координат утворює кути $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$?

Задача № 28 Чи існує такий вектор, який з віссю Oy утворює кут $\beta = \frac{\pi}{4}$, а з віссю Oz – кут $\gamma = \frac{\pi}{6}$?

Задача № 29 Вектор $\vec{p}$ з осями Oy та Oz утворює однакові кути: $\beta = \gamma$, а з віссю Ox він утворює кут α , який вдвічі більший β або γ . Знайти кути α , β та γ .

Задача № 30 Задано три сили: $\vec{f}_1 = \{-3; -2; 4\}$, $\vec{f}_2 = \{2; 3; -5\}$ та $\vec{f}_3 = \{3; -4; 2\}$, а також точки $M_1(5; 3; -7)$ та $M_2(4; -1; -4)$. Рівнодійна цих сил виконує роботу з переміщення матеріальної точки уздовж вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. Знайти цю роботу.

Задача № 31 На матеріальну точку діє сила $\vec{f} = \{10; -4; 6\}$, яка переміщує цю точку уздовж вектора $\vec{s} = \{3; 0; -12\}$. Знайти роботу, витрачену силою $\vec{f}$ з переміщення матеріальної точки уздовж вектора $\vec{s}$.

Задача № 32 Задано точку $M(x; y; z)$, а $\vec{r}$ – її радіус-вектор. У цій точці зосереджено масу m_1 , а у точці $O(0; 0; 0)$ – масу m_2 . На ці маси, згідно із законом Ньютона, діє сила тяжіння. Знайти цю силу.

Задача № 33 У точці $O(0; 0; 0)$ розміщено заряд q , який утворює електростатичне поле. Точка $M(x; y; z)$ – будь-яка точка простору, радіус-вектор якої дорівнює $\vec{r}$. Знайти напругу ε електростатичного поля у цій точці.

Задача № 34 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, такі що $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 3$, а кут φ між цими векторами дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Знайти $|\vec{p} \times \vec{q}|$.

Задача № 35 Задано вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, кут між якими дорівнює φ . Встановити зв'язок між скалярним та векторним добутками векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$ і тангенсом кута φ .

Задача № 36 Яким має бути число α , щоб вектори $\vec{p} = 3\vec{a} - \alpha\vec{b}$ та $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$ були колінеарними, якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є неколінеарними?

Задача № 37 Знайти векторний добуток векторів $\vec{p} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{q} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

Задача № 38 Знайти розвинення за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектора $\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q}$, якщо $\vec{p} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{q} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.

Задача № 39. Знайти орти $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ векторів $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$, якщо $\vec{r}_1 = \vec{p} \times \vec{q}$ та $\vec{r}_2 = \vec{q} \times \vec{p}$; $\vec{p} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{q} = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Задача № 40 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ та $\vec{q} = 3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$, де $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ орти, кут між якими дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

Задача № 41 Точки $M_1(2; -1; 3)$; $M_2(3; -1; 2)$; $M_3(4; 0; 5)$ є вершинами трикутника. Знайти площу цього трикутника.

Задача № 42 Задано вектори $\vec{p} = \{2; 1; -1\}$ та $\vec{q} = \{1; -3; 1\}$. Знайти синус кута між цими векторами.

Задача № 43 Точки $M_1(-1; 1; 2)$, $M_2(1; 1; 0)$, $M_3(2; 6; -2)$ є вершинами трикутника. Знайти: 1) площу S трикутника; 2) висоту $h = |M_2E|$.

Задача № 44 Знайти синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = \{2; 1; -1\}$ та $\vec{q} = \{1; -3; 1\}$, як на сторонах.

Задача № 45 Задано точки $M_1(1; 5; -2)$ та $M_2(5; -3; 4)$, а також силу $\vec{f} = \{2; -4; 3\}$. Знайти момент $\vec{M}$ сили $\vec{f}$, прикладеної до точки M_1 відносно точки M_2 .

Задача № 46 Задано точки $M_1(4; 2; -3)$ та $M_2(2; 4; 0)$, а також силу $\vec{f} = \{2; 2; 9\}$. Знайти: 1) модуль моменту $\vec{m}$ сили $\vec{f}$ відносно точки M_2 , якщо прикладено силу у точці M_1 ; 2) напрямні косинуси означеного моменту сили.

Задача № 47 Струм силою $\vec{I}$ протікає нескінченним прямолінійним провідником і утворює магнітне поле. M – будь-яка точка простору, яка характеризується своїм радіус-вектором $\vec{r}$. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точці M .

Задача № 48 Через прямолінійний провідник, напрямок якого збігається з напрямком осі Oz , протікає струм, який утворює магнітне поле. Знайти у будь-якій точці M простору напруженість $\vec{H}$.

Задача № 49 Через прямолінійний провідник, напрямок якого збігається з напрямком осі Oy , протікає струм, який утворює магнітне поле. Знайти у будь-якій точці M простору напруженість $\vec{H}$.

Задача № 50 Через прямолінійний провідник, напрямок якого збігається з напрямком осі Ox , протікає струм, який утворює магнітне поле. Знайти у будь-якій точці M простору напруженість $\vec{H}$.

Задача № 51 Задано точку $M(-3; 4; 2)$. Через прямолінійний провідник протікає струм силою $\vec{I} = -3\vec{k}$, який утворює магнітне поле. Знайти напруженість $\vec{H}$ цього магнітного поля у точці M .

Задача № 52 Нехай $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – будь-які вектори. Перевірити, чи є вектори $\vec{m}_1 = \vec{r} - \vec{p}$, $\vec{m}_2 = \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{m}_3 = \vec{q} - \vec{r}$ компланарними.

Задача № 53 Задано вектори $\vec{p} = \{2; 3; 4\}$; $\vec{q} = \{4; 3; 2\}$; $\vec{r} = \{1; 0; 1\}$. Знайти мішаний добуток цих векторів.

Задача № 54 Задано вектори $\vec{p} = \{2; 3; 4\}$; $\vec{q} = \{4; 3; 2\}$; $\vec{r} = \{1; 0; -1\}$. Чи компланарні ці вектори?

Задача № 55 Задано вектори $\vec{r}_1 = \{7; -1; -6\}$; $\vec{r}_2 = \{7; -1; -6\}$; $\vec{r}_3 = \{3; 1; 1\}$; $\vec{r}_4 = \{4; -2; -2\}$, які є радіус-векторами відповідно точок M_1, M_2, M_3, M_4 . Перевірити, чи існує така площина, якій би належали ці чотири точки?

Задача № 56 Задано чотири точки $M_1(-1; 6; 0)$; $M_2(2; 5; -6)$; $M_3(-2; 5; 1)$, $M_4(-1; 2; -3)$, які є вершинами чотирикутника. Перевірити, чи є цей чотирикутник плоским.

Задача № 57 Задано вектори $\vec{p} = \{5; 4; 3\}$; $\vec{q} = \{3; 4; 5\}$; $\vec{r} = \{8; 8; 8\}$. Перевірити, чи є ці вектори лінійно залежними.

Задача № 58 Задано вектори $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{q} = \{2; 1; -3\}$; $\vec{r} = \{1; -3; 1\}$, на яких як на сторонах, побудовано паралелепіпед. Знайти об'єм цього паралелепіпеда.

Задача № 59 Задано вектори $\vec{p} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, на яких як на сторонах побудовано тетраедр. Знайти об'єм цього тетраедра.

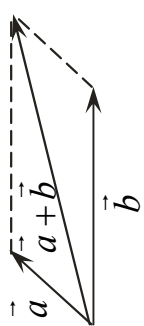
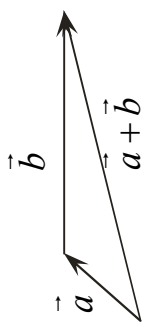
Задача № 60 Задано точки $M_1(7; 3; 4)$; $M_2(4; 5; -2)$; $M_3(1; 0; 6)$; $M_4(-1; 2; 1)$, які є вершинами тетраедра. Знайти довжину висоти H тетраедра, проведеної з вершини M_4 .

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

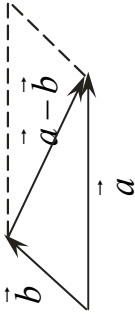
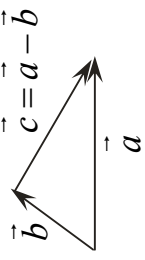
- № 1. $\vec{p} \parallel \vec{q}$. № 2. $\vec{p} \perp \vec{q}$. № 3. $\vec{p} \parallel \vec{q}$. № 4. $\vec{p} \downarrow \uparrow \vec{q}$. № 5. $\vec{p} \downarrow \uparrow \vec{q}$.
 № 6. $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. № 7. $\overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$. № 8. $x = 2$; $y = 1$.
 № 9. $\vec{r} = \{17; -4; -3\}$; $\vec{m} = \left\{\frac{7}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$; $\vec{n} = \{-5; -15; 20\}$. № 10. $\vec{a} = -2\vec{p} + \vec{q}$.
 № 11. $\vec{a} = 0\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}$. № 12. $\vec{r} = \vec{0}$. № 13. O – точка перетинання медіан.
 № 14. $\vec{p}_0 = \left\{\frac{4}{9}; -\frac{8}{9}; -\frac{1}{9}\right\}$. № 15. $\vec{p} \parallel \vec{q}$. № 16. $\alpha = 10$; $\beta = 3,5$. № 17. 21.
 № 18. 23. № 19. 9. № 20. -194. № 21. $\frac{10}{3}$. № 22. $\frac{\pi}{3}$. № 23. 180° .
 № 24. 90° ; 45° ; 45° . № 25. $\vec{p} \perp \vec{q}$. № 26. $-\frac{11}{4}$. № 27. Існує. № 28. Не існує.
 № 29. $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$. № 30. 13. № 31. -42. № 32. $\vec{f} = -\frac{m_1 m_2}{\mu} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$
 або $\vec{f} = -\frac{m_1 m_2}{\mu} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$, де μ – коефіцієнт пропорційності.
 № 33. $\varepsilon = \pm q \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$ або $\vec{\varepsilon} = \pm q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$. № 34. 6. № 35. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{p} \times \vec{q}|}{\vec{p} \cdot \vec{q}}$.
 № 36. 12. № 37. $\vec{p} \times \vec{q} = \{1; 5; 17\}$. № 38. $\vec{r} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 14\vec{k}$. № 39. $\vec{\ell}_1 = \{9; 4; -10\}$;
 $\vec{\ell}_2 = \{-9; -4; 10\}$. № 40. $\frac{1}{2}$ (кв. од.). № 41. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (кв. од.). № 42. $\sin \varphi = \sqrt{\frac{31}{33}}$.
 № 43. 1) $S = \sqrt{51}$ (кв. од.); 2) $|M_2 E| = \frac{1}{5}\sqrt{102}$ (од. довж.). № 44. $\sin \varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$.
 № 45. $\vec{m} = \vec{0}$. № 46. 1) $|\vec{m}| = 28$; 2) $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$; $\cos \beta = -\frac{6}{7}$; $\cos \gamma = \frac{2}{7}$. № 47.
 $\vec{H} = \frac{\mu}{(\vec{r})^2} (\vec{I} \times \vec{r})$, де μ – коефіцієнт пропорційності. № 48. $\vec{H} = \frac{\vec{I} \mu (x\vec{j} + y\vec{i})}{x^2 + y^2}$, де μ
 – коефіцієнт пропорційності. № 49. $\vec{H} = \frac{\mu \vec{I} (-x\vec{k} + z\vec{i})}{x^2 + y^2}$, де μ – коефіцієнт про-
 порційності.
 № 50. $\vec{H} = \frac{\mu \vec{I} (y\vec{k} - z\vec{j})}{x^2 + z^2}$, де μ – коефіцієнт пропорційності. № 51. $\vec{H} = \frac{3\mu}{25} (4\vec{i} + 3\vec{j})$,
 де μ – коефіцієнт пропорційності. № 52. $\vec{m}_1 = \vec{r} - \vec{p}$; $\vec{m}_2 = \vec{p} - \vec{q}$; $\vec{m}_3 = \vec{q} - \vec{r}$ є
 компланарними векторами. № 53. -12. № 54. Компланарні. № 55. Існує.
 № 56. Так. № 57. Так. № 58. $V = 25$ (куб. од.). № 59. $V = \frac{49}{6}$ (куб. од.).
 № 60. $= \frac{1}{14}$.

Д о д а т о к А

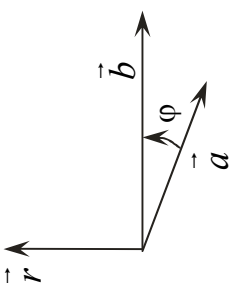
Таблиця А.І. Дії над векторами

№ п/п	Назва дії	Формула	Пояснення	Геометрична характеристика
1	Множення вектора на число	Векторна форма $\vec{\lambda a} = \vec{b}$	λ – дійсне число $\vec{a}$ – заданий вектор $\vec{b}$ – вектор, як результат множення числа λ на вектор $\vec{a}$	$\vec{a} \parallel \vec{b}$ 1) $\lambda > 1$ 
		Координатна форма $\lambda \{a_x; a_y; a_z\} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\} = \{b_x; b_y; b_z\}$	λ – дійсне число $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ – заданий вектор $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ – вектор, як результат множення числа λ на вектор $\vec{a}$	2) $\lambda < -1$  3) $0 < \lambda < 1$  4) $-1 < \lambda < 0$ 
2	Додавання векторів	Векторна форма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$	$\vec{a}, \vec{b}$ – вектори-доданки; $\vec{c}$ – вектор, як результат додавання векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.	 правило паралелограма  правило трикутника
		Координатна форма $\{a_x; a_y; a_z\} + \{b_x; b_y; b_z\} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$	$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$	

Продовження таблиці А.1

№ п/п	Назва дії	Формула	Пояснення	Геометрична характеристика
3	Віднімання векторів	Векторна форма $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$	$\vec{a}$ – зменшуване $\vec{b}$ – від’ємник $\vec{c}$ – різниця	
		Координатна форма $\{a_x; a_y; a_z\} - \{b_x; b_y; b_z\} =$ $= \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\} =$ $= \{c_x; c_y; c_z\}$	$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$	правило паралелограма 
4	Скалярний добуток векторів	Векторна форма $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \varphi$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \text{пр}_a \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \text{пр}_b \vec{a}$	$\vec{a}, \vec{b}$ – вектори-множники φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \varphi$ – число як результат скалярного множення векторів	правило трикутника
		Координатна форма $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$	

Продовження таблиці А.1

№ п/п	Назва дії	Формула	Пояснення	Геометрична характеристика
5	Векторний добуток векторів	Векторна форма $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{r}$, де $ \vec{r} = \vec{a} \vec{b} \sin \varphi$ $\vec{r} \perp \vec{a}, \vec{r} \perp \vec{b}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}$ – правоорієнтована трійка векторів	$\vec{a}, \vec{b}$ – вектори-множники $\vec{r}$ – вектор, як результат векторного множення векторів φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$	
		Координатна форма $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базисні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – вектори-множники	
6	Мішаний добуток векторів	Векторна форма $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} \cos \varphi \sin \psi$	$ \vec{a} \vec{b} \vec{c} \cos \varphi \sin \psi$ – число як результат мішаного добутку векторів φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ψ – кут між векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$	
		Координатна форма $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$	$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$	

Додаток Б

Таблиця Б.1. Площина

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
1	Рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	x, y, z – координати поточної точки M x_0, y_0, z_0 – координати заданої точки M_0 на площині A, B, C – координати нормального вектора $\vec{n}$ площини	
2	Загальне рівняння площини	$Ax + By + Cz + D = 0$	x, y, z – координати поточної точки M A, B, C – координати нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	
3	Рівняння площини, яка проходить через початок координат $O(0; 0; 0)$	$Ax + By + Cz = 0$	x, y, z – координати поточної точки M A, B, C – координати нормального вектора $\vec{n}$ площини	

Продовження таблиці Б.1

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
4	Рівняння площини, паралельної до осі Ox	$Bu + Cz + D = 0$	u ; z – ордината та абсциса поточної точки M B ; C – проекції на осі Oy та Oz нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	
5	Рівняння площини, паралельної до осі Oy	$Ax + Cz + D = 0$	x ; z – абсциса та абсциса поточної точки M A ; C – проекції на осі Ox та Oz нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	
6	Рівняння площини, паралельної до осі Oz	$Ax + Bu + D = 0$	x ; u – абсциса та ордината поточної точки M A ; B – проекції на осі Ox та Oy нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	

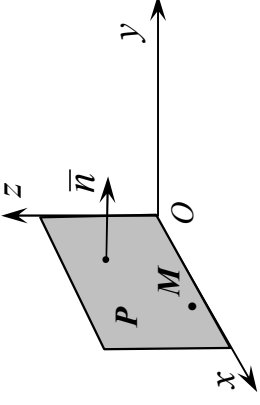
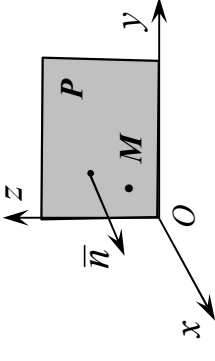
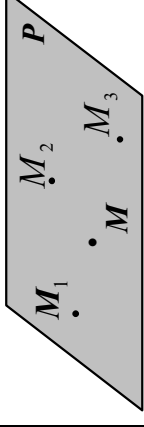
Продовження таблиці Б.1

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
7	Рівняння площини, яка проходить через вісь Ox	$Bu + Cz = 0$	y, z – ордината та апліката поточної точки M B, C – проекції на осі Oy та Oz нормального вектора $\vec{n}$ площини	
8	Рівняння площини, яка проходить через вісь Oy	$Ax + Cz = 0$	x, z – абсциса та апліката поточної точки M A, C – проекції на осі Ox та Oz нормального вектора $\vec{n}$ площини	
9	Рівняння площини, яка проходить через вісь Oz	$Ax + Bu = 0$	x, y – абсциса та ордината поточної точки M A, B – проекції на осі Ox та Oy нормального вектора $\vec{n}$ площини	
10	Рівняння площини, паралельної до площини xOy	$Cz + D = 0$ або $z = z_0$	z – апліката поточної точки M C – проекція на ось Oz нормального вектора $\vec{n}$ площини z_0 – апліката будь-якої точки M_0 , яка належить площині D – вільний член у рівнянні площини	

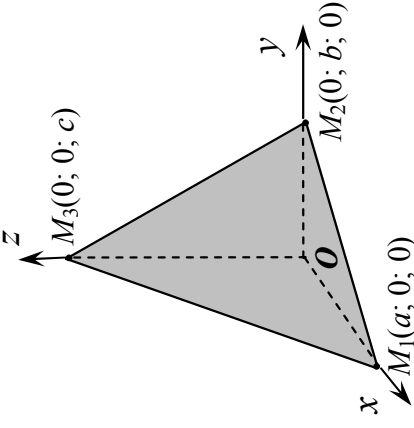
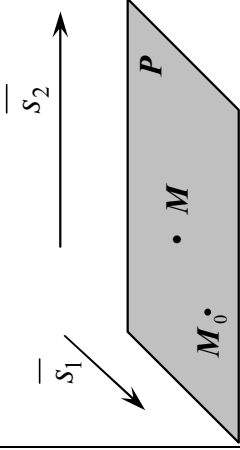
Продовження таблиці Б.1

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
11	Рівняння площини, Паралельної до площини xOz	$By + D = 0$ або $y = y_0$	y – ордината поточної точки M y_0 – ордината будь-якої точки M_0 , яка належить площині B – проекція на ось Oy нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	
12	Рівняння площини, Паралельної до площини yOz	$Ax + D = 0$ або $x = x_0$	x – абсциса поточної точки M x_0 – абсциса будь-якої точки M_0 , яка належить площині A – проекція на ось Ox нормального вектора $\vec{n}$ площини D – вільний член у рівнянні площини	
13	Рівняння площини xOy	$z = 0$	z – апліката поточної точки M	

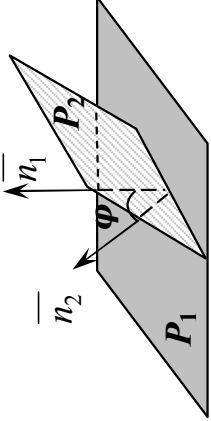
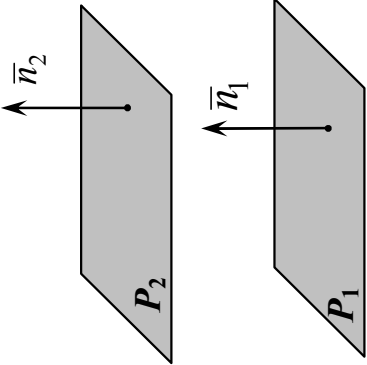
Продовження таблиці Б.1

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
14	Рівняння площини xOz	$y = 0$	y – ордината поточної точки M	
15	Рівняння площини yOz	$x = 0$	x – абсциса поточної точки M	
16	Рівняння площини, яка проходить через три задані точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$	x, y, z – координати поточної точки M x_1, y_1, z_1 – координати заданої точки M_1 на площині x_2, y_2, z_2 – координати заданої точки M_2 на площині x_3, y_3, z_3 – координати заданої точки M_3 на площині	

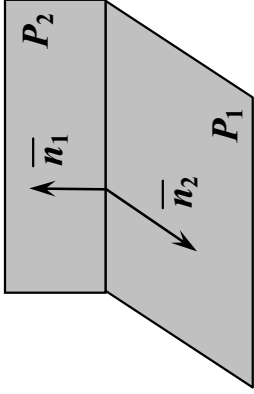
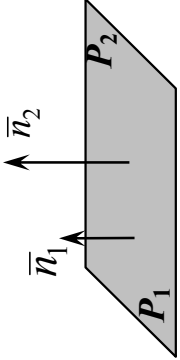
Продовження таблиці Б.1

п/п №	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
17	Рівняння площини «у відрізках на осях»	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	x, y, z – координати поточної точки M $ a , b , c $ – величини відрізків, які площина відтинає відповідно на осях Ox, Oy, Oz (якщо якийсь з чисел a, b, c від’ємне, то точка перетину площини з відповідною віссю відкладається на від’ємній частині осі)	
18	Рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно до двох заданих векторів	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$	x, y, z – координати поточної точки M x_0, y_0, z_0 – координати заданої точки M_0 на площині l_1, m_1, n_1 – координати заданого вектора $\vec{s}_1$, паралельного площині l_2, m_2, n_2 – координати заданого вектора $\vec{s}_2$, паралельного площині	

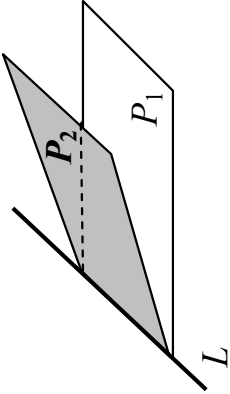
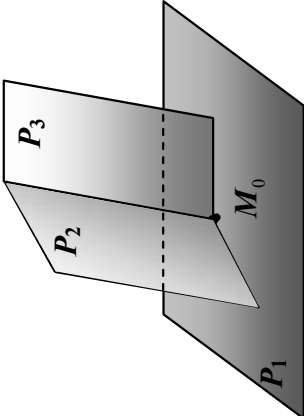
Таблиця Б.2. Взаємне розміщення площин

№ п/п	Назва формули	Формула	Позначення	Рисунок
1	Косинус кута між двома площинами	$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	Площини задано загальними рівняннями $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 D_1 – вільний член у рівнянні площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2 D_2 – вільний член у рівнянні площини P_2 φ – кут між площинами	
2	Умова паралельності двох площин	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	Площини задано загальними рівняннями: $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2	

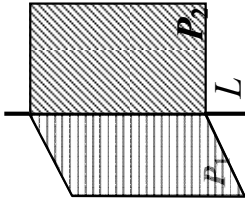
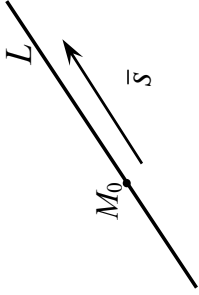
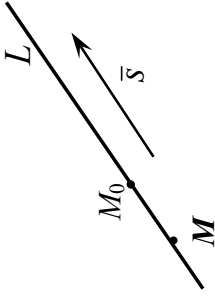
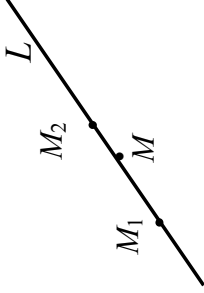
Продовження таблиці Б.1

№ п/п	Назва формули	Формула	Позначення	Рисунок
3	Умова перпендикулярності двох площин	$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$	Площини задано загальними рівняннями: $P_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2	
4	Умова збіжності двох площин	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	Площини задано загальними рівняннями: $P_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 D_1 – вільний член у рівнянні площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2 D_2 – вільний член у рівнянні площини P_2	

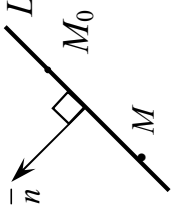
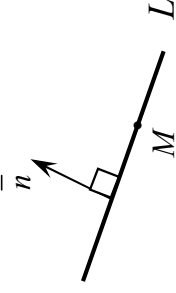
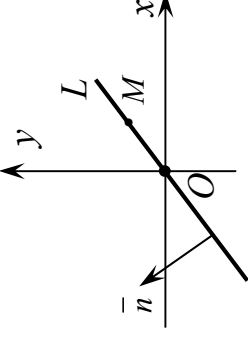
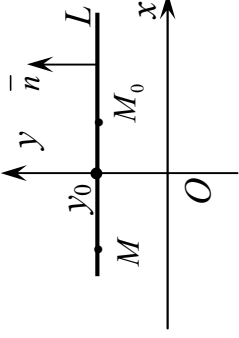
Продовження таблиці Б.2

№	Назва формули	Рівняння формули	Позначення	Рисунок
5	Умова, за якої дві площини перетинаються по прямій лінії	$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ або $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$ або $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$	Площини задано загальними рівняннями: $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2	
6	Умова, за якої три площини перетинаються в одній точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$ Координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в якій перетинаються три площини, визначаються із системи рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$	Площини задано загальними рівняннями: $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$ $P_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ $A_1; B_1; C_1$ – координати нормального вектора $\underline{n}_1$ площини P_1 $A_2; B_2; C_2$ – координати нормального вектора $\underline{n}_2$ площини P_2 $A_3; B_3; C_3$ – координати нормального вектора $\underline{n}_3$ площини P_3	

Таблиця Б.3. Пряма у просторі

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
1	Загальне рівняння прямої у просторі	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – рівняння площин P_1 та P_2 , для яких пряма L є лінією перетину	
2	Параметричні рівняння прямої у просторі	$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \text{ де } t \in R \\ z = z_0 + nt \end{cases}$	$x; y; z$ – координати поточної точки M $x_0; y_0; z_0$ – координати заданої точки M_0 на прямій L $l; m; n$ – координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої	
3	Канонічні рівняння прямої у просторі	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$	$x; y; z$ – координати поточної точки M $x_0; y_0; z_0$ – координати точки M_0 на прямій L $l; m; n$ – координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої	
4	Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки	$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}$	$x; y; z$ – координати поточної точки M $x_1; y_1; z_1$ – координати точки M_1 на прямій L $x_2; y_2; z_2$ – координати точки M_2 на прямій L	

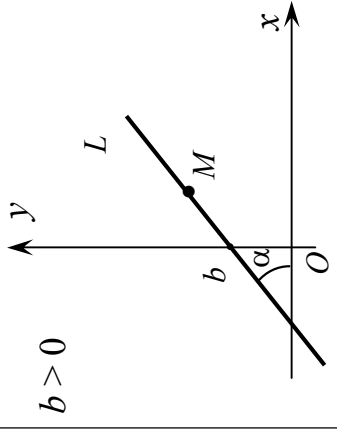
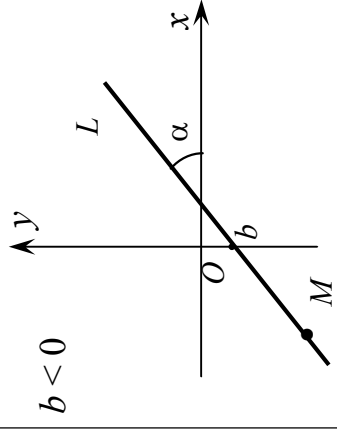
Таблиця Б.4. Пряма на площині

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
1	Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора і лежить на площині xOy	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$x; y$ – координати поточної точки M $x_0; y_0$ – координати заданої точки на прямій L $A; B$ – координати нормального вектора $\vec{n}$ до прямої	
2	Загальне рівняння прямої, яка лежить на площині xOy	$Ax + By + C = 0$	$x; y$ – координати поточної точки M $A; B$ – координати нормального вектора $\vec{n}$ до прямої C – вільний член у рівнянні прямої	
3	Рівняння прямої, яка проходить через початок координат і лежить на площині xOy	$Ax + By = 0$	$x; y$ – координати поточної точки M $A; B$ – координати нормального вектора $\vec{n}$ до прямої	
4	Рівняння прямої, яка паралельна до осі Ox та лежить на площині xOy	$By + C = 0$ або $y = y_0$	y – ордината поточної точки M y_0 – ордината заданої точки M_0 на прямій B – координата нормального вектора $\vec{n}$ прямої C – вільний член у рівнянні прямої	

Продовження таблиці Б.4

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
5	Рівняння прямої, яка паралельна до осі Oy та лежить на площині xOy	$Ax + C = 0$ або $x = x_0$	x – абсциса поточної точки M x_0 – абсциса будь-якої заданої точки M_0 на прямій A – абсциса нормального вектора $\vec{n}$ прямої C – вільний член у рівнянні прямої	
6	Рівняння осі Ox на площині xOy	$y = 0$	y – ордината поточної точки M	
7	Рівняння осі Oy на площині xOy	$x = 0$	x – абсциса поточної точки M	
8	Рівняння прямої, яка проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом на площині xOy	$y - y_0 = k(x - x_0)$	x, y – координати поточної точки M x_0, y_0 – координати заданої точки M_0 на прямій $k = \tan \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої	

Продовження таблиці Б.4

№ п/п	Назва рівняння	Рівняння	Позначення	Рисунок
9	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка лежить на площині xOy	$y = kx + b$	x, y – координати поточної точки M $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої L b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy	$b > 0$  $b < 0$ 
10	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через початок координат і лежить на площині xOy	$y = kx$	x, y – координати поточної точки M $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої	