

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Національний університет «Одеська юридична
академія»**

Кафедра кібербезпеки

Дискретна математика

Методичні вказівки до вивчення розділу

«Елементи теорії множин»

**для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»
за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення»**

122 «Комп'ютерні науки»

125 «Кібербезпека»

Одеса 2020

УДК 510.3:519.854

*Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету «Одеська юридична академія»,
протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.*

Укладачі:

Баландіна Н.М. – старший викладач кафедри кібербезпеки
Національного університету «Одеська юридична академія»;

Федоровський С.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики Одеського
національного університету ім.І.І.Мечникова.

Рецензенти:

Ковальчук В.В. – доктор фізико-математичних наук, професор,
академік Інженерної Академії України, директор Одеського фахового
коледжу комп'ютерних технологій Одеського державного екологічного
університету;

Лобода Ю.Г. – доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри
інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична
академія».

Методичні вказівки містять докладний виклад теми «Елементи теорії множин» та
завдання для самостійної роботи з відповідями і рішеннями. Призначено для студентів
першого курсу, з метою закріплення лекційного матеріалу і підготовки до практичних
занять з дисципліни «Дискретна математика».

Баландіна Н. М., Федоровський С.В. Дискретна математика : метод. вказівки /
Баландіна Н.М., Федоровський С.В. – 2-ге вид., випр.-Одеса, 2020. – 65 с. – Режим
доступу: <https://hdl.handle.net/11300/14508>

УДК 510.3:519.854

© Баландіна Н.М., Федоровський С.В., 2020

Зміст

Передмова.....	4
1. Множини. Способи задання множин.....	5
2. Основні операції над множинами.....	7
3. Алгебра множин (АМ).....	9
4. Основні закони (тотожності) АМ.....	15
5. Додаткові операції в теорії множин.....	18
6. Відношення на множинах	20
7. Відношення еквівалентності	25
8. Потужність множин.....	28
9. Відношення часткового порядку.....	31
Завдання для самостійного рішення.....	38
Відповіді та рішення.....	47
Рекомендована література	64

ПЕРЕДМОВА

Курс дискретної математики є базою для таких спеціальних дисциплін як обчислювальна техніка, інфокомунікаційні системи і мережі, основи теорії кодування, цифрова обробка сигналів, інженерна та комп'ютерна графіка та інших.

Традиційно до курсу дискретної математики відносять такі розділи: теорія множин, комбінаторика, алгебраїчні структури, математична логіка, логіка висловлювань і предикатів, теорія графів, теорія алгоритмів і автоматів.

Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін і є універсальною мовою для опису і дослідження всіляких структур, як в математиці, так і в інформатиці.

Новизна матеріалу та незвична для першокурсників абстракція викликають у студентів труднощі у процесі вивчення дискретної математики.

Для полегшення процесу навчання, студентам пропонується докладний виклад теми "Елементи теорії множин" та завдання для самостійної роботи з відповідями і рішеннями.

Призначено для студентів першого курсу спеціальностей «Кібербезпека», «Комп'ютерні науки», «Інженерія програмного забезпечення».

1. Множини. Способи завдання множин

У сучасній математиці існують різні побудови теорії множин. У нашому випадку, в курсі дискретної математики, досить обмежитися «наївним» підходом, при якому поняття множини є **базовим, невизначеним поняттям**. Засновник теорії множин Георг Кантор визначав множину, як **«об'єднання в одне ціле об'єктів, добре помітних нашою інтуїцією або думкою»**. Подібне визначення не є чітким математичним визначенням. Розпливчастість, недостатність цього визначення стала зрозумілою, коли в 1879 році італійський логік Буралі-Форті і трохи пізніше філософ і логік Бертран Расселл відкрили парадокси, які вказують на внутрішню суперечливість канторової теорії множин. Для усунення таких протиріч і парадоксів в теорії множин були розроблені аксіоматичні теорії, найбільш популярною з яких є аксіоматика Цермелло-Френкеля. Аксіоматичні теорії в даному курсі розглядатися не будуть.

Надалі множину будемо позначати великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$; об'єкти, що становлять множину, будемо називати **елементами множини** і позначати малими літерами латинського алфавіту: $a, b, c, \dots$ (елементи множини при цьому повинні бути різними). Той факт, що об'єкт a є елементом множини A будемо позначати $a \in A$ (a належить множині A), а якщо a не є елементом множини A , то пишуть $a \notin A$ (a не належить множині A). Множина позначається фігурними дужками $\{\dots\}$, всередині яких або просто перераховуються елементи (в цьому випадку говорять, що множина задана **перерахуванням**), або описуються їх властивості (тоді множина задана **описом**). Наприклад, множина натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ задана перерахуванням, а множина $\mathbb{P} = \{x \mid P(x)\}$ (читається «множина таких елементів x , які мають властивість $P(x)$ ») - задана описом.

Якщо всі елементи множини A є також елементами множини B , то говорять, що множина A є **підмножиною** множини B і цей факт позначається $A \subseteq B$ (читається « A підмножина B », « A входить в B »).

Множини, що складаються з одних і тих же елементів, називаються **рівними**. Рівність множин позначається звичайним знаком рівності: $A = B$. Очевидно, що $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то A називається власною підмножиною множини B і цей факт позначається $A \subset B$. Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою**. Порожня множина позначається $\emptyset$. За угодою, порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини A ($\emptyset \subseteq A$).

При вивченні множин в інтуїтивної («наївної») теорії множин зручно вважати, що всі мислимі множини є підмножинами деякої всеосяжної множини, званої **універсальною множиною**. Універсальна множина позначається U . Наприклад, при вивченні числових множин роль універсальної множини може грати поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ (або деякі його підмножини). У теорії чисел універсальна множина збігається або із множиною всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$, або з множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$; в математичному аналізі універсальна множина – це множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Множина всіх без винятку підмножин даної множини A називається **булеаном множини A** і позначається $\mathcal{P}(A)$ або 2^A .

Введення в розгляд універсальної множини дозволяє нам **будь-яку** множину задавати за допомогою опису, тобто у вигляді $A = \{x \mid P(x)\}$. Властивість $P(x)$, якою повинні володіти елементи множини A – це деякий предикат I_A , визначений на універсальній множині, область істинності якого і задає множина A як підмножина універсальної множини. Цей предикат називається **характеристичним предикатом** множини A . Тим самим,

$$I_A = I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Таким чином, $OI(I_A) = A = \{x \in U \mid x \in A\}$.

Той факт, що $x \in U$ часто мається на увазі з контексту і при описі множини не використовується, тобто пишуть $A = \{x \mid P(x)\}$ або $\{x \mid x \in A\}$.

Метод задання множини «описом» є універсальним. При цьому, у якості характеристичного предиката даної множини A може виступати умова приналежності елементів цюї множини, тобто

$I_A: = (x \in A)$. Якщо $A = \{x \mid P(x)\}$ і $B = \{x \mid Q(x)\}$, то, очевидно,

$$A = B \Leftrightarrow P(x) = Q(x) \text{ або } A = B \Leftrightarrow I_A = I_B.$$

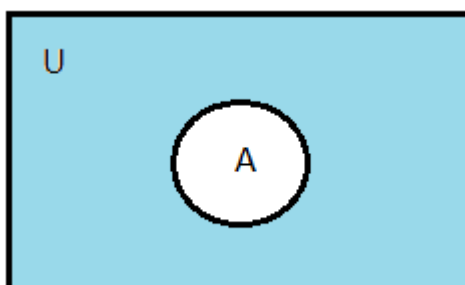
2. Основні операції над множинами

Діаграми Ейлера - Венна - дуже зручний інструмент, що дозволяє зображати множини та ілюструвати операції над ними. У таких діаграмах прямокутник зображує універсальну множину, а кола або овали всередині прямокутника - множини, що розглядаються як підмножини універсальної множини.

Визначення 2.1. **Доповненням** $\bar{A}$ множини A називається множина всіх тих елементів універсальної множини, які не належать множині A . Таким чином,

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}.$$

На діаграмі Ейлера-Венна доповнення множини A виділено більш темним кольором.



Зауважимо, що характеристичний предикат доповнення множини A являє собою заперечення характеристичного предиката вихідної множини, тобто

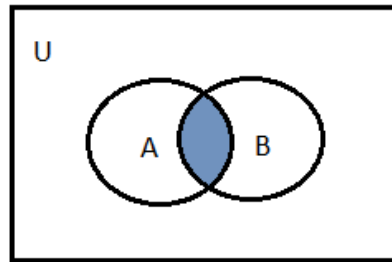
$$I_{\bar{A}} = \overline{I_A}, \text{ бо}$$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \overline{x \in A}\}.$$

Визначення 2.2. *Перетином двох множин A і B називають множину їхніх спільних елементів тобто множина, що складається з елементів, які належать одночасно і множині A і множині B . Таким чином,*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

На діаграмі Ейлера-Венна перетин множин A і B виділено більш темним кольором.



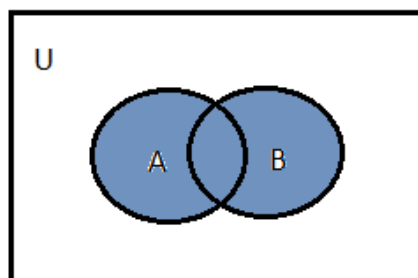
Характеристичний предикат перетину множин A і B являє собою кон'юнкцію характеристичних предикатів вихідних множин, тобто

$$I_{A \cap B} = I_A \wedge I_B.$$

Визначення 2.3. *Об'єднанням двох множин A і B називають множину, що складається з елементів, які належать хоча б одній з множин A і B . Таким чином,*

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

На діаграмі Ейлера-Венна об'єднання множин A і B виділено більш темним кольором.



Характеристичний предикат об'єднання множин A і B являє собою диз'юнкцію характеристичних предикатів вихідних множин, тобто $I_{A \cup B} = I_A \vee I_B$.

3. Алгебра множин

Введені вище основні операції над множинами дозволяють ввести в розгляд **універсальну алгебру** множин.

Визначення 3.1. *Універсальної алгеброю (УА) називається впорядкована пара (кортеж, набір) двох об'єктів $\tilde{A} = \langle A; \Sigma_0 \rangle$, де A - довільна непорожня множина (основа УА) і Σ_0 - множина алгебраїчних операцій на множині A (сигнатура УА).*

Поняття універсальної алгебри, може бути, і не вживалося раніше, але не є по суті своїй новим, оскільки ті, що вивчалися, наприклад, в курсі алгебри **групоїди, напівгрупи, моноїди, групи, кільця, поля** є прикладами універсальних алгебр. При цьому групоїд, півгрупа, моноїд, група $\tilde{G} = \langle G; * \rangle$ - УА, сигнатури яких містять одну бінарну (двомісну) алгебраїчну операцію; кільце, поле $\tilde{R} = \langle R; \{+, \bullet\} \rangle$ - УА, сигнатури яких містять дві бінарні алгебраїчні операції; алгебра логіки $\tilde{B} = \langle B = \{0, 1\}; \{ \neg, \wedge, \vee \} \rangle$ - УА, сигнатура якої містить одну унарну (одномісну) алгебраїчну операцію «заперечення» і дві бінарні алгебраїчні операції - «кон'юнкцію» і «диз'юнкцію». Алгебру в подальшому будемо називати алгеброю логіки (АЛ), а алгебру з розширеною сигнатурою - алгеброю висловлювань (АВ).

Таким чином, мультиплікативна група (по множенню) $\mathbb{C}_n$ коренів n -го ступеня з одиниці, адитивна група (по складанню) $\mathbb{Z}_m$ класів відрахувань по $\text{mod } m$, кільце квадратних матриць над деякими полем, кільце багаточленів над заданим полем, поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - все це приклади універсальних алгебр.

Оскільки основні операції над множинами є алгебраїчними, то ми можемо розглянути алгебру множин. Будь-яке введення деякої формальної теорії починається з завдання алфавіту цієї теорії.

Визначення 3.2. Під алфавітом розуміється довільна непорожня множина, елементи якої називаються *буквами* або *символами*. Довільна кінцева послідовність літер даного алфавіту називається *словом* або *виразом* в цьому (або над цим) алфавітом.

Визначимо алфавіт алгебри множин (АМ) - множину тих символів, які є допустимими при записі слів (виразів) АМ.

Визначення 3.3. Нехай

$A_1 = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ - рахункова множина символів (букв)

теоретико-множинних змінних;

$A_2 = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n, \dots\}$ - рахункова множина символів (букв)

теоретико-множинних параметрів;

$A_3 = \{ \neg, \cap, \cup \}$ - множина символів теоретико-множинних операцій;

$A_4 = \{ \langle \rangle, \langle \langle \rangle, \langle \rangle \rangle \}$ - множина «технічних» символів

(дві дужки - закриває і відкриває, і кома).

Тоді об'єднання зазначених множин і становить алфавіт алгебри множин, тобто $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Множина всіх слів в алфавіті A позначається A^* . З множини всіляких слів в даному алфавіті правилами побудови виділяються **формули**. Зазначимо ці правила для алгебри множин.

Визначення 3.4. Якщо $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ алфавіт AM , то множина формул AM виділяється з множини слів в цьому алфавіті наступними правилами побудови (тут ΦAM означає множину всіх без винятку формул AM):

- 1) $(\alpha \in A_1 \cup A_2) \Rightarrow \alpha \in \Phi AM$ (окремо взятий символ перших двох подалфавитів AM є найпростішою (атомарною) формулою AM);
- 2) $\omega \in \Phi AM \Rightarrow (\omega) \in \Phi AM$ (якщо на деяку формулу навісити символ операції доповнення та результат охаймити дужками, то отримане слово також є формулою);
- 3) $\omega \in \Phi AM \wedge \varphi \in \Phi AM \Rightarrow (\omega * \varphi) \in \Phi AM, * \in \{ \cap, \cup \}$ (якщо деякі дві формули з'єднати символом бінарної (двомісної) теоретико-множинної операції і результат охаймити дужками, то отримане слово також є формулою);
- 4) інших формул немає (іншими словами, формули можна будувати виключно за правилами 1 - 3).

Визначення 3.5. Частина (підслово) H заданої формули F , яка в свою чергу є формулою, називається **підформулою** вихідної формули (позначення $H \preceq F$).

При запису формул ми будемо дотримуватися наступних правил «економії» дужок:

- зовнішні дужки не використовувати (тобто замість (F) писати F);
- риса операції доповнення одночасно замінює дужки (тобто замість $(\bar{F})$ писати $\bar{F}$);

- якщо формула не містить дужок, то в ній операції виконуються в наступному порядку (зліва направо в порядку спадання «старшинства» операцій) $\neg$, $\cap$, $\cup$.

Визначення 3.6. *Алгеброю множин називається універсальна алгебра, основа якої - булеан універсальної множини, а сигнатура містить операції доповнення, перетину і об'єднання множин. Таким чином, $AM = \langle 2^U; \{ \neg, \cap, \cup \} \rangle$.*

У літературі з теорії множин підкреслюється дуже тісний зв'язок між алгеброю логіки (алгеброю висловлювань) і алгеброю теорії множин.

В силу свого визначення формули AM є абсолютно формальними структурами, які не мають ніякого змістовного сенсу. Подібний сенс в них з'являється в результаті їх інтерпретації. Це поняття для формул AM практично повністю збігається з аналогічним поняттям для формул алгебри висловлювань (AB).

Під інтерпретацією формули $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ AM будемо розуміти пару $I = \langle D, \varphi \rangle$, де $D \neq \emptyset$ - довільна непорожня множина, яка розглядається як універсальна, а φ - інтерпретуюча функція, що наповнює конкретним змістом кожен символ формули. Під дією φ теоретико-множинні змінні приймають конкретні значення (перетворюються в конкретні множини – підмножини D), символи операцій набувають свій природний сенс (доповнення, перетину і об'єднання множин), технічні символи також сприймаються в природному сенсі (дужки, що відкривають і закривають, кома).

Таким чином, в результаті інтерпретації формула AM задає деяку множину (як підмножина універсальної множини D), яка виражена за допомогою операцій над множинами.

Нехай, наприклад, $F(X_1, X_2, X_3) = ((\overline{X_1} \cap X_2) \cup \overline{X_3}) \cap (X_1 \cup X_3)$ - деяка формула AM . Ставлячи деяку універсальну множину D , вибираючи в неї підмножини $A_1 \subseteq D$, $A_2 \subseteq D$, $A_3 \subseteq D$, вважаючи $\forall i \in \{1, 2, 3\}: X_i = A_i$ і

сприймаючи символи операцій в їх природному сенсі, отримаємо деяку підмножину $F(A_1, A_2, A_3)$ множини D

$$\varphi(F(X_1, X_2, X_3)) = F(A_1, A_2, A_3) = ((\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3}) \cap (A_1 \cup A_3) \subseteq D$$

Введемо на множині формул АМ відношення рівності (рівносильності) формул.

Визначення 3.7. Дві формули АМ називаються рівними (рівносильними), якщо в будь-якій інтерпретації вони задають одну і ту ж множину, тобто

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall I = \langle D; \varphi \rangle: \varphi(F) = \varphi(G).$$

Згадуючи критерій рівності множин, що використовує характеристичні предикати ($A = B \iff I_A = I_B$), можемо в такий спосіб встановити рівність формул АМ. Дві формули АМ рівні тоді і тільки тоді, коли в будь-якій інтерпретації вони породжують множини, характеристичні предикати яких дорівнюють один одному, тобто:

$$F = G \iff \forall I = \langle D; \varphi \rangle: I_{\varphi(F)} = I_{\varphi(G)}.$$

Надалі, під час обговорення результатів інтерпретації формул АМ символ інтерпретуючої функції φ будемо опускати і саму вихідну формулу F і результат її інтерпретації $\varphi(F)$ будемо позначати F .

Наприклад, рівність формул АМ тоді можна передати наступним чином:

$$F = G \iff \forall I = \langle D; \varphi \rangle: I_F = I_G.$$

Покажемо на прикладах, як можна встановити зв'язок між формулами АМ і АЛ.

Приклад 3.1. Нехай нам задана довільна формула АМ, наприклад,

$$F(X_1, X_2, X_3) = ((\overline{X_1} \cap X_2) \cup \overline{X_3}) \cap (X_1 \cup X_3).$$

Розглянемо характеристичний предикат цієї формули в деякій довільній інтерпретації та перетворимо його в логічну формулу від характеристичних предикатів підмножин універсальної множини (результатів інтерпретації

теоретико-множинних змінних вихідної формули). Використовуємо при цьому раніше встановлений зв'язок характеристичних предикатів доповнення, перетину і об'єднання множин з характеристичними предикатами вихідних множин. Маємо:

$$\begin{aligned}
 I_F &= I_{((\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3}) \cap (A_1 \cup A_3)} = I_{(\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3}} \wedge I_{(A_1 \cup A_3)} = (I_{\overline{A_1} \cap A_2} \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) = \\
 &= ((I_{\overline{A_1}} \wedge I_{A_2}) \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) = ((I_{\overline{A_1}} \wedge I_{A_2}) \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) = \\
 &= (((\overline{(x_1 \in A_1 \wedge (x_2 \in A_2))} \vee \overline{x_3 \in A_3}) \wedge ((x_1 \in A_1) \vee (x_3 \in A_3))).
 \end{aligned}$$

Далі, замінюючи характеристичні предикати в останній логічній формулі на пропозиціональні (булеві) змінні (співпадаючі по позначенню зі змінними характеристичних предикатів), отримаємо формулу АЛ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_3).$$

З прикладу 3.1. зрозуміло, що перехід від формули АМ до відповідною формули АЛ може бути здійснений для **будь-якої** формули АМ (і навпаки).

Таким чином, якщо в деякій формулі АМ теоретико-множинні змінні замінити на булеві змінні (з тими ж індексами), знаки доповнення множин - на знаки заперечення, перетину - на кон'юнкції і об'єднання на диз'юнкції, то отримаємо відповідну формулу АЛ (і навпаки).

Якщо кожній формулі АМ зіставити відповідну формулу АЛ, то, в чому легко переконатися, отримаємо бієктивне відображення на множинах формул АМ і АЛ. Зазначена бієкція «зберігає» ставлення рівності (равносильности) формул АМ і АЛ, тобто

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. Основні закони (тотожності) АМ

Визначення 4.1. Законами в алгебрі множин називаються тотожності (равносильності) АМ.

Наведемо зведення основних законів (тотожностей) АМ. При цьому врахуємо, що константі **1** АЛ в АМ відповідає універсальна множина **U**, а константі **0** АЛ в АМ відповідає порожня множина **∅** (характеристичний предикат універсальної множини I_U - тотожне істинний на **U**, тобто $I_U=1$, а характеристичний предикат порожньої множини $I_\emptyset$ - тотожне помилковий на **U**, тобто $I_\emptyset = 0$).

Для кращого запам'ятовування, основні закони АМ перерахуємо в тому ж порядку і з тих самих груп, що і в АЛ. Крім того, збережемо, в основному, їх назви.

4.1. Аналоги законів традиційної логіки:

$$X = X \text{ (закон тотожності);}$$

$$\overline{\overline{X}} = X \text{ (подвійного доповнення);}$$

$$\text{(Виключеного третього)} \quad \overline{X} \cup X = U \quad X \cap \overline{X} = \emptyset \text{ (протиріччя).}$$

4.2. Закони об'єднання і перетину:

$$\text{(асоціативні)} \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \quad \Bigg| \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z;$$

$$\text{(комутативні)} \quad X \cup Y = Y \cup X \quad \Bigg| \quad X \cap Y = Y \cap X;$$

$$\text{(дистрибутивні)} \quad \text{I. } X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$\Bigg| \quad \text{II. } X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z);$$

$$\text{(поглинання)} \quad X \cap (X \cup Y) = X \quad \Bigg| \quad X \cup (X \cap Y) = X;$$

(склеювання)	$(X \cap \bar{Y}) \cup (X \cap Y) = X$	$(X \cup \bar{Y}) \cap (X \cup Y) = X;$
(ідемпотентності)	$X \cup X = X$	$X \cap X = X;$
(de Morgan'a)	$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$	$\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y};$

4.3. Закони «постійних»:

$\emptyset \cup X = X$	$U \cap X = X;$
$U \cup X = U$	$\emptyset \cap X = \emptyset;$

Будь-який з перерахованих вище законів має місце в силу зазначеного вище зв'язку формул АЛ і АМ та збереження їх рівносильностей, але може бути доведений засобами теорії множин, наприклад за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Приклад 4.1. Довести в алгебрі множин другий дистрибутивний закон:

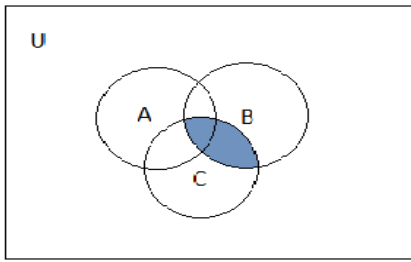
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Доказ. Розглянемо довільну інтерпретацію $I = \langle D; \varphi \rangle$: формул лівої і правої частини тотожності, що перевіряється. У цій інтерпретації тотожність приймає наступний вигляд:

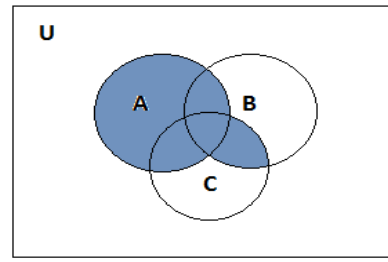
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Побудуємо послідовно діаграми Ейлера-Венна для правої і лівої частини досліджуваної тотожності. Розглянемо на діаграмах найбільш загальне взаємне розташування множин.

Маємо для лівої частини:

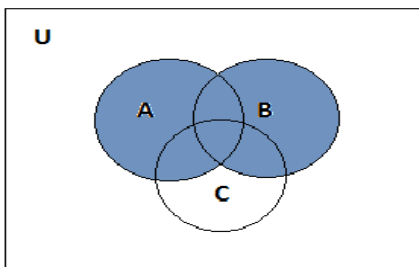


$$B \cap C$$

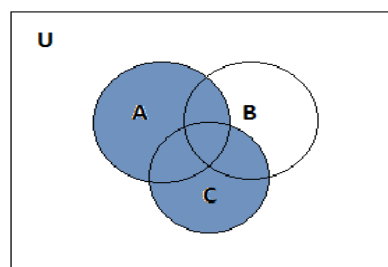


$$A \cup (B \cap C)$$

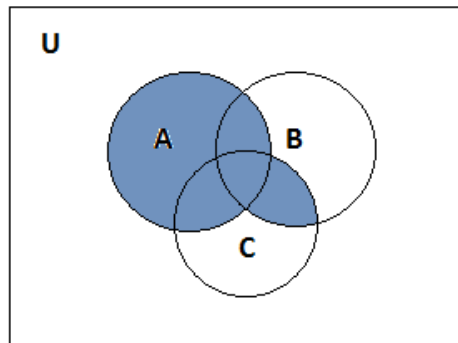
Для правої частини



$$A \cup B$$



$$A \cup C$$



$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Зображення правої і лівої частини тотожності, що перевіряється на діаграмах Ейлера-Венна (більш темна область) однакові. Аналогічно розглядаються і інші взаємні розташування вихідних множин. Тотожність доведено.

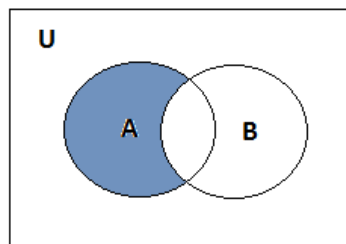
5. Додаткові операції в теорії множин

Крім розглянутих раніше операцій алгебри множин в теорії множин використовуються і інші операції. Розглянемо ці операції і їх зв'язок з операціями алгебри висловлювань.

Визначення 5.1. *Різницею $A \setminus B$ множин A і B називається множина, елементи якої належать множині A і не належать множині B . Таким чином,*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

На діаграмі Ейлера-Венна різниця множин зображується наступною темнішою областю:



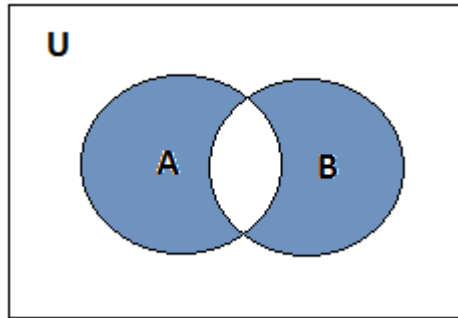
З визначення (за характеристичним предикатом) або діаграми видно, що різниця $A \setminus B$ множин може бути виражена через основні операції наступним чином: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. В алгебрі висловлювань формула $x \rightarrow y$ виражає заперечення імплікації $\overline{x \rightarrow y}$ через операції булевою трійки операцій $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \overline{y}$. Тому в алгебрі висловлювань операції різниці множин відповідає операція заперечення імплікації та

$$I_{A \setminus B} = I_A \wedge \overline{I_B} = I_A \overline{I_B} = \overline{I_A \rightarrow I_B}.$$

Визначення 5.2. *Симетричної різницею $A \oplus B$ множин A і B називається множина, елементи якої або належать множині A і не належать множині B , або належать множині B і не належать множині A . Таким чином,*

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \}.$$

На діаграмі Ейлера-Венна симетрична різниця множин зображується наступною темнішою областю:



З визначення (за характеристичним предикатом) або діаграми видно, що симетрична різниця $A \oplus B$ множин може бути виражена через основні операції наступним чином:

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

В алгебрі висловлювань формула $x \bar{y} \vee \bar{x} y$ виражає операцію $x + y$ складання по модулю два (що виключає «або») через операції булевою трійки операцій ($x + y = x \bar{y} \vee \bar{x} y$). Тому в алгебрі висловлювань операції «симетрична різниця» множин відповідає операція додавання по модулю два або заперечення еквіваленції ($x + y = \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x} y \vee x \bar{y}$). Зрозуміло, що $I_{A \oplus B} = I_A + I_B$.

Спрощення формул теорії множин і доказ тотожностей цієї теорії можна здійснювати або за допомогою діаграм Ейлера-Венна (в обмеженій кількості випадків), або тотожними перетвореннями на підставі наведених вище законів АМ, або використовуючи зв'язок формул теорії множин з формулами алгебри висловлювань. Останній метод ми вважаємо найкращим, оскільки формули АВ виглядають більш компактно і набуваються навички перетворення формул алгебри висловлювань.

Приклад 5.1. Довести тотожність теорії множин

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Доказ. Розглянемо аналог цієї тотожності в алгебрі логіки

$$\overline{x(\overline{y \cdot z})} = \overline{x \cdot \overline{y}} \vee xz.$$

Доведемо його. Маємо:

$$x(\overline{\overline{y \cdot z}}) = x(\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}) = x(\overline{y} \vee \overline{z}) = \overline{x \cdot \overline{y}} \vee xz$$

В алгебрі висловлювань тотожність доведена і, отже, це тотожність має місце і в теорії множин.

Приклад 5.2. Спростити формулу теорії множин

$$(X \setminus (Y \oplus Z)) \cap (\overline{X \cap Z} \cup (\overline{Y} \setminus Z)).$$

Рішення. Розглянемо аналог цієї формули в алгебрі висловлювань, використовуючи зв'язок операцій AB і AM і спростимо її. Маємо:

$$\begin{aligned} x(\overline{y + z})(\overline{xz} \vee \overline{y \cdot z}) &= x(y \leftrightarrow z)(\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y \cdot z}) = x(\overline{y \cdot z} \vee yz)(\overline{x} \vee \overline{z}) = \\ (\overline{y \cdot z} \vee yz)(\overline{x} \vee \overline{z}) &= (\overline{y \cdot z} \vee yz)(0 \vee \overline{xz}) = (\overline{y \cdot z} \vee yz)x\overline{z} = \overline{xy \cdot z} \vee 0 = \overline{xy \cdot z}. \end{aligned}$$

Повернемося до формули AM . Маємо:

$$(X \setminus (Y \oplus Z)) \cap (\overline{X \cap Z} \cup (\overline{Y} \setminus Z)) = X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z}.$$

Введення додаткових операцій над множинами дозволяє розглянути алгебру множин з розширеною сигнатурою:

$$AM = \langle 2^U; \{ \overline{}, \cap, \cup, \setminus, \oplus \} \rangle$$

6. Відносини на множинах

Нагадаємо визначення декартового добутку множин, що грає велику роль в теорії множин.

Визначення 6.1. Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ в зазначеному порядку називається множина всіляких n -місних наборів,

i -ті компоненти яких беруться з відповідних множин A_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), т.е.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) : \alpha_i \in A_i\}.$$

Якщо всі множини A_i декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ рівні між собою, то декартовий добуток називається n -ой декартовим ступенем множини A :

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) : \alpha_i \in A\}.$$

Визначення 6.2. n -арним (n -місцевим) відношенням на множинах

$A_1, A_2, \dots, A_n$ (в зазначеному порядку) називається будь-яка непорожня підмножина R декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ цих множин ($R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$). Якщо $n = 2$, то відношення називається бінарним. Якщо відношення задане на основі n -ой некарстового ступеня множини A ($R \subseteq A^n$), то говорять, що воно задано на множині A .

Надалі ми будемо розглядати виключно бінарні відносини (як правило, на одній множині). Оскільки будь-яке відношення - це деяка непорожня підмножина відповідного декартового добутку множин, то для його завдання використовуються всі прийоми завдання множин - перерахуванням або описом. Однак для бінарних відносин, заданих на деякій кінцевій множині, можна запропонувати і матричний спосіб завдання відносин. Для цього достатньо зауважити, що будь-яке таке відношення задає певний орієнтований граф (орграф), вершинами якого служать елементи множини, а пари, що входять до ставлення, визначають ребра орграфа. Тим самим, кінцеве ставлення може задаватися за допомогою методів завдання графів. Одним же з методів завдання графів є їх завдання за допомогою матриці суміжності. Тоді в матриці $A_R = \|a_{ij}\|$ кінцевого бінарного відношення:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin R. \end{cases}$$

Визначення 6.3. Областю визначення відносини $R \subseteq A \times B$ називається множина $D(R)$ всіх перших компонент всіх пар з R , тобто

$$D(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid (x, y) \in R\};$$

Областю значень відношення $R \subseteq A \times B$ називається множина $E(R)$ всіх других компонент всіх пар з R , тобто

$$E(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B \mid (x, y) \in R\}.$$

Приклад 6.1. Нехай $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Тоді $D(R) = \mathbb{R}$, а $E(R) = \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$.

Визначення 6.4. Ставленням, зворотним для відношення $R \subseteq A \times B$, називається відношення $R^{-1} \subseteq B \times A$ таке, що $(x, y) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(y, x) \in R$, тобто $R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$.

Для кінцевих бінарних відношень, заданих за допомогою матриці, матриця зворотнього відношення виходить з вихідної матриці транспонуванням останньої, тобто $A_{R^{-1}} = (A_R)^T$ (це легко випливає з визначення зворотного відношення та його матриці).

Приклад 6.2. Для відношення $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ попереднього прикладу маємо: $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$. Для відношення $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ зворотнє відношення збігається з вихідним, тобто $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 = 4\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} = R$.

Визначення 6.5. відношення $I \subseteq A \times A$ таке, що $I \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, x) \mid x \in A\}$, називається тотожним відношенням на множині A чи діагоналлю множини A . Тотожне відношення на множині A позначається I , або I_A , або id_A . Відношення $U = A \times A$ називається універсальним.

Для кінцевих бінарних відношень матриця тотожного відношення - це звичайна одинична матриця (діагональні елементи дорівнюють одиниці, а всі інші - нулі).

Матриця кінцевого універсального бінарного відношення - матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці.

Визначення 6.6. Нехай задані відношення $R \subseteq A \times B$ і $Q \subseteq B \times C$. Тоді їх композиція $P \subseteq A \times C$ в зазначеному порядку (позначається $P = R \circ Q$) визначається наступним чином:

$$P = R \circ Q \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid \exists z \in B : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in Q\}.$$

З визначення тотожного відношення і композиції відношень слід, що тотожне відношення грає роль «одиниці» при композиції відношень, тобто якщо $R \subseteq A \times B$, то $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

Для кінцевих бінарних відношень на деякій множині матриця композиції відношень може бути отримана з матриць вихідних відношень їх «добутком» за звичайними правилами добутку матриць, але замість звичайного складання елементів використовується їх диз'юнкція, а замість множення елементів - їх кон'юнкція.

Приклад 6.3. Нехай $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, а $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}$. Тоді

$$R \circ Q = \{(x, y) \mid \exists z \in \mathbb{R} : z = x^2 \wedge y = 2z + 1\} = \{(x, y) \mid y = 2x^2 + 1\},$$

$$Q \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in \mathbb{R} : z = 2x + 1 \wedge y = z^2\} = \{(x, y) \mid y = (2x + 1)^2\}.$$

З прикладу 6.3 слід, що композиція відношень в загальному випадку не є комутативною.

Визначення 6.7. Нехай $R \subseteq A \times A$ - бінарне відношення на множині A . Тоді:

R - рефлексивне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x \in A : (x, x) \in R$;

R - іррефлексивне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x \in A : (x, x) \notin R$;

R - симетричне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;

R - антисиметричне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$;

R -транзитивне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x, y, z \in A [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R]$;

R - лінійне або повне $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall x, y \in A : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$;

Теорема 6.1. Нехай $R \subseteq A \times A$ - бінарне відношення на множині A . Тоді:

1. R – рефлексивне $\Leftrightarrow I \subseteq R$;
2. R – іррефлексивне $\Leftrightarrow R \cap I = \emptyset$;
3. R – симетричне $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
4. R – антисиметричне $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I$;
5. R – транзитивне $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$;
6. R – повне $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$;

Доказ. Усі твердження теореми майже очевидні (легко йдуть з визначень). Доведемо, наприклад, п'яте твердження.

Необхідність ($\Rightarrow$). Дано: R - транзитивне. Довести: $R \circ R \subseteq R$. Маємо:

$$[(x, z) \in R \circ R \xRightarrow{\text{def } R \circ R} \exists y \in A: (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \xRightarrow{R\text{-транз.}} (x, z) \in R] \Rightarrow R \circ R \subseteq R.$$

Необхідність доведено.

Достатність ($\Leftarrow$). Дано: $R \circ R \subseteq R$. Довести: R - транзитивне. Маємо:

$$R \circ R \subseteq R \xRightarrow{\text{def } R \circ R} \forall x, z: [(x, z) \in R \circ R \Leftrightarrow \exists y: [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \xRightarrow{R \circ R \subseteq R} \forall x, y, z: [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R] \Rightarrow R \text{ – транзитивне.}$$

Затвердження доведено. Довести інші твердження теореми самостійно.

Приклад 6.4. Нехай $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, де $R = \{(x, y) \mid x : y\}$ ($x : y$ означає, що x ділиться на y). Знайти область визначення і множину значень відношення R ; побудувати R^{-1} , $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$; визначити тип відношення R .

Рішення. Оскільки для будь-якого цілого числа x можна підшукати таке ціле y на яке x ділиться (наприклад, $y = 1$), то $D(R) = \mathbb{Z}$. Всі цілі числа крім нуля можуть служити дільниками інших цілих чисел, а $E(R) = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Далі,

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} = \{(x, y) \mid y : x\};$$

Оскільки для будь-якої пари цілих чисел (x, y) , таких, що $x : y$ можна вказати таке z , що $x : z$ і $z : y$ (наприклад, $z = y$), то

$$R \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x : z \wedge z : y\} = \{(x, y) \mid x : y\} = R;$$

Оскільки у будь-яких двох цілих чисел існує їх спільний дільник одиниця, то

$$R \circ R^{-1} = \{(x, y) \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x : z \wedge y : z\} = U = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$$

Оскільки у будь-яких двох відмінних від нуля цілих чисел існує їх спільне кратне, то

$$R^{-1} \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in \mathbb{Z} : z : x \wedge z : y\} = \{(x, y) \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\};$$

Відповіді на інші запитання дамо на підставі теореми 6.1. Зауважимо, що діагональ I_Z множини Z не входить в R (пара $(0, 0) \notin R$). Тому відношення **R не є рефлексивним**. Перетин R і I_Z **не є порожнім** (наприклад, пара $(2, 2) \in I$ та $(2, 2) \in R$). Тому відношення **R не є іррефлексивним**. Відношення **R не є симетричним**, оскільки $R \neq R^{-1}$ (наприклад, $(2, 2) \in I$ і $(2, 2) \in R$). Відношення **R не є антисиметричним**, оскільки, наприклад, пари $(x, -x)$ і $(-x, x)$ ($x \neq 0$) належать R , але $x \neq -x$. Відношення **R є транзитивним**, тому що $R \circ R = R$ (досить $R \circ R \subseteq R$). Відношення **R не є повним**, тому що пара, наприклад, $(2, 3) \notin R$ і $(2, 3) \notin R^{-1}$, і $(2, 3) \notin I$ (тим самим не виконується умова $R \cup I \cup R^{-1} = U$ пункту 6 теореми 6.1).

Зауваження 6.1. Для бінарних відношень R дуже часто замість $(x, y) \in R$ пишуть xRy , тобто символ відношення ставиться між аргументами. Наприклад, $x = y$, $x \leq y$, $x : y$ і ін. Тому, в подальшому, і ми часто будемо використовувати такий запис.

7. Відношення еквівалентності

Визначення 7.1. Бінарне відношення R на деякій множині A називається **відношенням еквівалентності**, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Еквівалентність, як правило, позначається символом « $\sim$ », тобто якщо $(x, y) \in R$ і R - відношення еквівалентності, то пишуть $x \sim y$.

Приклад 7.1. Чи є ставлення порівняності цілих чисел відношенням еквівалентності?

Рішення. $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod{m}\}$.

Нагадаємо визначення порівнянності цілих чисел по деякому модулю.
Якщо m - деяке ціле позитивне число, то

$$x \equiv y \pmod{m} \stackrel{\text{def}}{=} (x - y) : m.$$

1. Оскільки $\forall x \in \mathbb{Z}: x \equiv x \pmod{m}$, то досліджуване відношення - **рефлексивно**
($x \equiv x \pmod{m} \Leftrightarrow (x - x) : m \Leftrightarrow 0 : m$).

2. Маємо:

$$x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow (x - y) : m \Leftrightarrow -(y - x) : m \Leftrightarrow (y - x) : m \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{m}$$

Таким чином, досліджуване відношення - **симетрично**.

3. Далі:

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{m} \text{ і } y \equiv z \pmod{m} &\Leftrightarrow (x - y) : m \text{ і } (y - z) : m \Rightarrow (x - y + y - z) : m \\ &\Rightarrow (x - z) : m \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}. \end{aligned}$$

Таким чином, досліджуване відношення - **транзитивно**.

Отже, порівнянність цілих чисел по деякому модулю є відношенням еквівалентності.

Визначення 7.2. Нехай нам задано множину $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ непорожніх підмножин деякої множини A ($\forall i: A_i \neq \emptyset \wedge A_i \subseteq A$) таких, що вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині A . Тоді $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ називається **розбиттям** множини A .

Визначення 7.3. Множина R_a всіх тих елементів множини A , які еквівалентні елементу « a », називається класом **еквівалентності елемента « a »**. Таким чином, $R_a = \{x \mid x \sim a\}$.

Доведемо наступну теорему про відношення еквівалентності.

Теорема 7.1. Якщо на деякій множині задано відношення еквівалентності, то воно призводить до розбиття цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів.

Доказ. Нехай нам задано множину A і відношення еквівалентності на цій множині. Нехай $R_a = \{ x \mid x \sim a \}$.

Покажемо, що кожен клас еквівалентності однозначно визначається будь-яким своїм елементом. Справді, якщо $b \in R_a$, то $b \sim a$. Але відношення еквівалентності симетрично і, отже, $b \sim a$ тоді і тільки тоді, коли $a \sim b$. Тоді всі елементи x , такі, що $x \sim a$ в силу транзитивності відносини еквівалентності, мають властивість $x \sim b$. Значить, $R_a = \{ x \mid x \sim a \} = \{ x \mid x \sim b \} = R_b$.

Покажемо далі, що класи еквівалентності або не перетинаються, або збігаються. Розглянемо два довільних класи еквівалентності R_a та R_b . Якщо їх перетин не порожній, то в цьому перетині міститься принаймні один елемент. Нехай $c \in R_a \cap R_b$. Тоді $c \in R_a$ (і, отже, $R_c = R_a$) та $c \in R_b$ (тоді $R_c = R_b$). В результаті $R_b = R_a$. Отже, різні класи еквівалентності не перетинаються.

Всякий елемент вихідної множини належить хоча б одному класу еквівалентності (належить об'єднанню цих класів). Справді, оскільки в силу рефлексивності відношення еквівалентності всілякий елемент множини A еквівалентний самому собі (тобто $\forall a \in A: a \sim a$), то $a \in R_a$.

Таким чином, класи еквівалентності вичерпують всю вихідну множину і різні класи попарно не перетинаються. Отже, їх множина утворює розбиття вихідної множини. Теорему доведено.

Визначення 7.4. Розбиття множини A за заданим на ній відношенням еквівалентності « $\sim$ » називається **фактор-множиною** і позначається $A/\sim$.

Приклад 7.2. У прикладі 7.1 було доведено, що відношення порівнянності цілих чисел $\mathbb{Z}$ по деякому модулю m є відношенням еквівалентності. Отже, в силу попередньої теореми, воно призводить до розбиття множини $\mathbb{Z}$ на класи

порівнянних між собою елементів. Позначимо клас еквівалентності елемента $\bar{a}$. Тоді

$\mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-2}, \overline{m-1}\}$ - фактор-множина $\mathbb{Z}$ по відношенню еквівалентності « $\equiv$ » порівнянності цілих чисел.

Теорема 7.2 (зворотня теоремі 7.1). Якщо задано деяке розбиття $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ множини A , то воно породжує відношення еквівалентності, для якого розбиття є фактор-множиною з цього відношення еквівалентності.

Доказ. Введемо на множині A відношення R наступним чином. $R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid \exists i: x \in A_i \wedge y \in A_i\}$, тобто пара (x, y) належить нашому відношенню тоді і тільки тоді, коли існує підмножина в нашому розбитті, якої належать елементи x і y .

Введене відношення є рефлексивним, оскільки для будь-якого елемента $x \in A$ існує підмножина вихідного розбиття, якої належить x і, отже, $(x, x) \in R$.

Відношення R є симетричним, бо умова $x, y \in A_i \quad ((x, y) \in R)$ рівносильна умові $y, x \in A_i \quad ((y, x) \in R)$.

Крім того, якщо $x, y \in A_i$ та $y, z \in A_i$, то і $x, z \in A_i$, отже, $[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \Rightarrow (x, z) \in R$. Отже, введене відношення є транзитивним. Таким чином, R - відношення еквівалентності. Класами еквівалентності при цьому є елементи вихідного розбиття. Значить, вихідне розбиття - це фактор-множина множини A по побудованому відношенню еквівалентності. Теорему доведено.

8. Потужність множин

Визначення 8.1. Множини A і B називаються еквівалентними, якщо між ними існує бієктивне відображення.

Визначення коректно, бо ставлення R на булеані 2^U універсальної множини, де $R \stackrel{\text{def}}{=} \{(A, B) \mid \exists \varphi: A \rightarrow B, \varphi - \text{бієкція}\}$, є **відношенням еквівалентності** (переконайтеся в цьому самостійно).

Визначення 8.2. *Потужністю $|A|$ множини A називається об'єкт, що зіставляється класу еквівалентності цієї множини (множині всіх множин, еквівалентних множині A).*

*Множина A називається **кінцевою**, якщо існує таке натуральне число n , що $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ (тоді $|A| \stackrel{\text{def}}{=} n$), в іншому випадку воно називається **нескінченним**.*

*Для нескінченних множин поняття потужності узагальнює поняття «кількість елементів множини». Потужності множин називаються їх **кардинальними числами**.*

*Множини, еквівалентні множині натуральних чисел, називаються **рахунковими** і їх кардинальне число одно $\aleph_0$ (алеф нульове). Порожня множина рахункова за визначенням.*

*Множини, еквівалентні множині дійсних чисел, називаються **континуальними** і їх кардинальне число одно $\mathfrak{c}$ («це», континуум).*

*Кардинальні числа кінцевих множин називаються **кінцевими**, а нескінченних - **нескінченними**.*

Отже, $|A| = |B|$ тоді і тільки тоді, коли $A \sim B$. Таким чином можна говорити про рівність потужностей. Однак потужності різних множин можна в певному сенсі порівнювати, кажучи про більшу чи меншу потужності.

Вважають, що потужність множини A не перевищує потужності множини B ($|A| \leq |B|$), якщо A рівнопотужно деякій підмножині множини B . Потужність множини A вважається чітко меншою потужності множини B ($|A| < |B|$), якщо множини A та B неравнопотужні та існує власна підмножина C множини B , рівносильна множині A , тобто

$$(A \not\sim B) \wedge (\exists C \subset B) [A \sim C] \Leftrightarrow (|A| < |B|)$$

Для потужностей можна довести і інші співвідношення. А саме:

$$\text{а) } (|A| \leq |B|) \wedge (|B| \leq |A|) \Rightarrow (|A| = |B|);$$

$$\text{б) } (|A| \leq |B|) \wedge (|B| \leq |C|) \Rightarrow (|A| \leq |C|);$$

в) Для будь-яких двох множин A і B має місце в точності одне з наступних трьох умов: або $(|A| < |B|)$, або $(|B| < |A|)$, або $(|A| = |B|)$ (теорема Кантора-Бернштейна);

$$\text{г) } |A| < 2^{|A|}.$$

$$\text{д) } \aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Теорема 8.1 (ознака нескінченної кількості).

Множина нескінченна, якщо вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

Доказ.

A - кінцеве, в силу визначення, тоді і тільки тоді, коли $\exists n \in \mathbb{N}: A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Оскільки множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує бієктивне відображення між цими множинами, то, як наслідок визначення кінцевої множини, маємо:

$$A - \text{кінцеве} \Rightarrow (\exists B \subset A)[A \sim B].$$

Тепер, використовуючи рівносильність прямої теореми $(F \rightarrow G)$ і її контрапозиції $(\overline{F} \rightarrow \overline{G})$, отримаємо:

$$(\exists B \subset A)[A \sim B] \Rightarrow A - \text{не є кінцевим (нескінченне)}$$

і, тим самим, теорема доведена.

Приклад 8.1. Доведемо, наприклад, що множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ - нескінченна множина.

Розглянемо відповідність $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ таку, що $\varphi(n) = 2n$. Незавжди переконатися в тому, що ця відповідність є бієктивним відображенням (всюди певна, однозначна, ін'єкційна і сюр'єктивна відповідність). Тоді $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$. Але $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

Отже, в силу теореми 8.1, множина натуральних чисел - нескінченна.

9. Відношення часткового порядку

Визначення 9.1. Бінарне відношення R на деякій множині A називається **відношенням часткового порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Ставлення часткового порядку, як правило, позначається символом « $\leq$ », тобто якщо $(x,y) \in R$ і R - відношення часткового порядку, то пишуть $x \leq y$ (« x не більший y » або « x менше або дорівнює y »). Якщо $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$, то частковий порядок R називається **лінійним порядком**.

Приклад 9.1. Чи є ставлення подільності на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ ставленням часткового порядку?

Рішення. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(x,y) \mid x \vdots y\}$.

1. Оскільки $\forall x \in \mathbb{N}: x \vdots x$, то $I \subseteq R$ і ставлення є **рефлексивним**.
2. Оскільки для натуральних чисел з $x \vdots y$ і $y \vdots x$ слід, що $x = y$, то ставлення є **антисиметричним**.
3. Оскільки для натуральних чисел з $x \vdots y$ і $y \vdots z$ слід, що $x \vdots z$, то ставлення є **транзитивним**.

Таким чином, ставлення подільності на множині натуральних чисел є **відношенням часткового порядку**.

Визначення 9.2. Бінарне відношення R на деякій множині A називається **відношенням чіткого порядку**, якщо воно іррефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Відношення чіткого порядку, як правило, позначається символом « $<$ », тобто якщо $(x,y) \in R$ і R - відношення чіткого порядку, то пишуть $x < y$ (« x менше y »).

Відношення чіткого порядку виходить з відношення часткового порядку видаленням з нього всіх елементів діагоналі I_A , тобто

$$x < y \stackrel{\text{def}}{=} x \leq y \wedge x \neq y.$$

Відношення чіткого порядку « $<$ » на множині A називають асоційованим з відношенням часткового порядку « $\leq$ » на цій множині.

Визначення 9.3. Бінарне відношення « $\geq$ » на деякій множині A , зворотнє для відносини часткового порядку « $\leq$ » на цій множині називається

відношенням, двоїтим до відношення часткового порядку ($x \geq y$ читається « x не менш y » або « x більше або дорівнює y »).

Неважко переконатися в тому, що відношення, двоїсте відношенню часткового порядку на деякій множині, саме являється відношенням часткового порядку на цій множині.

Визначення 9.4. Множина A , на якій задано відношення часткового порядку « $\leq$ », називається **частково упорядкованою множиною** (ЧУМ).

*Якщо всі елементи множини A попарно можна порівняти стосовно порядку « $\leq$ » (відношення « $\leq$ » - повне), то A називається **лінійно впорядкованим** (цілком упорядкованим або ланцюгом), а відповідне ставлення - відношенням лінійного порядку.*

Визначення 9.5. Нехай $\langle A; \leq \rangle$ - ЧУМ. Тоді підмножина $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в A утворює зростаючий ланцюг, якщо $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. При цьому x_1 називається **початком ланцюга**, x_n - **кінцем ланцюга**, а число $(n-1)$ - **довжиною ланцюга**.

Приклад 9.1. Розглянемо n - мірний логічний куб B^n ($B = \{0, 1\}$) і відношення «передування» довічних наборів « $\leq$ ». Покажемо, що $\langle B^n; \leq \rangle$ - ЧУМ. Нехай

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B^n \text{ и } \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in B^n.$$

Тоді $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \leq \beta_i$. Очевидно, що відношення « $\leq$ » має властивості рефлексивності, антисиметричності та транзитивності (перевірити!). Тому $\langle B^n, \leq \rangle$ - ЧУМ. Зауважимо, що відношення часткового порядку « $\leq$ » на B^n не є відношенням лінійного порядку оскільки, наприклад, набори $(0, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ и $(1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ непорівнянні між собою по відношенню порядку « $\leq$ ».

Визначення 9.6. Бінарне відношення « $<$ » (або « $\triangleleft$ ») на деякій множині A називається **відношенням домінування** (або **покриваємості**), асоційованим з відношенням часткового порядку « $\leq$ », якщо воно іррефлексивно, антисиметрично та не транзитивно.

$$x \triangleleft y \stackrel{\text{def}}{=} (x < y) \wedge (\forall z [x \leq z \leq y \Rightarrow (x = z \vee y = z)]).$$

Якщо $x \triangleleft y$, то кажуть, що елемент y **домінує** над елементом x (або елемент y **покриває** елемент x).

Для зображення кінцевих ЧУМ є графічний апарат, званий **діаграмами Хассе**. Для заданого ЧУМ A діаграма Хассе складається із сукупності точок і ліній їх з'єднують, в якій точки зображують елементи множини A і, якщо $x \triangleleft y$, то x і y поєднані лінією, причому x в діаграмі розташовується нижче y . Таким чином, діаграма ЧУМ, по суті, являє собою орієнтований граф, в якому опущені петлі і в якому напрям ребер, що відображають домінування елементів, вибрано від вершин більш нижнього ярусу до вершин більш вищого ярусу.

Теорема 9.1 (про покриваємість)

Якщо $\langle M; \leq \rangle$ - кінцева ЧУМ, то $\forall a, b \in M: a \leq b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або існує кінцева послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n$ елементів множини M така, що $x_1 = a, x_n = b$ і $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}: x_i \triangleleft x_{i+1}$.

Доказ.

Необхідність. Нехай $a \leq b$. Якщо $a = b$, то все доведено. Якщо $a \neq b$, то розглянемо всі зростаючі ланцюга з початком в a та кінцем в b . Такі ланцюги існують, наприклад $\{a, b\}$. Виберемо з таких ланцюгів той, який має найбільшу довжину. Нехай $H: a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ - такий ланцюг. Тоді в цьому ланцюзі $\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}: x_i \triangleleft x_{i+1}$. Якщо це не так, то для деякої пари елементів x_k, x_{k+1} ланцюга в M знайдеться елемент y такий, що $x_k < y < x_{k+1}$. Тоді ланцюг $H \cup \{y\}$ має довжину, більшу ніж ланцюг H , що суперечить вибору H . Отже, в ланцюзі $H: a = x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft \dots \triangleleft x_m = b$ і необхідність доведена.

Достатність. Якщо $a = b$, то $a \leq b$ і все доведено. Якщо існує ланцюг $H: a = x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft \dots \triangleleft x_m = b$, то $H: a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ - зростаючий

ланцюг і тоді, в силу транзитивності відношення еквівалентності, $a \leq b$ і знову все доведено.

На підставі теореми 9.1 при зображенні кінцевої ЧУМ за допомогою орієнтованого графа досить обмежитися зображенням ребер, що передають відношення покриваємості елементів ЧУМ, тобто використовувати діаграми Хассе.

Приклад 9.2. Розглянемо булеан 2^A для трьохелементної множини

$$A = \{a, b, c\}. \quad 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Ставлення « $\subseteq$ » звичайного теоретико-множинного включення ($A \subseteq B$ означає, що A - підмножина множини B) на булеані 2^A є відношенням часткового порядку, бо має властивості рефлексивності ($A \subseteq A$), антисиметричність ($A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$) і транзитивності ($A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$). Тоді діаграма Хассе для 2^A по відношенню « $\subseteq$ » наступна:

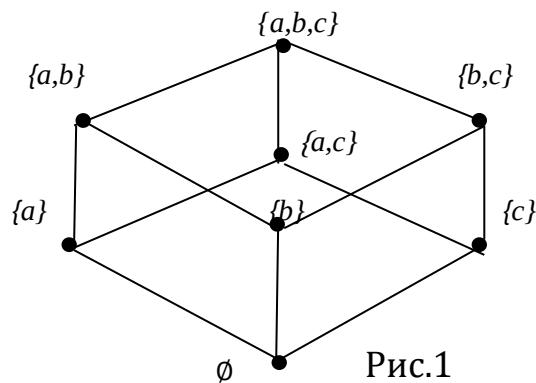


Рис.1

З діаграми видно, наприклад, що підмножини $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$; $\{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$; $\{\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$ розглянутого булеана трьохелементної множини утворюють ланцюги.

Визначення 9.7. Нехай нам задано ЧУМ A . Елемент a множини A називається **найменшим** в A за відношенням часткового порядку, якщо всі елементи A можна порівняти з ним і в A не існує елементів менших, ніж a , тобто (a - найменший $\stackrel{\text{def}}{<} \forall b \in A: a \leq b$).

Елемент a множини A називається мінімальним в A , якщо він найменший серед усіх тих елементів A , які можна порівняти з ним, тобто (a - min $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall b \in A: b \leq a \Rightarrow b = a$).

Елемент a множини A називається **найбільшим** в A , якщо всі елементи A можна порівняти з ним і в A не існує елементів більших, ніж a , тобто (A - найбільший $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall b \in A: b \leq a$).

Елемент a множини A називається **максимальним** в A , якщо він найбільший серед всіх тих елементів A , які можна порівняти з ним, тобто (a - max $\stackrel{\text{def}}{<}> \forall b \in A: a \leq b \Rightarrow b = a$).

Можна суворо довести, що якщо в ЧУМ є найменший елемент, то він єдиний (довести!), Якщо в ЧУМ є найбільший елемент, то він єдиний (довести!).

З рис.1 прикладу 9.2 видно, що $2^{\{a,b,c\}}$ має єдиний найменший елемент - $\emptyset$ (він же єдиний мінімальний елемент) і має єдиний найбільший елемент - $\{a, b, c\}$ (він же єдиний максимальний елемент).

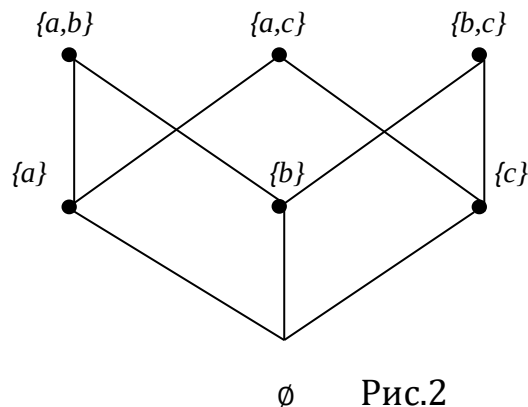


Рис.2

З Рис.2 видно, що множина $2^{\{a,b,c\}} \setminus \{a,b,c\}$ має єдиний найменший елемент - $\emptyset$ (він же єдиний мінімальний елемент); не має найбільшого елемента і має три максимальних елемента - $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

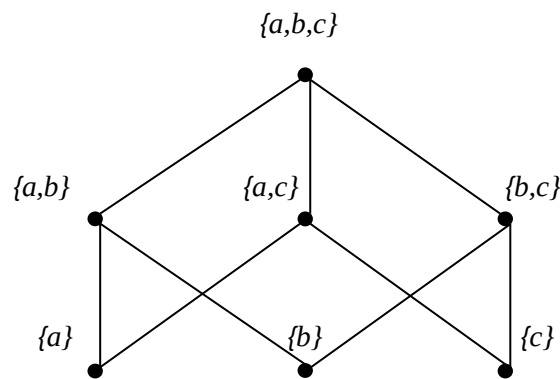


Рис.3

З рис.3 видно, що множина $2^{\{a,b,c\}} \setminus \emptyset$ має три мінімальних елементи - $\{a\}$, $\{c\}$, $\{b\}$; має найбільший елемент $\{a, b, c\}$ (він же єдиний максимальний елемент).

Визначення 9.8. Нехай $\langle A; \leq \rangle$ - ЧУМ. Тоді конусом з вершиною в точці «у» ($y \in A$) називається множина **всіх** елементів множини A що не перевищують y , тобто $y^\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \leq y\}$.

Наприклад, для $A = 2^{\{a,b,c\}}$ (див. Рис.1):

1. $\{a,b,c\}^\Delta = 2^{\{a,b,c\}}$;
2. $\{a,b\}^\Delta = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$;
3. $\{c\}^\Delta = \{\emptyset, \{c\}\}$.

Визначення 9.9. ЧУМ $(A; \leq)$ називають **індуктивною**, якщо в неї кожен зростаючий ланцюг елементів з кінцем в заданій точці має кінцеву довжину.

Приклад 9.3.

1. Нехай A - кінцева множина. Тоді 2^A - кінцева і, отже, $\langle 2^A; \subseteq \rangle$ - індуктивна (в неї кожен зростаючий ланцюг з кінцем в заданій точці обмежений знизу найменшим елементом $\emptyset$).

2. $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$ - індуктивна, оскільки будь-який зростаючий ланцюг натуральних чисел з кінцем в заданій точці n має кінцеву довжину і обривається зліва найменшим елементом 1;

3. $\langle 2^{\{a,b,c\}} \setminus \emptyset; \subseteq \rangle$ - індуктивна, оскільки $2^{\{a,b,c\}}$ - кінцева і в неї кожен зростаючий ланцюг з кінцем в заданій точці обмежений знизу мінімальними елементами (див. Рис.3).

4. $\langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$ - не є індуктивною, оскільки $\forall a \in \mathbb{Z}$ зростаючий ланцюг з кінцем в точці a не є кінцевим (в $\mathbb{Z}$ немає найменшого і мінімальних елементів, тому ланцюг $\dots < z_n < z_{n-1} < \dots < z_2 < z_1 < a$ - нескінченний).

Визначення 9.10. Частково впорядковані множини $M_1; \leq_1$ і $M_2; \leq_2$ називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивне відображення φ між M_1 і M_2 «зберігаюче» ставлення часткового порядку, тобто

$$M_1 \cong M_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\exists \varphi: M_1 \rightarrow M_2 \wedge \varphi \text{ - бієкція}) (\forall a, b \in M_1) [a \leq_1 b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq_2 \varphi(b)].$$

Неважко переконатися в тому, що відношення ізоморфізму на множині всіх частково впорядкованих множин є відношенням еквівалентності, оскільки рефлексивно, симетрично і транзитивно (переконатися в цьому самостійно!).

Теорема 9.1. (про нормальну форму ЧУМ)

Нехай $\langle M; \leq \rangle$ - довільна ЧУМ. Тоді існує підмножина H в булеані 2^M вихідної множини M така, що $\langle M; \leq \rangle \cong \langle H; \subseteq \rangle$.

Доказ. Розглянемо підмножину H , елементами якої є конуси, вершинами яких служать елементи множини M , тобто $H \stackrel{\text{def}}{=} \{x^A \mid x \in M\}$. Всякий конус в M однозначно визначається своєю вершиною і є підмножиною в M . В силу цього, H є підмножиною булеана 2^M множини M . $\langle 2^M; \subseteq \rangle$ - ЧУМ. Отже, і $\langle H; \subseteq \rangle$ - ЧУМ. Задамо відповідність $\varphi: M \rightarrow H$ так, що $\varphi(x) = x^A$. Ця відповідність є відображенням, бо всюди визначена та однозначна. Так як різним елементам з M відповідають різні конуси (їх вершини - різні), то відповідність - ін'єктивна. Всякий конус в M має деяку вершину - елемент множини M . Отже, відповідність - сюр'єктивна. Таким чином, встановлена відповідність - бієктивне відображення. Покажемо, що воно «зберігає» відношення часткового порядку. Нехай $x_1 \leq x_2$. $\varphi(x_1) = x_1^A$ и $\varphi(x_2) = x_2^A$.

Оскільки $x_1 \leq x_2$, то $\forall x: x \leq x_1 \Rightarrow x \leq x_2$. Значить $x_1^A \subseteq x_2^A$, т.е. $\varphi(x_1) \subseteq \varphi(x_2)$.
Вірно й зворотнє, якщо $\varphi(x_1) \subseteq \varphi(x_2)$, т.е. $x_1^A \subseteq x_2^A$, то $x_1 \in x_2^A$, тобто $x_1 \leq x_2$.
Отже, встановлена бієкція «зберігає» ставлення часткового порядку.
Теорему доведено.

Завдання для самостійного рішення

Завдання 1. Які з наступних тверджень вірні?

- 1) $\{\{1, 2\}, 3\} = \{3, \{2, 1\}\};$
- 2) $1 \in \{\{1,2\}, \{3,4\}\};$
- 3) $\{1,2\} \subseteq \{\{1,2\}, \{3,4\}\};$
- 4) $\{1,2,3,4\} = \{\{1,2\}, \{3,4\}\};$
- 5) $\{3\} \in \{\{1,2\}, 3\};$
- 6) $\emptyset = \{\emptyset\};$

Завдання 2. Які з наступних тверджень вірні для будь-яких множин A, B, C?

- 1) $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C;$
- 2) $A \subseteq B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C;$
- 3) $A \cap B \subseteq \bar{C} \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset;$
- 4) $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C;$
- 5) $A \subseteq \overline{B \cup C} \wedge B \subseteq \overline{A \cup C} \Rightarrow B = \emptyset;$
- 6) $A \in B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \in C.$

Завдання 3. Нехай U - множина всіх десяткових цифр. $A, B \subseteq U$.

$A = \{1,3,4,5,7,8,9\}, B = \{2,3,4,6,8\}$. Знайти $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, \bar{A}, \bar{B}, A \oplus B, B \oplus A$.

Завдання 4. Нехай: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0, x+y < 3\};$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\};$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \geq 1\}.$$

Побудувати в прямокутній декартовій системі координат: $A, B, C, A \oplus B, A \cap C, A \setminus (A \setminus B), C \oplus (C \cap B)$.

Завдання 5. Нехай $U = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2\}$, $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:3\}$,

$C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:5\}$. Знайти:

$\bar{A}, \bar{C}, A \cap B, A \cap C, A \cap B \cap C, A \cap \bar{B} \cap C, \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

Завдання 6. Побудувати діаграми Ейлера, які відображують непорожні множини A і B , для яких виконуються наступні умови:

- 1) $\bar{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \bar{B} \neq \emptyset$;
- 2) $\bar{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \bar{B} = \emptyset$;
- 3) $\bar{A} \cap B = B \wedge A \cap \bar{B} = A$;
- 4) $A \cup B = B \wedge A \cap B = A \wedge A \cap \bar{B} = \emptyset \wedge \bar{A} \cup B = U$.

Завдання 7. Використовуючи діаграми Ейлера, довести наступні тотожності

- 1) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;
- 2) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (Z \setminus X)$;
- 3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$;
- 4) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;
- 5) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;
- 6) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;
- 7) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;
- 8) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z$;
- 9) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;
- 10) $X \cap (Y \oplus Z) = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$;
- 11) $X \oplus (X \oplus Y) = Y$.

Завдання 8. Довести тотожності теорії множин, використовуючи зв'язок формул AB и AM :

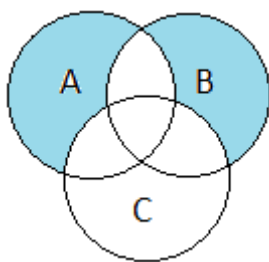
- 1) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;
- 2) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (Z \setminus X)$;

- 3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z);$
- 4) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z);$
- 5) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z);$
- 6) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z);$
- 7) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z);$
- 8) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z;$
- 9) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z);$
- 10) $X \cap (Y \oplus Z) = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z);$
- 11) $X \oplus (X \oplus Y) = Y.$

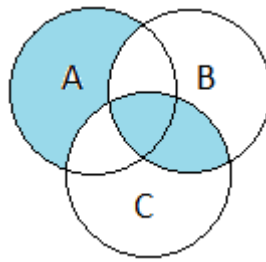
Завдання 9. Довести, що:

- 2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C);$
- 3) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C);$
- 4) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A};$
- 5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \cup B) \subseteq (C \cup D);$
- 6) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \cap B) \subseteq (C \cap D);$
- 7) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \setminus B) \subseteq (C \setminus D);$

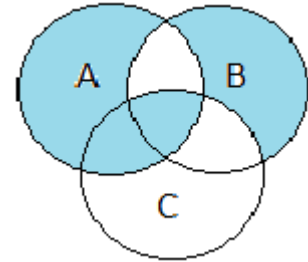
Завдання 10. Для кожної діаграми Ейлера побудувати формулу алгебри множин, що задає заштриховану (більш темну) область.



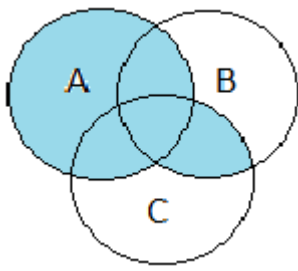
1)



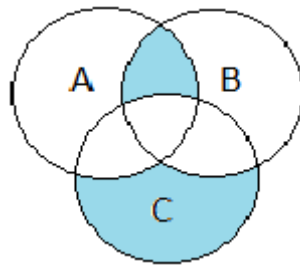
2)



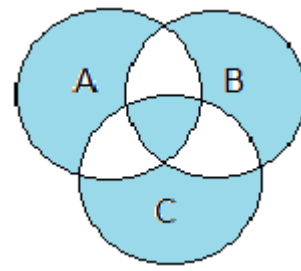
3)



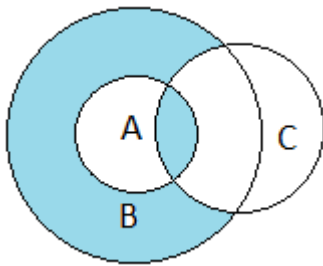
4)



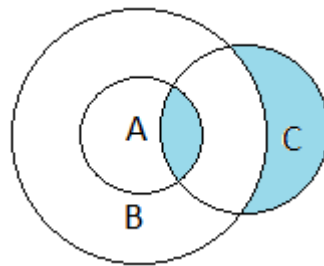
5)



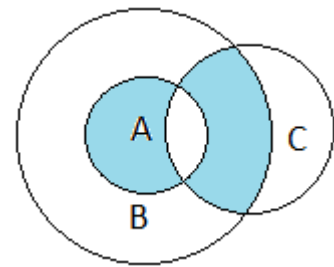
6)



7)



8)



9)

Завдання 11. Спростити наступні формули АМ:

- 1) $B \cup (A \cap B \cap C)$;
- 2) $B \cap (\bar{A} \cup B \cup C) \cap D \cap (D \cup \bar{E})$;
- 3) $(A \cap \bar{A}) \cup B \cup (C \cap \bar{C}) \cup D$;
- 4) $A \cup \overline{B \cap \bar{C}} \cup \overline{A \cap B \cap C}$;
- 5) $((A \cup \bar{A}) \cap B) \cup ((C \cap \bar{C}) \cup D)$;
- 6) $((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup (\bar{A} \cap C))$;
- 7) $(A \cap (A \cup B \cup C)) \cup ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$.

Завдання 12. Нехай $A = \{a, b, c\}$ і $B = \{0, 1\}$. Знайти:

- 1) $A \times B$;
- 2) $A \times B^2$;
- 3) $B \times A \times B$;
- 4) B^3 .

Завдання 13. Довести, що для непорожніх множин A, B, C, D мають місце наступні твердження:

$$1) A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D;$$

$$2) A = B \wedge C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D;$$

Завдання 14. Довести, що для будь-яких множин A, B, C, D мають місце наступні твердження:

$$1) (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D);$$

$$2) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$3) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D);$$

$$4) (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Завдання 15. Зобразити за допомогою діаграм Ейлера відношення між множинами:

- 1) A - квадрати;
- 2) B - чотирикутники;
- 3) C - ромби;
- 4) D - паралелограми;
- 5) E - прямокутники;
- 6) F - трапеції.

Завдання 16. Нехай $R = \{(0,2), (1,2), (2,2)\}$, $S = \{(0,1), (0,2), (1,1), ((2,3), (2,1), (3,2)\}$. Знайти:

$$1) R \circ S;$$

$$2) S \circ R;$$

Завдання 17. Знайти: а) область визначення $D(R)$; б) множину значень $E(R)$; в) R^{-1} ; г) $R \circ R$; д) $R^{-1} \circ R$; е) $R \circ R^{-1}$ для відношень:

$$1) R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2^x - 1\};$$

$$2) R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ ділить } y\};$$

$$3) R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \text{ ділить } x\};$$

$$4) R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0\};$$

$$5) R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x \geq 3y\}.$$

Завдання 18. Довести, що для відношень R_1, R_2, Q , заданих на множині A , якщо $R_1 \subseteq R_2$, то:

$$1) Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2;$$

$$2) R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q;$$

$$3) R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}.$$

Завдання 19. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$. На множині A задане відношення

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$. Чи є відношення R рефлексивним, іррефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним?

Завдання 20. Заповнити таблицю наступним чином: якщо відношення, записане в верхньому рядку, є рефлексивним (Р), іррефлексивним (ІР), симетричним (С), антисиметричним (АС) або транзитивним (Т), то на перетині відповідних рядків і стовпців ставиться «+», в іншому випадку «-».

	Відношення $R = \{(x,y)\}$ задане на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел						Відношення $R = \{(l_1, l_2)\}$ задане на множині прямих площин	
	$x=y$	$x < y$	$x \leq y$	$x \neq y$	$ x-y < 2$	$x+y=8$	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
Р								
ІР								
С								
АС								
Т								

Завдання 21. Довести, що якщо відношення R_1 и R_2 рефлексивні, то рефлексивні й відношення:

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. R_1^{-1} ;
4. $R_1 \circ R_2$.

Завдання 22. Довести, що якщо відношення R_1 и R_2 іррефлексивні, то іррефлексивні й відношення:

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. $R_1 \circ R_1^{-1}$.

Завдання 23. Довести, що якщо відношення R_1 и R_2 симетричні, то

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. R_1^{-1} ;
4. $R_1 \circ R_1^{-1}$.

Завдання 24. Довести, що якщо відношення R_1 и R_2 антисиметричні, то:

1. $R_1 \cap R_2$ - антисиметричне;
2. $R_1 \cup R_2$ – антисиметричне $\Leftrightarrow (R_1 \cap R_2^{-1}) \subseteq I_A$;
3. R_1^{-1} - антисиметричне;

Завдання 25. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1 и R_2 симетрична тоді й тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Завдання 26. Побудувати бінарне відношення R з наступними властивостями:

1. R – рефлексивне, симетричне та не транзитивне;
2. R – рефлексивне, антисиметричне та не транзитивне;
3. R – рефлексивне, транзитивне та не симетричне;

4. R – антисиметричне, транзитивне та не рефлексивне;
5. R – симетричне, транзитивне та не рефлексивне.

Завдання 27. Довести, що будь-яке відношення R , симетричне та антисиметричне одночасно, є транзитивним.

Завдання 28. Нехай R – бінарне відношення на A і $R_0^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_n$.

Довести, що відношення $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_0^n$ – транзитивне.

Завдання 29. Довести, що якщо відношення R на множині A – симетричне та транзитивне і $D(R) \cup E(R) = A$, то відношення R – відношення еквівалентності на A .

Завдання 30. Довести, що відношення R являється відношенням еквівалентності:

1. R визначено на $\mathbb{N}^2$ і $R = \{ \langle (a, b), (c, d) \rangle \mid a + d = b + c \}$;
2. R визначено на $\mathbb{N}^2$ і $R = \{ \langle (a, b), (c, d) \rangle \mid a \cdot d = b \cdot c \}$;

Завдання 31. Довести, що якщо відношення R являється відношенням еквівалентності, то R^{-1} також являється відношенням еквівалентності.

Завдання 32. Довести, що якщо R_1 і R_2 – відношення еквівалентності, то:

1. $R_1 \cap R_2$ – відношення еквівалентності;
2. $R_1 \cup R_2$ – відношення еквівалентності $\Leftrightarrow R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$;
3. $R_1 \circ R_2$ – відношення еквівалентності $\Leftrightarrow R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Завдання 33. Довести, що бінарне відношення R являється відношенням еквівалентності. побудувати фактор-множину по цьому відношенню еквівалентності:

a) R – відношення подоби на множині всіляких трикутників;

b) R – відношення ізоморфізма дійсних лінійних просторів розмірності $\leq n$ над полем $\mathbb{R}$.

Завдання 34. Довести, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ нескінченна.

Завдання 35. Нехай бінарне відношення R задане на множині $A=\{a,b,c\}$. $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$. Довести, що R – відношення часткового порядку.

Завдання 36. Довести, що якщо R – відношення часткового порядку, то R^{-1} – відношення часткового порядку.

Завдання 37. Довести, що для будь-якої множини A : $\langle 2^A; \subseteq \rangle$ - частково упорядочена множина (ЧУМ).

Завдання 38. Довести, що якщо $\langle A; R_1 \rangle$ - ЧУМ і $\langle A; R_2 \rangle$ - ЧУМ, то $\langle A; R_1 \cap R_2 \rangle$ - ЧУМ.

Задание 39. Нехай $\langle A; R_1 \rangle$ - ЧУМ і $\langle B; R_2 \rangle$ - ЧУМ. На множині $A \times B$ задамо відношення R наступним чином:

$$\forall (a,b),(c,d) \in A \times B: [(a,b),(c,d)] \in R \Leftrightarrow (a,c) \in R_1 \wedge (b,d) \in R_2.$$

Довести, що $\langle A \times B; R \rangle$ - ЧУМ.

Завдання 40. Побудувати діаграми Хассе слідуючих ЧУМ:

1. $\langle B^3; \leq \rangle, B = \{0, 1\}$;
2. $\langle B^4; \leq \rangle, B = \{0, 1\}$;
3. $\langle 2^{\{a,b,c\}}; \subseteq \rangle$;
4. $\langle \{2,3,4,5,8,12,18,24,30,32,36,40\}; x \leq y \Leftrightarrow x : y \rangle$.

Завдання 41. Побудувати діаграми Хассе всіх попарно неізоморфних ЧУМ:

1. На множині з трьох елементів;
2. На множині з чотирьох елементів.

Завдання 42. Побудувати приклад ЧУМ, яка має точно один мінімальний елемент та не має найменшого елемента.

Завдання 43. Довести, що відношення R на множині A являється одночасно відношенням еквівалентності та відношенням часткового порядку тоді й тільки тоді, коли $R = I_A$.

Завдання 44. Нехай $A = B^2$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Введемо відношення « $\leq_1$ » на B :

$$(a,b) \leq_1 (c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (a < c) \wedge [(a = c) \Rightarrow (b \leq d)].$$

Довести, що « $\leq_1$ » - відношення часткового порядку. Знайти, якщо вони існують, мінімальні, найменші, максимальні, найбільші елементи в A відносно цього часткового порядку. Чи являється вказаний частковий порядок лінійним? Побудувати діаграму Хассе частково упорядкованої множини A .

Відповіді та рішення

Завдання 1. Твердження 1) вірне (чому?) та невірні всі останні твердження (чому?).

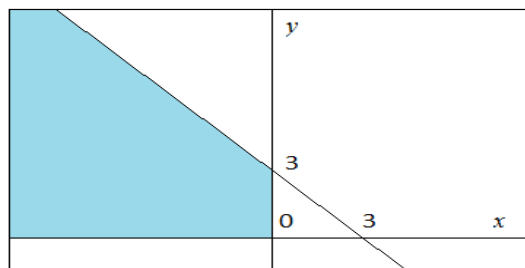
Завдання 2. Вірними є твердження 3) та 6). Невірними – інші твердження (наведіть контрприклад). Наприклад, для твердження 2): $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\{a,b\}, c\}$. Тоді $A \subseteq B$, $B \in C$, але $A \notin C$.

Завдання 3. Маємо:

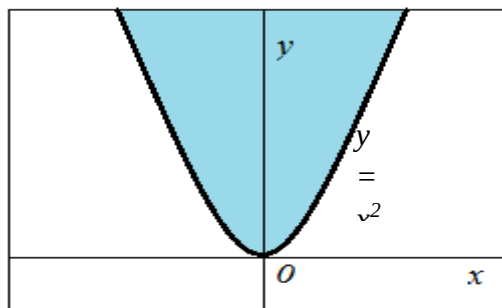
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad A \cap B = \{3,4,8\}, \quad A \setminus B = \{1,5,7,9\},$$

$$B \setminus A = \{2,6\}, \quad \bar{A} = \{0,2,6\}, \quad \bar{B} = \{0,1,5,7,9\}, \quad A \oplus B = \{1,2,5,6,7,9\} = B \oplus A.$$

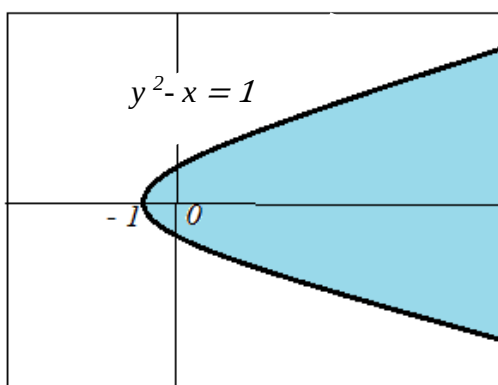
Завдання 4.



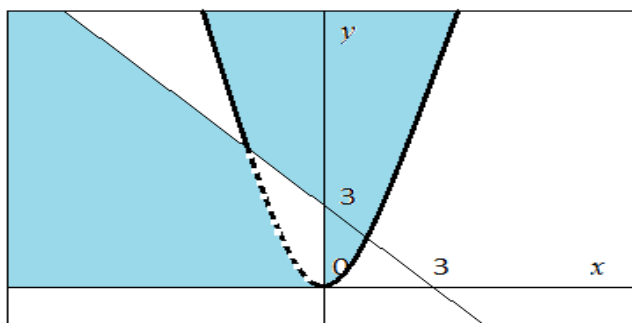
Більш темна область - $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0, x+y < 3\}$;



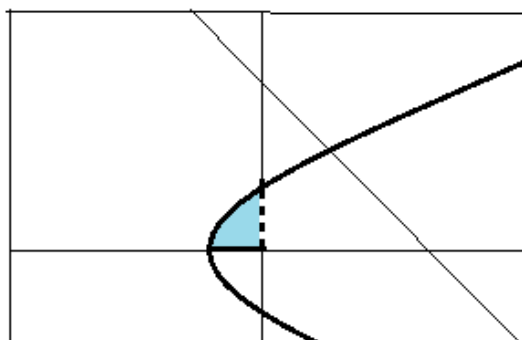
Більш темна область - $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}$;



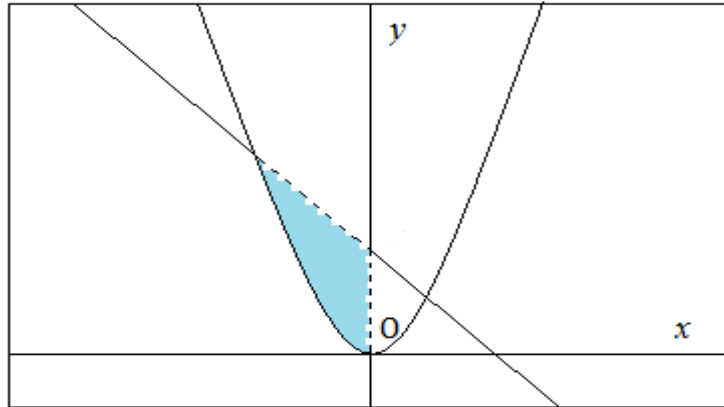
Більш темна область - $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \geq 1\}$.



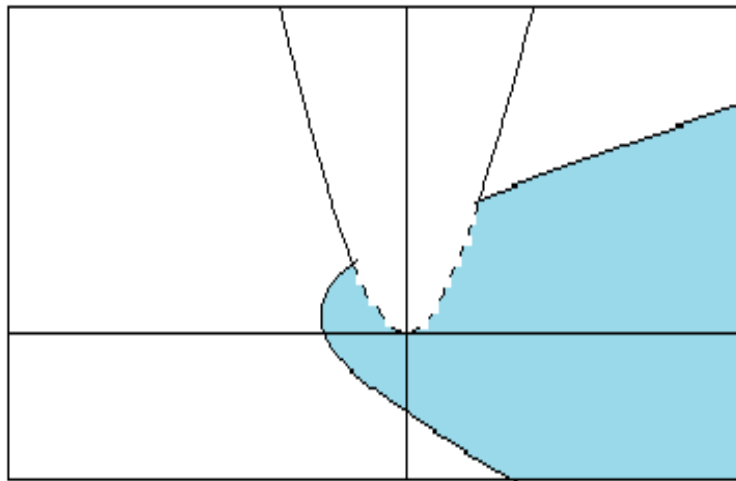
Більш темна область - $A \oplus B$.



Більш темна область - $A \cap C$.



Більш темна область - $A \setminus (A \setminus B)$.



Більш темна область - $C \oplus (C \cap B)$.

Завдання 5. Відповіді:

$$\overline{A} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n:2}\};$$

$$\overline{C} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n:5}\};$$

$$A \cap B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2 \wedge n:3\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:6\};$$

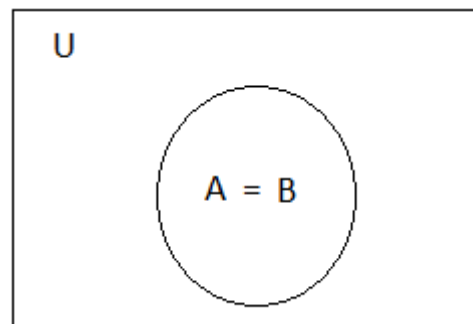
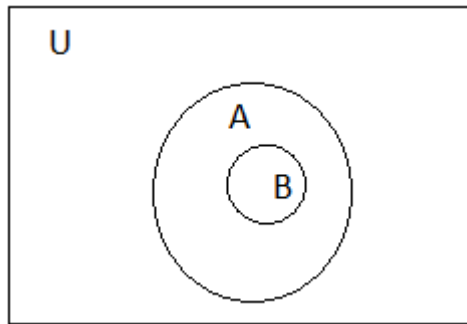
$$A \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2 \wedge n:5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:10\};$$

$$A \cap B \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2 \wedge n:3 \wedge n:5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:30\};$$

$$A \cap \overline{B} \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:2 \wedge \overline{n:3} \wedge n:5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n:10 \wedge \overline{n:3}\};$$

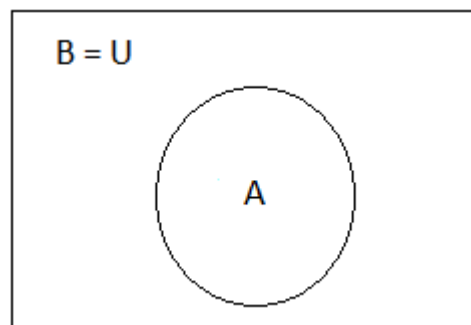
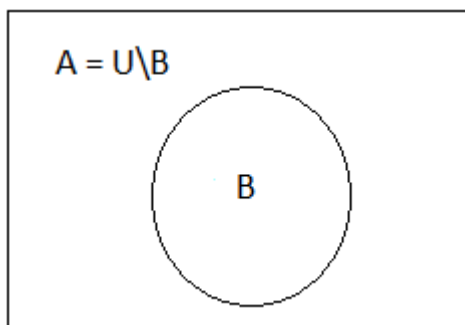
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n:2} \wedge \overline{n:3} \wedge \overline{n:5}\}.$$

Завдання 6. Відповіді:



1) $\bar{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \bar{B} \neq \emptyset$;

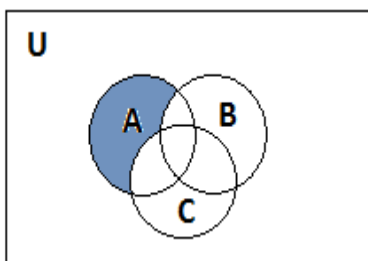
2) $\bar{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \bar{B} = \emptyset$;



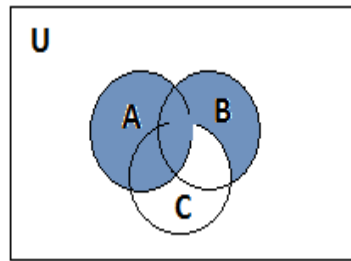
3) $\bar{A} \cap B = B \wedge A \cap \bar{B} = A$;

4) $A \cup B = B \wedge A \cap B =$
 $= A \wedge A \cap \bar{B} = \emptyset \wedge \bar{A} \cup B = U$.

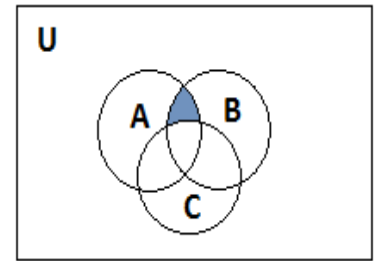
Завдання 7. У довільній інтерпретації $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ при найбільш загальному розташуванні множин A , B , C підсумкові діаграми Ейлера для лівих і правих частин, наприклад, перших трьох тотожностей наступні:



1)



2)



3)

Завдання 8. Рішення. Використовуючи зв'язок формул AB і AM , маємо, наприклад, для перших трьох тотожностей:

$$1) (X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z) \Leftrightarrow (x \bar{y}) \bar{z} = x \overline{y \vee z} \Leftrightarrow x \bar{y} \bar{z} = x \bar{y} \bar{z};$$

$$2) X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (Z \setminus X) \Leftrightarrow x \vee y \bar{z} = (x \vee y) \overline{z \setminus x} = (x \vee y)(x \vee \bar{z}) = x \vee y \bar{z}$$

$$3) X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) \Leftrightarrow x(y \bar{z}) = (xy) \overline{xz} = xy(\bar{x} \vee \bar{z}) = xy \bar{z} = x(y \bar{z}).$$

Тотожності в АВ доведені. Отже, вони мають місце і в АМ.

Завдання 9. Доведемо, наприклад, 5). Маємо:

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A & \xRightarrow{A \subseteq C} \\ x \in B & \xRightarrow{B \subseteq D} \end{cases} \begin{cases} x \in C \\ x \in D \end{cases} \xRightarrow{\text{def}(C \cup D)} x \in C \cup D.$$

Таким чином, $(A \cup B) \subseteq (C \cup D)$. Все доведено.

Завдання 10. Відповіді (формула визначається неоднозначно)

$$1) (A \oplus B) \setminus C; \quad 2) (A \cup B \cup C) \setminus (B \oplus C); \quad 3) ((A \oplus B) \setminus C) \cup (A \cap C);$$

$$4) A \cup (B \cap C); \quad 5) (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{C} \cap A \cap B);$$

$$6) (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C);$$

$$7) (B \setminus (A \cup C)) \cup (A \cap C); \quad 8) (C \setminus B) \cup (A \cap C); \quad 9) ((B \setminus A) \cap C) \cup (A \setminus C).$$

Завдання 11. Найпростіше спрощення зазначених виразів можна здійснити, використовуючи зв'язок формул АМ і АВ. Маємо, наприклад ,:

$$6) ((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup (\bar{A} \cap C));$$

Аналогом цієї формули в АВ є формула:

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{x} z).$$

Спростимо останню формулу з використанням законів поглинання $(A \vee AB = A)$, склеювання $((A \vee B)(A \vee \bar{B}) = A)$ та протиріччя $(A \bar{A} = 0)$. Отримаємо:

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{x} z) = x \bar{x} = 0.$$

Повертаючись в АМ, Маємо:

$$((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup (\bar{A} \cap C)) = \emptyset.$$

Завдання 12. Для спрощення записів замість (a, b) або (a, b, c) будемо писати ab або abc . Тоді:

$$1) A \times B = \{a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1\};$$

$$2) A \times B^2 = \{a,b,c\} \times \{00, 01, 10, 11\} = \{a00, b00, c00, a01, b01, c01, a10, b10, c10, a11, b11, c11\};$$

$$3) B \times A \times B = \{0a0, 0b0, 0c0, 0a1, 0b1, 0c1, 1a0, 1b0, 1c0, 1a1, 1b1, 1c1\};$$

$$4) B^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Завдання 13. Доведемо, наприклад, $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$;

Необхідність. Дано: $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Довести: $A \times C \subseteq B \times D$. Маємо:

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ y \in C \xRightarrow{C \subseteq D} y \in D \end{cases} \Rightarrow [(x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in B \times D] \Rightarrow [A \times C \subseteq B \times D].$$

Достатність. Дано: $A \times C \subseteq B \times D$. Довести: $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$.

$$[A \times C \subseteq B \times D] \Rightarrow [(x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in B \times D]$$

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \left[\begin{cases} x \in A \\ y \in C \end{cases} \right] & \Rightarrow & \left[\begin{cases} x \in B \\ y \in D \end{cases} \right] \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases}. \end{array}$$

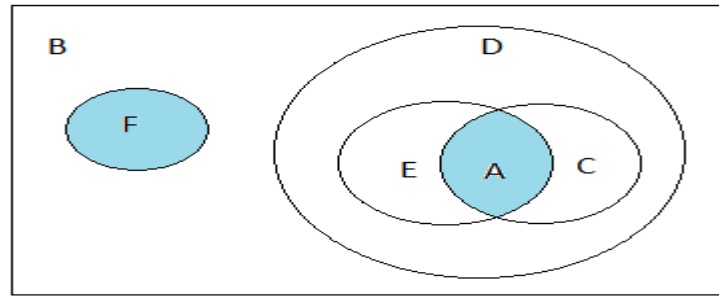
Таким чином, $[A \times C \subseteq B \times D] \Rightarrow [A \subseteq B \wedge C \subseteq D]$ і достатність доведено.

Завдання 14. Доведемо, наприклад, 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow [x \in (A \cup B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)] \Leftrightarrow [(x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)] \end{aligned}$$

Завдання 15.

- 1) A - квадрати;
- 2) B - чотирикутники;
- 3) C - ромби;
- 4) D - паралелограми;
- 5) E - прямокутники;
- 6) F - трапеції.



Завдання 16. З умови випливає, що відносини R і S задані на множині $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Тоді, на підставі визначення композиції відношень, маємо:

$$1) R \circ S = \{(0,3), (0,1), (1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\};$$

$$2) S \circ R = \{(0,2), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}.$$

Завдання 17. Наприклад, для відношення $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2^x - 1\}$:

$$a) D(R) = \mathbb{R};$$

$$b) E(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\};$$

$$c) R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\} = \{(x,y) \mid x = 2^y - 1\} = \{(x,y) \mid y = \log_2(x+1)\};$$

$$d) R \circ R = \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in R\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: z = 2^x - 1 \wedge y = 2^z - 1\} = \{(x,y) \mid y = 2^{2^x - 1} - 1\};$$

$$e) R^{-1} \circ R = \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: (x,z) \in R^{-1} \wedge (z,y) \in R\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: x = 2^z - 1 \wedge y = 2^z - 1\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: z = \log_2(x+1) \wedge y = 2^z - 1\} =$$

$$= \{(x,y) \mid y = 2^{\log_2(x+1)} - 1\} = \{(x,y) \mid x+1 > 0 \wedge y = 2^{\log_2(x+1)} - 1\} =$$

$$= \{(x,y) \mid x+1 > 0 \wedge y = x\}.$$

$$f) R \circ R^{-1} = \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in R^{-1}\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R}: z = 2^x - 1 \wedge z = 2^y - 1\} =$$

$$= \{(x,y) \mid 2^x - 1 = 2^y - 1\} = \{(x,y) \mid x = y\}.$$

Завдання 18. Доведемо, наприклад, $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$.

$$(x,y) \in Q \circ R_1 \Rightarrow \exists z: (x,z) \in Q \wedge (z,y) \in R_1 \xRightarrow{R_1 \subseteq R_2} \exists z: (x,z) \in Q \wedge (z,y) \in R_2 \Rightarrow \\ (x,y) \in Q \circ R_2.$$

Таким чином, $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$ і все доведено.

Завдання 19. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$. На множині A задано відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$. Чи є відношення R рефлексивним, іррефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним?

Перевірку зазначених властивостей відношення можна здійснити на підставі визначень, застосовуючи теорему 6.1 або використовуючи матрицю відношення (матрицю суміжності відповідного орграфа).

Застосуємо третій прийом, відзначаючи в дужках обґрунтування висновків на підставі теореми 6.1. Матриця відношення A_R наступна:

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Відношення є рефлексивним, тому що в матриці відношення всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці ($I_A \subseteq R$);
2. Ставлення не є іррефлексивним, тому що в матриці відношення на головній діагоналі є елементи відмінні від нуля ($R \cap I \neq \emptyset$);
3. Ставлення не є симетричним, тому що матриця відношення не симетрична щодо головної діагоналі ($R \neq R^{-1}$);
4. Відношення є антисиметричним, тому що матриці A_R та її транспонована матриця $(A_R)'$ (матриця зворотнього відношення $A_{R^{-1}}$) мають спільні елементи тільки на головній діагоналі ($R \cap R^{-1} \subseteq I$);
5. Для перевірки транзитивності відношення побудуємо композицію $R \circ R$ та матрицю композиції:

$$R \circ R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\},$$

$$A_{R \circ R} = A_R \circ A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відношення не є транзитивним, тому що $R \circ R \not\subseteq R$ - елементи (1,2) і (2,3) належать R , а (1,3) не належить R (елемент a_{13} у матриці $A_{R \circ R}$ дорівнює одиниці, а в матриці A_R він дорівнює нулю).

Завдання 20. Заповнимо, наприклад, стовбець для відношення

$$R = \{(x,y) | x+y=8\}.$$

1. R не є рефлексивним, тому що, наприклад, $(1,1) \notin R$.
2. R не є іррефлексивним, тому що, наприклад, $(4,4) \in R$.
3. R є симетричним, тому що, $\forall (x,y): (x,y) \in R \Leftrightarrow x+y=8 \Leftrightarrow y+x=8 \Leftrightarrow (y,x) \in R$.
4. R не є антисиметричним, т.я., наприклад, $(3,5) \in R$ і $(5,3) \in R$, але $5 \neq 3$.
5. R не є транзитивним, тому що, наприклад, $(3,5) \in R$ і $(5,3) \in R$, але $(3,3) \notin R$.

	Відношення $R = \{(x,y)\}$ задано на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел						Відношення $R = \{(l_1, l_2)\}$ задано на множині прямих площин	
	$x=y$	$x < y$	$x \leq y$	$x : y$	$ x-y < 2$	$x+y=8$	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
P	+	-	+	+	+	-	-	-
IP	-	+	-	-	-	-	+	+
C	+	-	-	-	+	+	+	+
AC	+	+	+	+	-	-	-	-
T	+	+	+	+	-	-	-	-

(Тут прямі паралельні ($l_1 \parallel l_2$) тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині і не мають спільних точок).

Завдання 21. Доведено, наприклад, що якщо відношення R_1 и R_2 на деякій множині A рефлексивні, то рефлексивне й відношення $R_1 \cap R_2$ на цій множині. Маємо:

R_1 и R_2 рефлексивні на $A \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \in R_1 \wedge \forall a \in A: (a,a) \in R_2 \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2 \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow R_1 \cap R_2$ – рефлексивне на A .

Задание 22. Докажем, наприклад, що якщо відносини R_1 та R_2 , задані на деякій множині A , іррефлексивні, то іррефлексивне і ставлення $R_1 \cup R_2$. Маємо:

R_1 и R_2 іррефлексивні на $A \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \notin R_1 \wedge \forall a \in A: (a,a) \notin R_2 \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \notin R_1 \wedge (a,a) \notin R_2 \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \notin R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow R_1 \cup R_2$ – іррефлексивне на A .

Завдання 23. Доведемо, наприклад, що якщо відносини R_1 и R_2 , задані на деякій множині A , симетричні, то симетрично і ставлення $R_1 \cap R_2$. Маємо:

R_1 и R_2 симетричні на $A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a,b \in A: (a,b) \in R_1 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \\ \forall a,b \in A: (a,b) \in R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_2 \end{cases} \Leftrightarrow [\forall a,b \in A: (a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2] \Leftrightarrow R_1 \cap R_2$ – симетрично на A .

Завдання 24. Доведемо, наприклад, що якщо відносини R_1 и R_2 , задані на деякій множині A , антисиметричного, то і $R_1 \cap R_2$ – антисиметрично. Маємо:

$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,a) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1 \xrightarrow{R_1\text{-антисим.}} a=b \\ (a,b) \in R_2 \wedge (b,a) \in R_2 \xrightarrow{R_2\text{-антисим.}} a=b \end{cases} .$

Таким чином:

$$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,a) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow a = b,$$

тобто відношення $R_1 \cap R_2$ - антисиметрично. Все доведено.

Завдання 25. Довести самотійно.

Завдання 26. Побудуємо, наприклад, бінарне відношення R з такими властивостями: R - рефлексивне, симетричне і не транзитивне.

Завдання можна вирішувати двома різними способами. По-перше, можна спробувати відшукати необхідне відношення на конкретній множині з уже відомих відносин на ньому так, щоб воно відповідало заданим умовам (метод «тику»). Наприклад, розглянемо ставлення $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x - y| < 2\}$. Перевіримо виконання заданих умов.

1. R – рефлексивне, т.к. $\forall x \in \mathbb{N}: |x - x| = 0 < 2$, т.е. $\forall x \in \mathbb{N}: (x, x) \in R$;
2. R – симетричне, т.к. $\forall x, y \in \mathbb{N}: (x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| < 2 \Leftrightarrow |y - x| < 2 \Leftrightarrow (y, x) \in R$;
3. R – не є транзитивним. Для підтвердження цього факту досить привести контрприклад: $(1, 2) \in R$ і $(2, 3) \in R$, но $(1, 3) \notin R$.

По-друге, можна вибрати конкретну множину A , наприклад, $A = \{a, b, c\}$ і побудувати відношення R відповідно до умов завдання (конструктивний підхід).

Оскільки R має бути рефлексивним, то $(a, a), (b, b), (c, c) \in R$. Якщо залишити $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, то отримаємо відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне - що не задовольняє умовам завдання. Необхідно розширити попереднє ставлення, додавши деякі пари так, щоб зберегти симетричність відносини і забезпечити «порушення» транзитивності. Розглянемо, наприклад, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. Отримане відношення рефлексивно, симетрично і не є транзитивним (наприклад, $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, но $(a, c) \notin R$). Завдання вирішено.

Завдання 27, 28, 29 довести самотійно.

Завдання 30. Доведемо, наприклад, що ставлення R , певне на $\mathbb{N}^2$, де

$$R = \{ \langle (a, b), (c, d) \rangle \mid a + d = b + c \},$$

є відношенням еквівалентності. Для цього перевіримо властивості відносини еквівалентності. маємо:

1. R – рефлексивне, т.я. $a + b = b + a$ тягне $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (a, b) \rangle \in R$;
2. R – симетричне, т.к. $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (c, d) \rangle \in R \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow \langle (c, d), (a, b) \rangle \in R$.
3. R – транзитивне, т.к.

$$\begin{aligned} & \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2 : \langle (a, b), (c, d) \rangle \in R \wedge \langle (c, d), (e, f) \rangle \in R \Rightarrow \\ \Rightarrow & a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow \\ & \Rightarrow \langle (a, b), (e, f) \rangle \in R. \end{aligned}$$

Таким чином, R є відношенням еквівалентності.

Завдання 31. Перевіримо здійсненність властивостей відносини еквівалентності для відносини R^{-1} , якщо R – відношення еквівалентності на множині A . Маємо:

1. R – відношення еквівалентності $\Rightarrow R$ – рефлексивне $\Rightarrow \forall a \in A : (a, a) \in R \Rightarrow \forall a \in A : (a, a) \in R^{-1} \Rightarrow R^{-1}$ – рефлексивне;

2. R – відношення еквівалентності $\Rightarrow R$ – симетричне $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R] \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ (b, a) \in R^{-1} & & (a, b) \in R^{-1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow [\forall a, b \in A : (b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (a, b) \in R^{-1}] \Rightarrow R^{-1} \text{ – симетричне.}$$

3. R – відношення еквівалентності $\Rightarrow R$ – транзитивне $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R] \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ (b, a) \in R^{-1} & & (c, b) \in R^{-1} & & (c, a) \in R^{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [\forall a,b,c \in A: (b,a) \in R^{-1} \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (c,a) \in R] \Rightarrow \\
&\Leftrightarrow [\forall a,b,c \in A: (c,b) \in R \wedge (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow (c,a) \in R] \Rightarrow \\
&\Rightarrow R^{-1} - \text{транзитивне}.
\end{aligned}$$

Таким чином, R^{-1} - відношення еквівалентності і все доведено.

Завдання 32. Доведемо, наприклад, що якщо R_1 и R_2 - відносини еквівалентності на деякій множині A , то $R_1 \cap R_2$ - відношення еквівалентності на цій множині, тобто рефлексивне, симетричне і транзитивне. $\forall a,b,c \in A$:

1. $\left. \begin{array}{l} R_1 - \text{рефл.} \Rightarrow (a,a) \in R_1 \\ R_2 - \text{рефл.} \Rightarrow (a,a) \in R_2 \end{array} \right\} \stackrel{\text{def} \cap}{\Rightarrow} (a,a) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow R_1 \cap R_2 - \text{рефлексивне};$
2. $(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in R_1 \\ (a,b) \in R_2 \end{cases} \stackrel{R_1, R_2 - \text{симм.}}{\Rightarrow} \begin{cases} (b,a) \in R_1 \\ (b,a) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow R_1 \cap R_2 - \text{симетричне};$
3. $(a,b), (b,c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \begin{cases} (a,b), (b,c) \in R_1 \\ (a,b), (b,c) \in R_2 \end{cases} \stackrel{R_1, R_2 - \text{транз.}}{\Rightarrow} \begin{cases} (a,c) \in R_1 \\ (a,c) \in R_2 \end{cases} \stackrel{\text{def} \cap}{\Rightarrow}$
 $\Rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow R_1 \cap R_2 - \text{транзитивне}$

Таким чином, $R_1 \cap R_2$ - відношення еквівалентності на A .

Завдання 33. Рішення:

а) Відношення подібності трикутників, як відомо з курсу геометрії середньої школи, має властивості рефлексивності (кожен трикутник подібний до сам собі), симетричності (якщо один трикутник подібний до іншого, то і другий подібний до першого) і транзитивності (якщо один трикутник подібний до другого, а другий подібний до третього, то перший подібний третього). Тому подобу трикутників - відношення еквівалентності на множині трикутників.

Фактор-множина з цього відношення еквівалентності складається з

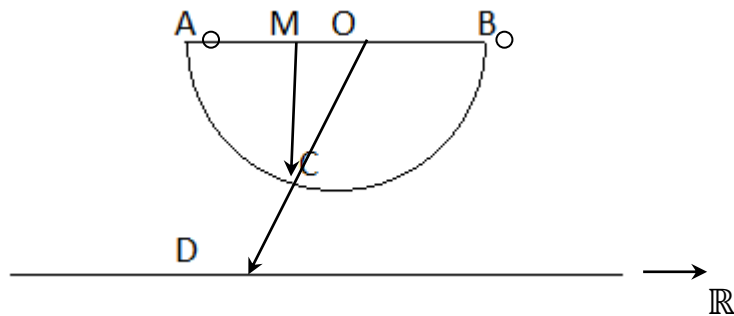
класів подібних між собою трикутників. Ця фактор-множина - нескінчена.

b) Позначимо $L(n; \mathbb{P})$ множина скінченновимірних лінійних просторів над полем $\mathbb{P}$, розмірності яких не перевищують деякого заданого натурального числа n . В курсі вищої алгебри при вивченні лінійних просторів доводиться критерій ізоморфізму лінійних просторів над одним і тим же полем: «Два скінченновимірних лінійних простору, заданих над одним і тим же полем, ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають одну і ту ж розмірність». В силу цієї теореми ясно, що ставлення ізоморфізму на множині лінійних просторів над одним і тим же полем має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності. Таким чином, ставлення ізоморфізму - відношення еквівалентності.

Клас еквівалентності, що складається з лінійних просторів заданої розмірності m , містить арифметичне простір $\mathbb{P}^m$. Позначимо його $K(\mathbb{P}^m)$. Тоді фактор-множина $L(n; \mathbb{P}) / \cong$ множини $L(n; \mathbb{P})$ по цьому відношенню еквівалентності $\cong$ наступне:

$$L(n; \mathbb{P}) / \cong = \{ K(\mathbb{P}^m) \mid m \in \mathbb{N} \wedge m \leq n \}.$$

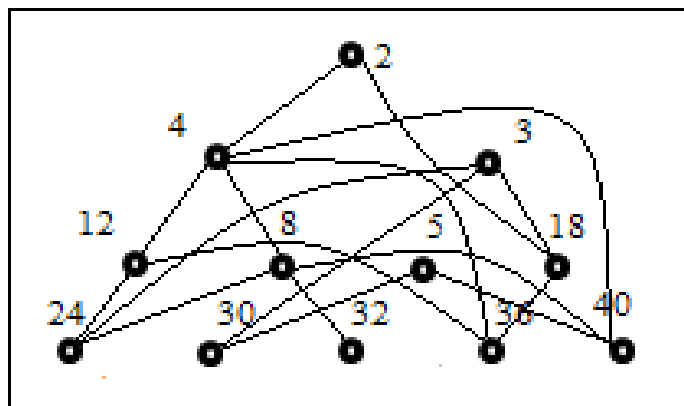
Завдання 34. Розглянемо довільний інтервал $(A; B)$ точок речової прямої $\mathbb{R}$. Розташуємо його над речової віссю і побудуємо нижню півколо з центром в середині відрізка AB діаметром, рівним довжині AB (див. малюнок). Потім, кожній точці M відрізка AB можна порівняти точку C півкола, проводячи перпендикуляр до відрізка AB з точки M до перетину з півколом. Тепер, проводячи радіус OC і продовжуючи його до перетину з речової віссю, отримаємо точку D . Порівняємо точку D речової прямої вихідної точки M інтервалу AB .



Ця відповідність, у чому легко переконатися, є бієктивним відображенням (ін'єкційне і сюрєктивно відображення). Таким чином, множина точок інтервалу еквівалентна множині точок прямої і, отже, множина дійсних чисел еквівалентна деякій своїй власній підмножині, тобто нескінченна.

Завдання 35, 36, 37, 38, 39 довести самостійно.

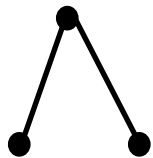
Завдання 40. Наприклад, для $\{2,3,4,5,8,12,18,24,30,32,36,40\}; x \leq y \Leftrightarrow x : y\}$ діаграма Хасе наступна:



Завдання 41. Діаграми Хасе для всіх попарно неізоморфних ЧУМ на множині з трьох елементів:

1. ● ● ● - всі три елементи попарно непорівнянні;

2.  - два елементи порівнянні, третій - не зрівняти ні з жодним з них;

3.  - ЧУМ містить два максимальних елемента і один найменший (він же мінімальний);
4.  - ЧУМ містить один максимальний елемент (він же найбільший) і два мінімальних елемента;
5.  - ЧУМ є лінійно впорядкованим.

Завдання 42, 43 довести самостійно.

Завдання 44. Відношення « $\leq_1$ » рефлексивне (що очевидно випливає з визначення: $(a,a) \leq_1 (a,a)$, т.к. $(a = a)$).

Оскільки

$$(a,b) \leq_1 (c,d) <\stackrel{def}{=}> (a < c) \wedge [(a = c) \Rightarrow (b \leq d)]$$

і

$$(c,d) \leq_1 (a,b) <\stackrel{def}{=}> (c < a) \wedge [(c = a) \Rightarrow (d \leq b)],$$

то $(a = c)$ и $(b = d)$, т.е. $(a,b) = (c,d)$ і, тим самим, відношення « $\leq_1$ » антисиметричне.

Далі: $(a,b) \leq_1 (c,d) \wedge (c,d) \leq_1 (e,f) \Rightarrow$

$$(a < c \wedge [a = c \Rightarrow b \leq d]) \wedge (c < e \wedge [c = e \Rightarrow d \leq f]) \Rightarrow$$

$$(a < e \wedge [a = e \Rightarrow b \leq f]) \Rightarrow (a,b) \leq_1 (e,f)$$

і, отже, відношення « $\leq_1$ » - транзитивне.

В підсумку, « $\leq_1$ » - відношення часткового порядку на A .

Порядок « $\leq_1$ » є лінійним на A , оскільки будь-які елементи (будь-які пари (a,b) и (c,d)) з A можна порівняти між собою щодо « $\leq_1$ ». Найменшим елементом в A щодо порядку « $\leq_1$ » є пара $(1,1)$ (єдиний мінімальний елемент).

Найбільшим елементом в A щодо порядку « $\leq_I$ » є пара $(4,4)$ (єдиний максимальний елемент).

Діаграма Хасе для частково впорядкованої множини A є ланцюг (розташуємо її з урахуванням домінування елементів не знизу вгору, а зліва направо):

$$(1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,4) \rightarrow (3,1) \rightarrow (3,2) \rightarrow \\ \rightarrow (3,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (4,1) \rightarrow (4,2) \rightarrow (4,3) \rightarrow (4,4).$$

Рекомендована література

1. Кривий С. Л. Дискретна математика: підручник для студентів вищих навчальних закладів / С.Л. Кривий; Міністерство освіти і науки України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Хмельницький національний університет. - Київ; – Чернівці: Букрек, 2017. – 567 с.
2. Журавчак Л. М. Дискретна математика для програмістів: навч. посіб. Львів: Львівська політехніка, 2019. – 420 с.
3. Бардачов Ю.М. Дискретна математика: підручник / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова, В.Е. Ходаков -2 е вид., перероб. і доп.- К.: Вища школа, 2008. -383 с.
4. Борисенко О.А. Дискретна математика: підручник О.А. Борисенко. - Суми: ВТД «Університетська книга», 2007. -255 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика: Підручник /Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Львів : «Магнолія 2006», 2007. – 608 с.
6. Комп'ютерна логіка: [навч. посібник] / Жабін В.І., Жуков І.А., Клименко І.А., Ткаченко В.В. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 364 с.
7. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посіб. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ: Київський університет, 2017. – 248 с.
8. Базилевич, Лідія Євгенівна. Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник / Л.Є. Базилевич. – Львів : І.Е. Чижиков, 2013. – 486 с.
9. Кривий С. Л. Збірник задач з дискретної математики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С.Л. Кривий; Міністерство освіти і науки України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Київ; – Чернівці: Букрек, 2018. – 455 с.

Навчально-методичне видання

Баландіна Н.М., Федоровський С.В.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до вивчення розділу

«Елементи теорії множин»

для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»
за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення»

122 «Комп'ютерні науки»

125 «Кібербезпека»