

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ОДЕСЬКА ЮРИДИЧНА АКАДЕМІЯ»
КАФЕДРА КІБЕРБЕЗПЕКИ

Баландіна Н. М.

ЛИНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

(для студентів факультету кібербезпеки та інформаційних технологій)

Одеса 2020

УДК

**Рекомендовано навчально-методичною радою
Національного університету
«Одеська юридична академія»,
протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.**

Рецензенти:

Ковальчук В.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, академік Інженерної Академії України, директор Одеського фахового коледжу комп'ютерних технологій Одеського державного екологічного університету

Лобода Ю.Г. – доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія

Баландіна Н.М.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчально-методичні рекомендації (в допомогу до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра факультету кібербезпеки та інформаційних технологій) [Електронне видання]. / Н.М.Баландіна; кафедра кібербезпеки НУ «Одеська юридична академія». - Одеса : Фенікс, 2020. -32 с.

Навчально-методичні рекомендації з курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» розроблено відповідно до навчального плану, вони складаються з навчальної програми курсу, методичних рекомендацій із проведення практичних занять, питань до самоконтролю, завдань для самостійної роботи, списку рекомендованої літератури. Вивчення дисципліни « Лінійна алгебра та аналітична геометрія» допоможе студентам оволодіти основними методами дослідження і розвинути навички застосування математичного апарату до аналізу та вирішення практичних задач, пов'язаних з професійною діяльністю.

Матеріали призначено для студентів факультету кібербезпеки та інформаційних технологій Національного університету «Одеська юридична академія», які навчаються за спеціальністю «кібербезпека».

© Баландіна Н. М., 2020

ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Навчальна дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» призначена для студентів, що навчаються за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр».

Предметом вивчення дисципліни є класичні розділи вищої математики, які націлені на формування сукупності методів і засобів реалізації операцій пошуку, накопичення та обробки інформації, її математичної формалізації, пошуку та використання алгоритмів розв'язування формалізованих задач.

Вивчення дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» полягає у формуванні у майбутніх спеціалістів базових знань лінійної алгебри та аналітичної геометрії, розвиток абстрактного мислення та просторової уяви, озброєння алгебраїчним апаратом та геометричними знаннями, необхідними для подальшого успішного вивчення інших фізико-математичних дисциплін та їх прикладного застосування до розв'язання оптимізаційних задач в області комп'ютерних наук.

Навчальна дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є невід'ємною частиною базової математичної підготовки студентів і належить до фундаментальних дисциплін, на яких ґрунтуються методи побудови різноманітних математичних моделей процесів, пов'язаних з професійною діяльністю фахівця в галузі інформаційних технологій.

Вивчення даної навчальної дисципліни потребує попередніх знань з предметів «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» в обсязі, передбаченому програмами загальноосвітньої середньої школи.

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є базовою для вивчення таких дисциплін як «Математичний аналіз», «Фізика», «Теорія ймовірності та математична статистика», «Дискретна математика» та підґрунтям для засвоєння і вдосконалення знань при вивченні дисциплін професійної та практичної підготовки, а саме: «Теорія інформації та кодування», «Системи штучного інтелекту», «Об'єктно-орієнтоване програмування», «Алгоритмізація та програмування», «Організація баз даних та знань», «Дослідження операцій» тощо.

Програма навчальної дисципліни розрахована на один семестр і передбачає читання лекцій, проведення практичних занять, консультацій, самостійної роботи та іспиту; містить 5 тем, для кожної з яких наведено перелік питань, що розкривають її зміст.

ЗАПЛАНОВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Метою викладання навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є ознайомлення студентів з основними поняттями вищої алгебри та аналітичної геометрії, розвиток у студентів логічного і алгоритмічного мислення, оволодіння основними методами дослідження та розв'язання математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та вирішення практичних задач.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є навчити студентів свідомо застосовувати основні поняття вищої алгебри та аналітичної геометрії при розв'язуванні конкретних задач як самої вищої алгебри та аналітичної геометрії, так і суміжних дисциплін.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

володіти:

- знаннями про основні означення, теореми, формули;
- основними принципами побудови математичних моделей із використанням методів матричного і векторного аналізу, координатного методу;
- навичками здійснення аналізу побудованої математичної моделі з використанням сучасної комп'ютерної техніки;

знати:

- основні означення, теореми, формули;
- класифікацію систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- основні поняття і визначення теорії матриць;
- види матриць, та їх властивості, дії над матрицями;
- поняття визначника матриці;
- властивості визначників та способи обчислення;
- означення оберненої матриці;
- означення рангу матриці;
- поняття комплексного числа, форми комплексного числа;
- дії над комплексними числами;
- поняття лінійного простору;
- означення лінійної залежності та незалежності систем векторів;
- поняття вектору, проекції вектору;
- означення n-вимірних векторів, їх властивості;
- поняття лінійної комбінації векторів;

- поняття рангу, базису системи векторів;
- означення декартової та полярної системи координат;
- означення скалярного добутку векторів;
- означення векторного добутку векторів;
- означення мішаного добутку векторів;
- означення подвійного добутку векторів;
- типи рівнянь прямої на площині та прямої і площини у просторі;
- канонічні рівняння кривих другого порядку;
- типи поверхонь другого порядку;

вміти:

- виконувати дії над матрицями;
- обчислювати визначники;
- розв'язувати системи лінійних рівнянь;
- знаходити ранг матриці, обернену матрицю;
- розв'язувати матричні рівняння:
- виконувати лінійні операції з векторами;
- досліджувати системи векторів на лінійну залежність та незалежність;
- визначати базис векторного простору та розкласти вектори за базисом;

-знаходити матрицю переходу від одного базису до іншого, а також координати векторів у різних базисах;

- виконувати дії над комплексними числами;
- обчислювати скалярний, векторний та мішаний добуток векторів;
- складати рівняння прямої на площині, ліній другого порядку, прямої та площини у просторі;
- визначати тип ліній та поверхонь другого порядку;

володіти:

- навичками аналізу та проведення математичних розрахунків;
- навичками здійснення аналізу побудованої математичної моделі з використанням сучасної комп'ютерної техніки;

застосовувати:

- основні поняття, теореми та формули до розв'язку задач;
- елементи алгебри до розв'язання задач геометрії;
- матеріал попередніх тем при вивченні наступних;
- теоретичні знання до аналізу, моделювання та розв'язання задач прикладного характеру;
- математичний апарат до аналізу та вирішення практичних задач, пов'язаних з практичною діяльністю.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

№ теми	Види занять Тема	Лекційні заняття (год.)		Практичні заняття (год.)		Самостійна робота (год.)	
		очна	заочна	очна	заочна	очна	заочна
1	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	2	2	6	2	14	20
2	Матриці та визначники	2	2	6	2	16	22
3	Комплексні числа	2	2	4	2	16	20
4	Лінійні простори	2	0	4	0	10	16
5	Аналітична геометрія	2	0	10	0	24	30
	Всього	10	6	30	6	80	108

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь та їх елементарні перетворення. Сумісні, несумісні, визначені та невизначені, однорідні та неоднорідні СЛАР. Метод Гауса розв'язування СЛАР.

Тема 2. Матриці та визначники

Матриці, дії над матрицями. Елементарні матриці. Визначники малих порядків. Підстановки n -го степеня, інверсії, транспозиції. Парність підстановок. Визначники n -го порядку, їх властивості. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за елементами рядка. Теорема про «чужі» доповнення. Теорема Лапласа. Визначник матриці трикутного виду. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Критерій оберненості матриць. Матричні рівняння. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 3. Комплексні числа

Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжені комплексні числа, їх властивості. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над

комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа. Корені з одиниці. Первісні корені. Критерій первісності. Показникова форма комплексного числа.

Тема 4. Лінійні простори

Арифметичний векторний простір. Лінійна комбінація (ЛК) системи векторів. Лінійна оболонка. Лінійно залежні (ЛЗ) та лінійно незалежні (ЛНЗ) системи векторів. Критерії ЛЗ. Ранг, база системи векторів. Еквівалентні системи векторів. Основна властивість бази. Критерій бази. Елементарні перетворення систем векторів. Ранг матриці, його різні означення та їх еквівалентність. Теорема про ранг матриці. Критерій сумісності СЛАР (теорема Кронекера-Капеллі), дослідження СЛАР на сумісність. Системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків. Зв'язок між розв'язками неоднорідних і однорідних систем лінійних рівнянь. Вимір, базис простору. Розкладання вектора за базисом. Перетворення координат вектора при переході до нової бази. Підпростір. Критерій підпростору. Ізоморфізм векторних просторів однакової вимірності. Сума та перетин лінійних підпросторів. Пряма сума. Критерій прямої суми. Формула Грассмана.

Тема 5. Аналітична геометрія

Декартова система координат. Відстань між двома точками. Ділення заданого відрізка в заданому співвідношенні. Вектори на площині та в просторі. Скалярний добуток векторів: означення, властивості. Кут між векторами. Векторний добуток: означення, властивості, геометричний сенс. Мішаний добуток векторів; означення, властивості, геометричний сенс. Подвійний векторний добуток векторів: означення, властивості. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Задачі на пряму на площині. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих на площині. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині. Відстань від точки до прямої. Рівняння прямої та площини в просторі. Взаємне розміщення прямої та площини, двох площин. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини. Кут між двома площинами. Відстань від точки до площини. Загальні рівняння кривих другого порядку. Еліпс, парабола, гіпербола, їх канонічні рівняння. Канонічні рівняння та властивості поверхонь другого порядку. Поверхні обертання.

ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання до підготовки:

1. Алгебраїчні рівняння та їх системи.
2. Загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Сумісні системи лінійних рівнянь.
4. Несумісні системи лінійних рівнянь.
5. Визначені системи лінійних рівнянь.
6. Невизначені системи лінійних рівнянь.
7. Однорідні системи лінійних рівнянь.
8. Неоднорідні системи лінійних рівнянь.
9. Рівносильні системи лінійних рівнянь.
10. Елементарні перетворення систем лінійних рівнянь.
11. Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Література:

Основна: 1-7, 12-18

Допоміжна: 2-5, 7-17

Тема 2. Матриці та визначники

Питання до підготовки:

1. Поняття матриці.
2. Квадратна матриця.
3. Верхня (ніжня) трикутна матриця.
4. Діагональна матриця.
5. Одинична матриця.
6. Скалярні матриці.

7. Степінь матриці.
8. Додавання матриць.
9. Множення матриці на число.
10. Множення матриць.
11. Властивості множення матриць.
12. Транспонування матриці.
13. Елементарні перетворення матриць.
14. Обчислення визначників другого порядку.
15. Обчислення визначників третього порядку.
16. Перестановки і підстановки з n елементів.
17. Парність і непарність підстановок.
18. Інверсії. Транспозиції.
19. Визначники n -го порядку, їх властивості.
20. Мінори та алгебраїчні доповнення.
21. Розклад визначника за елементами рядка.
22. Теорема про «чужі» доповнення.
23. Теорема Лапласа.
24. Визначник матриці трикутного виду.
25. Визначник добутку матриць.
26. Обернена матриця. Способи відшукування оберненої матриці.
27. Критерій оберненості матриць.
28. Розв'язування матричних рівнянь.
29. Запис і розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими в матричній формі.
30. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

Література:

Основна: 1-7, 12-18

Допоміжна: 2-5, 7-17

Тема 3. Комплексні числа

Питання до підготовки:

1. Поняття комплексного числа.
2. Уявна одиниця. Суто уявне число.
3. Координатна форма запису комплексного числа.
4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
5. Спряжені комплексні числа, їх властивості.
6. Добування квадратного кореня з комплексного числа, заданого в алгебраїчній формі.
7. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
8. Модуль та аргумент комплексного числа.
9. Тригонометрична форма комплексного числа.
10. Модуль та аргумент добутку двох комплексних чисел.
11. Модуль та аргумент частки двох комплексних чисел.
12. Формула Муавра.
13. Добування кореня n -го степеня з комплексного числа.
14. Розташування на комплексній площині точок, що відповідають значенням кореня n -го степеня з комплексного числа.
15. Використання комплексних чисел при розв'язанні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом
16. Корені з одиниці.
17. Первісні корені з одиниці.
18. Критерій первісності.
19. Показникова форма комплексного числа.

Література:

Основна: 1,4,7,12,15,18

Допоміжна: 2-7,17

Тема 4. Лінійні простори

Питання до підготовки:

1. Арифметичний векторний простір.
2. Лінійна комбінація системи векторів.
3. Лінійна оболонка.
4. Еквівалентні системи векторів.
5. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.
6. Критерії лінійної залежності векторів.
7. Ранг системи векторів, його різні означення та їх еквівалентність.
8. База системи векторів.
9. Основна властивість бази.
10. Критерій бази.
11. Елементарні перетворення систем векторів.
12. Перетворення координат вектору при переході до нової бази.
13. Обчислення рангу матриці.
14. Теорема про ранг матриці.
15. Розв'язування та дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність.
16. Вимір, базис простору.
17. Підпростір.
18. Критерій підпростору.
19. Ізоморфізм векторних просторів однакової вимірності.
20. Сума та перетин лінійних підпросторів.
21. Пряма сума.
22. Критерій прямої суми.
23. Формула Грассмана.

Література:

Основна: 1-7, 12-17

Допоміжна: 2-8, 12-17

Тема 5. Аналітична геометрія

Питання до підготовки:

1. Декартова система координат.
2. Відстань між двома точками.
3. Ділення заданого відрізка в заданому співвідношенні.
4. Вектори на площині та в просторі.
5. Скалярний добуток векторів, його властивості.
6. Кут між векторами.
7. Векторний добуток: властивості, геометричний сенс.
8. Мішаний добуток векторів: означення, властивості, геометричний сенс.
9. Подвійний векторний добуток векторів: означення, властивості.
10. Пряма лінія на площині.
11. Кутовий коефіцієнт, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
12. Загальне рівняння прямої.
13. Рівняння прямої у векторній формі.
14. Рівняння прямої, яка проходить через дві даних точки.
15. Рівняння прямої «у відрізках».
16. Нормальне рівняння прямої.
17. Напрямний та нормальний вектори до прямої.
18. Канонічні рівняння прямої.
19. Параметричні рівняння прямої.
20. Задачі на пряму на площині.
21. Кут між двома прямими.
22. Взаємне розташування двох прямих на площині.
23. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.
24. Відстань від точки до прямої.

25. Загальне рівняння площини.
26. Рівняння площини, що проходить через три точки.
27. Рівняння площини «у відрізках».
28. Неповні рівняння площини.
29. Нормальне рівняння площини.
30. Взаємне розташування прямої і площини.
31. Кут між прямою та площиною, між двома площинами.
32. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
33. Відстань від точки до площини.
34. Загальні рівняння кривих другого порядку.
35. Еліпс, його властивості, канонічне рівняння.
36. Ексцентриситет еліпса.
37. Парабола, її властивості, канонічне рівняння.
38. Фокус параболи.
39. Ексцентриситет параболи.
40. Гіпербола, її властивості, канонічне рівняння.
41. Асимптоти гіперболи.
42. Ексцентриситет гіперболи.
43. Поняття поверхні другого порядку.
44. Еліпсоїд, його властивості, канонічне рівняння.
45. Гіперболоїди, їх властивості, канонічне рівняння.
46. Параболоїди, їх властивості, канонічне рівняння.
47. Циліндричні та конічні поверхні.
48. Поверхні обертання.

Література:

Основна: 5, 8-11, 16-17

Допоміжна: 1,5,8,12-16

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Контрольні запитання і завдання:

1. Який загальний вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
2. Що називається матрицею системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
3. Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
4. Дайте означення розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
5. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається сумісною?
6. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається несумісною?
7. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається визначеною?
8. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається невизначеною?
9. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною?
10. Чи може бути несумісною однорідна система рівнянь?
11. Який розв'язок завжди має однорідна система рівнянь?
12. Які дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними?
13. Чи можуть рівносильні системи рівнянь мати різну кількість невідомих?
14. Які існують елементарні перетворення систем лінійних рівнянь?
15. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається загальним?

16. Як знайти загальний розв'язок системи рівнянь?
17. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається частинним?
18. Як з загального розв'язка системи лінійних рівнянь отримати частинний?
19. Опишіть метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Які переваги та недоліки цього методу?
20. До яких систем можна застосовувати метод Гауса?
21. Який елемент зручно мати у якості «ведучого»?
22. Чи можна викреслити нульові рядки в трапецієвидній матриці, яка отримана з розширеної матриці системи лінійних рівнянь? Відповідь поясніть.
23. Якій рядок обов'язково має відповідна трапецієвидна матриця несумісної системи лінійних рівнянь?
24. Скільки розв'язків має сумісна система лінійних рівнянь, матрицю якої приведено до трикутного виду?

Тема 2. Матриці та визначники

Контрольні запитання і завдання:

1. Дайте означення матриці.
2. Які матриці називають рівними?
3. Як визначить розмірність матриці?
4. Чим відрізняється квадратна матриця від прямокутної?
5. Яка матриця називається скалярною?
6. Які види матриць вам відомі?
7. Дайте означення головної та побочної діагоналей квадратної матриці.
8. Як скласти дві матриці? Яким умовам повинні відповідати при цьому матриці?

9. Сформулюйте властивості додавання двох матриць.
10. Яка матриця є протилежною до матриці A ? Наведіть приклади.
11. Як помножити матрицю на число? Сформулюйте властивості цієї операції.
12. Як перемножити дві матриці, яку розмірність має матриця, яка є результатом цієї дії?
13. Які властивості має дія множення матриць?
14. Чи комутативна операція множення матриць?
15. Яку розмірність має матриця A , якщо відомо, що $(1\ 2\ 3)A=(4\ 5)$?
16. Які матриці називаються переставними?
17. Наведіть означення натурального степеня квадратної матриці.
18. Яка матриця виконує роль одиниці в дії множення матриць?
19. Що розуміють під операцією транспонування матриці? Наведіть приклади.
20. Які рядки (стовпці) матриці називаються пропорційними?
21. Дайте означення елементарних перетворень матриці. Наведіть приклади елементарних перетворень рядків (стовпців) матриці.
22. Як обчислити визначник другого порядку? Наведіть приклади.
23. Як обчислити визначник третього порядку? Наведіть приклади.
24. Дайте означення підстановки n -го степеня, наведіть приклади.
25. Що називається інверсією? Скільки чисел утворює інверсію?
26. Яка підстановка називається транспозицією? Транспозицією сусідніх?
27. Чи можна сказати, що визначник n -го порядку є число?
28. Дайте означення визначника n -го порядку.
29. Якими властивостями володіють визначники n -го порядку?
30. В якому сенсі стовпці і рядки визначника рівноправні?
31. Як зміниться визначник n -го порядку, якщо всі його стовпці записати в зворотньому порядку?
32. Як визначити знак члена визначника?

33. Дайте означення мінору елемента визначника. Наведіть приклади.
34. Дайте означення алгебраїчного доповнення. Наведіть приклади.
35. Як пов'язані між собою мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника?
36. Як розкласти визначник за елементами рядка (стовпця)?
37. Сформулюйте теорему про «чужі» доповнення.
38. Сформулюйте теорему Лапласа.
39. Чи пов'язані між собою теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця та теорема Лапласа?
40. Чому дорівнює визначник матриці трикутного виду?
41. Чому дорівнює визначник добутку матриць?
42. Чому для обчислення визначника n -го порядку використовують не визначення, а інші методи?
43. Яка матриця називається оберненою по відношенню до матриці A ?
44. Яка матриця має обернену?
45. Які способи знаходження оберненої матриці вам відомі?
46. Які існують види матричних рівнянь?
47. Сформулюйте теорему Крамера.
48. До яких систем можна застосувати метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь?

Тема 3. Комплексні числа

Контрольні питання і завдання:

1. Що таке уявна одиниця?
2. Дайте означення комплексного числа.
3. Яка форма запису комплексного числа називається алгебраїчною формою?
4. Які дії над комплексними числами в алгебраїчній формі вам відомі?

5. Сформулюйте правило ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
6. Дайте означення спряженого комплексного числа. Наведіть приклади.
7. Які властивості спряжених комплексних чисел вам відомі?
8. Що уявляє собою комплексне число з геометричної точки зору?
9. Які геометричні інтерпретації комплексних чисел вам відомі?
10. Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
11. Яка форма запису комплексного числа називається тригонометричною формою?
12. Які дії над комплексними числами в тригонометричній формі вам відомі?
13. Чи впливає з рівності двох комплексних чисел рівність їх модулів?
14. Чи впливає з рівності двох комплексних чисел рівність їх аргументів?
15. Чому дорівнює модуль добутку двох комплексних чисел?
16. Чому дорівнює аргумент добутку двох комплексних чисел?
17. Чому дорівнює модуль частки двох комплексних чисел?
18. Чому дорівнює аргумент частки двох комплексних чисел?
19. Запишіть формулу Муавра.
20. Як добувається корінь натурального степеня з комплексного числа?
21. Як розташовуються на комплексній площині точки, що відповідають значенням кореня n -го степеня з комплексного числа?
22. Дайте означення кореня з одиниці.
23. Що таке первісні корені з одиниці?
24. Сформулюйте критерій первісності.
25. Чим зручніше користуватися: означенням чи критерієм?
26. Як використовують комплексні числа при розв'язанні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом?

Тема 4. Лінійні простори

Контрольні питання і завдання:

1. Дайте означення лінійного простору.
2. Наведіть приклади лінійних просторів.
3. Дайте означення арифметичного векторного простору.
4. Які вектори називаються пропорційними, рівними?
5. Які операції над векторами називаються лінійними і якими властивостями вони володіють?
6. Дайте означення лінійної комбінації системи векторів.
7. Що розуміють під системою n -вимірних векторів?
8. Наведіть означення лінійної оболонки векторів.
9. Яка система векторів називається лінійно залежною?
10. Яка система векторів називається лінійно незалежною?
11. Сформулюйте критерії лінійної залежності векторів.
12. Дайте означення рангу системи векторів.
13. Що називається базою системи векторів?
14. Що розуміють під називають еквівалентними системами векторів?
15. Сформулюйте основну властивість бази.
16. Сформулюйте критерій бази.
17. Які елементарні перетворення систем векторів вам відомі?
18. Дайте означення рангу матриці. Для чого вводять поняття рангу?
19. Сформулюйте теорему про ранг матриці.
20. Які способи знаходження рангу матриці вам відомі?
21. Опишіть знаходження рангу матриці методом окантування мінорів.
22. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
23. Дайте означення базису лінійного простору.
24. Наведіть означення та приклади виміру лінійного простору.
25. Як відшукати базис серед заданої системи векторів?
26. Як здійснити перехід від одного базису до іншого?

27. Наведіть приклади нескінченновимірних лінійних просторів.
28. Дайте означення підпростору. Наведіть приклади.
29. Сформулюйте критерій підпростору.
30. Чим зручніше користуватися на практиці: означенням чи критерієм підпростору? Відповідь поясніть.
31. Що називають сумою, перетином лінійних підпросторів?
32. Дайте означення прямої суми підпросторів.
33. Сформулюйте критерій прямої суми.
34. Запишіть формулу Грассмана.
35. Чи утворює безліч всіх рішень неоднорідної системи лінійних рівнянь лінійний простір?

Тема 5. Аналітична геометрія

Контрольні питання і завдання:

1. Опишіть декартову система координат.
2. Як обчислити відстань між двома точками?
3. Як поділити відрізок в заданому відношенні?
4. Які найпростіші числові характеристики вектору вам відомі?
5. Які операції над векторами ви знаєте?
6. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів.
7. Які властивості скалярного добутку вам відомі?
8. Наведіть приклади використання скалярного добутку.
9. Як обчислити кут між векторами?
10. Сформулюйте означення векторного добутку векторів.
11. Які властивості векторного добутку векторів вам відомі?
12. В чому полягає геометричний сенс векторного добутку векторів?
13. Наведіть приклади використання векторного добутку векторів.
14. Сформулюйте означення мішаного добутку векторів.
15. Які властивості мішаного добутку векторів вам відомі?

16. В чому полягає геометричний сенс мішаного добутку векторів?
17. Наведіть приклади використання мішаного добутку векторів.
18. Сформулюйте означення подвійного добутку векторів.
19. Які властивості подвійного добутку векторів вам відомі?
20. Запишіть загальне рівняння прямої на площині.
21. Запишіть нормальне рівняння прямої.
22. Наведіть приклади використання нормального рівняння прямої.
23. Які інші форми рівняння прямої вам відомі?
24. Сформулюйте означення напрямного та нормального вектору.
25. Як знайти кут між двома прямими?
26. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.
27. Як знайти відстань від точки до прямої?
28. Які рівняння площини в просторі вам відомі?
29. Як знайти кут між прямою та площиною, між двома площинами?
30. Чому дорівнює відстань від точки до площини?
31. Що називають кривою другого порядку і якій вигляд має її загальні рівняння?
32. Яке рівняння називають загальним рівнянням кола?
33. Дайте означення еліпсу. Запишіть його канонічне рівняння.
34. Дайте означення ексцентриситету еліпса.
35. Дайте означення гіперболи. Запишіть її канонічне рівняння.
36. Дайте означення асимптот і ексцентриситету гіперболи.
37. Дайте означення параболи. Запишіть її канонічне рівняння.
38. Дайте означення фокусу і директриси параболи.
39. Які існують різновиди канонічних рівнянь параболи залежно від розміщення на площині фокуса і директриси?
40. Дайте означення ексцентриситету параболи.
41. Канонічні рівняння яких поверхонь другого порядку вам відомі?

ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами
2. Застосування комплексних чисел при розв'язанні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом
3. Метод Жордана-Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь
4. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Штифеля
5. Розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами
6. Розв'язання двочленних рівнянь, рівнянь третього та четвертого степенів.
7. Нерозв'язність в радикалах рівнянь степеня вище четвертого
8. Розв'язання геометричних задач алгебраїчними методами
9. Значення лінійної алгебри в економічних процесах
10. Застосування базових знань з векторної алгебри при моделюванні процесів управління інформаційними системами
11. Застосування базових знань з матричного числення і лінійної алгебри для їх застосувань при розробці математичних моделей
12. Застосування засобів векторної алгебри при розв'язанні задач кодування інформації
13. Основні принципи побудови математичних моделей з використанням методів матричного і векторного аналізу
14. Проведення необхідних розрахунків у рамках побудованих моделей з метою встановлення кількісних і якісних характеристик об'єктів для прогнозування та прийняття оптимальних рішень
15. Використання матриць при складанні математичної моделі прикладних задач
16. Різновиди рівнянь прямої на площині та їх використання як математичної моделі прикладних задач

ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь Загальний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь Сумісні, несумісні, визначені та невизначені, однорідні та неоднорідні СЛАР.
2. Метод Гауса розв'язування СЛАР.
3. Матриці, дії над матрицями.
4. Визначники малих порядків.
5. Підстановки n -го степеня. Інверсії, транспозиції.
6. Визначники n -го порядку, їх властивості.
7. Мінори та їх алгебраїчні доповнення.
8. Розклад визначника за елементами рядка. Теорема про «чужі» доповнення.
9. Теорема Лапласа.
10. Визначник матриці трикутного виду.
11. Визначник добутку матриць
12. Обернена матриця. Критерій оберненості матриць.
13. Матричні рівняння.
14. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
15. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
16. Спряжені комплексні числа, їх властивості.
17. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
18. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
19. Формула Муавра.
20. Добування кореня з комплексного числа.
21. Корені з одиниці.
22. Первісні корені. Критерій первісності.

23. Показникова форма комплексного числа.
24. Лінійні простори Арифметичний векторний простір.
25. Лінійна комбінація (ЛК) системи векторів. Лінійна оболонка.
26. Лінійно залежні (ЛЗ) та лінійно незалежні (ЛНЗ) системи векторів.
Критерії ЛЗ.
27. Ранг, база системи векторів.
28. Основна властивість бази. Критерій бази.
29. Елементарні перетворення систем векторів.
30. Ранг матриці. Теорема про ранг матриці.
31. Вимір, базис простору.
32. Підпростор. Критерій підпростору.
33. Сума та перетин лінійних підпросторів.
34. Пряма сума. Критерій прямої суми.
35. Формула Грассмана .
36. Декартова система координат.
37. Відстань між двома точками.
38. Ділення відрізка в заданому співвідношенні.
39. Дії над векторами.
40. Скалярний добуток векторів, його властивості.
41. Векторний добуток векторів, його властивості.
42. Мішаний добуток векторів, його властивості.
43. Подвійний векторний добуток векторів, його властивості.
44. Різновиди рівнянь прямої на площині.
45. Взаємне розташування двох і трьох прямих на площині.
46. Загальне та канонічні рівняння ліній другого порядку на площині.
47. Різновиди рівнянь площини і прямої у просторі.
48. Загальне і канонічні рівняння поверхонь другого порядку у просторі.
49. Поверхні обертання.

ФОРМИ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ СТУДЕНТІВ

Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних занять і має на меті перевірку рівня засвоєння студентом вивченої теми.

При поточному контролі оцінці підлягають: рівень теоретичних знань та вміння працювати з науковою літературою, знання матеріалу, продемонстрованого у виконаних завданнях самостійної роботи; активність та систематичність роботи на заняттях; результати виконання домашніх завдань, тестів, експрес-опитувань, доповідей, рефератів тощо.

Форми проведення поточного контролю: усне опитування студентів, розв'язування практичних завдань, тестові завдання, доповіді, реферати.

Проміжний контроль проводиться після вивчення відповідних тем або блоку тем з метою з'ясування ступеню засвоєності студентами відповідного об'єму опрацьованого та вивченого матеріалу та подальшої оцінки рівня отриманих знань. Форми проведення проміжного контролю: контрольна робота, тестове опитування, співбесіда (усне спілкування).

Підсумковий контроль здійснюється у формі іспиту.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

При використанні форми контролю у вигляді заліку враховується поточна, зокрема самостійна робота, наукова діяльність студента. Крім того, студент має надати відповідь на залікове запитання. Оцінка рівня знань виконується за принципом "відповідь вірна" або "відповідь невірна". При вірній відповіді виставляється оцінка "зараховано", при невірній, неповній відповіді виставляється оцінка "не зараховано".

Оцінка з національної шкали переводиться у 100-бальну та шкалу ECTS у відповідності до результатів навчальної успішності студента протягом семестру.

СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ (СКЛАДОВІ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ)

Пункт оцінки	% підсумкової оцінки або максимальна оцінка в балах	Групове чи індивідуальне оцінювання
Поточний контроль, разом, у т.ч.:	50	
доповіді та повідомлення на практичних заняттях	25	Групове та індивідуальне
виконання письмових індивідуальних завдань, рефератів, контрольних робіт	15	Індивідуальне
опитування на практичних заняттях	10	Групове та індивідуальне
Підсумковий контроль, разом, у т.ч.:	50	
письмова компонента	25	Індивідуальне
усна компонента	25	Індивідуальне

ШКАЛА ЗА ECTS

Сума балів	Оцінка за 7-бальною шкалою	Оцінка за 4-бальною шкалою	
		екзамен	залік
A	90-100	Відмінно	зараховано
B	82-89	Добре	
C	75-81		
D	67-74	Задовільно	
E	60-66	(достатньо)	
Fx	35-59	Незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано
F	1-34		

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

- 1). Курош А.Г. Курс высшей алгебры.-М.: Наука, 1971.-432 с.
- 2). Воеводин В.В. Линейная алгебра.-М.: Наука, 1980.-400 с.
- 3). Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М., Наука, 1977.-497 с.
- 4). Завало С.Т., Левіщенко С.С. Алгебра і теорія чисел,практикум.- К.: Вища школа,1986.-264 с.
- 5). Ким Г. Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том 1.- М.: Планета знаний, 2007.-469 с.
- 6). Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.- М.: Наука, 1984.- 336 с.
- 7). Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.- М.: Наука, 1977.-288 с.
- 8). Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975.- 272 с.
- 9). Ильин В.А., Э.Г.Поздняк. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1999.- 296 с.
- 10). Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.-224 с.
- 11). Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.- М.: Наука, 2007.-336 с.
- 12). Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел, ч.1.- К.: Вища школа, 1983.-232 с.
- 13). Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10 – е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. -304 с.
- 14). Діскант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, - К.: Вища школа, 2001.- 303 с.
- 15). Валєєв К.Г., Далладова І.А. Вища математика. Навч.посібник: у 2-х ч.-К.: КНЕУ, 2004.-Ч.1.-546 с.
- 16). Назієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронец О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.-К.: Либідь, 1997.- с.
- 17). Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії// За ред. Рудаковського Ю.К.-Львів: Бескид-Біт.2002.
- 18). Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1-М.: Высшая школа, 1986.

ДОПОМІЖНА

- 1). Атанасян Л.С. Геометрія / Атанасян Л.С.-К.: Вища школа, 1976.- 455 с.
- 2). Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.-М.: Высшая школа, 1979.- 559 с.
- 3). Лельчук М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Практические занятия по алгебре и теории чисел.-Минск.:Вышэйшая школа, 1986.- 301 с.
- 4). Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.-М.: Наука, 1987.- 352 с.
- 5). Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука, 1985.-392 с.
- 6). Сенчук Ю.Ф. Лінійна алгебра .Теорія лінійних просторів.-Х.: НТХ «ХП», 2001.-199 с.
- 7). Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник.- М.: Наука, 1982. -192 с.
- 8). Ольшанський В.П. Короткий курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії.-К.: 1994.-216 с.
- 9). Philip N. Klein. Coding the Matrix: Linear Algebra through Applications to Computer Science, – Newtonian Press, 2013,–512 p.
- 10). Ernest Davis. Linear Algebra and Probability for Computer Science Applications , – 2012 by A K Peters/CRC Press,- 431 p.
- 11). Darald J.Hartfiel. Matrix Theory and Applications with MATLAB, – 2000 by CRC Press-384 p.
- 12). Назієв Е.Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. -К.: Либідь, 1997.-151 с.
- 13). Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.-Х.: 1997.-183 с.
- 14). Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Чернівецький держ. ун-т ім. Юрія Федьковича. -Чернівці: Рута,2000.-130 с.
- 15). Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Алгебра і геометрія: Лінійна алгебра .Аналітична геометрія.-Х.: 2000.-386 с.
- 16). Збірник задач з аналітичної геометрії / За редакцією В.В. Кириченка (КНУ ім. Т. Шевченка).-Кам'янець-Подільський: «Аксиома», 2005.- 199 с.
- 17). Дубовик В.П. Вища математика. навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик.-К.: АСК.2001.-648 с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

- 1). <http://www.it.inf.od.ua> – сайт кафедри кібербезпеки, на якому розміщено робочі матеріали з курсу
- 2). <http://dspace.onua.edu.ua> – eNUOLAIR – депозитарій (архів) НУ ОЮА

ЗМІСТ

Опис навчальної дисципліни	3
Заплановані результати навчання.....	4
Структура навчальної дисципліни	6
Програма навчальної дисципліни.....	6
Теми практичних занять	8
Завдання для самостійної роботи	14
Теми рефератів	22
Питання до іспиту	23
Форми підсумкового контролю успішності студентів.....	25
Критерії оцінювання	25
Схема нарахування балів (складові оцінювання результатів навчання)	26
Шкала за ECTS	27
Рекомендована література.....	28

Навчальне видання

Наталія Миколаївна Баландіна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичні рекомендації

(для студентів факультету кібербезпеки та інформаційних технологій)